ARTIGO ORIGINAL

PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA NA FORMAÇÃO DOCENTE: ESTUDO DA FUNÇÃO QUADRÁTICA PELA PARÁBOLA

EDMO FERNANDES CARVALHO
Universidade Federal do Oeste da Bahia - UFOB. E-mail: edmo.carvalho@ufob.edu.br
LUIZ MARCIO SANTOS FARIAS
Universidade Federal da Bahia - UFBA. E-mail: lmsfarias@ufba.br
ANDERSON DE SOUZA NEVES
Universidade Federal da Bahia - UFBA. E-mail: anderson@gmail.com
RAPHAEL FERNANDES CAMERA
Universidade Católica do Salvador - UCSAL. E-mail: cameraraphael@gmail.com

Resumo: No campo da antropologia da didática, os conhecimentos didáticos (profissionais) podem ser utilizados para questionar os conteúdos curriculares e as estratégias para ensino destes. Neste artigo, apresentamos recorte de uma investigação, cujo objeto foi a integração de noções didáticas nas teorias matemáticas como uma das formas de promover tal questionamento. Isso é olhado de perto na difusão do objeto função quadrática num curso de formação de professores de Matemática. Isto implica dizer que as restrições nas práticas que constituem a Atividade Matemática de professores e estudantes constituem o nosso objeto de investigação. Objetiva-se, assim, analisar as condições e/ou restrições institucionais de uma proposta de construção de um modelo praxeológico alternativo para o estudo da função quadrática, de modo que sejam trabalhadas situações que nos levem ao encontro da função quadrática como parábola em curso de formação docente. A discussão proposta ampara-se teoricamente no quadro da Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard, do qual tomam-se algumas noções necessárias à interpretação dos dados construídos no seu desenvolvimento de uma Engenharia Didática de segunda geração, denominada Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa – PEP. Os resultados indicaram que a proposição de situações que levem a função quadrática à parábola da experimentação de um PEP potencializou a integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas dos participantes da investigação e, por consequência, o questionamento dos conteúdos a serem ensinados. Isso caracterizou, ainda, uma espécie de reconstrução de praxeologias didático-matemáticas nesse contexto formativo.

Palavras-chave: Percurso de Estudo e Pesquisa, Formação docente, Função quadrática, parábola.

STUDY AND RESEARCH PATHWAY IN TEACHER EDUCATION: STUDY OF THE SQUARE FUNCTION BY THE PARABLE

Abstract: In the field of didactic anthropology, didactic (professional) knowledge can be used to question curriculum contents and teaching strategies. In this article, we present an excerpt from an investigation, whose object was the integration of didactic notions in mathematical theories as one of the ways to promote such questioning. This is seen closely in the diffusion of the quadratic function object in a Mathematics teacher training course. This implies that the restrictions in the practices that constitute the Mathematical Activity of teachers and students constitute our object of investigation. The objective is, therefore, to analyze the conditions and/or institutional restrictions of a proposal for the construction of an alternative praxeological model for the study of the quadratic function, so that situations that lead us to meet the quadratic function as a parabola in progress of teacher training. The proposed discussion is theoretically supported by the Anthropological Theory of Didactics, developed by Yves Chevallard, from which some notions necessary for the interpretation of the data constructed in its development are taken. It is part of a second generation Didactic Engineering, called Engineering of the Study and Research Path – SRP. The results indicated that the proposition of situations that take the quadratic function to the parabola, through the experimentation of a SRP, potentiated the integration of didactic notions in the Mathematical Praxeologies of the research participants and, consequently, the questioning of the contents to be taught. This also characterized a kind of reconstruction of didactic-mathematical praxeologies in this formative context.

Keywords: Study and Research Path, teacher training, quadratic function, parable.

INTRODUÇÃO

As funções de domínio real, são objetos do conhecimento que desempenham papel essencial na compreensão de fenômenos intra e extra matemáticos, importantes para o desenvolvimento científico e tecnológico. Foi uma noção desenvolvida para modelar fenômenos do movimento, mas ao longo do seu desenvolvimento ganhou outro status no contexto do cálculo e da análise matemática com trabalhos de importantes matemáticos como Leibniz e Newton.

No ensino básico, difundiu-se o modelo epistemológico pautado na teoria de conjuntos, na relação entre elementos dos conjuntos, modelo este proposto por Nicolas Boubarki, pseudônimo dado a um grupo de matemáticos do Sec. XX, que propuseram reformas estruturais na matemática e seu ensino.

No entanto, dificuldades de aprendizagem associadas ao conceito global de função e ao uso de suas representações, que chamaremos a partir daqui de objetos ostensivos (1) são reportadas com certa frequência em alguns estudos do campo do ensino de Matemática (PONTE, BRANCO, MATOS, 2009; REZENDE; PESCO; BORTOLOSSI; 2012; RESENDE, MESQUITA, 2013). Primeiro, o próprio termo função já é controverso na perspectiva de alguns estudantes, por conta de ser uma expressão polissêmica. Além disso, as noções de domínio e imagem, e a própria ideia de relação de variabilidade, são noções não consolidadas do ponto de vista prático nas aulas sobre o objeto em tela.

Essas dificuldades podem ser expressadas, por exemplo, por situações em que um estudante seja provocado a representar uma função por ostensivos figurais (gráficos), mas isso só ocorre se a tarefa evoca de forma explicita tal representação, demonstrando a prevalência do ostensivo escritural algébrico em relação aos demais disponíveis, a exemplo da tarefa (Ti) Esboçar o gráfico da função quadrática representada pela equação $f(x) = x\ 2 + 2x + 1$, discutida por Vandebrouck (2011). A representação gráfica não é evocada para apresentação ou abordagem da noção de uma função de forma natural. Assim, no caso da Função quadrática, não seriam evocadas técnicas que nos levassem à ideia de função quadrática como parábola.

Embora os professores tenham se esforçado para tornar acessível tal noção matemática, a partir do modelo epistemológico vigente (CARVALHO, 2019), percebe-se que os estudantes não conseguem acessar a noção de variabilidade, principalmente quando se trata de tarefas que propõem a representação gráfica das funções. Além disso, quando a representação gráfica é uma curva que é estudada por outra ótica em outros campos da Matemática, há ainda um certo grau de confusão no que se refere ao status do objeto ostensivo utilizado para tal fim. Esse é o caso da parábola e sua relação com a função polinomial do segundo grau.

Diante dessas questões, torna-se necessário analisar, mesmo que *a priori*, no âmbito institucional, modelos didático-praxeológicos cuja pretensão seja levar um sujeito institucional ao encontro da noção de função a partir de outros objetos da Matemática, tal como é o caso da função polinomial do segundo grau e a noção de parábola, objeto da Análise, da Geometria Analítica e da Geometria. O que depende das estratégias adotadas pelo docente e pela relação com o objeto do saber construída pelo mesmo.

Dessa forma, é pertinente questionar os formatos das tarefas, sobretudo aquelas apresentadas em manuais didáticos, com o objetivo de direcionar as praxeologias matemáticas em torno dos conceitos para modelos que revelem a razão de ser dos objetos em jogo: porque a parábola é a representação gráfica da função polinomial do segundo grau? A parábola é representação gráfica ou geométrica de uma função quadrática? Em qual domínio matemático? Os objetos ostensivos são capazes de evocar os não ostensivos, como os conceitos, no desenvolvimento da atividade matemática do sujeito institucional quando este estuda função de domínio real?

Contudo, partindo da ideia de estudar as relações praxeológicas (CHEVALLARD, 1999) passíveis de serem construídas num modelo pautado no resgate da noção geométrica na concepção de função quadrática, o objetivo principal nesse artigo é analisar as condições e restrições de um modelo didático-praxeológico alternativo em que os objetos ostensivos evocam os não ostensivos e corroboram com a compreensão da razão de ser do objeto matemático em jogo.

Para tanto, as discussões promovidas ocorrem sob a lente teórica da Antropologia do Didático, e sobre os resultados, pode-se dizer que pela sua infraestrutura didático-matemática não há restrições institucionais do ponto de vista do currículo, que impeçam a experimentação de tarefas que promovem o resgate geométrico, muito mais do que isso, que promovem as conexões entre domínios matemáticos diferentes.

MPA: INTEGRAÇÃO DE NOÇÕES DIDÁTICAS NAS PRAXEOLOGIAS MATEMÁTICAS

No trabalho de doutoramento desenvolvido pelo primeiro autor (CARVALHO, 2019), um dos principais aspectos discutidos foi o esboço de um modelo praxeológico alternativo para o estudo da função quadrática levando em consideração os status da parábola, ou seja, levar o sujeito institucional num curso de formação docente inicial ao encontro da parábola pelo estudo da função polinomial do segundo grau.

