

ANÁLISIS Y REDISEÑO DE UNA UNIDAD DIDÁCTICA DE ISOMETRÍAS PLANAS, MEDIANTE LOS CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

JOAN HERNÁNDEZ GARCÍA

Universitat Autònoma de Barcelona. E-mail: joan.hernandezg@e-campus.uab.cat

ADRIANA BREDA

Departamento de Educación Lingüística y Literaria, y Didáctica de las Ciencias Experimentales y de la Matemática. Universitat de Barcelona. E-mail: adriana.breda@ub.edu

Resumen: El objetivo de este artículo es describir la reflexión que hace un futuro profesor de la creación, implementación y rediseño de una unidad didáctica (UD) de isometrías en el plano, puesta en práctica con un grupo de alumnos de secundaria de un instituto público de Barcelona. La valoración cualitativa de la UD y su rediseño fue realizada en base a los Criterios de Idoneidad Didáctica, una herramienta que permite evaluar de forma operativa un proceso didáctico según su adecuación a una serie de parámetros bien delimitados por el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico. Particularmente, se concluye que, pese a que las adecuaciones cognitiva y ecológica determinaran la programación didáctica, se debería haber atribuido un mayor peso al criterio epistémico y al fomento del proceso de conexiones intramatemáticas. Esto hubiera acercado al alumnado a la complejidad real del objeto matemático de estudio y hubiera enriquecido el trabajo interdisciplinar, ensalzando uno de los objetivos del futuro profesor: el análisis de un conjunto de obras de arte desde una óptica matemática.

Palabras-clave: Análisis didáctico, Criterios de Idoneidad Didáctica, Isometrías en el plano.

ANALYSIS AND REDESIGN OF A DIDACTIC UNIT ABOUT PLANE ISOMETRIES, USING THE DIDACTIC SUITABILITY CRITERIA

Abstract: The main goal of this article is to describe the reflective process of a future teacher about the creation, implementation, and redesign of a didactic unit about isometries in the plane, carried out with a group of students at a public high school of Barcelona. Its qualitative evaluation as well as its remodel are based on the Didactic Suitability Criteria, a tool allowing the assessment of a didactic process in terms of its adequation to a series of parameters, well-defined in terms of the theoretical framework of the Onto-semiotic Approach. In particular, it is concluded that, despite the strong presence of both cognitive and ecologic adequation, the epistemic criterion and the process of intra-mathematical connections, should have been considered in a more prominent way. This would have enriched interdisciplinary work and approached students to the real complexity of the object of study, motivating one of the teacher's goals: the analysis of a series of works of art from a mathematical point of view.

Keywords: Didactic analysis, Didactic Suitability Criteria, Isometries in the plane.

INTRODUCCIÓN

Uno de los fines de la Didáctica de las Matemáticas, como campo de estudio, es el análisis de los factores condicionantes en los procesos de Enseñanza y Aprendizaje (EA) de las matemáticas. Con tal fin, aporta conocimientos descriptivos específicos, en función de los contenidos, que ayudan a comprender tales procesos. No obstante, tal y como expone Steiner (1985, p. 16), existe otro contingente que esta disciplina pretende abordar de manera paralela: el desarrollo y la investigación de programas y recursos que mejoren los procesos de EA (GODINO, BATANERO y FONT, 2007; GODINO, 2013).

Este último punto otorga a la Didáctica de las Matemáticas, más allá de su aspecto analítico, un carácter creativo, y lleva a autores a catalogarla como una “ciencia de diseño” (LESH y SRIRAMAN, 2010; GODINO, 2013). Esta idea, así como el cuestionamiento de cuál debería ser el papel del profesorado y su genuina naturaleza de educador, psicólogo, científico e ingeniero (LESH y SRIRAMAN, 2010), han conllevado la necesidad de la elaboración de modelos y teorías de diseño instruccional (REIGELUTH, 2000), las cuales no están exentas de una gran falta de consenso a la hora de tratar de determinar qué se considera una “buena enseñanza” (FRANKE, KAZEMI y BATTEY, 2007; HIEBERT y GROUWS, 2007).

Esta incipiente complejidad y falta de robustez nos hace ser cautos en una propuesta de normas y pautas en los sistemas didácticos. No obstante, esto no entra en conflicto con el hecho de que la posesión de ciertos conocimientos predisponga al profesorado a tomar ciertas decisiones (locales) frente a otras. Dicho de otra forma, creemos razonable asumir en la posterior discusión la siguiente hipótesis metodológica:

Fijadas unas circunstancias (sujetos, recursos, restricciones...), un “experto” en una didáctica específica puede razonar (apoyándose en resultados teóricos contrastados empíricamente) que ciertas tareas y modos de interacción en el aula son preferibles a otras diferentes. (GODINO, 2013, p. 113)

Si se parte de esta premisa, se hace necesaria la existencia de una figura “experta” en didáctica o, al menos, con nociones suficientes para solventar de manera eficiente las coyunturas emergentes de la práctica. De aquí surge el concepto de *competencia didáctica* del profesorado (SCHOENFELD y KILPATRICK, 2008; GODINO et al., 2017), estrechamente ligado al constructo teórico del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (GODINO, BATANERO y FONT, 2007; 2019). En este marco teórico existe una herramienta conocida como Idoneidad Didáctica que establece criterios para analizar y reflexionar de forma sistemática sobre los procesos de EA que intervienen en la práctica docente (GODINO, BATANERO y FONT, 2007; GODINO 2013; GODINO et al., 2017; BREDÁ y LIMA 2016, BREDÁ, FONT y PINO-FAN, 2018). Tales criterios pueden servir para evaluar dichos procesos, convirtiéndose en una herramienta de desarrollo de la competencia didáctica y profesional del profesorado y mejorar, así, en última instancia, la enseñanza como tal.

Siguiendo esta línea, el objetivo de este trabajo es describir la reflexión que hace un futuro profesor (primer autor de este artículo) de la creación, implementación y rediseño de una unidad didáctica (UD) de isometrías en el plano, llevada a cabo con un grupo de alumnos de secundaria en un instituto público de Barcelona; mediante el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica (CID). Con ese fin, presentaremos, de forma detallada, el marco teórico en el que se

englobará el análisis y daremos el contexto particular en el cual se aplicó este estudio, así como los resultados y conclusiones obtenidas.

FUNDAMENTO TEÓRICO: CRITERIOS DE IDONEIDAD DIDÁCTICA

El EOS es un enfoque teórico que integra distintas aproximaciones y modelos que se emplean en la investigación en Educación Matemática. Esta teoría ofrece 5 tipos de análisis, que permiten estudiar los procesos de EA de las matemáticas (GODINO, BATANERO y FONT, 2019). Una de las herramientas que propone el EOS para el análisis de un proceso de instrucción son los Criterios de Idoneidad Didáctica (GODINO, BATANERO y FONT, 2019; BREDÁ, FONT y PINO-FAN, 2018).

