CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 2 • p. 1 – 10
ISSN 1983-7399

ARTICOLO ORIGINALE/ORIGINAL ARTICLE

Samuele **ANTONINI** [1]
Bernardo **NANNINI** [1]

Accettabilità intuitiva e conoscenza formale di particolari strutture dimostrative

Intuitive acceptance and formal knowledge of particular proof structures

SUNTO

La comprensione delle singole inferenze di una dimostrazione matematica non è sempre associata alla conoscenza profonda del legame tra dimostrazione, validità e generalità dell'enunciato dimostrato. Questa distinzione appare particolarmente evidente nei casi di dimostrazioni con strutture logiche complesse, come la dimostrazione per assurdo e la dimostrazione per induzione. In questo articolo proponiamo un'analisi dell'accettabilità intuitiva di queste particolari strutture dimostrative da parte di studenti universitari. L'analisi si avvale della combinazione di due costrutti teorici della didattica della matematica, uno generale sulla conoscenza intuitiva e conoscenza formale e uno sulla nozione di teorema, che nel caso di queste forme dimostrative si articola in diversi piani teorici: il piano teorico della dimostrazione e il piano meta-teorico della sua validità.

Parole chiave: Intuizione; Dimostrazione per assurdo; Dimostrazione per induzione.

ABSTRACT

The understanding of the single inferences of a mathematical proof is not always associated with the deep knowledge of the link between the proof, the validity and the generality of the proved statement. This distinction appears particularly evident in the case of proofs with complex logical structure, such as proof by contradiction and proof by mathematical induction. In this article, we propose an analysis of the intuitive acceptability of these specific proof structures by university students. The analysis makes use of the combination of two theoretical constructs of mathematics education, a general one on intuitive knowledge and formal knowledge and one on the notion of theorem which describes the investigated proof structures in terms of different theoretical levels: the theoretical level of proof and the meta-theoretical level where the validity of the proof is established.

Keywords: Intuition; Proof by contradiction; Proof by mathematical induction.

[1] Dipartimento di Matematica e Informatica 'Ulisse Dini', Università di Firenze, ITALIA

Indirizzi email:

samuele.antonini@unifi.it
bernardo.nannini@unifi.it

Ricevuto il 01/09/2022
Accettato il 31/10/2022

INTRODUZIONE

Dai tempi dei greci, la dimostrazione è un pilastro fondamentale della matematica e del pensiero che la caratterizza. Nel corso della storia, sono stati proposti e discussi diversi metodi dimostrativi, e oltre alla cosiddetta dimostrazione diretta, in cui si costruisce una catena argomentativa che dalle ipotesi si conclude con la tesi, da tempo sono utilizzati metodi dimostrativi indiretti come la riduzione all'assurdo, la dimostrazione per contronominale, la dimostrazione per induzione, ecc. Questi particolari metodi sono oggi ritenuti validi grazie al loro inquadramento nella logica matematica dove proposizioni e predicati diventano oggetti di studio, ma la loro accettabilità nella comunità dei matematici ha subito un percorso storico lungo e a tratti travagliato (Nannini, 2022a; 2022b; Mancosu, 1996; Barbin, 1988; Ernest, 1982; Szabó, 1978).

In questo articolo ci focalizziamo in particolare sulla dimostrazione per assurdo e la dimostrazione per induzione e andiamo ad indagare sulla loro accettabilità da parte di studenti universitari.

Si tratta di forme dimostrative che dal punto di vista cognitivo e didattico presentano specifiche problematiche, a tutti i livelli scolari. Per quanto riguarda la dimostrazione per assurdo, sono state evidenziate difficoltà inerenti alla complessità legata alla negazione (Thompson 1996; Antonini, 2004; Wu Yu et al. 2003), al trattamento di oggetti matematici impossibili e al legame logico tra la contraddizione e l'enunciato da validare (Antonini, 2019; Antonini e Mariotti, 2008; Leron, 1985). Analoga è la situazione in relazione alla dimostrazione per induzione. In letteratura sono state registrate difficoltà da parte di studenti della scuola secondaria (Fischbein e Engel, 1989) e anche di studenti di corsi di láurea magistrali, compreso il corso di laurea in Matematica (Antonini e Nannini, in stampa; Carotenuto et al. 2018). Tali difficoltà sembrano legate a molteplici aspetti, che spaziano dalla complessità della sua struttura logica (Dubinsky e Lewin, 1986) a fattori affettivi (Movshovitz-Hadar, 1993).