Ensejou-se com o referido modelo que não era apenas praxeológico, mas didático-praxeológico, integrar noções didáticas no *logos* da praxeologias matemática, o que foi feito pela experimentação de um percurso de estudo e pesquisa - PEP, que se aproxima de um PEP para formação de professores - PEPFP.

Quando falamos da possibilidade de integração de noções não matemáticas naquilo que é estritamente matemático, como é o caso do *logos* da praxeologia matemática, referimo-nos a gestos dialéticos que podem contribuir com o fazer matemático do sujeito institucional, tais como: a dialética de perguntas e respostas e das mídias e meios, sobre as quais ampliaremos a discussão na apresentação dos resultados.

Mas para melhor compreender o desenvolvimento da investigação em tela por meio desse recorte, faz-se necessário apresentar algumas noções fundamentais da Didática da Matemática. Outrossim, essa apresentação é básica somente a título de tornar viável a leitura dos não pares, mas pode suscitar ao mesmo tempo, uma necessidade de aprofundar os estudos por parte do leitor não experiente nesse campo de investigação.

Assim, uma das primeiras noções que precisamos evidenciar é a de praxeologia, que segundo Chevallard (1999) é uma das formas de modelar a atividade matemática (uma das atividades humanas) de uma pessoa numa instituição. Também conhecida como organização praxeológica, está dividida em dois blocos: saber-fazer e saber ou *logos*. Estes dois blocos deveriam ser indissociáveis nas práticas institucionais, no entanto os caminhos escolhidos para difusão dos saberes (escolares) restringiram tal condição essencial para uma praxeologia ideal.

A outra noção fundamental, para nossas discussões é a da natureza dos objetos matemáticos que podem ser ostensivos e não ostensivos. Na prática os objetos matemáticos são em sua maioria não ostensivos, o que significa dizer que não têm materialidade em si, pois não podem ser acessados pelos sentidos sem o apoio de outros objetos. E nesse contexto, os ostensivos são aqueles objetos que podem ser acessados por tais sentidos humanos especialmente pela visão. Função de domínio real, é um objeto matemático não ostensivo, pois ao me referir a ele, penso no conceito, na ideia do que é tal objeto, mas para acessá-los necessito de objetos ostensivos tais como equações (escritural), gráficos e tabelas (figural), etc.

De posse dessas noções, podemos retomar a discussão do modelo em questão. Entretanto, cabe salientar que compreendemos modelo didático como uma tentativa de representação de fazeres pedagógicos dos professores (GARCÍA PÉREZ, 2000; PORLÁN ARIZA, RIVERO GARCÍA, MARTÍN DEL POZO, 1997, 1998), que, por vezes, estão guiados por crenças, culturas, relações sociais e saberes construídos historicamente. Esse modelo é, segundo Chrobak e Benegas (2006), um esquema que vai mediar a realidade e o pensamento do docente, e permite abordar, mesmo que de forma simples, uma realidade escolar dinâmica e complexa por meio de procedimentos de intervenção em tal realidade, além de ser provisional, ou seja, dependerá de quem o concebe e com base em qual epistemologia se alicerça teoricamente (MENEZES, CARVALHO, LOPES, 2021). Ainda a respeito dessa ideia de modelo didático, vale destacar que o mesmo pode fundamentar linhas de investigação educacional e de formação de professores (CHROBAK; BENEGAS, 2006).

O modelo é praxeológico por propor praxeologias de referência (ARTAUD, 2019), no caso da investigação discutida, o referido modelo é pautado no resgate de aspectos geométricos no estudo da função polinomial do segundo grau.

Outrossim, o modelo que descrevemos nesse artigo, tem como característica os quatro Ts da praxeologia matemática: Tarefa, Técnica, Tecnologia (discurso que justifica a técnica) e Teoria (discurso que justifica a Tecnologia), colocada em prática por um modelo de aprendizagem por investigação materializado pelo PEP. Assim, o PEP representa o referido modelo experimentado na formação inicial docente em Matemática.

INFRAESTRUTURA DO PEP E ASPECTOS METODOLÓGICOS DA INVESTIGAÇÃO

O MPA coração da investigação em jogo, tem como estrutura básica: (I) uma questão inicial, genérica; (II) uma adaptação da questão como tarefa matemática; (III) técnicas mesmo incompletas para resolver as tarefas; (IV) conjunto de argumentos que justifiquem a razão de ser das tarefas e técnicas apresentadas; (V) subtarefas na forma de técnicas que podem fomentar outras questões tangíveis à intenção didática do professor ou sistema de ensino quando propõe a questão inicial; (VI) plenária para discussão das perguntas e respostas; e (VII) avaliação do percurso de estudo e pesquisa.

Como anunciado no parágrafo anterior, seu ponto de partida é uma questão aberta que denominaremos Q_0. Vale ressaltar que antes mesmo da Q_0, outras questões prévias podem configurar o PEP, essas são omitidas aqui por conta do espaço para discussão ser de certo modo limitado. Mas são importantes para delineamento do PEP.

A partir de Q_0 decorre outras questões, o que configura intuitivamente na prática de uma pessoa ou grupo, a dialética de perguntas e respostas, primeira noção didática que naturalmente integra-se ao *logos* da praxeologia. A razão de tal integração é que uma vez sendo Q_0 aberta, ou seja, com insuficiência de dados para apresentação de uma resposta algoritmizada, intuitivamente, alguns questionamentos podem surgir, incluindo-se perguntas que aproximam noções do rol de conhecimentos dos sujeitos participantes do PEP que tendem a aproximar suas praxeologias da pergunta inicial com suas reformulações.

Além disso, não saber a resposta para uma determinada questão pode evocar um gesto de consulta a mídias disponíveis, gesto dialético teorizado por Chevallard (2007) e denominado de dialética de mídias e meios.

No que tange aos aspectos metodológicos, a investigação em tela, foi de natureza qualitativa (GARNICA,2001), mas no âmbito da Didática da Matemática considerada enquanto uma praxeologia de pesquisa em Didática da Matemática (CHEVALLARD, 2013) pautada nas noções de base da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999). Arriscamos a dizer que se trata de uma Engenharia do Percurso de Estudo e Pesquisa (BOSCH, 2009) adaptada, a medida em que considera elementos da Engenharia Didática Clássica (ARTIGUE, 1988) que substitui uma determinada sequência didática pela proposição de um PEP.

Dentre as noções que permitem melhor compreensão dos procedimentos metodológicos, estão os fatos e fenômenos. Estes últimos são a contrapartida teórica daquilo que é perceptível pelos nossos sentidos, especialmente a visão (os fatos). Desse modo, a frágil relação de estudantes com os objetos não ostensivos, particularmente aqui, se os estudantes não vão ao encontro da função polinomial do segundo grau como parábola, mostrando uma desconexão entre os domínios matemáticos nas práticas institucionais, temos uma exemplificação de um fato, que ao longo da tese (CARVALHO, 2019) foi interpretado teoricamente pelo fenômeno da incompletude da atividade matemática institucional (FARIAS, CARVALHO, TEIXEIRA, 2019).

A estrutura do MDPA, o que inclui a proposição de uma questão inicial, a adaptação de tarefas a partir das técnicas de resolução, o discurso teórico que justifica as técnicas e os caminhos didáticos para o professor mediar o percurso, analisados *a priori*, foram considerados dados nessa investigação.

O principal procedimento adotado para a análise dos dados é alicerçado na própria TAD, denominada de análise praxeológica (CHEVALLARD, 1999) e os passos da referida análise, a saber: elucidação das tarefas, técnicas padrão e não padrão, discurso tecnológico-teórico, e consequências didáticas da experimentação de tais tarefas embasadas em Matheron (2006). Vale destacar que a referida análise é feita nesse artigo, como recorte da investigação de doutoramento, de forma *a priori*, e desta maneira enseja antevê possíveis comportamentos de estudantes frente a questão Q_0 e do desenvolvimento do próprio PEP.

Em síntese, nesse artigo, partimos dos resultados de uma revisão de literatura com consulta a Biblioteca digital de dissertações e teses do Ministério da Ciência e Tecnologia com os descritores x, y e z para além de delinear a investigação, configurar o modelo praxeológico dominante para o ensino de funções polinomiais do segundo grau, para então ao apresentar a estrutura básica da nossa proposta e demarcá-la como modelo didático-praxeológico alternativo.

Na sequência, apresentamos elementos do MPA construído para investigação, com seu desenho *a priori*, bem como a análise praxeológica das tarefas que integram o modelo, lembrando que estas foram deduzidas das questões inicial e as derivadas elaboradas no desenvolvimento do PEP.

