



ARTIGO ORIGINAL

## DIALÉCTICAS QUE EMERGEN EN UN ESTUDIO BASADO EN CUESTIONES EN TORNO A FUNCIONES SENO Y COSENO

PERCY LUJAN ROSADIO

Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas-PUCP. percy.lujan@pucp.pe

CINTYA GONZALES HERNÁNDEZ

Pontificia Universidad Católica del Perú, Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las  
Matemáticas-PUCP. cintya.gonzales@pucp.pe

**Resumen:** El presente trabajo examina el Recorrido de Estudio e Investigación (REI) mediante la descripción y el análisis de las dialécticas, entendidas dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) como aquellos gestos de los estudiantes que contribuyen en la construcción de un medio capaz de darle respuesta a una pregunta inicial, dentro de un proceso de investigación y cuestionamiento permanente. El REI se desarrolla en un aula de estudiantes correspondiente al último grado secundario del sistema peruano, y parte de la cuestión generatriz ¿Cómo reacciona un edificio frente a un sismo? Los alumnos buscan dar respuesta a la cuestión abordando los marcos de la física y la matemática y a partir de la relación entre el movimiento circular uniforme y el movimiento armónico simple se encuentran con la función seno y la función coseno. En este REI se manifiestan en los estudiantes principalmente las dialécticas del Individuo y Colectivo, del Estudio e Investigación y del Media Medio, reflejando un conjunto de actitudes y acciones que los acerca al paradigma de la investigación y cuestionamiento del mundo.

**Palabras-clave:** REI, Dialécticas, Modelación.

## DIALECTICS THAT EMERGE IN A STUDY BASED ON QUESTIONS AROUND THE SINE AND COSINE FUNCTIONS

**Abstract:** The paper examines the Study and Research Path (SRP) through the description and analysis of dialectics, understood within the Anthropological Theory of Didactics (ATD) as those gestures of the students that contribute to the construction of a capable environment to give an answer to an initial question, within a process of research and permanent questioning. The SRP is developed in a classroom of students corresponding to the last secondary grade of the Peruvian system, and part of the generating question: How does a building react to an earthquake? The students seek to answer the question by approaching the frameworks of physics and mathematics and based on the relationship between uniform circular motion and simple harmonic motion, they find the sine and the cosine function. In this SRP, the dialectics of the Individual and Collective, of Study and Research and of the Media milieu are manifested in the students, reflecting a set of attitudes and actions that bring them closer to the paradigm of research and questioning of the world

**Keywords:** SRP, Dialectics, Modelling.

**ARTIGO ORIGINAL**

## INTRODUCCIÓN

En la última década, hay una producción creciente de investigaciones en torno a los procesos de modelización en la enseñanza de las Matemáticas, y en actividades de investigación desarrolladas por los estudiantes. Dentro de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999) se plantean estas acciones como necesarias para superar el paradigma denominado Pedagogía de la visita de obras y monumentalización del saber. La pedagogía tradicional y proceso de obsolescencia en donde los estudiantes conocen y reproducen algunos saberes matemáticos sin considerar en su estudio alguna razón de ser. En ese sentido, desde la TAD se hace necesario un modelo en donde el estudiante pueda ser el principal agente de su proceso de estudio. Este nuevo paradigma corresponde a una nueva pedagogía: La Pedagogía de la Investigación y Cuestionamiento del Mundo.

Dentro del nuevo paradigma, el dispositivo didáctico que se adecúa mejor sus propósitos es el Recorrido de Estudio e Investigación. En el cual a partir de una pregunta inicial y producto de un cuestionamiento constante se genera un medio didáctico capaz de dar respuesta a la pregunta planteada, desarrollándose un proceso de modelización y un encuentro con distintas praxeologías. El desarrollo del REI puede ser evaluado mediante gestos didácticos manifestados en los estudiantes, denominados por Chevallard (2007, 2013) como dialécticas. El presente estudio pone de manifiesto las que según Barquero, Bosch y Romo (2019) son las dialécticas centrales en todo proceso de estudio y fundamentales para la completitud del esquema herbartiano: la dialéctica de cuestiones-respuestas, la de los medio-media y la del individuo-colectivo.

En consecuencia, mediante la identificación, descripción y análisis de las principales dialécticas observadas en los estudiantes al desarrollar el REI, se busca contribuir en el marco de la didáctica de las matemáticas dentro del nuevo paradigma, donde la modelización, la investigación y la autonomía de los estudiantes sean los pilares principales.

## ASPECTOS TEÓRICOS

Los Recorridos de Estudio e Investigación representan un dispositivo didáctico de vanguardia que hace frente al fenómeno de la monumentalización del saber matemático y la visita de obras. Los REI tienen como cualidad el encuentro, la construcción o la reconstrucción de praxeologías, producto de un cuestionamiento constante a partir de una pregunta inicial denominada cuestión generatriz  $Q_0$ , planteada a estudiantes "X" bajo la guía de un director de estudio, quien puede ser un profesor "y" o un conjunto de profesores "Y". El objetivo es brindar una respuesta  $R^\heartsuit$  a  $Q_0$ . Este conjunto de elementos es representado dentro del esquema herbartiano:  $[S(X; Y; Q) \rightarrow M] \rightarrow R^\heartsuit$ , en donde juega un papel importante la conformación del medio M, Esto es producido a través de un conjunto de acciones dialécticas donde el cuestionamiento, el diálogo, la confrontación y la interacción, generan desarrollo. En consecuencia, la incorporación de elementos al medio, tal como cuestiones derivadas  $Q_i$ , respuestas derivadas o resueltas  $R_j^\diamond$ , obras previamente establecidas  $O_k$  y datos empíricos  $D_m$  (NICASSO y BOSH, 2021) permite extender el esquema herbartiano de la siguiente manera  $[S(X; Y; Q) \rightarrow \{Q_i; R_j^\diamond; O_k; D_m\}] \rightarrow R^\heartsuit$ .

Respecto a la concepción del medio en la

TAD, esta se distingue de su significado tradicional al tener la capacidad de evolucionar de manera constante durante el proceso de estudio. Esto no se da de manera restrictiva y prescriptiva por una autoridad docente, sino por el desarrollo de un conjunto de relaciones, tal como lo indican Méjani y Matheron (2021). Relaciones entre sujeto y los objetos disponibles, los cuales tienen la posibilidad de brindar información en concordancia con la capacidad de interpretación de los estudiantes provocando la desestimación o incorporación constructiva al medio.