Dado un proceso de instrucción matemática, definimos su idoneidad didáctica como un atributo de adecuación con respecto a una serie de parámetros que permiten calificarlo como óptimo o idóneo. Los factores que hacen que tal proceso presente esta propiedad empezaron a ser formulados por Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005). La descripción (más actualizada) escogida en este artículo es

[...] la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponible (*entorno*). (GODINO, BATANERO y FONT, 2019, p. 10)

En este punto, se define un conjunto de Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (FONT, PLANAS y GODINO, 2010) que hacen operativo el proceso de evaluación del grado de idoneidad de un proceso de instrucción particular. Se proponen 6 criterios que, a su vez, estarán descritos por diversos componentes (BREDÁ y LIMA, 2016):

Criterio de idoneidad epistémica. Diremos que una programación formativa, o un proceso de estudio matemático, presenta una mayor idoneidad epistémica en función del grado de representatividad de los significados institucionales que se pretenden implementar con respecto a un significado de referencia. Este último, como se puede suponer, dependerá del contexto en el cual se dé el proceso didáctico (GODINO, 2013). Esta idoneidad está formada por cuatro componentes de estudio: *errores* (prácticas incorrectas ejercidas durante el proceso didáctico), *ambigüedades* (claridad en la enunciación de definiciones y propiedades, adecuación de las explicaciones al nivel educativo y uso controlado de metáforas), *riqueza de procesos* (se dan procesos relevantes de actividad matemática: modelización, conexión, argumentación...) y *representatividad* (los significados parciales, modos de expresión y nociones trabajadas muestran, de forma representativa, la complejidad real del objeto de estudio).

Criterio de idoneidad cognitiva. Un proceso de estudio matemático está dotado de una mayor idoneidad cognitiva en función del grado en el cual los significados que se pretenden enseñar se encuentran a una distancia óptima respecto aquello que el alumnado conoce. Es decir, si se encuentran en la Zona de Desarrollo Potencial de los estudiantes (BREDÁ y LIMA, 2016; COLL y SOLÉ, 1989; ONRUBIA, 1993). Para esta idoneidad se consideran los siguientes componentes: *conocimientos previos* (el alumnado tiene las nociones previas necesarias para el estudio del tema), *adaptación curricular* (se incluyen actividades de ampliación y refuerzo para atender a las diferencias individuales de aprendizaje), *aprendizaje* (la evaluación propuesta es capaz de detectar conocimientos y competencias adquiridas) y *alta demanda cognitiva* (se promueven procesos relevantes a nivel cognitivo: cambios de representación, abstracción, generalización, conexiones intra y extramatemáticas, etc.).

Criterio de idoneidad interaccional. Un

proceso de EA se caracterizará por tener un mayor grado de idoneidad interaccional si la programación y la actuación didáctica han permitido identificar y resolver dificultades durante el proceso de instrucción, así como conflictos con el discurso y lenguaje matemático (conflictos semióticos) (GODINO, 2013). Para el análisis de este criterio se tienen en cuenta los siguientes componentes: *interacción docente-discente* (presentación clara y organizada de conceptos, detección de conflictos cognitivos, inclusión de la totalidad del alumnado en las dinámicas de clase, etc.), *interacción entre discentes* (se promueve un entorno comunicativo entre los estudiantes y se evitan comportamientos exclusivos), *autonomía* (se consideran situaciones en las que el alumnado asume la responsabilidad de su proceso de estudio) y *evaluación formativa* (se observa de forma sistemática y progresiva el progreso de cada estudiante).

Criterio de idoneidad mediacional. Lo entenderemos como el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales para la realización adecuada del proceso de EA (GODINO, 2013). Lo conforman los componentes: *recursos materiales* (manipulativos, informáticos, etc.; todos ellos introducidos con una motivación justificada), *número de alumnos, horario y condiciones del aula; y tiempo de enseñanza, tutorización y aprendizaje* (adecuación de las nociones implementadas al tiempo disponible y priorización de contenidos nucleares).

Criterio de idoneidad afectiva. Este tipo de idoneidad hace referencia al grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio. En este punto han de tenerse en cuenta un gran abanico de influencias: factores relativos a la institución escolar, historial académico, intereses dominantes a nivel de clase, o la promoción de actitudes y hábitos (GODINO, 2013). Los componentes de estudio de esta idoneidad son: *intereses y necesidades* (tareas adaptadas a los intereses del alumnado y su aplicación sociolaboral), *actitudes* (promoción de la implicación en actividades, responsabilidad, persistencia...) y *emociones* (fomento de la autoestima y

minimización del rechazo y fobia hacia la matemática).

Criterio de idoneidad ecológica. El grado de idoneidad ecológica de un proceso de instrucción matemática hace referencia al grado con el que este se ajusta al Proyecto Educativo del Centro, al instituto, a la sociedad y a los condicionantes del entorno en el que se lleva a cabo. Se consideran los siguientes componentes: *adaptación al currículo* (programación didáctica adaptada a la directriz curricular), *conexión intra e interdisciplinar* (relación de los contenidos matemáticos con otros de la misma disciplina, ya sean más avanzados o igualmente contemplados en el currículo; o bien de otras disciplinas), *utilidad socio-laboral* y, finalmente, *innovación didáctica* (en la programación se llevan a cabo métodos y prácticas innovadoras contempladas en artículos de investigación o surgidos de la propia práctica reflexiva).

La lectura de los anteriores criterios se presta a pensar que, en un ejercicio de reflexión del profesorado, tales factores son tenidos en cuenta de manera implícita, aunque estos no hayan sido presentados formalmente en procesos de formación previa. Por esta razón, se considera útil su enseñanza con el objetivo de desarrollar la competencia reflexiva y meta didáctica de los docentes, siendo estos criterios una herramienta que permita pautar el análisis de la propia práctica (BREDA, FONT y PINO-FAN, 2018; PINO-FAN, ASSIS y CASTRO, 2015). Esto ya ha sido llevado a cabo en países como Argentina, Chile, Ecuador, España, México, Panamá, Perú, Venezuela y Brasil (SANTOS, 2012; FERRERES-VALLS y VANEGAS-MUÑOZ, 2015; POCHULU, FONT y RODRÍGUEZ, 2016; SECKEL, 2016; POSADAS y GODINO, 2017; BELTRÁN-PELLICER y GIACOMONE, 2018; GIACOMONE, GODINO y BELTRÁN-PELLICER, 2018). Además, tal y como se discute en el estudio de Breda (2020), el reflejo de la utilidad del constructo CID se ve en la capacidad de propuesta de mejoras por parte del profesorado en sus programaciones, así como en la justificación de su aplicabilidad

y en la presencia equilibrada de los diferentes criterios (BREDA, FONT y PINO-FAN, 2018).

METODOLOGÍA

La redacción de este artículo se enfoca en el análisis que realiza un estudiante de un máster de formación de profesores de matemáticas de secundaria (futuro profesor), durante su periodo de prácticas preprofesionales, sobre su propio ejercicio de la docencia. El estudio lo realizó a partir de los CID con el fin de valorar y proponer una mejora de la secuencia didáctica que se planteó al inicio. Tal proceso de reflexión fue pautado por algunas herramientas (siendo una de ellas el constructo CID) que se presentaron en la asignatura de Introducción a la Investigación en Didáctica y, finalmente, aplicadas en la reflexión realizada en su trabajo de fin de máster (TFM).