Por fim, discutimos os resultados da análise praxeológica *a priori* do MPA, que se materializou como o PEP para realizar o encontro de estudantes ao estudarem função polinomial do segundo grau, com a parábola numa análise que considera três domínios matemáticos o Gráfico-algébrico-Geométrico - GAG, podendo assim, apontar como principal elemento do PEP proposto o resgate dos aspectos geométricos nas práticas institucionais durante ensino e estudo da função polinomial do segundo grau.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Análise a priori do PEP para o encontro da função quadrática como parábola

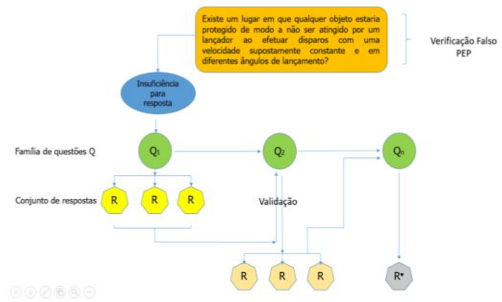
Considerando que fenômenos das ciências da natureza, mais especificamente da Física, podem levar as pessoas que mediam situações e modelos matemáticos ao encontro de funções e suas representações gráficas e/ou geométricas, o PEP, na forma de dispositivo didático para o ensino de função polinomial do segundo grau na formação docente inicial num curso de Matemática, partiu de uma situação que permitia o acesso e o confronto de modelos parabólicos, a princípio, não identificados pelos estudantes.

A Q_0 pautou-se desse modo, numa situação de lançamentos de projeteis e a ideia de local seguro em relação aos projeteis lançados, ou seja, a ideia de parábola de segurança[1].

Partimos aqui de um desenho *a priori* do PEP, no qual a questão inicial e a estrutura do PEP num processo de experimentação dão a dimensão tanto das praxeologias dos estudantes quanto do próprio modelo no que tange a mediação do professor.

Figura 1 - Desenho a priori do PEP (dispositivo didático)

Fonte: Carvalho (2019)



Quanto ao método da investigação que contempla o desenvolvimento do PEP, na formação inicial docente de Matemática, necessitamos também falar das características da Pesquisa em Didática da Matemática. Também conhecida como Epistemologia Experimental, a Didática da Matemática tem como sua ferramenta fundamental a análise *a priori* de uma situação didática, ou seja, análise das representações históricas, epistemológicas e das expectativas comportamentais (SPAGNOLO, 2005). Segundo esse autor, uma pesquisa nesse campo nos leva a coletar informações elementares, que geralmente revelam o comportamento de um sujeito em uma situação.

Desse modo, em se tratando de uma modalidade de Engenharia Didática, a Engenharia do PEP (BOSCH, 2009), configurou-se, no nosso estudo, como um viés da Engenharia Didática de Formação (PERRIN-GLORIAN,

[11] http://aparaboladeseguranca.blogspot.com/

2009), o que nos levou a organizá-la nas seguintes etapas:

– Análises prévias;

– Esboço de Análise *a priori*. Nesse ponto, temos talvez um paradoxo, visto que, com o PEP, não temos o objetivo de controlar o processo de experimentação. Daí o caráter de PEP adaptado;

– Experimentação da sequência. Nesse caso, ocorre com o PEP dispositivo didático, com a devolução para os estudantes da Q_0 enquanto tarefa 1. Mas, espera-se, institucionalmente, que exista insuficiência de técnicas para respondê-la por ser esta um tanto geral;

– Análise a posteriori e, mais uma vez, é possível que, em desacordo com a ED clássica, não tenhamos como confrontar o que era esperado institucionalmente com o que de fato aconteceu, visto que a família de questões Q é posta pelos estudantes participantes da pesquisa;

– Validação, que ocorre à medida que confrontamos as análises anteriores à experimentação e *a posteriori*.

Considerando as etapas acima, ensejamos responder: quais condições nesse PEP poderiam viabilizar a integração de noções didáticas no *logos* da Praxeologia Matemática, bem como as condições para que, minimamente, ocorra uma finalização praxeológica?

No que se refere aos dados da experimentação, consideramos as Praxeologias Matemáticas construídas no desenvolvimento do PEP. Já as análises, ocorreram mediante categorização das praxeologias dos participantes desde a tarefa proposta na forma de questões da família Q, olhando para os aspectos matemáticos e didáticos (status da parábola, domínio matemático, e gestos de estudo e outras noções didáticas mobilizados) e outra que se inspirou na análise de conteúdo (BARDIN, 2002) das perguntas propostas pelos colaboradores da pesquisa. Tais questões foram a mola propulsora do desenvolvimento do PEP.

Apesar de ser um tipo de ED, de acordo como os pressupostos epistemológicos do PEP, ressaltamos que não houve de nossa parte intervenção na elaboração das questões derivadas de Q_0, de modo que isso possibilitou uma maior evidência das ideias dos participantes sobre o saber matemático e extra matemático, bem como, os caminhos que deveriam ser seguidos tanto as perguntas quanto as respostas produzidas. Entretanto, tentamos não nos limitar às evidências, mas compreender os significados das ideias presentes nos enunciados das questões propostas (Q_1, Q_2, ..., Q_n) e suas relações com as respostas no contexto do sistema de inter-relações dos domínios matemáticos Geométrico - Algébrico - Gráfico, o qual denominamos GAG.

As etapas da engenharia do PEP

De maneira sintética, apresentaremos as etapas do PEP e os principais resultados da investigação. Nosso intento é mostrar que há um caminho na construção da pergunta diretriz do percurso que não deve ser omitida, além de mostrar como chegamos no desenvolvimento do percurso à nossa intenção didática, a saber: levar os colaboradores da pesquisa a noção de função quadrática pelo estudo da parábola.

No que concerne as análises prévias, destacamos o conjunto de questões que antecederam a Q_0. Classificamos, então, essas questões como prévias da família de questões Q (Q_i, Q_{ii}, etc.). Assim, constitui-se uma primeira questão norteadora prévia (Qi) dessa investigação: *o que nos garante que o gráfico de toda função escrita pela equação $f(x)= ax^2+ bx + c$ é uma parábola?* Trata-se de uma questão de cunho didático-matemático, uma forma de estimular explicações sobre o processo transpositivo nas instituições onde vive o referido saber. É ainda uma maneira de evocar e estimular a manifestação da dialética de mídias e meios.

A questão Q_i foi caráter argumentativo, e objetivou inserir o estudante no universo da atividade matemática do matemático, ao questionar a natureza de um conhecimento já institucionalizado. No que tange aos níveis de co-determinação didática – CD-D, essa questão está alocada no nível do domínio matemático (CARVALHO, 2019).

Mas as questões que deram início oficialmente ao PEP, foram planejadas levando-se em consideração as seguintes características da parábola:

> – A parábola como conjunto de pontos do plano que verificam certa relação com uma diretriz e um foco;
> – A parábola como conjunto de pontos do plano que determinam uma equação;
> – A parábola como um gráfico correspondente a uma equação quadrática, que considera o lugar geométrico como conjunto de pontos que cumprem uma condição ou regra específica e que unidos entre si, gera a curva que representa a parábola, porque a partir da relação entre distâncias é possível achar de forma analítica a equação canônica." (BERMUDÉZ, MESA, 2018, p. 69) [tradução nossa].

A questão inicial do PEP desencadeou a parte experimental da investigação, visto que nossa hipótese é a de que a referida reconstrução de praxeologias passa por uma mudança na organização didática, o que, por sua vez, implica na alteração das organizações matemáticas do saber em jogo. A nossa tese avançou no sentido de propor que a alteração ocorresse via integração de noções didáticas na Praxeologia Matemática, não somente nas praxeologias didáticas. Assim, considerando o que foi exposto até aqui, enunciamos a questão geratriz do PEP no âmbito de nossas intenções didáticas:

Q_i) Como reconstruir praxeologias na formação do professor de Matemática no Brasil no que tange ao estudo de situações que relacionem o objeto matemático função quadrática e seus ostensivos figurais?

Destacamos que antes de um dispositivo didático, o PEP é também um dispositivo de investigação didática, por tal razão, a pergunta geratriz teve esse viés de realização no plano didático, não sendo a questão a ser levada para a experimentação. Na estrutura discutida por Barquero, Bosch, Romo (2015), essa questão corresponde ao ponto de partida do PEP, que é uma pergunta aberta vinda da própria profissão docente ou de pesquisa sobre a prática docente, relacionada a um certo saber a ser ensinado.

Quanto ao esboço do PEP adaptado (dispositivo didático a ser experimentado na formação docente), a questão derivada Q_{ii}, foi enunciada da seguinte maneira:

Q_{ii}: Qual o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano, cujas distâncias a um ponto E pertencente a essa curva e a uma reta dada guardem entre si uma relação constante?

A Q_{ii} insere-se na segunda etapa de desenvolvimento de um PEP na formação docente, teorizada por Barquero, Bosch, Romo (2015), na qual o PEP é apresentado aos futuros professores de forma similar à que se poderia levar à sala de aula por eles. Entretanto, ela ainda não é a questão a ser experimentada com os colaboradores da investigação. Tal questão foi denominada Q_0, a questão de fato, diretriz do PEP como um dispositivo didático.