Per analizzare alcuni casi di studio dal punto di vista dell'accettabilità, abbiamo innanzitutto bisogno di definire in modo più preciso i termini della questione. È quello che cercheremo di fare nel prossimo paragrafo.

QUADRO TEORICO

Gli strumenti teorici che andiamo ad utilizzare sono il risultato di una combinazione del quadro sulla conoscenza e accettabilità intuitiva di Fischbein (1987) e di alcune ricerche specifiche sulle dimostrazioni indirette (Nannini, 2022; Antonini & Mariotti, 2008).

Conoscenza intuitiva e conoscenza formale

Se da un punto di vista formale è possibile definire una dimostrazione matematica come una catena di inferenze che trovano significato in una specifica teoria matematica e in esplicite regole di inferenza, dal punto di vista cognitivo, la conoscenza e la comprensione di ognuna delle inferenze non è sempre associata ad una comprensione profonda del legame tra la dimostrazione e la validità dell'enunciato. Scrive Fischbein:

> *The basic fact being stressed is that there are frequent situations in mathematics in which a formal conviction, derived from a formally certain proof, is NOT associated with the subtle feeling of "It must be so", "I feel it must be so".* (Fischbein 1982, p. 11, corsivo originale)

L'importanza di una "visione globale" di una dimostrazione, come un oggetto unico benché complesso e articolato, è esplicitamente sottolineata da diversi matematici illustri. Poincaré illustra con chiarezza questo punto:

> Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ? Il en est de même en mathématiques. Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement. Dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'œuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de l'architecte? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander. (Poincaré

1920, pp. 133-134)

Fischbein (1987; 1982) inquadra questa problematica sulla dimostrazione dal punto di vista cognitivo e didattico distinguendo tra conoscenza formale e conoscenza intuitiva. La sua posizione è che la conoscenza che si basa sulle argomentazioni formali non sia sufficiente a garantire efficaci e produttivi processi di pensiero, che richiedono invece una più immediata e disponibile forma di conoscenza, che chiama *conoscenza intuitiva*. Questa forma di conoscenza ci permette di "vedere" come evidenti, necessari, ovvi, concetti e proposizioni della matematica, anche se potremmo avere (ma non necessariamente) la consapevolezza che formalmente una dimostrazione è necessaria. Alcune problematiche, sia sul versante epistemologico sia su quello cognitivo, possono essere spiegate in termini di mancata fusione tra conoscenza formale e conoscenza intuitiva. Un esempio molto noto, citato dallo stesso Fischbein (1987, p. 26) è il celebre "lo vedo ma non ci credo" scritto da Cantor nella sua lettera a Dedekind del 29 giugno del 1877 dopo aver dimostrato l'esistenza di una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i punti di uno spazio n-dimensionale.

Relativamente all'intuizione nella dimostrazione matematica, Fischbein (1982) identifica tre livelli di accettazione intuitiva: il livello dell'enunciato, il livello della struttura della dimostrazione, il livello della generalità dell'enunciato:

> *We have to consider three levels of intuitive acceptance.*
> *A first level refers to the fact expressed by the statement itself. […]*
> *A second level refers to the structure of the proof. A pupil may intuitively grasp the meaning of a theorem but he may not be able to grasp intuitively the structure of the respective proof (though he is able to memorize and to understand formally its steps). […]*
> *The third level refers to the fact of understanding the universal validity of the statement as guaranteed and imposed by the validity of the proof.*
>
> *(Fischbein, 1982, p.18).*

In questo articolo ci occupiamo di particolari schemi dimostrativi e siamo dunque interessati al livello di accettabilità intuitiva della struttura della dimostrazione. Nel prossimo paragrafo cerchiamo di chiarire questo punto richiamando alcuni studi specifici sulle dimostrazioni che ci interessano.