Tal y como se ha comentado previamente, la naturaleza implícita de los CID en los ejercicios reflexivos del profesorado motiva a presentarlos en el máster como conceptos que son generados en espacios controlados a partir de consensos grupales, en lugar de hacerlo como principios ya creados. Así, son presentados a partir del siguiente modelo de instrucción (ESQUÉ y BREDA, 2021):

1. *Análisis de casos (sin teoría)*. Primera fase en la que se propone a los estudiantes del máster que realicen un análisis de episodios y programaciones didácticas sin ninguna pauta previa.

2. *Emergencia de diferentes tipos de análisis didáctico (descriptivo, explicativo y valorativo)*. Puesta en común de los diferentes análisis y detección de líneas de estudio recurrentes.

3. *Tendencias en la enseñanza de las matemáticas*. Presentación de las diferentes tendencias presentes en la Didáctica de las Matemáticas (BREDA, FONT y PINO-FAN, 2018) y observación de su presencia

(implícita) en los análisis realizados.

4. *Teoría (el constructo CID)*. Presentación del constructo teórico, entendido como un conjunto de principios consensuados por la comunidad educativa a partir de las diferentes aportaciones teóricas acerca de la Didáctica de las Matemáticas (GODINO, 2013; BREDA, FONT y PINO-FAN, 2018), las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas y los principios del National Council of Teachers of Mathematics (2000).

5. *Lectura y comentario de partes de algunos trabajos de final de máster de cursos anteriores*. Reflexión sobre los testimonios didácticos de estudiantes de cursos pasados y su implementación de los CID.

6. *Prácticas y Trabajo de final de máster*. Los alumnos usan los CID para valorar su propia práctica. Concretamente, valoran la UD diseñada una vez puesta práctica y proponen un rediseño y propuestas de mejora en función de los criterios de idoneidad.

LA UNIDAD DIDÁCTICA

La UD que se propuso trata procesos y conceptos geométricos, situándose en las matemáticas que involucran transformaciones isométricas del plano: translaciones, giros y reflexiones, así como el concepto de simetría. El análisis curricular e institucional de la unidad, basado en la consulta del Decreto 187/2015 publicado en el DOGC n.º 6945 (2015); la hace situar en un curso de 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), y, en efecto, la UD se llevó a cabo con dos grupos de alumnos de 3º de ESO de un instituto público de Barcelona, y fue planificada para ser realizada en 8 sesiones de una hora entre el 15 y 26 de marzo de 2021.

El tema tratado es considerado como uno de carácter académico y es por lo que, según los comentarios de la mentora de prácticas (profesora del instituto que desempeñaba el papel de guía, asistente y evaluadora del estudiante en prácticas), este era raramente

abordado en un curso habitual. De hecho, una de las pretensiones que se perseguían al proponer esta unidad era romper con la tónica imperante en secundaria por la cual se identifican los conceptos de geometría y medida (mediante los omnipresentes teoremas de Pitágoras y Tales). El estudio de las transformaciones geométricas y la búsqueda posterior de simetrías respecto a estas era una oportunidad para ello, estudiando la geometría desde un punto de vista abstracto (a partir de conceptos como el de simetría o el de invariante geométrico) y aplicado (como el análisis de la simetría en contextos cotidianos y artísticos).

La distribución prevista de contenidos y actividades durante las sesiones (de una hora) fue la siguiente:

1ª hora: presentación de la unidad y prueba escrita individual. Evaluación inicial de los conocimientos del alumnado.

2ª y 3ª hora: realización de un dossier sobre nociones básicas de translaciones y actividad lúdica, en formato de concurso, enfocada a la práctica productiva del concepto de vector de translación mediante la formación de anagramas. Se usó la aplicación de *GeoGebra* de este [enlace](#).

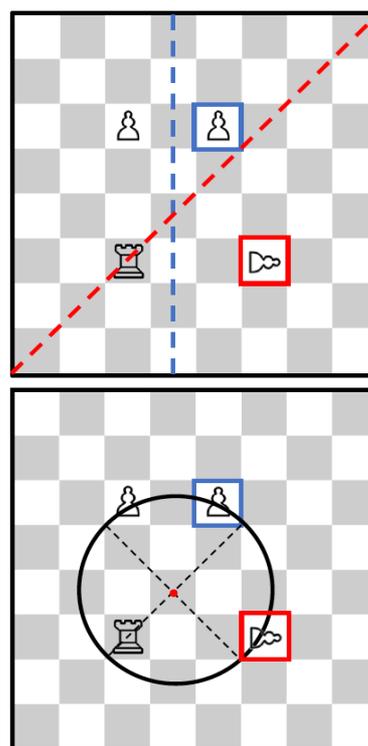
4ª y 5ª hora: trabajo sobre un dossier acerca de nociones básicas de giros y uso de la aplicación de *GeoGebra* de este [enlace](#) para introducir el concepto de centro de giro y un proceso a seguir para determinarlo.

6ª y 7ª hora: estudio de las reflexiones mediante un primer dossier en el que se estudiaban sus propiedades básicas. También se planteó una actividad de ampliación en la cual se pretendía demostrar, mediante un contexto lúdico basado en el ajedrez, que la composición de dos reflexiones de ejes secantes es un giro de unas características determinadas (ver Figuras 1 y 2).

8ª hora: realización de un dossier en el cual se trabajaba el concepto de simetría a partir de algunas de las obras de Maurits

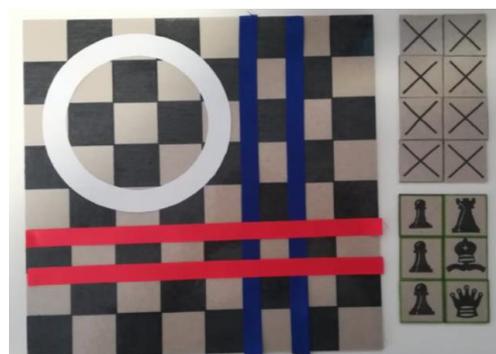
Cornelis Escher y diversos mosaicos de la Alhambra.

Figura 1 – Tableros de ajedrez usados en el guion de la actividad de la 7ª hora. En el primero se ilustra la reflexión de un peón respecto a dos ejes: uno azul, que lo protege del ataque de la torre, y otro rojo, que no lo hace. El segundo analiza la diferencia entre una reflexión y un giro. Se estudia, además, qué sucede al componer las dos reflexiones.



Fuente: Los autores

Figura 2 – Material manipulativo que se preparó para el alumnado para el trabajo del dossier de ampliación de reflexiones.



Fuente: Los autores

Este conjunto de actividades fue pensado

para realizarse en agrupaciones de 3 estudiantes de manera que se fomentase el trabajo cooperativo y el debate, dado que la mayoría de las cuestiones que se planteaban en los dosieres eran tales que requerían una respuesta escrita y argumentada. Una parte de la evaluación del grado de aprendizaje del alumnado se basaba en lo que constaba escrito en aquello que entregaban, y por otro lado también trató de ser de naturaleza formativa (SANMARTÍ, 2020). En este sentido, se realizó una observación y seguimiento sistemático durante toda la intervención con la ayuda de rúbricas de evaluación específicas para cada actividad para el profesorado y para el alumnado.

