CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 2 • p. 11 – 32
ISSN 1983-7399

ARTICOLO ORIGINALE/ORIGINAL ARTICLE

Una definizione categoriale di covariazione al secondo ordine. Aspetti epistemologici e didattici

A categorical definition of second order covariation. Epistemological and didactical aspects

Miglena **ASENOVA** [1]
Sara **BAGOSSI** [2;3]
Ferdinando **ARZARELLO** [3]

[1]Libera Università di Bolzano, ITALIA

[2]Ben-Gurion University of the Negev, ISRAELE

[3]Università degli Studi di Torino, ITALIA

Indirizzi email:

miglena.asenova@unibz.it
sara.bagossi@unito.it
ferdinando.arzarello@unito.it

SUNTO

L'articolo fornisce un modello matematico categoriale che caratterizza le relazioni che definiscono l'oggetto didattico covariazione al secondo ordine dal punto di vista epistemologico. Gli strumenti della teoria delle categorie permettono di sistemare in un quadro teorico unificato l'elaborazione dalla covariazione al primo alla covariazione al secondo ordine, includendovi la fase intermedia di transizione, un argomento finora non approfondito in letteratura. Il nucleo unificante di tale processo è dato dall'analisi della nozione di aggiunzione degli esponenziali e il contesto in cui ciò avviene è fornito dal lemma di Yoneda. I vari passaggi epistemici della definizione categoriale dinamica di covariazione al secondo ordine sono illustrati con riferimento a tre esempi d'aula.

Parole chiave: ragionamento covariazionale; covariazione al secondo ordine; metafora strutturale; corrispondenza analogica; teoria delle categorie; lemma di Yoneda.

ABSTRACT

The article provides a mathematical categorical model characterising the relations that define the didactic object of second-order covariation from an epistemological perspective. The tools of category theory make it possible to systematise the elaboration from first-order covariation to second-order covariation in a unified theoretical framework, including the intermediate transitional phase, a topic that so far has not been explored in depth in the literature. The unifying core of this process is the analysis of the notion of adjunction of exponentials, and the context in which this occurs is provided by the Yoneda lemma. The various epistemic steps of the dynamic categorical definition of second-order covariation are illustrated with reference to three classroom episodes.

Keywords: covariational reasoning; second-order covariation; structural metaphor; analogical correspondence; category theory; Yoneda lemma.

Ricevuto il 02/09/2022
Accettato il 31/10/2022

INTRODUZIONE

La problematica relativa alla covariazione in ambito funzionale è di grande importanza in didattica della matematica e le modalità con cui gli studenti concettualizzano questo contenuto matematico sono esplorati in numerose ricerche (Saldanha & Thompson, 1998; Carlson et al., 2002; Thompson, 2011; Thompson & Carlson, 2017; Bagossi et al., 2022). In particolare, la concettualizzazione della covariazione al secondo ordine, che mette in relazione la variazione del parametro che rappresenta una famiglia di funzioni, con la variazione della relazione funzionale tra variabile dipendente e indipendente, è stata esaminata e caratterizzata in Arzarello (2019), Bagossi (2022) e in Swidan et al. (2022). L'obiettivo del presente articolo è di fornire un modello matematico categoriale in grado di caratterizzare le relazioni che definiscono l'oggetto didattico covariazione al secondo ordine dal punto di vista epistemologico. Il ricorso agli strumenti matematici categoriali avviene nel senso esplicitato in Asenova (2021), dove l'autrice ricorre a tale linguaggio per fornire una definizione categoriale di oggetto matematico specifico della didattica della matematica. Il lavoro estende le ricerche che forniscono una prima caratterizzazione di covariazione al secondo ordine nell'ambito della teoria delle categorie.

L'approccio seguito mostra che il linguaggio categoriale è in grado di modellizzare gli aspetti cognitivi collegati alla questione della covariazione al secondo ordine, fornendo una sua caratterizzazione in tale linguaggio astratto. La definizione categoriale è di seguito interpretata nel contesto concreto della didattica della matematica, sulla base di alcuni esempi d'aula, mostrando come il linguaggio categoriale descrive i processi cognitivi coinvolti nell'apprendimento della covariazione al secondo ordine.