Il teorema come terna e i tre livelli di Fischbein

Analizzando i livelli di intuitività di Fischbein nel caso di particolari forme dimostrative, ci troviamo di fronte ad una complessità ulteriore. Una dimostrazione con una particolare struttura logica, come quella per assurdo o per induzione, da un lato permette di validare un enunciato, dall'altro, necessita di essere validata come schema dimostrativo; coinvolge dunque diverse dimostrazioni poste su livelli teorici diversi. Per precisare i termini in gioco facciamo riferimento a un costrutto squisitamente italiano (si veda Mariotti et al., 997) che vede un teorema come una terna composta da enunciato, dimostrazione, e teoria di riferimento nella quale prende senso l'enunciato e si svolge la dimostrazione. Indichiamo dunque un teorema con la notazione (E, D, T) dove E sta per enunciato, D per dimostrazione e T per teoria. Come mostrato in precedenti studi, una dimostrazione per assurdo (Antonini e Mariotti, 2008) e una dimostrazione per induzione (Nannini, 2022) si possono vedere come la congiunzione di due teoremi, uno è quello che si intende dimostrare, l'altro è un teorema della logica che garantisce la validità della particolare forma dimostrativa:

- il teorema (E*, D*, T) con un enunciato ausiliario E*, una sua dimostrazione D* (nel nostro caso, per assurdo o per induzione) nella stessa teoria T. Nel caso della dimostrazione per assurdo, E* è l'implicazione di una contraddizione a partire dalla negazione di E, nel caso della dimostrazione per induzione, E* è la congiunzione composta dal caso base e dal passo induttivo.

- un meta-teorema (ME, MD, MT) che acquisisce senso in una meta-teoria e il cui meta-enunciato ME afferma che da E* si può inferire E.

Pertanto, un teorema dimostrato per assurdo o per induzione può essere così rappresentato

(E, [(E*, D*, T)+(ME, MD, MT)], M+MT)

e si articola in tre teoremi, tre enunciati e due livelli teorici.

Ovviamente il discorso si potrebbe estendere a tutti i casi in cui la forma dimostrativa richiede una importante giustificazione logica (piano meta-teorico), come le dimostrazioni per contronominale, per induzione transfinita, per casi, ecc. In questo articolo ci occupiamo delle strutture non dirette più comuni e in tabella 1 sono riportati in dettaglio i singoli elementi del modello di teorema nel caso di queste forme dimostrative.

Con questo costrutto, frutto di studi su specifiche strutture dimostrative, possiamo rivedere il discorso dell'accettabilità intuitiva del paragrafo precedente ed osservare che i tre livelli di Fischbein fanno riferimento all'enunciato E (livello 1), alla dimostrazione D (livello 2) e alla generalità dell'enunciato garantita dalla dimostrazione, ovvero all'intera terna (E, D, T) e alla meta-teoria MT.

I casi di dimostrazioni con particolari strutture che stiamo analizzando, coerentemente con l'analisi sopra sviluppata, comprendono, nel livello 2 di accettabilità della dimostrazione, due diversi teoremi posti su due livelli teorici diversi: (E*, D*, T) e (ME, MD, MT). In altre parole, l'accettabilità intuitiva di una dimostrazione con una particolare struttura logica, ovvero il livello 2 di Fischbein, è legata sia alla specifica dimostrazione sia all'accettabilità del particolare metodo dimostrativo. In termini del modello, l'accettabilità intuitiva di una dimostrazione D,

Tabella 1

Il modello di teorema come terna nel caso di dimostrazioni per assurdo e per induzione

Elementi del modello	Dimostrazione per assurdo	Dimostrazione per induzione
E	Enunciato del teorema, formulato in una teoria T	Enunciato del teorema, del tipo $\forall n \geq n_0\ P(n)$ [P predicato definito su $\mathbb{N}$]
E*	$\neg$ E $\Rightarrow$ contraddizione	$P(n_0) \wedge \forall n \geq n_0\ (P(n) \Rightarrow P(n+1))$ [P predicato definito su $\mathbb{N}$]
D*	Dimostrazione di E*	Dimostrazione di E*
T	Teoria matematica di riferimento per E, E* e D*	Teoria matematica di riferimento per E, E* e D*
ME	E$\rightarrow$E*	E$\rightarrow$E*
MD	Dimostrazione di ME	Dimostrazione di ME
MT	Meta-teoria, che comprende, per esempio, il principio del terzo escluso	Meta-teoria, che comprende, per esempio, il principio di induzione