### Respecto a las dialécticas

Cañas (2010) indica que el término dialéctica deviene del verbo *dialégomai* que significa debatir y suele ser utilizado en distintos ámbitos con muchas otras acepciones. Sin embargo, la dialéctica ha sido motivo de reflexión durante una larga extensión de tiempo. Desde la antigua Grecia y bajo una perspectiva filosófica, según Cañas (2010), Heráclito planteaba que para arribar a la verdad era necesario la fuerza de contrarios. El mundo verdadero es el mundo de las dualidades. Además, menciona que la realidad, la naturaleza o la verdad es un proceso compuesto de elementos contradictorios, pero necesarios entre sí, y que en unidad y en tensión constante se armonizan y se desarrollan. Siglos más tarde, los planteamientos de Heráclito son retomados por Hegel. Él sistematiza el proceso dialéctico en ciclos compuestos de tres etapas, que posteriormente Marx simplifica y denomina Tesis, Antítesis y Síntesis. Estas son entendidas como una primera afirmación seguida de una negación o crítica de esa afirmación, para arribar a una superación y nueva afirmación. Luego, se

repite el ciclo nuevo y constantemente.

Este análisis del desarrollo por encuentro de elementos opuestos puede ser considerado para analizar también un proceso de desarrollo didáctico. De manera particular, Chevallard (2004, 2013) plantea las dialécticas como gestos o acciones didácticas en los estudiantes que permiten el desarrollo del REI. Bosch *et al.* (2019), consideran que la dialéctica es una praxeología o conjunto de praxeologías que posibilitan y motivan la superación productiva de dos movimientos o acciones opuestas. Por su parte, Parra y Otero (2017) indican que estas dialécticas no tienen un carácter dual, sino un proceso interactivo, una interrelación constante capaz de generar nuevos elementos, que de manera particular en el REI, son incorporados en el medio.

Siguiendo estas afirmaciones, se puede decir que en el ámbito de la didáctica y bajo la perspectiva de la TAD, las dialécticas son gestos o acciones en los estudiantes que motivan el desarrollo del REI. A través de cuestionamientos e interacción permanente, entre los sujetos que realizan el estudio, pero también de hacia los objetos de estudio. Y cuya superación permite incorporar nuevos elementos al medio didáctico, el cual brindará una respuesta plausible de la cuestión generatriz de investigación planteada.

Se han planteado nueve dialécticas, de las cuales, para los fines del presente estudio, se describen las que fueron de mayor uso y notoriedad en los estudiantes.

1. Dialéctica del estudio y la investigación, (denominada de las preguntas y respuestas) buscan desarrollar el REI mediante la interacción entre respuestas-preguntas y también entre obras disponibles y búsqueda de nuevas obras. Bosch (2018) sostiene que para abordar una pregunta Q, generalmente



## ARTIGO ORIGINAL

se buscan las respuestas disponibles R. Esta permitirá dar respuesta a Q mediante un proceso de deconstrucción y reconstrucción, que busque ajustarse a Q. En consecuencia, genera nuevas preguntas sobre la validez y limitaciones de esta adecuación. Barquero, Monreal, Ruiz-Munzon (2018) agregan que el propósito principal del proceso de estudio es la búsqueda constante de respuestas y sus preguntas derivadas. Esta cualidad constituye el primer nivel de análisis del REI el cual puede ser enriquecido después de cada implementación.

2. La segunda dialéctica es la de lo individual y lo colectivo. Se le conoce como el de la autonomía y sinomía, Consiste en que todo miembro pertenece al colectivo de estudio en tanto investigue y cuestione, buscando producir y validar una respuesta, teniendo la disposición además de renunciar a su propuesta y asumir la respuesta colectiva del equipo. Galán, Ruiz-Munzon, Barquero, (2018) proponen además que esta dialéctica debe ser analizada a partir de los dispositivos didácticos brindados y los cambios en el contrato didáctico tradicional. Esto aborda los cambios en los roles y responsabilidades que tanto estudiantes como docentes tienen que asumir para compartir, consensuar y transformar las acciones y objetos del medio y media para ser llevados de lo individual a la comunidad.

3. La dialéctica de la conjetura y la prueba. Es conocida como la dialéctica de los medios y los media. Esta dialéctica busca hacerle frente al acatamiento de las afirmaciones encontradas o dadas por la autoridad docente. Esto genera la necesidad de disponer obras accesibles a través de los media para la elaboración de las sucesivas respuestas provisionales que serán incorporadas al medio. Galán, Ruiz-Monson y

Barquero (2018) consideran esta dialéctica como una de las centrales junto con la dialéctica de las preguntas y respuestas, pues éstas indican y validan cuándo, dónde y cómo surgen nuevas preguntas y probables respuestas. Los autores manifiestan que los elementos que intervienen entre el medio y los media poseen una relación que puede analizarse entre la búsqueda y la creación. Es decir, entre la búsqueda de datos junto con las respuestas preexistentes en los media, como por ejemplo recursos web, contenidos de curso, respuestas de profesores de otros cursos. Además, la creación de los medios adecuados donde luego estos elementos podrían ser integrados o rechazados.

## ASPECTOS METODOLÓGICOS

La ingeniería didáctica es una metodología que permite diseñar, aplicar y analizar el REI (Artigue 2014). Ha sido empleada en trabajos recientes como el de Bartolomé *et al.* (2019) y el de Bartolomé y Ruete (2020) quienes presentan un trabajo dado en cuatro fases. La primera de estas fases denominada análisis preliminar, tal como lo señala Barquero y Bosch (2015) implica principalmente un cuestionamiento epistemológico de los objetos matemáticos involucrados, la necesidad de introducirlos en la escuela y un estudio de las condiciones o restricciones que ofrecen las instituciones donde se desarrolla el proceso de enseñanza y aprendizaje. Se identifican los posibles fenómenos didácticos problemáticos existentes para proponer una concepción alternativa que los afronte, en este caso el dispositivo didáctico REI.