No que concerne o esboço de análise *a priori*, ressaltamos que se o estudo da parábola, historicamente, está associado às funções quadráticas, parece natural seguir, de forma experimental, o mesmo caminho em

Organizações Didáticas. E daí nos questionamos: como esse caminho integraria as Praxeologias Matemáticas? Seria necessário mesmo noções didáticas norteando o bloco do saber dessas praxeologias?

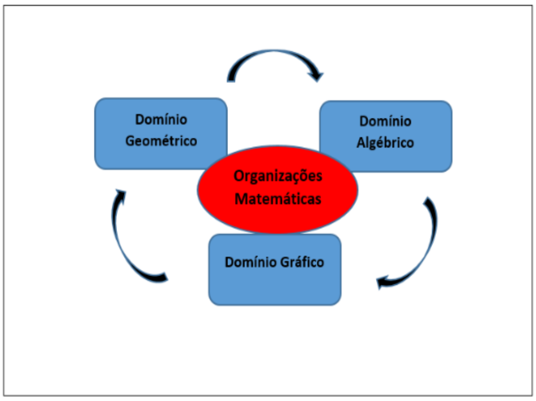
E dessas reflexões, pensamos a parábola em três diferentes contextos com os quais atribuímos significados para a proposta de inter-relações no espaço GAG:

– A parábola como conjunto de pontos no plano que verificam certa relação referente a uma diretriz e um foco (domínio Geométrico). Nesse ponto de vista da Geometria Analítica, a parábola também pode ser compreendida como uma equação canônica;

– A parábola como conjunto de pontos do plano que determina uma equação (domínio Algébrico). Desse ponto de vista, a parábola é uma função quadrática;

- A parábola como gráfico correspondente a uma equação quadrática (domínio Gráfico).

Figura 2 - Esboço do espaço GA



Fonte: Carvalho (2019)

Compreendemos o espaço GAG como um micromundo de confrontação de mídias e meios, de perguntas e respostas, em que o sujeito acessa e representa por meio de sua Praxeologia Matemática um recorte do objeto matemático, especialmente quando se trata dos domínios geométrico, algébrico e gráfico.

Ademais, as questões nesse esboço de análise a priori, foram rescritas na forma de tarefas. O mesmo foi feito com as perguntas propostas pelos colaboradores da investigação no desenvolvimento do PEP. A título de exemplificação, vamos ao tempo que apresentamos a tarefa T, transformação sofrida pela Q_{iii}, e abrimos a praxeologia da mesma.

T1 – (Q_{iii}): Qual o lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano, cujas distâncias a um ponto E pertencente a essa curva e a uma reta dada guardem entre si uma relação constante?

Técnica – t_1: Instrumentalizados, no que tange ao uso do Geogebra, e imbuídos da postura de confrontar diferentes mídias e meios, os estudantes buscarão, dentre as cônicas conhecidas (parábola, hipérbole e elipse), a que responde à referida questão.

Uma vez identificada a parábola, um caminho será: seguir um roteiro de construção dessa cônica, que considere a definição de ponto focal e reta diretriz, partindo da construção dessa reta e determinando o ponto que descreve o lugar geométrico, a partir do traçado de mediatriz perpendicular, a partir de um ponto sobre a reta diretriz e fora dela, conforme roteiro a seguir:

No Geogebra:

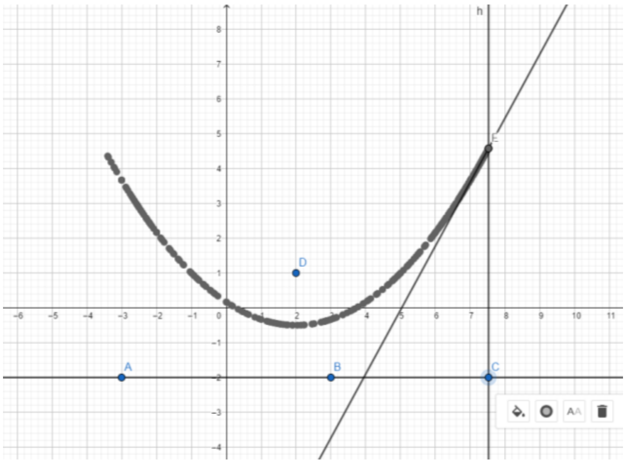
I) Marcar dois pontos A e B no plano; II) Traçar uma reta que passe pelos pontos A e B;

III) Marcar um ponto C sobre a reta AB; IV) Marcar um ponto D fora da reta AB; V) Traçar a mediatriz dos pontos C e D; VI) Traçar uma perpendicular à reta AB por C; VII) Marcar a intersecção da mediatriz com a perpendicular, ponto E; VIII) Habilitar rastro do ponto E;

IX) movimentar o ponto C, sobre a reta AB.

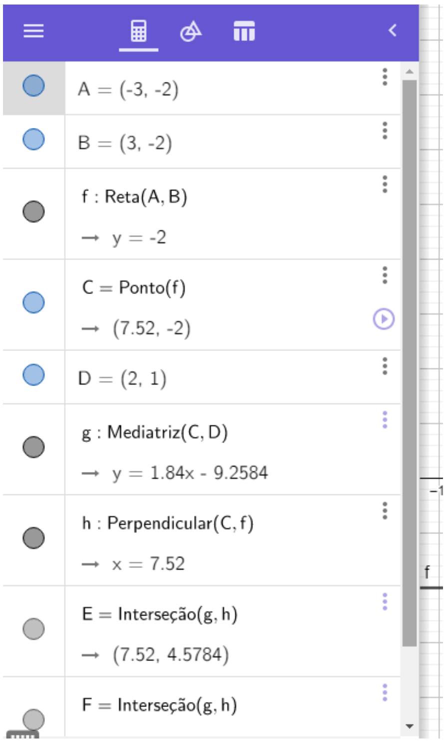
As referidas ações indicadas na construção da parábola no Geogebra, são subtarefas que compõem técnicas consideradas, no âmbito da TAD, ingredientes da técnica.

Figura 3 – Construção do lugar geométrico (parábola) no Geogebra



Fonte: Carvalho (2019).

Figura 4 – Protocolo de construção do lugar geométrico (parábola) no Geogebra



Fonte: Carvalho (2019)

Do discurso tecnológico-teórico [Θ, Θ] destacamos que a tarefa T1 não está alicerçada apenas na técnica apresentada acima, que resultou na figura 3, caminho que utiliza propriedades geométricas básicas. O do Geogebra permite a construção do lugar geométrico de forma que não se perceba a relação entre os entes geométricos fundamentais para a construção passo a passo. Para além dessa observação, imbuídos da dialética de perguntas e respostas, os futuros docentes podem realizar alguns questionamentos (QFD_i – questionamento dos estudantes), tais como:

QFD_1: Que relação é estabelecida nessa cônica construída de modo que possamos dizer que se trata da representação de uma função quadrática?

A questão acima dá indícios de que houve uma aceitação, por parte dos colaboradores do estudo, do Paradigma de Investigação e Questionamento do Mundo, que se opõe ao monumentalismo do saber. Ao tentar responder essa questão, há uma escolha de tocar no saber de modo que, na prática, a atividade matemática do estudante, do futuro professor, do próprio professor, não seja análoga somente à do matemático, mas também à do biólogo, pois, implicitamente, surge o desejo de dissecar o objeto.

QFD_1 pode desencadear outras, como o que ocorre ao se deslocar o ponto E, que descreve o lugar geométrico? O lugar geométrico será alterado? A diretriz será deslocada? A condição de equidistância entre o ponto E e foco e a reta diretriz será mantida se desloco apenas o foco? Essa construção é ou não uma função? O que garante que seja uma função? Se a parábola é construída a partir de uma secção de um cone circular, poderá representar uma função?

Essas inquietações descritas acima, foram tomadas por nós, na investigação, como postura típica da dialética de perguntas e respostas, onde o que move o Percurso de estudo não são as respostas, mas as perguntas.

As questões apresentadas acima corroboraram para propormos a seguinte questão geratriz do PEP, dispositivo experimentado de acordo com a segunda fase que explicitamos anteriormente, embasado no trabalho de Barquero, Bosch, Romo (2015).

Q_0: Existe um lugar em que qualquer objeto estaria protegido de modo a não ser atingido por um lançador ao efetuar disparos com uma velocidade supostamente constante e em diferentes ângulos?