- l’accettazione intuitiva di E* e di D*, dunque dei livelli 1 e 2 riferiti al teorema (E*, D*, T);
- l’accettazione intuitiva di (ME, MD, MT), ovvero di ME, di una sua dimostrazione MD (anche non formale) e della generalità di ME (che permette di accettare che non ci sono eccezioni sulla validità dell’applicazione dello schema dimostrativo).

Abbiamo ora gli strumenti teorici per l’analisi. Nei prossimi paragrafi analizziamo l’accettabilità intuitiva di dimostrazioni per assurdo e per induzione da parte di studenti universitari di corsi di laurea scientifici che hanno precedentemente affrontato lo studio di queste forme dimostrative. I dati sono stati raccolti in studi diversi (Nannini, 2022; Antonini & Mariotti, 2008) con modalità che saranno precisate caso per caso.

INTUIZIONE E DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

In una dimostrazione per assurdo, assumendo la negazione dell’enunciato da dimostrare, si deduce una contraddizione. Da un punto di vista logico, la validità dell’enunciato è garantita dalla validità delle relazioni logiche tra la negazione dell’enunciato e la contraddizione e da quello che nel paragrafo precedente abbiamo chiamato meta-teorema.

L’accettazione del meta-teorema, in particolare del meta-enunciato, da un punto di vista cognitivo, non passa necessariamente dalla sua conoscenza formale. In Antonini (2004, p. 47) abbiamo riportato il caso di un docente universitario che trova quella per assurdo un tipo di dimostrazione così evidente da non richiedere spiegazioni e da non vedere alcuna problematica, al punto di affermare che “la dimostrazione per assurdo si basa sul fatto che $p \rightarrow q$ e $\neg q \rightarrow \neg p$ dicono la stessa cosa”. Il legame tra E* ed E è così ovvio per questa persona che non sembra riguardare nemmeno l’equivalenza logica quanto il fatto che i due enunciati “dicono la stessa cosa”, come se si trattasse di due formulazioni diverse dello stesso enunciato. In questo caso, l’accettabilità intuitiva di ME è piena e sembra non essere legata all’accettazione di una dimostrazione MD: si tratta dunque di un’accettazione completa al livello 1 del meta-teorema, così piena da non richiedere la conoscenza di elementi del livello 2.

Scrive Fischbein che quando una persona conosce intuitivamente qualcosa "he will not feel the need to add something which could complete or clarify the notion (for instance an explanation, a definition, etc.)” (1982, p. 10). Il caso del docente universitario è esemplare in questo senso: per lui il legame tra i due enunciati è naturale, auto-evidente, intrinsecamente significativo come un semplice dato di fatto.

Ma le cose non vanno sempre in questo modo. Come spiega Leron (1985):

> *In indirect proofs […] something strange happens to the ‘reality’ of these objects. We begin the proof with a declaration that we are about to enter a false, impossible world, and all our subsequent efforts are directed towards ‘destroying’ this world, proving it is indeed false and impossible. We are thus involved in an act of mathematical destruction, not construction. Formally, we must be satisfied that the contradiction has indeed established the truth of the theorem (having falsified its negation), but psychologically, many questions remain unanswered. What have we really proved in the end? What about the beautiful constructions we built while living for a while in this false world? Are we to discard them completely? And what about the mental reality we have temporarily created? I think this is one source of frustration, of the feeling that we have been cheated, that nothing has been really proved, that it is merely some sort of a trick - a sorcery - that has been played on us. (Leron, 1985, p. 323).*

In studi precedenti (Antonini, 2019; Antonini & Mariotti, 2008) abbiamo mostrato come il passaggio dalla contraddizione alla validità di un enunciato possa essere fonte di frustrazione anche per studenti universitari, anche di corsi di laurea in cui la matematica ha un ruolo centrale.