La segunda fase, consiste en el análisis a priori del REI. Bartolomé *et al.* (2019) indican

que en esta fase se formula la pregunta generatriz. Se realiza una estimación potencial del proceso necesario del REI para generar una respuesta a los fenómenos didácticos identificados. Además, se elabora un plan de cómo serán recolectados los datos.

La tercera fase se refiere a la implementación y el análisis in vivo del REI, en donde se gestiona el proceso de estudio y se recopila datos para un análisis posterior.

La cuarta fase se refiere al análisis a posteriori del REI para evaluar cómo la concepción alternativa ha impactado en los fenómenos didácticos identificados inicialmente.

Con relación al contexto, donde se realiza el estudio, el REI se desarrolló como parte del curso de Matemáticas del programa general de educación básica en Perú. Esto corresponde al quinto año de secundaria dirigido a estudiantes entre 15 y 16 años. El REI tuvo una duración de 12 sesiones participaron 38 estudiantes en 7 equipos de 4 estudiantes y 2 equipos de 5 estudiantes, sin embargo, los datos recogidos se centraron en tres de los equipos. Los estudiantes disponían de su celular para acceder a internet. Uno de los equipos hacía uso de una laptop. El rol del profesor fue de director de estudio e investigador. Los datos obtenidos se registraron de manera detallada por medio de grabaciones de video, audio, fotografías, y los portafolios elaborados por los estudiantes.

#### **Primera fase: Análisis preliminar**

Dentro de las funciones, las funciones trigonométricas conforman parte de las funciones trascendentes. Este estatus fue otorgado por Leonard Euler en su trabajo *Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748. Tello (2016) menciona que Euler hace uso de la función seno en trabajos que pueden ser considerados dentro del ámbito del

precálculo, y en donde define a la función de manera numérica, discutiendo además sus propiedades, no como cuerdas en una circunferencia. Esta independencia respecto al vínculo con las cuerdas en la circunferencia es la que finalmente le otorga el carácter de función. En ese mismo sentido, Lujan (2019), Montiel (2013) y Demir (2012) coinciden en que la introducción de las funciones trigonométricas en el sistema de enseñanza presenta algunas dificultades, entre ellas su dependencia con el marco geométrico al ser abordadas a partir con el triángulo rectángulo y la circunferencia unitaria. Y a pesar de que también puede ser abordada a partir de la revisión de la gráfica sinusoidal. En todos estos casos, no logra acercarse claramente a una noción de función como tal, que implique variabilidad, periodicidad y adimensionalidad. Montiel (2013) realiza una revisión epistemológica sobre el origen e institucionalización de la función seno trigonométrica y determina que es la matematización del movimiento oscilatorio la práctica de referencia que hace posible el arribar a la función seno, que emerge a consecuencia de la necesidad de describir la oscilación y la periodicidad del movimiento.

Por otro lado, respecto a la dificultad en la enseñanza de las funciones trigonométricas, Díaz *et al.* (2010) plantean como problemática que no se aborda una transición lógica en el uso de los grados sexagesimales a los radianes y reales.

Con respecto al currículo nacional de educación básica, las funciones seno y coseno, son abordadas en los niveles más altos de los estándares de aprendizaje de la competencia *Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio*, correspondiente al grado en el que se desarrolló el REI.

Según Lujan (2019) la normativa



curricular del sistema educativo peruano se enmarcaría en el modelo epistemológico de organización didáctica constructivista, sin embargo, sus diseños didácticos correspondientes al desarrollo de este estándar, así como los textos escolares oficiales guardan aún una limitada consistencia con el modelo constructivista. Los objetos matemáticos propuestos presentan falencias en su articulación y son planteados bajo un relativo marco contextual, pero sin llegar a establecer una razón de ser para la construcción o el uso competencial de la función seno y coseno, constituyéndose así, una dificultad pendiente de resolver en torno a la enseñanza.

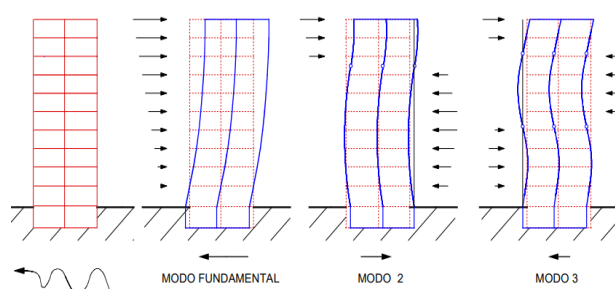
### Segunda Fase: Diseño del REI

Esta fase involucra la selección de la cuestión generatriz  $Q_0$ , definir la longitud y estructura del REI, decidir la amplitud y el grado de apertura del REI, la dinámica de la sesión, la evaluación, etc.

Para el diseño de un proceso de modelización en torno a las funciones Seno y Coseno, se buscó un contexto relacionado a la matematización del movimiento oscilatorio pero que a su vez pueda distanciarse del marco del triángulo rectángulo, de la circunferencia unitaria y de un análisis superficial de la gráfica sinusoidal. En ese sentido, luego de varios intentos, se considera pertinente abordar la reacción de los edificios frente a un sismo. Esta reacción corresponde a un estudio dentro del campo de la ingeniería estructural. Domínguez (2014) señala que para el caso de edificaciones con varios pisos o niveles, la primera reacción de la estructura es conjunta y oscila como si fuera una sola unidad de un lado a otro de la vertical, a esta

primera reacción se le denomina modo fundamental.