RESULTADOS Y DISCUSIONES

En este apartado se empezará describiendo la reflexión que hace un futuro profesor de matemáticas de la UD propuesta, pensada como un programa formativo y un proceso de estudio matemático. Para ello, se ha tomado como referencia los CID expuestos previamente, así como cada uno de sus componentes. Acerca de cada uno de los criterios sobre los cuales fundamentaremos nuestro análisis, tenemos que entender que es su articulación coherente y sistemática la que lleva a la noción de Idoneidad Didáctica global (GODINO, 2013; BREDA, FONT y PINO-FAN, 2018).

IDONEIDAD EPISTÉMICA

En el análisis de su proceso de instrucción matemática, el futuro profesor identifica haber cometido dos *errores* de naturaleza matemática provenientes de la formulación incorrecta de enunciados. Según él, el primer error se encontró en la prueba de evaluación inicial, en la cual se pedía girar una figura unos ciertos grados, pero no se especificaba con respecto a qué centro de giro. El segundo

se encontró en el dosier de nociones básicas de giros, donde preguntaba por el radio del giro que había experimentado una figura. Se trata de una formulación incorrecta, pues cada punto del objeto presentaba un radio de giro distinto. Debería haberse planteado como: *¿cuál es el radio de giro del punto indicado en la figura?*

El futuro docente apunta que, también, se detectaron dos situaciones que pudieron generar *ambigüedades* en el aula. La primera se dio en el uso de metáforas durante el estudio de los giros (como el movimiento del pie de pivote en baloncesto, el movimiento que hacen los puntos de una rueda de bicicleta al girar, etc.). Estas, aunque posiblemente ayudaran a que el concepto resultara más familiar a los estudiantes, pudieron llegar a causar alguna confusión. El uso de estas comparaciones trató de ser cuidadoso y siempre se procuró que el alumnado volviera al contexto bidimensional. La segunda situación se dio en el estudio del concepto de simetría, durante el cual se abusó del lenguaje al presentar los conceptos de eje de reflexión y de simetría. No obstante, tal imprecisión se detectó rápidamente y se matizó su diferente significado.

El análisis del futuro profesor indica que en la programación de la UD se ha escogido un amplio abanico de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación de los contenidos y procesos que se querían trabajar. Son resumidos en la Tabla 1, clasificados según su grado de presencia en la UD en función de cuatro niveles: **N1**: presencia puntual en algún ejercicio de los dosieres; **N2**: destaca como proceso predominante en uno de los dosieres; **N3**: destaca en diversos dosieres de trabajo como proceso dominante; y **N4**: proceso transversal a la mayoría de las actividades de la UD.

Tabla 1 – Proceso matemático y su nivel de presencia en la UD (el número de franjas verdes se corresponde con cada uno de los

niveles N1, N2, N3 y N4 respectivamente).

Proceso	Presencia en la UD
Investigación y exploración	
Abstracción	
Conexiones intramatemáticas	
Conexiones extramatemáticas	
Argumentación	
Resolución de problemas	
Algoritmización	
Comunicación	
Cambios de representación	

Fuente: Los autores

Finalmente, tratando la *representatividad* de los contenidos, el análisis más abstracto de las transformaciones isométricas del plano conlleva el estudio de aplicaciones sobre espacios métricos que conserven la distancia entre sus elementos. Uno de los resultados más importantes referentes a este tipo de transformaciones (Teorema de Mazur-Ulam) caracteriza las isometrías en \mathbb{R}^2 , que fijan el origen de coordenadas, mediante una formulación matricial, entendiendo el plano real como un plano afín.

Este enfoque se escapa de los objetivos de la complejidad conceptual que se contempla en un curso de 3º de ESO. Es más, el requerimiento de conceptos matemáticos como vectores o matrices hace que este tratamiento simbólico y algebraico se relegue,

principalmente, a las translaciones. Así, los conceptos de giro y reflexión – y por extensión los de simetría central y axial – se estudian de forma cualitativa, y su práctica pasa a ser dominada por el lenguaje gráfico. Teniendo esto en cuenta, exponemos en la Tabla 2 diferentes sistemas de representación conceptual posibles dada la temática de la UD, así como su presencia en esta.

Tabla 2 – Sistemas de representación conceptual y su presencia (figura verde), o no (figura roja), en la UD.

Sistema de representación	Presencia en la UD
Simbólico: representación de un concepto de forma simbólica como aplicación entre espacios métricos, como sistema de ecuaciones y, finalmente, como matriz.	
Textual: desarrollo oral y escrito de problemas. Comunicación de resultados y procedimientos.	
Numérico: uso de matrices concretas para representar isometrías y para transformar los puntos del plano a partir de la transformación de coordenadas de su vector posición.	
Gráfico: uso del lenguaje gráfico para representar, mediante dibujos y esquemas, cómo transforman las isometrías objetos concretos.	
Manipulativo: uso de materiales y recursos (físicos y/o virtuales) para trabajar con las isometrías de manera interactiva y exploratoria.	

Fuente: Los autores

IDONEIDAD COGNITIVA

En relación con el análisis de los *conocimientos previos* del alumnado, uno de los primeros puntos asumidos por el futuro

profesor fue que los conceptos trabajados no fueron tratados en cursos anteriores. Además, supuso un conjunto de nociones básicas sobre geometría, necesarias para construir el nuevo conocimiento de la forma más significativa posible:

1. Identificar vértices y lados de un polígono y saber medir estos últimos.
2. Comprensión y uso de un plano coordenado como herramienta para la situación, localización y medida de figuras.
3. Concepto de ángulo y su medida mediante grados sexagesimales.
4. Conceptos de paralelismo y perpendicularidad.
5. Teorema de Pitágoras.

Asumir estos contenidos es razonable dado que todos ellos, en base al Decreto nº 187/2015 del DOGC (2015), son propiamente curriculares de 1º y 2º de ESO. Sin embargo, se planteó una medida de control para evaluar el grado de familiaridad de los conceptos y procesos involucrados, que se plasmó en una actividad individual de evaluación inicial. Las respuestas recopiladas confirmaron que todo el alumnado partía de una posición cognitiva suficientemente adecuada como para avanzar en el proceso de enseñanza.

Sobre la *adaptación curricular a las diferencias individuales en el aprendizaje*, él comenta que no se plantearon actividades de ampliación o refuerzo dado que, según información previa de la mentora del centro, en los grupos en los cuales se impartía la UD (3º de ESO B y C) no existía una diversidad cognitiva documentada que requiriera una actuación excepcional.

Acerca del *aprendizaje*, su evaluación se llevó a cabo mediante un proceso continuo y dotado, como ya se ha comentado, de una actividad de evaluación inicial y de una evaluación formativa (reflejada en la entrega y corrección de dossieres individuales y cooperativos, permitiendo un *feedback* real y

a corto plazo entre docentes y discentes). El modo de recolección de los dossieres de trabajo, también señalado anteriormente, se comunicó al alumnado el primer día y, tal y como se previó, incentivó un mayor grado de cooperación.