IL RICORSO ALLA TEORIA DELLE CATEGORIE ALL'INFUORI DEL CONTESTO STRETTAMENTE MATEMATICO

Le applicazioni della teoria delle categorie in ambiti esterni alla matematica sono sempre più diffuse negli ultimi anni. Per esempio, Oizumi et al. (2014) ricorrono alla teoria delle categorie per mostrare che nell'ambito della teoria integrata della coscienza (Tononi, 2012) una specifica struttura concettuale, detta MICS (Maximally Irreducible Conceptual Structure), può essere fatta corrispondere all'esperienza di coscienza. Questo approccio ha il vantaggio che problemi relativi all'esperienza di coscienza di per sé, possono essere inquadrati, trattati e risolti con strumenti matematici nell'ambito della teoria delle categorie, effettuando una opportuna traduzione (Tsuchiya et al., 2016; Phillips, 2018, 2020). Inoltre, il lemma di Yoneda, uno dei risultati fondamentali della teoria delle categorie, rappresenta una delle basi della filosofia sintetica della matematica contemporanea (Zalamea, 2012; 2021), a partire dalla quale esso è stato trasposto in didattica della matematica con l'obiettivo di fornire una definizione categoriale di oggetto matematico in didattica della matematica (Asenova, 2021). Il lemma di Yoneda ha consentito in quel contesto di inquadrare aspetti epistemologici relativi all'attribuzione di significato agli oggetti matematici.

Nel presente articolo sarà prima fornito un modello matematico tratto dalla teoria delle categorie che consente di introdurre la nozione di covariazione al secondo ordine in maniera astratta; tale modello sarà dapprima interpretato nel contesto della covariazione funzionale e poi nel contesto epistemologico[1] in didattica della matematica.

Vista la difficoltà che comportano tali argomenti per i non specialisti in teoria delle categorie e allo scopo di rendere il testo fruibile da parte di un pubblico più vasto, il modello matematico verrà fornito in un linguaggio il più possibile concettuale invece che formale, ricorrendo a rappresentazioni figurali, oltre che ai diagrammi tipici del linguaggio categoriale, e accompagnando tali rappresentazioni con descrizioni e spiegazioni in forma discorsiva. Infatti, come evidenziato da Peirce (1960), il ragionamento matematico è essenzialmente diagrammatico, ma, come

[1] Di seguito useremo il termine "epistemologico" per riferirci alla conoscenza in una disciplina, in questo caso la didattica della matematica, e il termine "epistemico" per riferirci all'acquisizione di conoscenza del soggetto apprendente, in questo caso dello studente.

sottolinea Dörfler (2005), un diagramma non può essere *espresso* in parole. Esso può però, e anzi deve, essere *spiegato e compreso* a parole. Cioè: se si intendono mettere in evidenza le relazioni che costituiscono un diagramma, questo non può che avvenire nel metalinguaggio, cioè nel "linguaggio naturale", ma le descrizioni non possono essere considerate come delle sostituzioni del diagramma stesso.

L'uso degli strumenti matematici in senso concettuale e metaforico richiede alcune precisazioni. Zalamea (2021) ricorre al termine "concettuale" per caratterizzare un uso degli strumenti matematici che si differenzia da quello consueto in matematica e che si basa su un ricorso alle caratteristiche degli oggetti matematici che li rendono strumenti *di pensiero e analisi* universali, piuttosto che sulle loro caratteristiche formali. Tale "uso metaforico" degli strumenti categoriali (Asenova, 2021) verrà caratterizzato più in dettaglio in seguito, partendo dal concetto di *metafora strutturale* (Pimm, 1981).

Pimm (1981) risale all'idea di metafora strutturale partendo da quello di analogia. Ricorrendo a riferimenti storici, l'Autore evidenzia che "analogia" è un termine di origine matematica e corrisponde al concetto di proporzione. In questo senso un'analogia collega due relazioni A:B e C:D. Una metafora strutturale, invece, è un'analogia condensata, nel senso che a partire dall'analogia che afferma che A:B corrisponde a C:D, si passa poi ad affermare "il C di B" o "A è un C". Per esempio, dall'analogia che afferma che l'insegnante (A) sta alla mente dello studente (B) come il coltivatore (C) sta al campo da coltivare (D), si passa alla metafora dell'insegnante come "coltivatore di menti". Per comprendere la metafora, sottolinea Pimm, è necessario quindi comprendere l'analogia su cui essa si basa, ma non vi è una corrispondenza biunivoca tra analogia e metafora, poiché diverse analogie possono dare origine alla stessa metafora. Pimm propone un'interpretazione matematica dei termini del linguaggio comune "simile", "analogia" e "metafora" rispettivamente nei termini matematici "equivalenza", "isomorfismo" e "immersione". Egli suggerisce inoltre che il passaggio dall'analogia alla metafora possa essere interpretato matematicamente come un transfer dall'isomorfismo all'immersione tramite il morfismo (Pimm, 1981).