Figura 1 – Modos de vibración de edificio multipiso



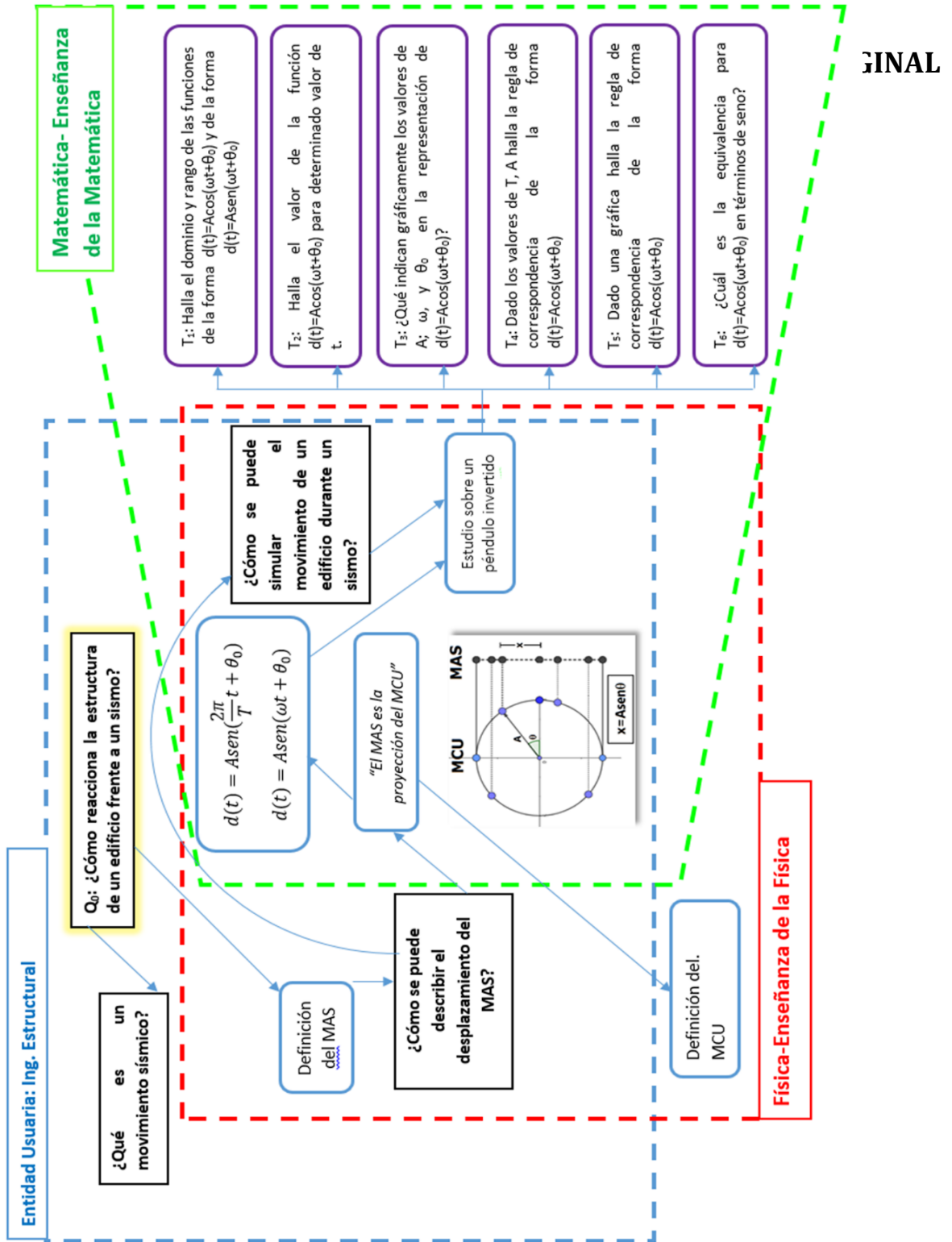
Fuente: Lujan (2019)

En ese sentido, se considera pertinente que el estudio del modo fundamental de la reacción de un edificio frente a un sismo puede propiciar un encuentro con la función seno y coseno. Por ende, se plantea la siguiente cuestión generatriz:

***Q<sub>0</sub>: ¿Cuál es la reacción de un edificio frente a un sismo?***

Se hace necesario plantear una organización de referencia (figura 2) que indique a priori cuál sería el posible recorrido que aborde el desarrollo de esta cuestión en el marco de un proceso de modelización. Se considera que los estudiantes realizarán este tipo de actividades por primera vez, donde tendrán mucha mayor autonomía. Sin embargo, a su vez, les demande consensos al interior y exterior de sus equipos. Sumado a ello, cabe enmarcar también el rol que juega el docente el rol de facilitador y que puede ser tomado en cuenta como una fuente de información y obras, pero no necesariamente de la obra definitiva y absoluta carente de cuestionamiento por parte de los estudiantes. Esta organización se presenta en la figura 2.

Figura 2 – Organización de referencia



Fuente: Lujan (2020)



Se ha considerado para la investigación la posibilidad de que el docente pueda plantear subcuestiones que impulsen la continuidad del REI, en caso los estudiantes, quienes aún se encuentran dentro del paradigma de la visita de obras, muestren limitaciones para seguir generando subcuestiones. Además, porque el período sujeto institucionalmente al desarrollo del REI es alrededor de las 3 semanas.

Se puede observar que la cuestión generatriz surge en la ingeniería estructural como institución usuaria. Luego, el desarrollo de nuevas cuestiones y respuestas estarían dentro del marco de la Física, donde es posible describir el movimiento armónico simple MAS como una proyección del MCU. Esta relación es muy potente en cuanto nuevos cuestionamientos, lo que podría permitir arribar al marco de la matemática y su enseñanza. De esa manera, arribar a un conjunto de tipos de tareas relacionadas a la función seno y coseno.

Por otro lado, el diseño de la gestión del REI fue general y flexible dentro de las siguientes pautas:

1.º Es presentada la cuestión, en la primera sesión por el docente, en las demás sesiones, es presentada por el docente, pero obtenida por el consenso de los estudiantes.

2.º Los estudiantes buscan información que pueda dar respuesta a la cuestión planteada. Algunas lo realizan veces dentro de la clase. Otras veces lo hacen fuera de la sesión si la pregunta fue formulada al final de la clase.

3.º Al interior de cada equipo, comparten toda información que pueda dar respuesta a la cuestión dada. Cada estudiante comunica su información y plantea cómo esta podría aportar una respuesta a la cuestión. Se genera un diálogo dialéctico entre los estudiantes. Se deconstruyen los aportes y se construye una respuesta plausible del equipo de trabajo.

4.º Se realiza una puesta en común donde cada equipo expone y fundamenta su respuesta, al mismo tiempo que recibe las observaciones y críticas de los demás equipos. El moderador de esto es el docente.

5.º Finalizada la discusión se establece una respuesta consensuada del aula en general, pero a su vez también una nueva cuestión que busque profundizar esta respuesta.