Finalmente, sobre los *procesos de alta demanda cognitiva* presentes en la UD, el futuro profesor destaca la abstracción (que la entendemos como la acción combinada de detectar propiedades matematizables de un problema contextualizado y su posterior modelización) y por consiguiente las conexiones internas y externas con respecto a la matemática; y la traducción de procesos del lenguaje escrito al gráfico (y viceversa) y, en el caso de las translaciones, al simbólico (se trabajó con vectores de translación). No obstante, a pesar de la existencia y activación de tales procesos, se considera que no se pudieron llegar a desarrollar con el grado que se pretendía. Esto es así a la luz de la mayoría de las respuestas recopiladas en las actividades. En ellas se reflejaba cómo el alumnado todavía no entendía las particularidades que caracterizaban a cada isometría, hecho que se tradujo en la imprecisión de las respuestas del dossier final de simetrías (en el cual se proponía usar los contenidos y procesos trabajados anteriormente para el análisis de diversas obras de arte). Por ejemplo, en este dossier el autor planteaba un análisis (motivado por la visualización de un vídeo y una explicación previa) de las obras *El día y la noche* y *Manos dibujando* de Maurits Cornelis Escher. La pregunta que se realizó en ambos casos fue si alguna transformación isométrica se usó como recurso artístico. Para el primer caso algunas de las respuestas obtenidas fueron:

En todo el cuadro se pueden apreciar transformaciones isométricas, inspiradas en la reflexión. (L. A.)

La aplicación que hace es la de reflexión,

o sea quiere decir que se ha puesto como un espejo en el medio de forma vertical a la obra y así ha podido reflejarse con el otro dibujo, o sea poder hacer lo mismo, pero con otros colores y con otra dirección. (N. R.)

La obra “El día y la noche” no es isométrica. Si bien las partes de abajo (campos de cultivo y ríos) son simétricas, los pájaros no lo son del todo, así que en esta obra no se ha realizado ninguna transformación isométrica. (C. P.)

Y sobre la obra *Manos dibujando* se recopilaron las siguientes respuestas:

El autor se inspiró en un giro para hacer la obra (L. A.)

Esta obra representa que hace la aplicación de giros a 180° de una simetría rotacional. Esto hace que cada mano pueda dibujar en el dibujo. (N. R.)

En la obra *Manos dibujando* no se puede realizar ninguna transformación isométrica, ya que las manos están ubicadas en el mismo sitio, pero las sombras y la posición del lápiz son diferentes en cada mano. (C. P.)

Por otro lado, en relación con el estudio de los giros también surgieron dificultades de tipo cognitivo como consecuencia de una mala opción didáctica. Y es que como la mayoría de las figuras que se rotaban eran polígonos regulares o circunferencias, los estudiantes interiorizaron que el centro de giro coincidía, en cualquier caso, con el centro de la figura. Además, también se dio en el caso de las reflexiones que el alumnado realizaba una identificación muy común entre un eje de reflexión y un espejo. Aunque fuese una aproximación acertada, surgían dificultades cuando se planteaban tareas en las cuales debían construirse reflexiones respecto a ejes oblicuos. Se considera que estas dudas procedimentales provienen de que, aunque el alumnado asociase claramente el eje con un espejo, el proceso físico de la formación de imágenes de este instrumento no era

conocido con suficiente profundidad.

IDONEIDAD INTERACCIONAL

Sobre la *interacción docente-discente* el futuro profesor diferencia el trato que se observó en la primera sesión en comparación al resto de clases. Al inicio de la primera hora el papel del futuro docente fue el de expositor de los contenidos, actividades, evaluación, programación y temporización que se seguiría en las próximas horas. Durante las siguientes sesiones, el alumnado, organizado en grupos de 2 a 4 integrantes, pasó a trabajar las tareas propuestas de manera autónoma. Los conflictos de significado y dudas que surgían se detectaban y resolvían de forma personalizada, gracias a la observación constante del trabajo hecho. Las intervenciones del futuro profesor solían iniciar con la secuencia de preguntas: *¿Qué respuesta habéis dado a la actividad? ¿Por qué habéis dado esta?* Era entonces, con las respuestas, cuando detectaba imprecisiones y malentendidos, los cuales procuraba resolver de modo constructivo con contraejemplos orientados a la propia autocorrección.

De manera paralela, la *interacción entre discentes* fue motivada a través de las dinámicas de trabajo grupal y de la autonomía. Más concretamente, dado que las relaciones de afinidad eran una gran fuente de motivación, se permitió – por recomendación de la mentora – que fuesen los propios alumnos quienes formasen los grupos. No obstante, aunque estos los formaran integrantes entre los cuales existía una relación de amistad, a veces los intereses académicos no coincidían. En estos casos se observaba una dinámica concreta (que acabó siendo habitual en este tipo de agrupaciones): una sola persona se encargaba de completar el dossier mientras las otras no participaban y, finalmente, copiaban las respuestas al acabar la clase. Viendo esto, el futuro profesor optaba por intervenir al final y realizar una

evaluación oral de los conocimientos asimilados por el grupo. Se aprovechaba para realizar una *tutoría entre iguales* (ONRUBIA, 1993) donde el alumno “experto” instruía a sus compañeros en el contenido.

Según el futuro profesor, la *autonomía* en el aprendizaje del alumnado fue fomentada en todas las actividades que se plantearon. Estas fueron diseñadas de manera que la graduación de su complejidad permitiese que los estudiantes construyesen de forma autónoma los significados matemáticos. Como se puede suponer, se siguió interviniendo en este proceso constructivo cuando se creía necesario con tal de reorientar el foco de atención; o bien, precisar respuestas o conclusiones.

Por último, y como ya se ha comentado, la evaluación formativa, desde el punto de vista del futuro profesor, fue realizada de manera sistemática, constante y transparente durante la intervención mediante las rúbricas de evaluación específicas de cada actividad, tanto para el profesorado como para el alumnado. Destaca el examen continuo de los estudiantes (a partir de los diálogos mantenidos, respuestas recopiladas, actitudes observadas...) durante las sesiones, aspecto clave que acabó modelando cada hora de clase. Esto particularizó las intervenciones en función de las necesidades que se detectaron y comportó, en la mayoría de los casos, el uso de recursos digitales para ayudar a realzar la riqueza conceptual de los contenidos que se trabajaban.