Ensejamos com essa Q_0 a construção de um percurso com atividades integradas pelo mesmo discurso tecnológico-teórico. Apesar de não ter sido nosso objetivo controlar o desenvolvimento do PEP, pela incompatibilidade epistemológica, a análise, *a priori*, nos permitiu antever alguns possíveis caminhos a serem seguidos pelos participantes da investigação frente à questão Q_0, o que também auxiliou na nossa tarefa investigativa de condições de integração de noções didáticas no *logos* das Praxeologias Matemáticas.

O enunciado de Q_0 conduziu os sujeitos da pesquisa a uma tarefa no contexto da Física (estudo dos movimentos), e desse modo poderia conduzir os trabalhos à busca de modelos prontos que pudessem representar o que se pede no enunciado. De forma imediata, por conta do contrato didático implicitamente construído, os participantes, segundo esta análise, deveriam tentar responder à questão sem dar conta da insuficiência de dados para procedimentos algoritmizados. Não se pode dizer que a palavra lugar" pode remeter a noção de lugar geométrico e, portanto, no contexto geométrico-algébrico, pode ser difícil pensar uma solução em que a parábola apareça como conjunto de pontos no plano que verificam certa relação referente a uma diretriz e um foco.

Seguindo com a análise *a priori*, uma possível Q_1 desse PEP, pode ser: qual o lugar geométrico dos pontos do plano XY que jamais serão atingidos por um lançador ao efetuarem disparos com uma velocidade constante V_0 e diferentes ângulos de lançamento?

Nas etapas seguintes da Engenharia do PEP adotada, apresentamos e discutimos as sessões de experimentação, num total de quatro, e a validação, momento em que confrontamos as análises *a priori* com *a posteriori*. Vale ressaltar que o PEP é adaptado no que tange ao seu caráter de dispositivo de investigação.

A primeira sessão, constituiu o encontro dos colaboradores da pesquisa com a pergunta diretriz do PEP dispositivo didático. Em outras palavras, é o momento de encontro com uma suposta organização matemática.

Observamos que se manifestou o fenômeno contrato didático (BROUSSEAU, 2008), a medida em que, os colaboradores concentraram-se em apresentar respostas para Q_0. As repostas foram associadas a duas categorias:

Quadro 1 - categorias de repostas a Q_0.

CATEGORIA	EXEMPLO DE RESPOTAS
Evitação inicial do PEP	Os dados são insuficientes para responder ã questão
Transição da evitação a aceitação do PEP	Os dados são insuficientes para responder a questão, mas devemos considerar as seguintes hipóteses: Lançamento obliquo; vertical desconsiderando atrito e gravidade; horizontal.

Fonte: Carvalho (2019).

A seção *2*, foi caracterizada pela socialização das tentativas de respostas e questões derivadas. Na infraestrutura do PEP, levantar questões é o primeiro passo. No que tange a integração de noções didáticas temos dois caminhos: integração pelo tipo de tarefas e pelas técnicas (ARTAUD, 2019).

As perguntas propostas foram categorizadas da seguinte maneira:

C_1. O problema posto em Q_0 se resolve no campo dos conhecimentos da física. Nesse caso, consideramos as hipóteses de lançamento, seu ângulo e velocidade;

C_2. O problema posto em Q_0 se resolve no campo dos conhecimentos matemáticos. Considera-se a ideia de lugar geométrico;

C_3.O problema posto em Q_0, se resolve com a amalgamação de técnicas e noções da Física e Matemática. Parte-se da ideia do tipo de lançamento, sem deixar de considerar simultaneamente a ideia de lugar geométrico.

As três categorias têm íntima relação com o discurso tecnológico- teórico que torna inteligível uma técnica padrão para uma alteração de Q_0, que permita chegar à ideia de parábola de segurança.

Dos seis grupos de colaboradores, três têm as perguntas associadas a categoria C1, a exemplo do grupo 6 que enunciou: *Uma bala é lançada com a velocidade inicial de* V_o *=15m/s formando um ângulo de 45o com a horizontal. Qual o alcance máximo?*

Os três grupos mantiveram a noção de alcance associada a um projétil, vinculando a Q1 a Q0. Vamos apresentar a praxeologia completa do referido grupo, de forma que se possa notar a vinculação com a ideia de alcance, mas num sentido que mostra a necessidade de inclusão de outros elementos no enunciado da questão. Mas Q1 é explicada na linguagem de tarefa.

Foi na seção 3 que os colaboradores propuseram as questões Q2. Para estas consideramos as mesmas categorias prévias apresentadas acima, mas nas consequências didáticas que seguem logo após as questões discutimos as categorias abertas.

Concentramos a título de exemplo as perguntas elaboradas e ancoradas na categoria C1, com questões de quatro dos seis grupos.

Quadro 2 - Questões derivadas do PEP na categoria 1

GRUPO	QUESTÃO Q2 PROPOSTA
1	*Qual o alcance máximo quando o ângulo varia no intervalo [0, 90] graus?*
2	*Qual a função horária do espaço na horizontal?*
5	*Considere os ângulos notáveis no intervalo:* $0° \ll \alpha \ll 180°$ *(0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° e 180°). Identifique o tipo de lançamento e o ponto máximo atingido pelo objeto lançado. (Considerando* v_0 *= 2m/s para todos os ângulos de lançamento).*
6	*Agora considere uma bala lançada com velocidade inicial de vo=15m/s e com o ângulo de lançamento com a horizontal no intervalo* $0° \ll \alpha \ll 180°$ *. Qual o alcance máximo?*

Fonte: Carvalho (2019)

Comparadas com as questões propostas na seção anterior, somente o grupo 5 promoveu modificações. Consistiu na restrição, na proposição da questão, o significado do objeto do conhecimento a categoria C_1, ou seja, migrou da categoria C_3, que dá conta da amalgamação de técnicas da Física e Matemática, uma simbiose da concepção do status da parábola, para o que trata da resolução no campo dos conhecimentos da Física, ainda considerando as hipóteses de lançamento.

Como houve modificação na proposição da questão do grupo 5,

$$x = \frac{4}{10} . sen\ 90°$$
$$x = \frac{4}{10}$$
$$x = \frac{2}{5}\ metros$$

apresentaremos a praxeologia para a questão Q_2 do referido grupo, adaptando antes Q_2 para tarefa.

T_{2G5}: Considere os ângulos notáveis no intervalo: $0° \ll \alpha \ll 180°$ (0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150° e 180°). Identificar o tipo de lançamento e o ponto máximo atingido pelo objeto lançado. (Considerando v_0 = 2m/s para todos os ângulos de lançamento).

Técnica 2 do grupo 5 (t 2G5): O grupo, utilizando ostensivo escritural, aponta três hipóteses de lançamento que podem ser consideradas para responder a Q_2:

O ângulo de 90° é o único de lançamento vertical; os ângulos de 0° e 180°são de lançamentos horizontais e os demais ângulos de 30°, 45°, 60°, 120° e 150° são lançamentos oblíquos.

Em seguida, apresentam outra parte da resposta, utilizando ostensivo escritural, mas na forma algébrica, como segue na figura 5.

Figura 5 - Técnica do grupo 5 para resolução de Q_2.

$$x = \frac{|\vec{V_0}|^2}{g} . sen\ 2\theta$$

$Para\ \theta = 0°$

$$x = \frac{2^2}{10} . sen\ 2.0$$
$$x = \frac{4}{10} . sen\ 0$$
$$x = 0\ metros$$

$Para\ \theta = 30°$

$$x = \frac{2^2}{10} . sen\ 2.30°$$
$$x = \frac{4}{10} . sen\ 60°$$
$$x = \frac{4}{10} . \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{2\sqrt{3}}{5}\ metros$$

$Para\ \theta = 45°$

$$x = \frac{2^2}{10} . sen\ 2.45°$$

Fonte: Carvalho (2019)

Em termos de discurso que justifique a técnica apresentada pelo grupo 5, destacamos que foi mantido o foco na ideia de alcance. Isso revela que a técnica foi alicerçada na hipótese que o lançamento do projétil é no sentido horizontal. Manifesta-se neste caso a dialética das mídias e meios, no modelo gráfico apresentado para a situação.

Destacamos que um elemento do discurso tecnológico-teórico, que tem aparecido de forma implícita nas soluções das questões propostas pelos grupos é o movimento oblíquo, compreendido como resultante entre dois movimentos: o movimento vertical (y) e o horizontal (x). Sabemos que, na direção vertical, o corpo realiza um Movimento Uniformemente Variado, com velocidade igual a V e aceleração da gravidade (g), aspecto desconsiderado na técnica do referido grupo. Já na direção horizontal, o corpo realiza um Movimento Uniforme com velocidade igual a $\vec{V}$. Desse modo, internalizou-se o alcance como a distância entre o ponto do lançamento e o ponto de queda do corpo, onde y = 0, o que justifica o fato de o grupo considerar apenas a componente horizontal do vetor $\vec{V}$ sem, no entanto, utilizar adequadamente as equações que apresentamos na sequência.