### **Tercera Fase: Desarrollo del REI**

El profesor introdujo el proyecto de estudio a los estudiantes, coincidentemente durante la celebración de la semana de la ciencia y tecnología. Esto favoreció la asimilación del proyecto, pues se hizo un símil con lo mencionado en la apertura de esta semana. Se hizo mención al mártir de la medicina peruana, Daniel Alcides Carrión, quien ante la necesidad de estudiar la fiebre de la Oroya, se inoculara secreciones extraídas de un paciente, investiga y reporta el desarrollo de la enfermedad en sí mismo. Se presenta la pregunta de investigación:

***Qo: ¿Cómo reacciona la estructura de un edificio frente a un sismo?***

Se observa en los estudiantes extrañeza pues consideran que la pregunta de investigación no está ligada a la asignatura de matemática. Esto muestra la falta de familiaridad con trabajos interdisciplinarios. Si bien ellos ya han realizado algunos procesos de indagación en diferentes asignaturas. Iniciar mediante una pregunta no les resulta familiar y menos sin pautas puntuales de desarrollo impuestas por el docente. Esta reacción refleja el paradigma tradicional dentro del cual se encuentran aún, donde los procesos de indagación la realizan a partir de un tema designado, identificando subtemas que serán repartidos entre los miembros del equipo, para luego ensamblarlos en un trabajo final. Frente a esta

situación, el docente plantea consignas que impulsen una mayor disposición y acción de los estudiantes para el desarrollo del REI. Estas consignas pueden ser sintetizadas de la siguiente manera:

1. Ver más allá de los aspectos superficiales y seguir cuestionando.
2. Sistematizar la información.
3. Buscar aportar o resaltar algún conocimiento de utilidad.
4. Tomar decisiones en equipo.

La cuestión inicial fue planteada como tarea domiciliaria. Se informa a los estudiantes qué pueden traer para la siguiente clase (información impresa, hacer uso de internet en sus celulares, traer libros de la biblioteca o traer tablets o laptops).

En equipos los estudiantes buscaban dar respuestas definitivas a la pregunta planteada, tal es así que uno de los estudiantes (B1) menciona:

*B1: Profesor ¿y no sería más rápido que nos dé la respuesta?*

*Profesor: Podría ser más rápido, pero lo olvidarías también muy rápido, pues no le verías el por qué.*

Esta respuesta del profesor, quien también es el investigador (primer autor), trata de generar cierta importancia en darle sentido y una razón de ser a los saberes que puedan arribar los estudiantes.

A pesar de ello se observa que el tratamiento frente a una pregunta en los equipos en general es horizontal. Es decir, que frente a una cuestión todos tienen algo que decir, a diferencia quizás, cuando tienen al frente a un tema particular a desarrollar. Ello refleja la capacidad, al menos inicialmente, de que la cuestión generatriz planteada, se hace asequible a los estudiantes.

Frente a la cuestión generatriz, la respuesta más trivial fue que el edificio reacciona moviéndose. Sin embargo, de

acuerdo con las consignas planteadas, los estudiantes deben profundizar en ello y hacer nuevas cuestiones, así formular la pregunta derivada: “¿Cómo se mueve?”. Dentro del equipo A se da el siguiente diálogo:

*A1: Yo encontré que en el terremoto de México el movimiento la caída de los edificios se debió sobre todo al tipo de suelo y al lugar.*

*A2: Aquí dice que se mueve horizontalmente pero luego tambalea.*

Por su parte, dentro del equipo B, uno de los estudiantes manifiesta:

*B1: Encontramos que los edificios tienen tres tipos de movimientos, horizontal, vertical e incluso de giro.*

Frente a la diversidad de respuestas, el docente plantea dentro de la puesta en común, que traten de consensuar una respuesta y posteriormente sigan investigando.

En ese sentido, producto de la puesta en común, y del consenso basado en los elementos comunes de sus respuestas, los estudiantes coinciden en que el movimiento más relevante es el del primer modo, puesto que es el que genera los otros movimientos. Los estudiantes son, por las consignas, emplazados a formular una nueva cuestión: ¿en qué consiste este tipo de movimiento? Llegan a identificarlo como movimiento oscilatorio. Al profundizar y seguir cuestionando ¿qué es el movimiento oscilatorio? Indican que es un movimiento armónico simple (MAS).

Los estudiantes llegan a este punto y el desarrollo del REI parece estar pausado por una aparente respuesta que llegó a su final. El docente interviene planteando una nueva cuestión que movilice la investigación: ¿cómo puede ser descrito o interpretado el MAS? La pregunta parece ser muy abierta pues los estudiantes preguntan si puede esclarecer lo requerido, pues el MAS puede ser descrito e

interpretado por ecuaciones, gráficas, la mayoría de ellas de difícil comprensión.

En esa situación el docente se ve motivado a intervenir y señalar la obra que encontraron los estudiantes de manera coincidente: la ecuación del desplazamiento de un cuerpo en MAS, y emplaza a los estudiantes a que formulen una nueva pregunta. Dentro de algunas intervenciones los estudiantes formulan lo siguiente: ¿de dónde viene esa fórmula? ¿Cómo sale esa fórmula? La que luego queda planteada de la siguiente manera: ¿cómo se obtiene la fórmula del desplazamiento en el MAS? ¿De qué descripción, interpretación o relación con el MAS?

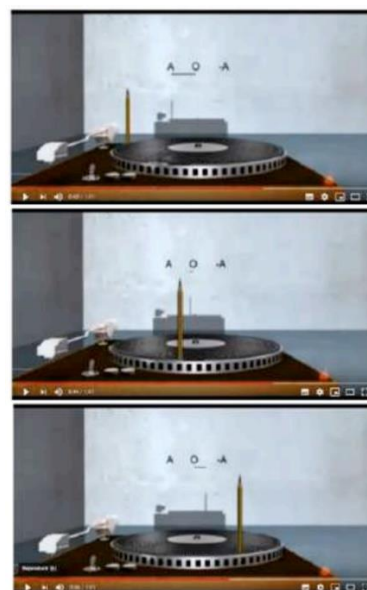
El docente manifiesta aquí cierta inexperiencia en la gestión de un REI, sin embargo, mantiene la consigna y trata de encaminar a los estudiantes a que sean ellos los que promuevan nuevas cuestiones.