L'utilizzo metaforico degli strumenti categoriali si configura in Asenova (2021) nel modo seguente: un frammento di teoria delle categorie (cioè un insieme di definizioni e proposizioni) viene messo in relazione con un frammento di nozioni e relazioni tra esse in didattica della matematica, creando in questo modo un'analogia tra i due contesti. Tale analogia consente di immergere il frammento di teoria delle categorie nella categoria della didattica della matematica, dove gli strumenti categoriali sono usati in senso metaforico, per riconoscere e meglio inquadrare diversi aspetti inerenti al contesto della didattica della matematica, rispetto al quale è stata stabilita l'analogia. Così, per esempio, se nello stabilire l'analogia si fa corrispondere il concetto di funtore (termine tratto dalla teoria delle categorie) al concetto di attribuzione di significato (termine tratto dalla didattica della matematica), si potrà parlare del "funtore che attribuisce significato" facendo uso metaforico del termine, ma sfruttando in didattica della matematica le relazioni concettuali che legano il concetto di funtore agli altri concetti categoriali, come per esempio quello di trasformazione naturale, che viene inteso come traduzione tra due diversi modi di attribuzione di significato allo stesso contesto. Nel presente lavoro si aggiunge però un livello intermedio tra il frammento della teoria delle categorie e la didattica della matematica, assente nel contesto dell'uso metaforico degli strumenti categoriali discusso da Asenova (2021). Infatti, in questo contesto il frammento categoriale generale verrà prima interpretato in un contesto matematico particolare, che è quello della covariazione nell'ambito del concetto di funzione, come mostrato da Bagossi (2022). A questo scopo sarà stabilità una corrispondenza tra gli oggetti astratti della teoria delle categorie e gli oggetti matematici in cui essi sono interpretati. In questo caso non si tratta di un uso metaforico degli strumenti categoriali poiché sarebbe possibile stabilire anche una corrispondenza biunivoca formale tra i due contesti, in termini di isomorfismo o di equivalenza tra categorie. Successivamente sarà invece stabilita una corrispondenza analogica tra il frammento categorico interpretato nel contesto della covariazione delle funzioni e il contesto epistemologico della covariazione del secondo ordine in didattica della matematica. Tale corrispondenza consentirà di immergere il frammento categorico all'interno della didattica della matematica e di fare dunque uso delle relazioni concettuali categoriche in questo nuovo contesto. Torneremo con maggior precisione su questi aspetti nel §5, dopo aver introdotto gli strumenti tecnici necessari.

I passaggi tra i diversi contesti - dal frammento della teoria delle categorie all'interpretazione nell'ambito matematico specifico della covariazione delle funzioni e poi nell'ambito epistemico dell'apprendimento della matematica - che qui abbiamo introdotto ricorrendo ai termini "analogia" e "metafora strutturale", possono essere giustificati tecnicamente attraverso il ricorso ai diversi gradi di similarità in teoria delle categorie. Tsuchiya et al. (2016) sottolineano infatti che la teoria delle categorie mette a disposizione diversi strumenti per caratterizzare la similarità tra domini differenti. Tali strumenti possono inoltre essere usati per caratterizzare una graduazione del concetto di similarità, partendo da un concetto di similarità molto forte, inteso in termini di "identità", passando poi a uno meno forte, in termini di "categoricamente isomorfico", a uno più debole, in termini di "categoricamente equivalente", a uno ancora più debole, in termine di "esistenza di un'aggiunzione" nonché, infine, a quello più debole possibile, in termini di "esistenza di un funtore". Secondo Tsuchiya e coautori (2016), la similarità tra due contesti, basata sull'esistenza di un funtore, è pienamente sufficiente per il contesto della modellizzazione della concettualizzazione nelle neuroscienze. Esso viene assunto come pienamente sufficiente anche per le esigenze del presente lavoro, dove funge da giustificazione dell'analogia sulla quale si basa la metafora strutturale che giustifica a sua volta l'uso del modello categoriale in didattica della matematica. Infatti, la metafora strutturale è intesa qui in termini di *funtore immersione*, come sarà illustrato nel §5.1.