Para calcular o movimento do projétil na Q_2 elaborada pelo grupo 5, é necessário decompor o vetor $\vec{V}$ em seus componentes, o que requer conhecimentos da trigonometria.

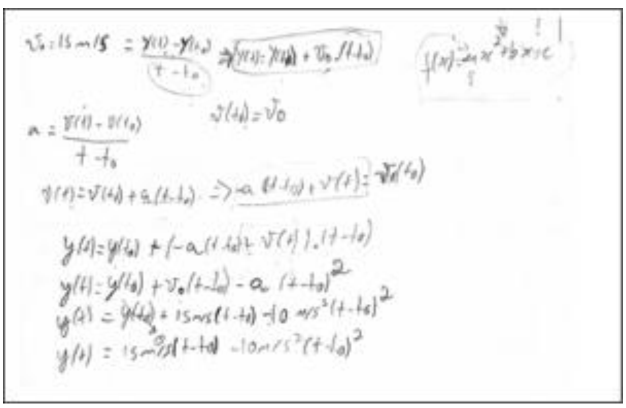
Uma vez realizada a decomposição de vetores, se a intenção é determinar o deslocamento que o projétil fez na horizontal, será necessário, ainda, tomar a função do espaço, representada pela equação $x = x_0 + v_0x \, . \, t$, e considerar o componente horizontal do vetor V_0, dada por $v_{ox} v0x = |\vec{vo}\,| . \,cos\theta$, implicando numa alteração na função do espaço para x = x_0 +$|\vec{v_o}|. \, cos\theta . \, t$.

No que tange à fórmula especificamente utilizada pelo grupo, visualizamos um salto desde a ideia do vetor velocidade e seus componentes até o alcance máximo dado por $x = \frac{|\vec{v_o}|^2}{g}$. senθ, e não é factível inferirmos sobre a consciência do processo de chegada à equação acima.

T_{2G6}: *Agora considere uma bala lançada com velocidade inicial de vo=15m/s e com o ângulo de lançamento com a horizontal no intervalo* $0° \ll \alpha \ll 180°$ *. Determinar o alcance máximo.*

Técnica 2 do grupo 6 (t2G6): Conforme imagem a seguir:

Figura 6: Técnica usada pelo grupo 6



Fonte: Carvalho (2019).

No que tange o discurso tecnológico-teórico [Θ, Θ] presente nos registros desse grupo, a solução apresentada já esboçou uma tentativa de aproximação com um modelo quadrático, visto que entendem que a trajetória do projétil é parabólica, uma vez assumido o lançamento oblíquo como o mais adequado para desenvolvimento do estudo em torno de Q_0.

E como consequências didáticas das tarefas embasadas na questão Q2, destacamos que os ostensivos utilizados apontam para o objeto função. Além disso, as imagens conceituais identificadas pelo tipo de objeto ostensivo utilizado nas soluções da referida questão apontam para convergências entre enunciados elaborados e soluções que sinalizam outras categorias (CA), a saber:

CA1 – A solução para Q_0, que implica na proposição e solução de outras Q_S, quando utilizadas equações padrões da Física (estudo do movimento) não se associam diretamente a funções;

CA2 – A solução para Q0, que implica na proposição e solução de outras Q_S, quando utilizadas equações que fazem referência a $y = f(x)$ ou a forma y *ou* $f(x) = ax^2 + bx + c$, admitindo-se as variações das letras utilizadas, associam-se diretamente às funções.

Assim, o reconhecimento de modelos matemáticos para modelar fenômenos do movimento, implica no reconhecimento de que quando o corpo se movimenta mantém um certo padrão/regularidade em sua velocidade ou aceleração. Atentando-se ao que propõe o enunciado de Q_0, em que a velocidade de lançamento do projétil é dita constante, o deslocamento deve ter sido reconhecido por esse grupo e pelos demais que se apropriaram da ideia de movimento oblíquo para solucionar Q_0 e as derivadas dela como sendo uniforme. Isso os vincula à categoria C_{A1}.

No entanto, o grupo 6 já aponta para o reconhecimento de modelo matemático que modela fenômenos do movimento, mas o ostensivo algébrico utilizado denota uma imagem conceitual de funções como vistas no contexto do Ensino da Matemática (categoria C_{A2}).

A dialética de perguntas e respostas, de certo modo, mitiga os efeitos do fenômeno IAMI, de modo que se pode notar, pelos ostensivos utilizados, que os grupos se aproximam de nossa espera institucional, mas não apresentam, até a terceira seção, praxeologias que façam referência à parábola, seus status e relação com a função quadrática.

Mas das praxeologias matemáticas registradas pelos grupos de colaboradores da investigação, destacamos alguns aspectos matemáticos, que indicam de certo modo, que os grupos que se aproximaram da noção de lugar geométrico. Nas soluções das tarefas extraídas de Q_2, aproximam-se intuitivamente da noção de função, isso porque, em geral, uma curva no plano XY é o lugar geométrico *a priori*, e um gráfico a posteriori de uma equação que envolve duas variáveis x e y. Essa relação é explicitada por tarefas do tipo: dada certa equação, determine o lugar geométrico correspondente; ou: dado o lugar geométrico, definido sob certas propriedades, determine a equação correspondente.

E do ponto de vista da definição do lugar geométrico, e considerando os aspectos epistemológicos que afetam o *logos* da Praxeologia Matemática de um sujeito, tomamos uma formulação no contexto das transformações. Nesse caso, consideramos um conjunto de pontos que são imagens de um conjunto de pontos. Isso altera o status do objeto em questão, pois amplia o rol dos aspectos conceituais do lugar geométrico, que passa de uma visão clássica, em que é o conjunto de pontos que satisfazem uma determinada propriedade representada por uma construção geométrica realizada, por exemplo, num ambiente lápis e papel, normalmente enunciada em termos de distâncias a pontos, retas ou circunferências fixas no plano cartesiano (GÓMEZ-CHACÓN et al., 2016), para aquela supracitada.

Nessa segunda concepção, segundo Gómez-Chacón et al. (2016), se chamamos f de função: $M \rightarrow N = f(M)$, determinar o lugar geométrico de N é buscar o conjunto de todos os pontos f (M), o que pode ser expressado ainda por ‘um lugar geométrico é o conjunto de todos os pontos do plano que verificam uma propriedade definida’. Assim, se L é o lugar geométrico com propriedade P, se verifica que:

i) Todo ponto de L possui essa propriedade P;

ii) Todo ponto que possui a propriedade P pertence a L, condição que pode ser reescrita da seguinte maneira:

iii) Todo ponto não pertencente a L não possui a propriedade P.

Essas considerações, integradas ao *logos* da Praxeologia Matemática de um determinado grupo, na nossa experimentação, poderia conduzir a uma equação entre as variáveis x e y (equação do lugar geométrico L) e, nesse caso, para Gómez-Chacón et al. (2016), o lugar geométrico se definiria de modo funcional, intenção didática da nossa proposta.

Ademais a última sessão de experimentações do PEP, a qual denominamos esboço de finalização praxeológica, nos permitiu refletir sobre a necessidade de tal finalização e as dificuldades para consegui-la num contexto de praxeologias abertas. Entendemos por finalização praxeológica, um processo em que a intenção didática quanto ao objeto de ensino é revelada ao estudante e este apresenta Praxeologia Matemática compatível com tal intenção. No caso dessa investigação, o estudante apresentará uma equação que represente a parábola de segurança.

Seguiremos a estrutura da descrição das seções anteriores, apresentadas acima. No entanto, cabe ressaltar que alguns grupos não propuseram essa terceira questão Q_3, o que nos permitiu inferir que, intuitivamente, para estes já teria ocorrido uma suposta finalização praxeológica na praxeologia apresentada na seção anterior. Após o quadro x no qual apresentamos síntese do trabalho do grupo nessa última sessão, focamos nas praxeologias do grupo 3, pois este foi o que apresentou uma questão diferente da última sessão, além de se aproximarem da nossa intenção didática na investigação.