Los estudiantes retoman el recojo de distintas obras, provenientes de distintas medias, en particular de Wikipedia, YouTube, Google y no tardan en encontrar posibles respuestas como la planteada por el equipo C al compartir el siguiente video de YouTube:

<https://www.youtube.com/watch?v=Cw9eFeVY74lv>

En donde se observa cómo el MAS puede ser representado como la proyección o sombra de un Movimiento Armónico Simple.

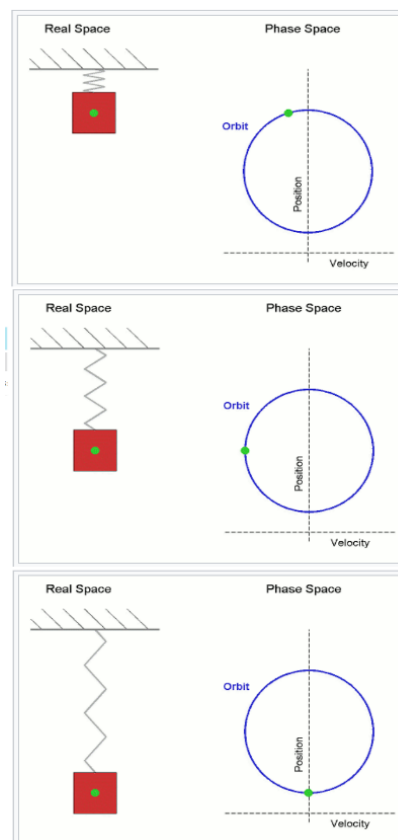
Figura 3 – MAS como proyección encontrada en YouTube.



Fuente: Adaptado de Lujan (2019)

Este video es validado también con los hallazgos teóricos del equipo A, cuya información proviene de Wikipedia.

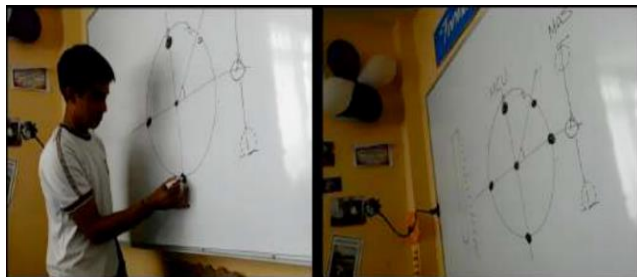
Figura 4 – Simulación del MAS encontrado en Wikipedia



Fuente: Wikipedia

Para compartir esta información los estudiantes realizan una defensa de la obra encontrada.

Figura 5 – Defensa de la obra encontrada



Fuente: Lujan (2019)

Producto de esa relación se logra determinar que el desplazamiento “d” de un cuerpo en MAS es:

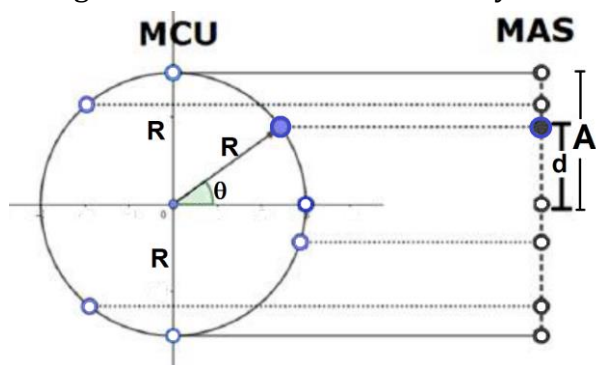
$$d = R \sin \theta; \text{ donde:}$$

R es el radio en el MCU

$\theta$  es el desplazamiento angular en el MCU

Se tiene como referente gráfico la siguiente figura:

Figura 6 – Relación entre el MCU y el MAS



Fuente: Lujan (2019)

Aquí el docente dialoga con los estudiantes respecto a seguir manteniendo las consignas de desarrollo del trabajo y decidan respecto a qué corresponde hacer luego. Algunos alumnos consideran que ya llegaron al fin del trabajo, pero otros que aún se puede profundizar aún más. El docente como director de la investigación formula una nueva cuestión que promueva esta profundización:

**¿Cuál es el valor del desplazamiento**

**“d” de un cuerpo en MAS en términos de datos provenientes del MCU?**

El camino para llegar a esta equivalencia movilizó a los estudiantes a buscar distintas informaciones provenientes de diferentes fuentes, sin embargo, ellos obtienen información que consideran difusa por su demasía, y por elementos que no forman parte de su equipo praxeológico. En ese sentido, se observa que buscan brindar respuesta a algo pero todavía no tienen una idea clara de lo que están buscando. Además, están a la espera de que la información que encuentren pueda brindarles esclarecimiento y les permita despejar sus dudas. Los estudiantes en esa situación despiertan el interés de revisar y tratar de definir la pregunta:

*B1: pero ¿Qué piden exactamente?*

*B2: Eso lo vimos en trigo creo*

*B3: ¿No es Pitágoras?*

*B1: No, eso es de resolución de triángulos.*

*Eso lo vi en la academia, Cuando es un lado desconocido igual a un lado conocido multiplicado por una razón trigonométrica del ángulo o algo así.*

Dado que se trata de estudiantes de quinto de secundaria, en no pocos se observa que acuden también a un centro de preparación académica para el examen de ingreso a las universidades, ello es indicado por una de las estudiantes y lo plantea dentro del equipo B. Para tratar de esclarecer o profundizar este aporte, los estudiantes revisan su cuaderno del curso, internet y verifican que un cateto vertical de un triángulo puede ser expresado como el valor de la hipotenusa multiplicado por el seno del ángulo. Los estudiantes relacionan esta información y verifican que es correspondiente a la proyección  $d = R \sin \theta$ .

Los estudiantes consultan al docente si puede esclarecer la pregunta. El profesor les pregunta cuáles son los términos en que está



expresado el desplazamiento  $d$  y de dónde provienen. Los estudiantes lo definen e indican que viene del MCU. Asimismo, preguntan cuál es este mismo desplazamiento, pero en términos de datos provenientes del MAS.

En el equipo 1 deciden abordar el problema y discutirlo en conjunto. Al revisar la gráfica reconocen rápidamente que  $R$  en MCU equivale a  $A$  en el MAS.