Riportiamo uno dei protocolli più ricchi e significativi rimandando agli articoli citati per ulteriori approfondimenti. Nel corso di una intervista, Fabio, studente universitario dell'ultimo anno del corso di laurea in Fisica, viene coinvolto nella costruzione di una dimostrazione per assurdo. Fabio imposta, sviluppa e conclude correttamente la dimostrazione, ma immediatamente manifesta le proprie perplessità. Riportiamo uno stralcio del suo discorso:

> *"Si, diciamo che ci sono due salti, un salto iniziale e un salto finale. Neanche il salto iniziale mi è comodo: perché devo partire da qualcosa che non è? [...] Il salto finale è comunque il peggiore, [...] è un salto logico, un atto di fede che devo fare, un sacrificio che faccio. I salti, i sacrifici, se sono piccoli sono disposto a farli, se si sommano sono troppo grandi. Tutto il mio discorso converge verso il sacrificio del salto logico dell'esclusione, assurdo o esclusione, ciò che non è, non la cosa diretta. Va tutto bene, ma quando mi devo ricollegare..."*

Fabio identifica due salti in una dimostrazione per assurdo: un "salto iniziale", che corrisponde al momento in cui si imposta la dimostrazione e si assume la negazione dell'enunciato E (o della tesi, nel caso di una dimostrazione per contronominale), e il "salto finale", dalla contraddizione alla validità dell'enunciato.

Utilizzando gli strumenti teorici sopra esposti possiamo dire che i "salti" rappresentano un disagio di Fabio nell'accettare intuitivamente la dimostrazione D come argomento per validare l'enunciato E, dunque nel livello 2 di accettazione intuitiva del teorema (E, D, T). Ma possiamo andare oltre. Della dimostrazione D il problema non sembra tanto localizzato nel teorema (E*, D*, T) quanto nel meta-teorema (ME, MD, MT) e già nel livello 1 relativo a ME. Fabio parla di "salto logico", mostrando tra l'altro di riconoscere che ci si sta muovendo su un livello meta-teorico. Nonostante questo studente sia in grado di dimostrare per assurdo teoremi anche complessi, la percezione di questi salti, (salti che non riesce a "ricollegare"), lo rendono insoddisfatto, come se mancasse qualcosa. Non gli resta che accettare la dimostrazione come un "atto di fede", come dichiara lui stesso non senza una sofferenza cognitiva ben rappresentata con la parola "sacrificio". Di fatto, nel corso dell'intervista, Fabio utilizzerà più volte espressioni come: "Non vedo che quella conclusione è legata all'altra, manca la scintilla", "non mi dà soddisfazione", "mi sfugge qualcosa". Infine, conclude:

> *"L'assurdo è… è… come dire… quanto meno imbarazzante. Sei arrivato ad un assurdo... e allora? Mica hai dimostrato nulla! […] Insomma, la dimostrazione per assurdo è come dire: 'ti dimostro che in tasca ho una sfera. Infatti, se non fosse una sfera e la mettessi a terra non rotolerebbe'. Ma intanto, mica me l'hai mostrata!"*

Certamente l'esempio che riporta Fabio ha una struttura logica distante anni luce da quella di una dimostrazione per assurdo ma sarebbe superficiale leggere le sue parole sul possesso di una sfera come una descrizione della struttura della dimostrazione per assurdo, che lo studente conosce e sa applicare. A nostro avviso, con queste parole Fabio intende comunicare due cose. La prima è che per lui la dimostrazione per assurdo è un discorso senza senso, quasi un gioco di parole, in cui compaiono negazioni e implicazioni, esattamente come nel discorso della sfera. La seconda è che si tratta di un'argomentazione che evita l'evidenza empirica ("mica me l'hai mostrata!"). L'evidenza potrebbe ricostituirsi ma in un livello completamente diverso, e solo nel momento in cui il metodo dimostrativo diventa una conoscenza intuitiva.