IDONEIDAD MEDIACIONAL

Hubo una serie de *recursos materiales* que se utilizaron continuamente: dos pizarras y un ordenador de sobremesa, con salida de vídeo a un proyector y con salida de audio a unos altavoces. Las pizarras se usaron durante todas las sesiones para dejar por escrito información relevante y los objetivos de la sesión. También se usaron en cuantiosas

ocasiones para ilustrar las explicaciones que se daban al gran grupo, mediante representaciones gráficas y numerosos ejemplos, así como para resolver dudas que iban surgiendo progresivamente. El ordenador y el proyector se usaron para mostrar el dossier a completar y los diferentes *applets* de *GeoGebra*: esta en el concurso de translaciones, y esta en las sesiones de giros. Además, en la sesión de simetrías se mostró el siguiente vídeo para motivar al alumnado a estudiar las obras de Escher. Otro recurso que se usó fueron los ordenadores portátiles personales de cada alumno (distribuidos por el instituto). Estos permitieron el trabajo de todas las actividades – salvo la prueba inicial y el dossier básico de reflexiones – de manera virtual (disminuyendo así el consumo de papel) y agilizó la coordinación grupal mediante entornos de trabajo cooperativo en la nube. Para acabar, también se usó un recurso manipulativo en la sesión de ampliación de reflexiones de la 7ª hora (Figura 2). El autor cree que el principal atractivo de este recurso fue la experimentación con el concepto de reflexión mediante la prueba y el error, así como la realización de todas las actividades del dossier de una forma más ágil.

El *número de alumnos* en clase oscilaba entre 18 y 22, hecho que permitía un trato personalizado con más facilidad gracias a la ayuda constante del personal codocente. Las *condiciones del aula* fueron las adecuadas, pero el *horario* de las clases incitó ciertas dificultades. Concretamente, 3 de las 4 horas de matemáticas que se tenían con el grupo de 3º C se impartían en la última franja horaria (de 12:40 a 14:40) y eran conflictivas. Por otro lado, las horas de 3º B se concentraban en la mañana, notándose una gran diferencia en la actitud y nivel de concentración del alumnado.

La *gestión temporal* fue valorada como muy flexible y adaptada a las necesidades y

motivaciones de los estudiantes. Más allá de cambios en la programación didáctica, siempre se trató de invertir más tiempo en los contenidos que se consideraban esenciales antes de pasar a tratar nociones más avanzadas. En este sentido, la UD se había planteado con la idea de que las prácticas de carácter complementario pudiesen llegar a ser opcionales. Esto acabó sucediendo en el aula de 3º C, dadas las respuestas obtenidas en el dossier básico de reflexiones, que reflejaban no haber interiorizado los contenidos y procesos que se trabajaban al realizar estas actividades, hecho que implicaba que el trabajar una práctica más avanzada careciera de sentido.

IDONEIDAD AFECTIVA

Teniendo en cuenta los *intereses* y *necesidades* de los estudiantes, la mayoría de las actividades escogidas, según la reflexión del futuro profesor, pretendían mostrar y valorar la aplicabilidad de las matemáticas que se estaban trabajando en la vida cotidiana y en otras disciplinas. Desde la utilidad de los giros al modelar las curvas de circuitos de Fórmula 1, la de las reflexiones para estudiar posibles configuraciones en un tablero de ajedrez o la de las simetrías, la cual representa una gran fuente de inspiración en disciplinas artísticas. Este enfoque se consideró atractivo para el alumnado por la contextualización de los conceptos tratados, haciéndolos más ricos, familiares y naturales.

Además, la planificación de la gestión del aula en relación con las *actitudes* que se observaban, en general, en las agrupaciones de alumnos, fue un punto que se tuvo muy en cuenta durante la planificación de las tareas. Y es que los comportamientos que se observaban se caracterizaban por la desidia y el desinterés hacia la materia. Además, había casos donde motivaciones extrínsecas, como podían ser la obtención de buenas valoraciones, tampoco conllevaban ninguna

inclinación hacia la realización del trabajo propuesto. Así pues, si se querían promover actitudes tales como la perseverancia, la responsabilidad o la escucha activa del profesorado y los compañeros, el futuro docente decidió plantear una secuencia didáctica que lo favoreciese. Las actividades incorporaban elementos contextuales y enunciados que motivaban al trabajo y coordinación grupal. Los resultados de esta metodología fueron visibles, sobre todo, en la 3ª sesión: el concurso de translaciones. El ambiente competitivo que se generó promovió, de manera indirecta, una gran implicación de todos y cada uno de los grupos, así como posturas de corresponsabilidad entre sus miembros. Además, la vertiente competencial que se pretendía trabajar durante aquella sesión, enfocada más hacia el fomento de una actitud de investigación persistente, fue lograda por la totalidad de estudiantes; un hecho inesperado dadas las actitudes de desinterés hacia la asignatura que se habían observado.

Otro de los objetivos que se marcaron previamente en el proceso de diseño de la UD, fue la minimización de los sentimientos y *emociones* de frustración provocados por la incapacidad de completar las actividades. Con este fin, la dificultad de los dossieres se planteó con un carácter creciente, aspecto probado por el futuro docente al analizar la calidad matemática de las respuestas de los primeros dossieres (de naturaleza introductoria) en comparación con los últimos (que necesitaban conceptos y procesos trabajados previamente). También, con tal de disminuir la generación de emociones negativas, se optó por atender las dudas con más detenimiento de aquellos grupos que no habían mostrado suficiencia en la compleción de los dossieres precedentes. Otro aspecto a tener en cuenta fue la constante revisión de la calidad de las respuestas. Dado que la mayoría de ellas requerían de un texto argumentativo y

reflexivo, se enaltecíó la precisión matemática como una virtud que distinguía un grado más o menos elevado de aprendizaje. No obstante, la mayoría de los alumnos no se mostraban receptivos, haciendo que tanto los consejos como las correcciones propuestas pasaran inadvertidos. Y es que un factor observado por el autor fue que, en general, los alumnos no tenían suficiente confianza con el profesorado de la asignatura como para considerarlo una figura de soporte o ayuda. Se supuso que uno de los principales motivos que podía haber provocado esto era la alta movilidad profesional que experimentaba el instituto en los últimos años. Además, este factor fortalecía la cohesión entre alumnos, pero lo hacía de tal forma que los orientaba a tener comportamientos negativos, como la apatía colectiva y la desvinculación emocional hacia el docente y la actividad académica.

IDONEIDAD ECOLÓGICA

Se considera que la *adaptación al currículum* oficial, contenido en el Decreto 187/2015 publicado en el DOGC (2015), es la adecuada; así como a la programación didáctica del instituto.

También, a lo largo de la UD, se quisieron fomentar las *conexiones intramatemáticas*, entendiendo las isometrías como objetos matemáticos que pueden interactuar entre ellos, en el sentido que pueden componerse al aplicarse a una cierta figura. El dossier de simetrías hacía intervenir estas conexiones en un contexto de análisis artístico. No obstante, se considera que no se logró el grado de comprensión esperado, obteniendo en la mayoría de los casos respuestas poco elaboradas o imprecisas. Por otro lado, las *conexiones extramatemáticas* fueron una constante en la UD. Encontramos conexiones con ramas lingüísticas (las respuestas de carácter argumentativo de los dossiers y estrategias de formación de palabras del concurso de translaciones), artísticas (dossier

de simetrías) y digitales (uso de software de geometría dinámica y procesadores de texto).