Siguiendo esa línea los estudiantes consideran que cada término del MCU tiene un equivalente en MAS y revisan la descripción del caso de " $\theta$ " desde una perspectiva geométrica. Resulta complicado establecer una equivalencia como en el caso del radio  $R$  con la Amplitud  $A$ . En ese sentido, los estudiantes se ven en la necesidad de realizar la observación desde la Física en donde " $\theta$ " equivale a un desplazamiento angular y en donde según la información que tienen equivale a una velocidad angular por el tiempo:  $\theta = \omega t$ .

Los estudiantes buscan al docente para que valide su hallazgo, quien les devuelve la cuestión y les dice si el tiempo " $t$ " forma parte del movimiento en MAS. Luego de asentir, les pregunta si el desplazamiento angular forma parte del movimiento en MAS. Esto se debe a que esta última afirmación no corresponde. Los alumnos buscan una equivalencia para la velocidad angular " $\omega$ ". Revisan sus distintas medias y en la dirección web:

<https://sites.google.com/a/colegiocisneros.edu.co/fisica10y11/home/eventosondulatorios/movimiento-circular-uniforme-mcu>

disponen de:

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

( $\theta$ : desplazamiento angular;  $t$ : tiempo)

$$\omega = \frac{2\pi}{T} (T: \text{Período})$$

$$\omega = 2\pi f (f: \text{frecuencia})$$

Figura 7 - Equivalencias del

desplazamiento en el MAS



Fuente: Lujan (2019)

Los estudiantes eligen la segunda equivalencia  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

y la reemplazan en la regla de correspondencia del desplazamiento " $d$ " que modifica su medio de la siguiente manera:

$$d = R \sin \theta$$

$$d = A \sin \theta$$

$$d = A \sin \omega t$$

$$d = A \sin \frac{2\pi}{T} t$$

Este hallazgo se torna relevante para los estudiantes, puesto que establecen una regla de correspondencia para el desplazamiento de un objeto en MAS. Se considera en función al tiempo y teniendo como parámetros elementos propios del MAS, tales como la amplitud  $A$ , el período  $T$ . Se acerca así a una noción de función seno, que no dependa de un marco geométrico en el triángulo rectángulo o en la circunferencia unitaria. Consideraciones que pueden ser tratados en un posterior estudio.

#### Cuarta Fase: Resultados y discusión Dialéctica del individuo colectivo

Los estudiantes pasaron de un trabajo usual individual, que se anexa a un trabajo colectivo. A otro donde el trabajo individual interactúa en un trabajo colectivo.

Si bien se manifiesta en los equipos un nivel de incertidumbre para enfrentar las cuestiones, esta es positiva. Puesto que esto motiva la indagación, el cuestionamiento y la

búsqueda de nueva información, la que posteriormente es incorporada al medio.

El enfrentarse a una cuestión mueve activamente a los estudiantes a tratar de darle respuesta, tal vez de una manera no muy clara pero se esfuerzan. En contraposición de cuando los equipos se distribuyen subtemas de un libro de texto o una página web para luego integrarla sumativamente. En esta los estudiantes desarrollan una actividad pasiva de resumen y comunicación de la información.

Por otro lado, las puestas en común, al enfrentar una cuestión, permitieron interactuar a su vez las respuestas consensuadas al interior de los equipos de trabajo con las respuestas de los otros grupos. Ello permitió la complementariedad en las obras y medias encontradas y un mayor consenso. A su vez permitió que la arborescencia de cuestiones y respuestas no se aperture a libre albedrío sino más bien que se establezcan consensos que permitan seguir una misma ruta a seguir investigando.

### **Dialéctica del medio media**

Los estudiantes disponían de varias medias, principalmente los libros de la biblioteca, entre ellos un libro de física y un diccionario enciclopédico. Las preguntas eran planteadas antes de la siguiente clase, de tal manera que los estudiantes navegaban en internet y traían información impresa de distintas páginas web. Además, podían hacer uso de sus celulares para buscar información en internet. Uno de los equipos contaba también con una Notebook. Se puede decir que el libro de física y el diccionario enciclopédico prácticamente no fueron usados. No obstante, la utilización de Wikipedia, YouTube y Google sí se evidenció, en especial esta última en la modalidad imágenes.

La disposición de gran cantidad de información sin poder arribar a una respuesta

puntual embarga por momentos a los estudiantes y se muestran confundidos. Sin embargo, al ir esclareciendo las preguntas, la búsqueda de información y obras se torna una actividad retadora para los alumnos, quienes no encuentran de manera súbita una respuesta puntual y final, sino que van evaluando dentro de sus informaciones cuál o cuáles son las que mejor se adecúan. Esto se ve reflejado por ejemplo al momento de indagar acerca de la relación entre MAS y MCU, así como, al momento de hallar la regla de correspondencia del desplazamiento “d” en términos de datos provenientes del MAS.

La interrelación se da principalmente en la selección de obras que sirvan a la construcción de la respuesta y en el descarte de otras obras que no sirven. No todas las obras son descartadas de momento sino que se mantienen disponibles si son requeridas. La selección de estas obras obedece también a una diversa perspectiva, por ejemplo, desde la matemática o desde la física, al momento de buscar “d” en términos de datos provenientes del MAS.

Las medias disponibles también son aquellas que forman parte del equipamiento praxeológico del estudiante. En el caso de uno de ellos aflora una obra proveniente de su práctica en la academia, acercándose al papel de especialista dentro de la investigación. Es cierto que el docente también es un especialista y que por fuerza de hábito del paradigma de monumentalización del saber, los estudiantes recurren constantemente a él, quien en vez de dar respuestas concretas ya resueltas, procura plantear otras cuestiones que motiven la indagación.