INTUIZIONE E DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

Quanto riportiamo in questo paragrafo emerge da un questionario rivolto a 307 studenti universitari e somministrato online nel 2020 (si veda Antonini & Nannini, in stampa; Nannini, 2022).

Nell'ultima parte del questionario, agli studenti che avevano affermato di aver incontrato le dimostrazioni per induzione durante i loro studi, sono state poste le seguenti domande aperte conclusive:

> *a) Cos'è, per te, una "dimostrazione per induzione"?*
>
> *b) Spiega con parole tue come mai una dimostrazione per induzione assicura che una proposizione sia vera per tutti i numeri naturali.*
>
> *c) Ci sono aspetti della dimostrazione per induzione che non hai capito o che non ti convincono del tutto?*

Dopo ognuna delle domande veniva inoltre data la seguente indicazione: *Non preoccuparti del rigore nella risposta; se lo ritieni necessario puoi riferirti anche ad immagini mentali, sensazioni, ricordi.*

Prima di analizzare qualche risposta premettiamo alcune considerazioni. Nel caso di un teorema con dimostrazione per induzione, l'enunciato E* si articola nella congiunzione del caso-base e del passo induttivo e l'enunciato ME è dimostrato sulla base del principio di induzione. Da un punto di vista non formale, ME è spesso argomentato come una successione di modus ponens. Se P(0) è vera, da P(0) e P(0)→P(1) segue che P(1) è vera, da P(1) e P(1)→P(2) segue che P(2) è vera, e così per tutti i numeri naturali.

Osserviamo che l'accettabilità del passo induttivo (parte di E*) richiede lo spostamento dell'attenzione da P(n) all'implicazione P(n)→P(n+1) che deve essere vista come un'unica proposizione di cui si dimostra la validità; uno slittamento, questo, particolarmente complesso dal punto di vista cognitivo e già evidenziato in diversi lavori (Fischbein & Engel, 1989; Dubinsky e Lewin, 1986). Scrivono Fischbein ed Engel:

> *The difficulty is that the student has to build the entire segment of the inductive step […] on a statement [P(n)] which, itself, has not been proven and cannot be proven in this segment of the reasoning process. […] It is like building a bridge in the air without any support on both its ends. (Fischbein & Engel, 1989, p. 284).*

Riportiamo a questo proposito le risposte di uno studente del terzo anno del corso di laurea in Fisica:

> Risposta a): *Una tecnica di dimostrazione per la quale si riesce a provare che una proposizione è vera per qualunque numero naturale.*
>
> Risposta b): *Perché se ipotizziamo che sia vera per un numero n e riusciamo a provare che è vera per n+1 allora, una volta provato che è vera anche per la base dell'induzione, è vera per tutti i numeri naturali ("effetto domino").*
>
> Risposta c): *Operativamente mi è chiaro, ma non capisco come la tecnica possa funzionare ipotizzando che n sia vera e non verificandolo.*

Lo studente descrive in modo soddisfacente la struttura della dimostrazione, facendo anche riferimento alla metafora del domino ma nella risposta c) manifesta una certa difficoltà relativa all'accettazione della validità di E*. In particolare, sembra che lo studente si concentri su P(n) più che sulla validità del passo induttivo P(n)→P(n+1).

Rimandiamo a Nannini (2022) per ulteriori approfondimenti su questo punto e analizziamo qualche risposta degli studenti relativamente a ME.

Le seguenti risposte sono state scritte da uno studente del primo anno del corso di laurea in Matematica:

> Risposta a): *si verifica la veridicità di un'affermazione attraverso i passaggi della dimostrazione per induzione: si verifica che l'affermazione in questione è vera per un numero e poi, supponendo che sia vera per un numero non specificato n, si dimostra che è vera anche per n+1.*
>
> Risposta b): *a mio parere la difficoltà di dimostrare che un'affermazione sia vera per tutti i numeri naturali è il fatto che questi sono infiniti. Grazie a questo metodo possiamo accertarci che se è vera per un numero è vera anche per tutti i successivi,*

> *risolvendo il problema dell'infinito.*
>
> Risposta c): *penso che a volte questa dimostrazione porti a paradossi inspiegabili.*

Nelle risposte a) e b) lo studente descrive correttamente la struttura dimostrativa e il ruolo che una dimostrazione per induzione può assumere; tuttavia, nella risposta c) sembra esplicitare alcuni dubbi in relazione ad essa, scrivendo che talvolta potrebbe portare a "paradossi inspiegabili". Le sue parole sembrano indicare un'accettazione non completa e intuitiva dell'induzione matematica, evidenziando un forte conflitto cognitivo: da una parte, la dimostrazione per induzione permette di "dimostrare che un'affermazione sia vera per tutti i numeri naturali"; dall'altra "porta a paradossi inspiegabili".