Con respecto a la *utilidad sociolaboral* de la UD, se considera que los contenidos tratados han ilustrado al alumnado la posibilidad de análisis de problemáticas diversas desde una óptica matemática distinta al enfoque típico de la aritmética y la medida. Desde un punto de vista pragmático, se ha fomentado el ejercicio de una ciudadanía más crítica, tanto en contextos cotidianos, lúdicos o académicos. El futuro docente cree que la aplicabilidad sociolaboral de los contenidos tratados alcanza desde el enriquecimiento personal y social del alumno, en tanto que es un miembro que se relaciona con su entorno y lo hará de la forma más significativa posible si dispone de más recursos; hasta la presentación de la relación entre las matemáticas y otras disciplinas.

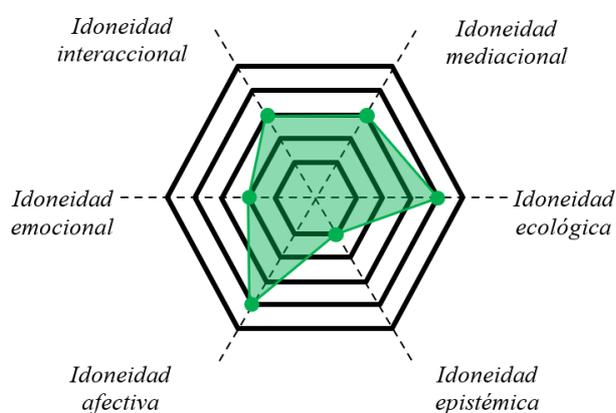
Por último, se considera que la programación didáctica contaba con métodos de *innovación didáctica* con respecto a los habituales del centro, motivados a partir de la propia práctica reflexiva. Estos son:

1. La evaluación formativa basado en una rúbrica específica para cada actividad.
2. El tema de la UD no solía tratarse en un curso de 3º de ESO, sino en 4º. Así, de acuerdo con Breda (2020), la UD se considera innovadora al incorporar contenidos de cursos posteriores.
3. Uso del ordenador portátil personal de cada alumno para realizar las tareas. Fomento del ahorro de papel, objetivo marcado en el Programa General Anual del instituto.

VALORACIÓN GENERAL Y PROPUESTAS DE MEJORA

Se presenta en la Figura 3 un hexágono que resume, mediante una graduación numérica (del 0 al 5), el grado de idoneidad de cada una de las idoneidades presentadas anteriormente.

Figura 3 – Hexágono que otorga una valoración numérica del 0 al 5 a cada idoneidad didáctica referente a la UD.



Fuente: Los autores

Una de las primeras propuestas de mejora se centra en el análisis epistémico. El futuro docente propone una nueva programación didáctica basada en alejar el estudio subordinado de las isometrías al objeto al cual se aplican. Así, en una nueva UD, se daría más peso a actividades donde se estudiaran las isometrías en sí como transformaciones, acercando al alumnado a la complejidad real del objeto matemático. Más concretamente, en base a la secuenciación que exponen Martín (2019) y Salvador y Molero (2020), una nueva planificación centraría la atención de manera más específica en conexiones internas, con un dossier dedicado a la composición de isometrías y otro a la síntesis de contenidos. Se seguiría optando por no hacer intervenir el lenguaje simbólico o numérico en el estudio de giros y reflexiones por dificultades motivacionales y cognitivas del alumnado. No obstante, si no se diesen estas condiciones, este análisis formal es propuesto presentarlo de manera introductoria mediante el uso de *applets* de *GeoGebra*, una para giros y otra para reflexiones, que permitirían el trabajo simbólico y numérico de manera exploratoria. Además, se fomentarían las conexiones internas (se presentarían las isometrías lineales como objetos matriciales) y se

innovaría didácticamente (BREDA, 2020).

Desde un punto de vista cognitivo, se considera que las propuestas de mejora deberían centrarse en favorecer los procesos de alta demanda cognitiva. Esto se refleja de nuevo en la nueva programación propuesta, fomentando las conexiones intramatemáticas y la comprensión de los giros y reflexiones como transformaciones de todo el plano. Esto implicará una mayor calidad en las respuestas que pueda dar el alumnado en el dossier final de simetrías, pues se habrán trabajado con más profundidad los procesos de abstracción y comunicación.

El futuro profesor cree que este conjunto de decisiones también implica una mejora desde un punto de vista ecológico, pues enriquecen el abanico de conexiones internas e interdisciplinarias. Además, se han usado algunos de los ejemplos propuestos por Gutiérrez (2005) para estudiar los mosaicos creados por Escher, hecho que ilustra, en particular, la utilidad matemática como herramienta de expresión artística, ya sea restringida al mundo académico o aplicada al mundo laboral.

Por otro lado, desde un punto de vista mediacional, se considera que el uso constante que se hizo de los ordenadores personales fue contraproducente. La mayoría de las ocasiones resultaba una distracción y un obstáculo para aquellos alumnos que olvidaran traerlo. En la nueva programación se limitaría su uso para el concurso de translaciones y el último dossier de simetrías, pasando a trabajar durante las sesiones restantes en formato físico. Se cree que esto conllevaría una mayor eficiencia temporal.

Por último, los aspectos interaccionales y emocionales fueron los que el futuro docente tuvo más en cuenta en la planificación de la UD, desde el primer contacto con los grupos de alumnos (3 meses antes), en el que se detectaron actitudes de rechazo y apatía hacia la asignatura. Las mejoras propuestas en este

ámbito están relacionadas con la creación de un *clima de trabajo* en el aula de matemáticas, como paso previo y necesario con tal de lograr un aprendizaje cooperativo (PUJOLÁS, 2008). Acciones que se hubieran llevado a cabo abarcarían desde involucrar a los tutores de las agrupaciones de alumnos en la formación de los grupos de trabajo, hasta evitar los casos en los que un solo integrante acabara realizando todas las tareas y los demás se limitarían a copiarlas al final de la sesión.

CONSIDERACIONES FINALES

El futuro profesor considera que, durante el proceso de diseño de la UD, se enfocó, sobre todo, en tener en cuenta las problemáticas relativas a la gestión del aula y a las carencias cognitivas y motivacionales (concertando reuniones previas de seguimiento de la UD con la mentora y la autora); y, por otro lado, se dejó de lado una posible mejora de los procesos y contenidos matemáticos. Efectivamente, el proceso de análisis de la UD mediante los CID ha llevado al futuro profesor a observar – y finalmente concluir – que las deficiencias que han salido más a la luz han sido unas de carácter básico: aquellas relativas a la calidad matemática de la enseñanza; en concreto, aquellas asociadas a la representatividad de los contenidos.

La principal consecuencia de este hecho ha llevado a enfocar la propuesta de mejoras principalmente en esta dirección. Así, se ha propuesto una nueva programación didáctica en la que las conexiones internas a nivel matemático son centrales, al igual que el punto de partida de mejoras cognitivas (formando una red de significados más rica, capaz de hacer que el alumnado realice procesos de abstracción y argumentación no triviales) y ecológicas (construyendo puentes entre diferentes disciplinas y presentando contenidos y procesos de cursos superiores).