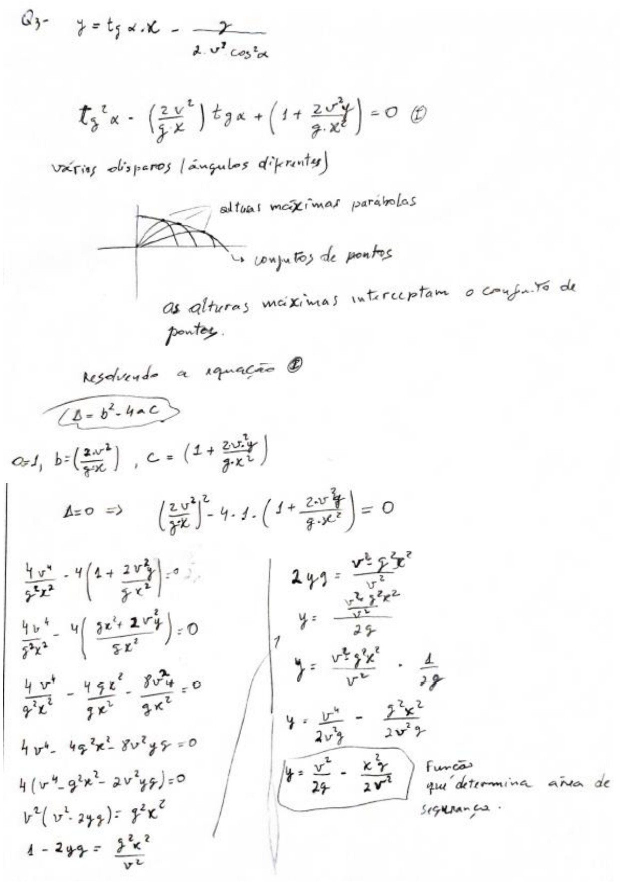
Quadro 3: Questões derivadas do PEP, última sessão

CATEGORIA	GRUPO	QUESTÃO Q_3 PROPOSTA
C1	2	*Determine o tempo que o projétil leva para atingir a altura máxima. É possível, diante disso, determinar o valor de x na função horária da questão anterior?*
C3	3	*Sabendo que o alcance de um projétil é de y metros de altura e x metros de comprimento, e considerando que o lançamento é oblíquo, com velocidade constante, com ângulos num intervalo [0, 180] graus, em qual lugar qualquer objeto estaria protegido dos projéteis lançados?*
	4	*Suponha uma velocidade constante x, nas condições das questões anteriores. Qual a distância entre o lançador P e um objeto não localizado no solo?*
	5	*Considerando as questões anteriores e suas respostas, é possível apontar um lugar seguro para o objeto?*

Fonte: Carvalho (2019).

A técnica 3 do grupo 3 (t_{3G3}), que se aproxima da intenção didática do PEP, ou seja, que se aproxima da noção de uma equação quadrática para representar a relação funcional é mostrada na figura a seguir:

Figura 7 - praxeologia do grupo 3



Fonte: Carvalho (2019)

O discurso tecnológico-teórico [θ, Θ] que justifica a técnica mostrada na figura 7, se alicerça nas seguintes noções:

- Escrita de uma lei que descreve uma família de trajetórias parabólicas;

- Isola-se em seguida a fórmula da trajetória do projetil em, e a partir disso, determinando o ângulo que o projetil a uma velocidade v, sujeito a ação da gravidade g, devendo ser disparado para atingir um ponto (x, y), analisa-se três casos:

$$\Delta > 0, \Delta < 0 \; e \; \Delta = 0,$$

Isso porque, identifica-se que esta equação é quadrática. Como os lançamentos sob diferentes ângulos vão descrever distintas parábolas, é possível perceber que as alturas máximas destas, formam um conjunto de pontos (lugar geométrico dos pontos que são pontos máximos de parábolas) e considerando onde um objeto seria atingido, chega-se a escolha do caso $\Delta = 0$.

- O último passo é calcular Δ igualando-o a zero, o que permite escrever y em função x, uma equação quadrática, logo um representante de uma função quadrática.

No que se refere as consequências didáticas das tarefas elaboradas pelos grupos de colaboradores da pesquisa, primeiro precisamos salientar que as categorias abertas das questões se alteram parcialmente. Observe-se conforme descrita abaixo, que a noção de função quadrática, não surge nas praxeologias apenas quando do uso das notações comumente utilizadas no estudo das funções em Matemática: $y = f(x)$, no entanto, ao deparar-se com uma equação como no caso do grupo 3, produziu-se uma imagem conceito de função a ponto de ocorrer o registro da palavra função na solução dada para a tarefa. A categoria 2, após alteração, denominamos C_{A2}, e a mesma foi descrita: a solução para Q_0, que implica na proposição e solução de outras Q_s, quando utilizadas equações que fazem referência a ideia de lugar geométrico mesmo sem utilização das notações $y = f(x)$ ou a forma $you f(x) = ax^2 + bx + c$, admitindo-se as variações das letras utilizadas, associam-se diretamente à noção de funções.

Pelo enunciado inferimos a intenção e as hipóteses da situação dos grupos, mas são as soluções (técnicas) que de fato dão indícios mais fortes para vincular as questões às categorias abertas. A palavra função não é dita ou escrita nos registros do grupo 3, mas referem-se a elementos que são específicos da parábola quando seu status é de gráfico da função quadrática, e não fazem uso de expressões que liguem essa noção ao status de cônica. Esse grupo é mais incisivo nesse ponto, utiliza outras noções como o cálculo do Δ e após análise que acreditamos ter ocorrido, pois não foi explicitada, consideraram a necessidade de igual $\Delta = 0$ para escrever y em função de x, o que fizeram apresentando um modelo funcional quadrático, mostrado na figura 7.

Ao menos nesse contexto de experimentação, a aproximação com a noção de lugar geométrico é um elemento que está na base de constituição do saber função quadrática e sua noção/conceito e a depender do tipo de tarefa proposta numa determinada instituição pode ser evocado e conduzir os sujeitos da instituição a noção da função quadrática.

As formas que as tarefas são elaboradas darão o norte para o tipo de técnica e os ostensivos que serão utilizados, além de aproximar ou não um sujeito do objeto que foi intenção didática do PEP experimentado. Desse modo, foi imprescindível os grupos chegarem e manterem o foco na noção de lugar geométrico, para fazerem a transição da situação da física para um modelo matemático determinado.

A própria definição de parábola de segurança (PS) parte da ideia de lugar geométrico. Enxergar as trajetórias parabólicas na situação e considerando a variação correta dos ângulos de lançamento pode elucidar os procedimentos e propriedades que permitam chegar a noção da PS, como foi o caso da praxeologia registrada pelo grupo 3.

Como vimos na experimentação do PEP que intentou mobilizar a noção de parábola de segurança para levar os sujeitos de uma instituição ao encontro da parábola como função, as técnicas dependem dos ostensivos utilizados, que por sua vez mantêm uma relação com os não ostensivos (as noções, conceitos, etc.). São esses objetos não ostensivos que auxiliam na justificativa para validade da técnica. Como ingredientes das técnicas, no caso especifico do grupo 3 destacamos: modelar situações de dependência entre duas grandezas por fórmulas; esboçar gráfico de dependência entre duas grandezas; determinar uma quantidade a partir de outra; e estudar as variações de uma quantidade.

O referido grupo, tem como modelo o conjunto de três tarefas propostas no PEP, para as quais tentam implicitamente unir tarefas e técnicas por propriedades comuns a elas. A síntese dessas tarefas e técnicas, nos parece um esboço de uma organização matemática local, haja vista, as três tarefas diferentes e suas técnicas terem em comum um mesmo discurso tecnológico-teórico como elemento integrador e aparentemente serem tipos de tarefas de um mesmo gênero.

Ademais, com a mobilização da dialética de mídias e meios, verifica-se afirmações contidas nas técnicas e controla-se os resultados que permitem chegar o mais próximo possível da resposta esperada institucionalmente linkada com a noção de parábola de segurança. Verificar e controlar as técnicas, nesse contexto, exprimem tarefas que não são matemáticas, mas essencialmente didáticas ao *logos* da praxeologia matemática em discussão.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Com o intento de analisar o alcance de um modelo praxeológico alternativo, implementado por um PEP, na reconstrução de praxeologias de futuros professores de matemática, quando integramos no *logos* das praxeologias matemáticas destes, noções didáticas, discutimos neste artigo as condições e restrições dessa proposta didática a partir da abordagem da função quadrática e do duplo status da parábola.

Isso implica dizer, é mais um trabalho para fortalecer uma comunidade de estudo de futuros professores de Matemática, fortalecimento este, pensado no sentido de superação dos efeitos da incompletude da atividade matemática institucional na formação de professores de matemática, o que na prática pode ser representado pela substituição gradativa nas práticas institucionais, de respostas por perguntas.

Sabemos que muitos fatores afetam a área educacional, mas significativamente existem alguns que podem ou não fomentar gestos de estudo, que parecem aproximar ou afastar os sujeitos de elementos esperados na atividade matemática (o sujeito fazendo matemática).

Essa pesquisa mesmo, foi influenciada vigorosamente por dois gestos de estudo, e da necessidade de provarmos nossas hipóteses de trabalho, especialmente na sua entrada experimental, brevemente descrita no tópico resultados e discussões.

Quanto a implementação do PEP, além de um novo modelo praxeológico alternativo (por se se opor aos modelos engessados pelas obras didáticas e práticas dominantes nas instituições) reconstrói também o *topos* da Instituição I, além do que já sabemos sobre a reconstrução de pais de estudantes e professores.