Ancora uno studente del primo anno del corso di laurea in Matematica scrive:

> Risposta a): *Una tecnica abbastanza semplice da comprendere e usata per le dimostrazioni.*
>
> Risposta b): *Nel caso questa proposizione valga per x=0 fino ad x=n e poi si dimostra che vale anche per x=n+1 allora vale per tutti i naturali.*
>
> Risposta c): *Al momento no, anche se per numeri molto grandi, credo, ci possono essere dei casi dove questa proprietà non valga.*

La risposta c) evidenzia che per questo studente l'enunciato E di un teorema (E, D, T), in cui D è una dimostrazione per induzione, potrebbe non avere validità generale. I livelli di accettabilità coinvolti sono il livello 3, relativo a un generico teorema (E, D, T), e il livello 1, relativo all'accettabilità intuitiva di ME.

Questo aspetto della generalità è in linea con le risposte alle domande della prima parte del questionario in cui si chiedeva di valutare la verità di un generico predicato P(n) per alcuni numeri naturali n, sapendo che era stato dimostrato il passo induttivo e la proposizione P(n_0) per un particolare n_0. Emergeva che il numero di risposte corrette diminuiva all'aumentare della distanza di n dal caso-base n_0, anche per gruppi di studenti universitari che avevano seguito diversi corsi di matematica. Questi risultati sono presentati in Nannini (2022) e in Antonini e Nannini (in stampa).

CONCLUSIONE

L'uso combinato del modello di teorema come terna e dei livelli di intuitività che abbiamo descritto nelle pagine precedenti può essere efficace per lo studio cognitivo e didattico relativo a diversi schemi dimostrativi, come per esempio la dimostrazione per assurdo e per contronominale, vari tipi di induzione (debole, forte, transfinita), dimostrazione per casi, ed altri ancora. In questo articolo ci siamo occupati di due forme dimostrative tra le più comuni e significative sia nell'insegnamento sia nella pratica matematica: la dimostrazione per assurdo e la dimostrazione per induzione. L'analisi ha messo in evidenza che, per quanto comuni, tali forme dimostrative risultano particolarmente ostiche anche per studenti universitari di corsi di laurea scientifici. In particolare, risulta che la conoscenza formale di una struttura dimostrativa e l'abilità nel costruire le dimostrazioni, anche per studenti universitari che hanno affrontato lo studio di diversi insegnamenti di matematica, non necessariamente accompagnano quella che Fischbein (1982) chiama conoscenza intuitiva e che nel caso della struttura di una dimostrazione è così descritta:

> [T]he proof itself- with its step-by-step analytical explicit structure- can and must reach the level and the form of an internally coherent synthetic grasp. And this is an intuition. […] [T]he logical form of necessity which characterizes the strictly deductive concatenation of a mathematical proof can be joined by *an internal structural form of necessity* which is characteristic of an intuitive acceptance. Finally, both can blend in an unique synthetical form of mathematical understanding. (Fischbein, 1982, pp.14-15, corsivo originale).