Por último, dejando de lado las particularidades matemáticas de la intervención didáctica, el futuro profesor reconoce que el conjunto de actitudes, hábitos y emociones negativas – la tónica imperante que impregnó cada una de las sesiones – fue el germen de la mayoría de las problemáticas. Esta observación corrobora una de las ideas que expone Pujolás (2008) en su artículo, en el cual habla de la cooperación entre alumnos como herramienta de aprendizaje. De hecho, expone que la cohesión del grupo es un recurso didáctico indispensable para estructurar de forma cooperativa una actividad y un grupo de estudiantes. La realidad que se percibió coincide con lo anterior y pone en evidencia que un paso previo necesario, si se pretende trabajar en grupo, hubiera sido el generar un clima de clase saludable y propicio para el aprendizaje (requiriendo la ayuda de los tutores de los grupos de alumnos, dedicando una primera sesión auxiliar de presentación, dejando de lado el temario, con el objetivo de familiarizarse con el grupo: conocer los nombres de cada alumno, motivaciones, relaciones de afinidad, etc.). Un aspecto clave alineado con el objetivo de construir procesos de EA lo más significativos posibles.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló en el marco de proyectos de investigación en formación docente: PGC2018-098603-B-I00 (MINECO / FEDER, EU) y Competencias y conocimientos del docente de primaria y secundaria para la enseñanza de las matemáticas en modalidad híbrida (SENACYT/FIED21-002).

REFERENCIAS

BELTRÁN-PELLICER, P.; GIACAMONE, B. Desarrollando la competencia de análisis y

valoración de la idoneidad didáctica en un curso de posgrado mediante la discusión de una experiencia de enseñanza. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, v. 7, n. 2, p. 111-133, 2018.

BREDA, A. Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. **Bolema**, v. 34, n. 6, p. 69-88, 2020.

BREDA, A.; FONT, V.; PINO-FAN, L. R. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo de idoneidad didáctica. **Bolema**, v. 32, n. 60, p. 255-278, 2018.

BREDA, A.; LIMA, V. M. Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo de final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. **REDIMAT**, v. 5, n. 1, p. 74-105, 2016.

COLL, C.; SOLÉ, I. Aprendizaje significativo y ayuda pedagógica. **Cuadernos de Pedagogía**, v. 168, p. 16-20, 1989.

ESPAÑA. Decreto n.º 187/2015, de 28 de agosto de 2015. Por el cual se establece la ordenanza de las enseñanzas de la educación secundaria obligatoria. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya (DOGC), Barcelona, v. 6945.

ESQUÉ, D.; BREDA, A. Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad, utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. **Uniciencia**, v. 35, n. 1, p. 38-54, 2021.

FERRERES-VALLS, S.; VANEGAS-MUÑOZ, Y. Uso de criterios de calidad en la reflexión

sobre la práctica de los futuros profesores de secundaria de matemáticas. **Procedia – Social and Behavioral Sciences**, v. 196, p. 219-225, 2015.

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. Mathematics teaching and classroom practice. En: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: NCTM y IAP, 2007, p. 225-256.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v. 33, n. 2, p. 89-105, 2010.

GIACOMONE, B.; GODINO, J. D.; BELTRÁN-PELLICER, P. Desarrollo de la competencia de análisis de la idoneidad didáctica en futuros profesores de matemáticas. **Educação e Pesquisa**, v. 44, p. 1-21, 2018.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de investigación y formación en educación matemática**, v. 8, n. 11, p. 111-132, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM. The International Journal on Mathematics Education**, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, 2007.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the learning of Mathematics**, v. 39, n. 1, p. 38-43, 2019.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los

conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 57, p. 90-113, 2017.

GODINO, J. D.; WILHELMI, M. R.; BENCOMO, D. Suitability criteria for a mathematical instruction process. A teaching experience with the function notion. **Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education**, v. 4, n. 2, p. 1-26, 2005.

GUTIÉRREZ, A. Los cubrimientos de Escher en la enseñanza de las isometrías del plano. **Integra+**, v. 9, p. 15-28, 2005.

HIEBERT, J.; GROUWS, D. A. The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. En: LESTER, F. K. (Ed.). **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**. Charlotte, NC: NCTM y IAP, 2007, p. 371-404.

LESH, R.; SRIRAMAN, B. Re-conceptualizing mathematics education as a design science. En: ENGLISH, L.; SRIRAMAN, B. (Eds.). **Theories of mathematics education. Seeing new frontiers**. Hiedelberg: Springer, 2010, p. 123-146.

MARTÍN, M. Propuesta didáctica para la enseñanza de las isometrías en Educación Secundaria. **Educación y futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas**, v. 40, p. 15-47, 2019.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. 2ª ed. **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

ONRUBIA, J. Enseñar: crear Zonas de Desarrollo Próximo e intervenir en ellas. **El**

constructivismo en el aula. 9ª ed. Editorial Graó, 1993.

PINO-FAN, L. R.; ASSIS, A.; CASTRO, W. F. Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. **Eurasia Journal of Mathematics Science & Technology Education**, v. 11, n. 6, p. 1429-1456, 2015.

POCHULU, M.; FONT, V.; RODRÍGUEZ, M. Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime**, v. 19, n. 11, p. 71-98, 2016.

POSADAS, P.; GODINO, J. D.; Reflexión sobre la práctica docente como estrategia formativa para desarrollar el conocimiento didáctico-matemático. **Didacticae**, v. 1, p. 77-96, 2017.

PUJOLÁS, P. Cooperar per aprendre i aprendre a cooperar: el treball en equips cooperatius com a recurs i com a contingut. **Suports: revista catalana d'educació especial i atenció a la diversitat**, v. 12, n. 1, p. 21-37, 2008.

REIGELUTH, C. M. ¿En qué consiste una teoría de diseño educativo y cómo se está transformando? En: REIGELUTH, C. M. (Ed.). **Diseño de la instrucción**. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción. Madrid: Santillana, 2000, p. 15-40.

SALVADOR, A.; MOLERO, M. **Matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas: 3ªA de ESO. Capítulo 8: Movimiento en el plano y en el espacio**. Libros Marea Verde.tk, 2020. Disponible en:

https://www.apuntesmareaverde.org.es/grupos/mat/3B/08_Movimientos_3B.pdf

SANMARTÍ, N. 1^o ed. **Avaluar és aprendre. L'avaluació per millorar els aprenentatges de l'alumnat en el marc del currículum per competències.** Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. Direcció General de Currículum i Personalització. Gabinet tècnic, 2020.

SANTOS, E. C. **Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: Una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional.** 2012. 544 p. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) – Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada, 2012.

SCHOENFELD, A.; KILPATRICK, J. Hacia una teoría de la competencia en la enseñanza de las matemáticas. En: TIROSH, D.; MADERA, T. L. (Ed.). **Herramientas y Procesos en la Formación del Profesorado de Matemáticas.** Róterdam: Ed. Sense Publisher, 2008, p. 324-354.

SECKEL, M. J. **Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación básica con mención en matemática.** 2016. 291 p. Tesis (Doctorado en Educación Matemática) – Facultad de Educación. Universidad de Barcelona, Barcelona, 2016.

STEINER, H. G. Theory of Mathematics Education (TME). **For the learning of mathematics**, v. 5, n. 2, p. 11-17, 1985.