Por esse motivo, inferimos que o MPA, proposto e que se materializa pelo PEP experimentado, dá indícios de que a atividade matemática das pessoas participantes evolui sensivelmente da condição de uso de uma matemática conhecida, quando seu uso configura a tentativa de resolução de problemas, à atividade matemática expressada pela criação de uma nova matemática (nova forma de ver sua razão de ser e utilizá-la).

Duas questões surgem das análises dos dados construídos na investigação recortada, a saber: a possibilidade de cobrir um currículo com a proposição e experimentação de modelos praxeológicos alternativos que se efetivem por peio de PEPs; e como inserir PEP no sistema de ensino e principalmente na formação de professores sem, no entanto, apresentara noções da didática, questionamento que compartilhamos com Jessen e Rasmussen (2018), além de integrar noções didáticas no logos da praxeologia matemática.

Duas noções foram cruciais, pois são descritas na literatura como gestos de estudo/dialéticas. Concentramos assim na dialética de perguntas e respostas e na das Mídias e meios. Como a dialética de perguntas e respostas, que está no coração do PEP está naturalmente imbricada no seu desenvolvimento, na produção ou reconstrução de praxeologias matemáticas, é visível sua presença no bloco do saber-fazer, onde são apresentadas as tarefas e técnicas, facilmente percebemos ao acompanhar a descrição dos dados da pesquisa. O que não está explicito, e depende de um esforço interpretativo maior, é sua presença no bloco tecnológico-teórico (*logos*).

Se no *logos* da PM, apresentam-se as propriedades matemáticas que justificam técnica usadas na resolução de tarefas, como o gesto de estudo de perguntas e respostas estariam integrados a um aspecto da PM que parece estritamente matemático?

Segundo um critério fundamental da TAD, que é o da indissociabilidade entre o saber-fazer e o logos, a noção de dialética de perguntas e respostas está em primeiro plano ligada ao bloco do saber-fazer, mas por este ser vinculado ao do *logos*, tal dialética interfere na proposição de discursos que justifiquem o saber-fazer desde a elaboração de tarefas até respostas.

No quesito específico tarefas propostas no desenvolvimento do PEP, e da análise dos dados construídos, concluímos que as tarefas são complementares para todos os grupos, pois uma revela a razão de ser da outra, e isso é o que motiva o percurso de estudo. Elas devem ser a condição que faz com que existam relações com os objetos, tanto em pessoas como em instituições.

E o PEP dá um novo significado a essa relação entre pessoas, objetos matemáticos e as instituições. É o que mencionado em alguns momentos como razão de ser do objeto. Essa é uma condição que pode ser criada em torno tanto do objeto como da instituição na qual o objeto é reconhecido.

Consideramos uma restrição importante para a investigação, não chegarmos a compreensão das maneiras como um colaborador da pesquisa compreendia os conceitos, por exemplo de parábola ou de função, isso porque mantivemos o foco nas praxeologias de praxeologias de pequenos grupos de estudo, a priori registros do que foram consenso para os membros do grupo. E outro fator, é que não demos conta de descrever ou analisar as condições para engajamento dos futuros professores na proposição de percursos de estudo e pesquisa.

Ademais, o PEP permite a gestão do tempo didático, via dialéticas que são incorporadas ao seu planejamento, gestão e experimentação. Falamos da dialética de perguntas e respostas, mas outra noção didática que pretendíamos analisar a integração foi a das mídias e meios. Esse gesto de estudo parece ser crucial também para gestão do tempo, pois requer uma postura de busca de informações que não deve ocorrer no tempo de ensino, mas no de aprendizagem, e que permite confrontar diferentes informações o que não parece ser viável no tempo didático na sua dimensão tempo de ensino que coincida com o cronológico.

REFERÊNCIAS

ARTAUD, M. Des liens entre l'organisation de savoir et l'organisation de l'étude dans l'analyse praxéologique. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.21, n.4, p. 248-264, 2019.ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9, n.3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; ROMO, A. A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In: CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Charles University in Prague, Faculty of Education; CERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.809-815.BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2011.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Trad. Luís Antero Reto e Augusto Pinheiro. São Paulo: Martins Fontes, 1977.

BERMÚDEZ, E. A.; MESA, J. H. L. Estudio histórico-epistemológico y didáctico de la parabola. **Praxis & Saber**, Boyacá, Vol. 9, Nº. 19, p. 63-88, jan./Apr. 2018. Disponínel em: http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2216-01592018000100063&lng=en&nrm=iso- Acesso em 20 mar 2018.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas**: Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008. 128p.

BOSCH, M. « Plans d'épargne » et modélisation algébrique. Vers une ingénierie didactique des PER. Dans : MARGOLINAS, C. et al. (Éds), **En amont et en aval des ingénieries didactiques.** Grenoble: La pensée sauvage, 2009, p. 81-108.

CARVALHO, E. F. **Integração de noções didáticas nas Praxeologias Matemáticas no estudo da função quadrática**. 2019. 164p. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia/Universidade Estadual de Feira de Santana, 2019.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, [s. l.], v. 19, n. 2, p. 221- 266, 1999.

_________. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**. 2007. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/ . Acesso em: 18 dez. 2018.

CHROBAK, R. Mapas conceituales y modelos didacticos de professors de química. In: CONFERENCE ON CONCEPT MAPPING, 2, CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE MAPAS CONCEPTUALES, 2, 2006, San José, Costa Rica. **Anais eletrônicos**. San José: CMC, 2006, Sept. 5 – 8, 2006. Disponível em: http://cmc.ihmc.us/cmc2006Papers/cmc2006-p215.pdf. Acesso em: 09 fev. 2010.

DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A.; PERNAMBUCO, M. M. **Ensino de ciências**: fundamentos e métodos. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F.; TEIXEIRA, B. F. O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica. **Educação Matemática Pesquisa**, v.

20, n. 3, jan. 2019. ISSN 1983-3156. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/40112>. Acesso em: 23 jul. 2019.

GARCÍA PÉREZ, F. F. Los modelos didácticos como instrumento de análisis y de intervención en la realidad educativa. **Revista Electrónica de la Universidad de Barcelona**, Barcelona, n. 207, 2000. Disponível em: http://www.ub.es/geocrit/b3w207.htm. Acesso em: 20 fev. 2021.

GARNICA, A. V. M. Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos. **Mimesis**, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35-48, 2001.

GOMEZ-CHACON, I. M. et al . Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal y Profesional con Distintas Herramientas. **Bolema**, Rio Claro, v. 30, n. 54, p. 67-94, Abr. 2016. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2016000100067&lng=en&nrm=iso>. Acesso em 12 jan. 2019.

JESSEN, B. E.; RASMUSSEN, K. What Knowledge do in-service teachers need to create SRPs? In: **Pre-proceedings of the Sixth International Congress of the Anthropological Theory of Didactics**, 2018, p. 339-351. https://citad6.sciencesconf.org/resource/page/id/8

MATHERON, Y. Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques. **Petit x**, [s. l.], n. 54, p. 51-78, 2000.

MENEZES, P. J. D.; CARVALHO, E. F.; LOPES, L. FIGUEREDO. Modelo Didático-Praxeológico para Ensino de Vetores no Ensino Médio: Possibilidades de Trabalhos na Transição para o Ensino Superior . **Revista Ensin@ UFMS**, v. 2, n. Esp., p. 164-185, 15 dez. 2021.

PERRIN-GLORIAN, M. J. L'ingénierie didactique a l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement des ressources et formação des enseignants. in Margolinas et all.(org.): **En amont et en aval des ingénieries didactiques**, XVa École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (PUY-de-Dôme). Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 57-78, 2009.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação de Portugal, 2009.

PORLÁN, R.; A. RIVERO Y.; MARTÍN, R. Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I: teoría, métodos e instrumentos. **Enseñanza de las Ciencias**, [s. l.], v. 15, n. 2, pp. 155-171, 1997.

RESENDE, G.; MESQUITA, M. G. B. F. Principais Dificuldades Percebidas no Processo Ensino-Aprendizagem de Matemática em Escolas do Município de Divinópolis, MG. **Educ. Matem. Pesq**, v.15, n.1, p.199-222, 2013.

REZENDE, W. M.; PESCO, D. U.; BORTOLOSSI, H. J. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. **Anais** da 1ª Conferência Latino Americana de GeoGebra. ISSN 2237-9657, p.74- 89, 2012.

SPAGNOLO, F. L. Analisi Statistica Implicativa: uno dei metodi di analisi dei dati nella ricerca in didattica delle Matematiche. In: Troisième Rencontre Internazionale A. S. I. (Analyse Statistique Implicative). **Actas [...]** Palermo, Itália, Octobre , 2005.

VANDEBROUCK, F. Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, Strasbourg, v. 16, p. 149-185, 2011.