### **Dialéctica del estudio y la investigación, o también denominada de las preguntas y respuestas**

La cuestión generatriz planteada ha posibilitado la formulación de nuevas



interrogantes, aunque dentro de un marco con cierta incertidumbre ocasionado por una nueva forma de trabajo, donde se procura mayor proactividad y autonomía de un estudiante no habituado a ello. Por medio de las puestas en común se consensuaron nuevas preguntas para seguir profundizando en la investigación. Las respuestas provisionales consensuadas encierran implícitamente la posibilidad de seguir investigando. Esta posibilidad se fue expresando y concretando en los estudiantes de menor a mayor medida, dentro del REI e impulsado por las consignas iniciales, así sucedió tal como se ve en el cuadro 1 donde se visualiza las cuestiones derivadas. Si bien es cierto que hubo intervenciones por parte del docente, en el planteamiento de cuestiones, estas fueron planteadas como cuestiones directrices que sigan impulsando el REI.

## CONSIDERACIONES FINALES

Al inicio del desarrollo del REI, se aprecia aún en los estudiantes el paradigma de la visita de obras. Esto se debe a que las actitudes y acciones de los estudiantes, no se ve reflejado una autonomía que los impulse a desarrollar el proceso de estudio e investigación de manera consistente e independiente de las directivas del docente o de las prescripciones cerradas y ya establecidas que determinan el desarrollo la actividad. Sin embargo, conforme se va desarrollando el REI se observa una mejora en la disposición, la proactividad y la construcción de la autonomía, puesto que los estudiantes comienzan a hacer propio sus búsquedas y aportes en la construcción de las posibles respuestas. Esto refleja una apertura al cuestionamiento, a la expresión y desarrollo de la autonomía. En consecuencia, existe un acercamiento hacia la pedagogía de la investigación y cuestionamiento del

mundo, expresado principalmente en las dialécticas del individuo colectivo, del medio media, y del estudio e investigación. Parte de este desarrollo se debe también al impulso dado por las consignas iniciales y las intervenciones del docente que promovieron el cuestionamiento y desarrollo del REI.

Respecto al diseño del REI, este tiene como fortaleza su cualidad interdisciplinaria, pues ha implicado el encuentro con marcos dentro de la Física y la Matemática, centrado principalmente en la interpretación del Movimiento Armónico Simple como una proyección del Movimiento Circular Uniforme. Este encuentro hace posible, relacionar praxeologías del seno en el triángulo rectángulo, en la circunferencia unitaria para luego desprenderse de estos referentes y arribar a una relación funcional entre el desplazamiento de un objeto en MAS dependiente del tiempo. Para el cual se obtiene una noción de la función Seno, más cercana a la noción de función como correspondencia, e independiente del triángulo rectángulo y la circunferencia unitaria.

La cronogénesis en el desarrollo del REI fue uno de los aspectos que mostraron mayor limitación, puesto que esta nueva forma de estudio demanda una mayor extensión del tiempo en comparación con el empleado institucionalmente. En ese sentido, sería importante desarrollar experiencias similares y extender el tiempo de desarrollo, así como, también explorar otras potencialidades o fortalezas del diseño del REI planteado.

## REFERENCIAS

ARTIGUE, M. **Didactic engineering in mathematics education**. S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of mathematics education (pp. 159–162). New York: Springer. 2014.

- BARQUERO, B.; BOSCH, M.; & ROMO, A. El uso del esquema herbartiano para analizar un REI online para la formación del profesorado de secundaria. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 4, 2019.
- BARTOLOMÉ, E.; FLORENSA, I.; BOSCH, M.; & GASCÓN, J. A 'study and research path' enriching the learning of mechanical engineering. **European Journal of Engineering Education**, v. 44, n.3, p. 330-346, 2019.
- BARTOLOMÉ, E.; & RUETE, R. 'Study and Research Path' multi-approach learning of Theory of Machines and Mechanisms. **European Journal of Engineering Education**, v. 45, n. 6, p. 985-1001, 2020.
- BENITO, R. N.; & BOSCH, M. Descripción y análisis de un recorrido de estudio e investigación en geometría. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 11, n. 1, p. 78-105, 2021.
- BOSCH, M. Study and research paths: a model for inquiry. In Proceedings of the **International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro 2018**. p. 4015-4035, 2018.
- BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; GARCÍA, F. J., & MONAGHAN, J. (Eds.). **Working with the anthropological theory of the didactic in mathematics education: A comprehensive casebook**. Routledge, 2019.
- CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.
- CHEVALLARD, Y. Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire, 2004.
- CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico**, p. 705-746, 2007.
- CHEVALLARD, Y. Journal du seminaire TAD/IDD. Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement, 2020.
- CAÑAS, R. La Dialéctica en la filosofía griega. InterSedes: **Revista de las Sedes Regionales**, XI (22), p. 37-56, 2010.
- DEMIR, Ö. **Students' concept development and understanding of sine and cosine functions**, Tesis (Maestría) - Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, Holanda, 2012.
- DÍAZ, M.; SALGADO, G.; & DÍAZ, V. La transición: grados→ radianes→ reales. Un obstáculo didáctico. **Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 74, p. 29-37, 2010.
- DOMINGUEZ, M. Períodos de vibración de las edificaciones. **Revista Arquitectura e Ingeniería**, v. 8, n. 2, p. 1, 2014.
- GALÁN, N.; RUÍZ-MUNZON, N.; & BARQUERO, B. Central dialectics for mathematical modelling in the experience of a study and research path at university level. In INDRUM 2018.
- LUJAN, P. **Modelización de la función seno: un recorrido de estudio e investigación sobre la respuesta estructural de un**

**edificio frente a un sismo.** Tesis (Maestría en enseñanza de las matemáticas) – Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú, 2019.

LUJAN, P.; GONZALES, C. Un acercamiento entre los recorridos de estudio e investigación y las tareas auténticas, propuesta de un proceso de modelización de la función seno. **X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas.** p. 714-724, 2020.

MÉJANI, F.; & MATHERON, Y. Un exemple de genèse d'un milieu didactique dans un travail de groupe. **Caminhos da Educação Matemática em Revista (Online)**, v. 11, n. 1, p. 280-312, 2021.

MONTIEL, G. **Desarrollo del pensamiento trigonométrico.** México: Subsecretaría de Educación Media Superior de la Secretaría de Educación Pública, 2013.

PARRA, V.; & OTERO, M. R. Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las “dialécticas”. **Educación matemática**, v. 29, n. 3, p. 9-49, 2017.

TELLO, J. **Surgimiento de la función trigonométrica: Aspectos histórico-epistemológicos.** Tesis (doctoral) – Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia, 2016.