La conoscenza formale e la conoscenza intuitiva, perché si possa parlare di conoscenza della dimostrazione, si devono fondere in un'unica e sintetica forma di comprensione matematica e questo appare particolarmente problematico nel caso di dimostrazioni indirette come la dimostrazione per assurdo e la dimostrazione per induzione, a causa della loro particolare e complessa struttura logica. In particolare, abbiamo mostrato che la problematica dell'accettazione intuitiva di queste forme indirette si articola su due piani, il piano del teorema e il piano del meta-teorema che assicura la validità dello schema dimostrativo. Dal punto di visto didattico sarà necessario tenere conto di questi due piani e delle loro relazioni, promuovendo sia la costruzione di dimostrazioni sia una riflessione meta-cognitiva sulla loro struttura. Riteniamo che una direzione in questo senso che presenta ottime potenzialità è offerta dal costrutto italiano dell'Unità Cognitiva (Mariotti et al., 1997) che prevede la costruzione dei teoremi a partire dalla generazione di congetture. In questo quadro, ulteriori ricerche sono necessarie per studiare il ruolo dell'intuizione nella produzione di enunciati, argomentazioni e dimostrazioni (si veda Mariotti e Pedemonte, 2019) e nelle relazioni tra diversi livelli teorici e cognitivi (si veda, in altra prospettiva, Arzarello e Sabena 2011).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Antonini, S. (2019). Intuitive acceptance of proof by contradiction. *ZDM Mathematics Education*, 51(5), 793–806.

Antonini, S. (2004). A statement, the contrapositive and the inverse: intuition and argumentation. In M. Johnsen Høines, & A. Berit Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 47–54). Norway: Bergen.

Antonini, S., & Nannini, B. (in stampa). Chains of inferences in proof by induction: a cognitive analysis. In Piccolomini d'Aragona, A. (ed.), *Perspectives on Deduction. An In-depth Overview of Contemporary Studies in the Philosophy, History and Formal Theory of Deduction*. Synthese Series, Springer

Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: What is specific to this way of proving? *ZDM Mathematics Education*, 40(3), 401–412.

Arzarello, F., & Sabena, C. (2011). Meta-cognitive Unity in indirect proof. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Conference of the European Society for Research in Mathematics* (pp. 99–109). Poland: Rzeszow.

Barbin, E. (1988). La démonstration mathématique: Significations épistémologiques et questions didactiques. *Bulletin APMEP*, 366, 591–620.

Carotenuto, G., Coppola, C., & Di Martino, P. (2018). Mathematical induction at the tertiary level: Looking behind appearances. In E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg, & L. Sumpter (Eds.) *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 219–226). PME.

Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5(1), 55–92.

Ernest, P. (1982). Mathematical Induction: A Recurring Theme. *The Mathematical Gazette*, 66(436), 120–125.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of mathematics*, 3(2), 9–24.

Fischbein, E., & Engel, H. (1989). Psychological difficulties in understanding the principle of mathematical induction. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 13th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* Education (Vol. 1, pp. 276–282). PME.

Leron, U. (1985). A direct approach to indirect proofs. *Educational Studies in Mathematics*, 16(3), 321–325.

Mancosu, P. (1996). *Philosophy of mathematical practice in the 17th century*. New York: Oxford University Press.

Mariotti, M. A., & Pedemonte, B. (2019). Intuition and proof in the solution of conjecturing problems'. *ZDM Mathematics Education*, 51(5), 759-777.

Mariotti, M. A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 180–195). Finland: Lathi.

Movshovitz-Hadar, N. (1993). The false coin problem, mathematical induction and knowledge fragility. *The Journal of Mathematical Behavior*, *12*(3), 253–268.

Nannini, B. (2022). *Proving by mathematical induction: an analysis from history and epistemology to cognition*. Tesi di Dottorato, Università di Firenze.

Nannini B. (2022a). Tracce di induzione matematica: una galleria di esempi dalla storia. I parte – L'antichità. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 45B(3), 329–356.

Nannini B. (2022b). Tracce di induzione matematica: una galleria di esempi dalla storia. II parte – Il periodo moderno. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 45B(2), 167–188.

Poincaré, H. (1920). *Science et Méthode*. Flammarion.

Szabó, A. (1978). *The beginnings of Greek mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Thompson, D. R. (1996). Learning and teaching indirect proof. *The Mathematics Teacher*, 89(6), 474–482.

Wu Yu, J.-Y., Lin, F.-L., & Lee, Y.-S. (2003). Students' understanding of proof by contradiction. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox. (Eds.), *Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA* (Vol. 4, pp. 443–449). Hawaii: Honolulu.