IL CONCETTO DI COVARIAZIONE E LA SUA IMPORTANZA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA

Il concetto di funzione è di fondamentale importanza in matematica e per questo motivo il suo insegnamento-apprendimento è oggetto di particolare interesse negli studi in didattica della matematica. Il linguaggio delle funzioni costituisce uno strumento fondamentale per la matematizzazione della realtà ovvero la descrizione di fenomeni reali tramite opportuni modelli matematici. Certamente questo potere descrittivo e predittivo dei modelli matematici ha ricevuto particolare attenzione anche al di fuori delle aule scolastiche in questi anni di pandemia: i modelli epidemiologici per la diffusione del Sars-Cov-19 hanno riempito qualsiasi mezzo di pubblica informazione e l'esperienza ci ha insegnato che ciò che davvero bisogna tenere d'occhio è quel tanto temuto indice R, un parametro caratteristico del modello matematico che ci dà informazioni sul tasso di infezione della malattia e che quindi influenza globalmente l'andamento della curva dei contagi nel tempo. Questo esempio di una matematica che invade fortemente la nostra quotidianità vuole solo essere un esempio per sottolineare l'importanza del ragionamento funzionale.

Da un punto di vista didattico, le ricerche in didattica della matematica mostrano che vi sono numerose difficoltà cognitive legate all'apprendimento del concetto di funzione (si vedano per esempio Slavit (1997) e Tall & Vinner (1981)) e alla sua rappresentazione grafica (Monk & Nemirovsky, 1994). In aggiunta, gli studenti faticano a interpretare e concettualizzare situazioni dinamiche e quindi a elaborare opportune rappresentazioni grafiche o formule adeguate a rappresentare come una quantità o grandezza fisica può variare in funzione di un'altra (Carlson et al., 2002). La definizione statica di funzione, cioè come relazione tra gli elementi di due insiemi, fortemente utilizzata nelle pratiche didattiche può essere una delle possibili cause per cui gli studenti faticano a cogliere la natura dinamica delle funzioni, ovvero a concettualizzare come variabile indipendente e dipendente varino simultaneamente, o meglio co-varino. Quando uno studente è in grado di ragionare "sui valori di due o più quantità che variano contemporaneamente" (Thompson & Carlson, 2017, p. 422), allora sta *ragionando in modo covariazionale.* Il ragionamento covariazionale consente di comprendere che esiste una relazione invariante tra i valori di due quantità tale che "ogni valore di una quantità determina esattamente un valore dell'altra" (Thompson & Carlson, 2017, p. 436). Il ragionamento covariazionale è cruciale nelle attività di modellizzazione matematica perché le operazioni che lo compongono sono le stesse operazioni che permettono di cogliere relazioni invarianti tra grandezze in situazioni dinamiche (Thompson, 2011).

Covariazione al primo e al secondo ordine: aspetti teorici

Il ragionamento covariazionale è una forma di ragionamento ben consolidata in matematica: iniziò ad essere utilizzata in modo considerevole con la nascita e lo sviluppo dell'algebra moderna e poi contribuì in modo significativo allo sviluppo dell'analisi moderna e del concetto di funzione che nacque come ricerca di una relazione tra variabili concrete, continue e dinamiche e per poter esprimere un'idea di cambiamento (Boyer, 1946).

Per molti secoli la covariazione fu intesa solo come una forma di ragionamento e non come un concetto matematico. Un'attenzione sistematica alla sua caratterizzazione si ebbe solo verso la fine degli anni '80. Il ragionamento covariazionale riguarda certamente la concettualizzazione di come i valori di due quantità cambiano insieme; tuttavia, in letteratura non c'è un'unica visione di quali modi di pensare costituiscano il ragionamento covariazionale. Negli ultimi decenni si sono sviluppati vari studi che hanno messo in luce i vari aspetti del costrutto covariazione:

- il ragionamento covariazionale affonda le sue radici nel *ragionamento quantitativo* (Thompson, 1993) ovvero nella concezione di una quantità come attributo di un oggetto o fenomeno che risulta essere misurabile. Analizzare una situazione in termini di quantità e di relazioni quantitative non implica necessariamente descriverla attraverso valori numerici (Thompson, 1994);
- quando un individuo ragiona covariazionalmente forma a livello mentale un *oggetto moltiplicativo* (Saldanha & Thompson, 1998) ovvero un nuovo oggetto concettuale che comprende ciascuna delle quantità iniziali e al tempo stesso ha delle caratteristiche proprie. Una coppia ordinata nel piano cartesiano è un esempio di oggetto moltiplicativo quando inteso dall''individuo come i valori di due quantità che variano simultaneamente. Una funzione è un oggetto moltiplicativo quando inteso dall'individuo come insieme dei valori di due quantità che variano simultaneamente;
- le modalità in cui un individuo concepisce come una quantità può variare sono molteplici;
- la coordinazione dei cambiamenti nei valori delle quantità in gioco può avvenire secondo diverse modalità.

I ricercatori Thompson e Carlson (2017) hanno elaborato una versione complessiva del costrutto ragionamento covariazionale che tiene conto di tutti i fattori sopra descritti. Tale caratterizzazione consiste in una tassonomia di sei livelli: essi descrivono da un punto di vista cognitivo come un individuo può ragionare co-variando due quantità e spaziano dall'assenza di covariazione (L0) fino a un ragionamento covariazionale 'liscio e continuo' (L5). Solo ai livelli L4 ed L5 lo studente mostra di possedere una buona padronanza del ragionamento covariazionale. La differenza tra i due livelli consiste nell'immagine contrastante di cambiamento che vi è sottesa. Al livello L4 è sottesa un'immagine *a pezzi* di cambiamento ovvero come generato da pezzi di uguali dimensioni, mentre al livello L5 il cambiamento è inteso come una progressione liscia e *continua*.

A partire da un lavoro di Arzarello (2019), si è messa in luce la necessità di caratterizzare meglio alcune forme di ragionamento prodotto da studenti nelle attività di modellazione matematica: ciò ha portato all'introduzione del costrutto della *covariazione al secondo ordine* (COV 2). Approfondita da Bagossi (2022), la COV 2 consiste nel cogliere una ulteriore relazione in una famiglia di relazioni invarianti, in cui questa famiglia risulta caratterizzata matematicamente dalla presenza di uno e più parametri. Questi consentono di rappresentare famiglie di relazioni tra variabili e quindi classi di fenomeni reali caratterizzati, da un punto di vista matematico, da parametri specifici che determinano le peculiarità del modello matematico. Osserviamo inoltre che la denominazione covariazione al secondo ordine ben si adatta alla terminologia "funzioni al secondo ordine" usata da Bloedy-Vinner (2001) per indicare quelle funzioni che hanno per argomento un parametro e che restituiscono delle funzioni o equazioni dipendenti dal parametro.

Includere in modo coerente la covariazione al secondo ordine nell'esistente quadro teorico, richiede di ripensare il ragionamento covariazionale inteso non solo come la capacità di visualizzare due o più grandezze mentre co-variano simultaneamente, quello che d'ora in poi chiameremo *covariazione al primo ordine* (COV 1), ma in un più ampio senso epistemico, come la capacità di cogliere relazioni di invarianza tra oggetti matematici che covariano a loro volta. Passare a un ragionamento covariazionale di ordine superiore, richiede che gli studenti abbiano già concettualizzato la funzione come oggetto matematico e questo comporta una maggiore complessità nella concettualizzazione matematica che ci porta a parlare di un allargamento epistemologico. Non solo, possiamo anche parlare di un allargamento ontologico se consideriamo che la definizione di cui sopra si rivolge più in generale ad oggetti matematici piuttosto che quantità come fatto nel quadro da Thompson e Carlson. Osserviamo infine che ciascun ordine di covariazione è definito dalla natura degli oggetti matematici che vi sono coinvolti.

Perché sono importanti questi ordini di ragionamento covariazionale? Per quanto riguarda la COV 1, un'ampia letteratura mostra come esso supporti la comprensione di numerosi concetti matematici quali proporzione, tasso di cambiamento e linearità, variabili, trigonometria, crescita esponenziale, funzioni di una e due variabili e riferimenti dettagliati per tutti questi argomenti si possono trovare in Thompson et al. (2017). La COV 2 invece risulta essere particolarmente rilevante per la modellizzazione di classi di fenomeni reali, situazioni dinamiche e lo studio di funzioni parametriche.

Un esempio didattico

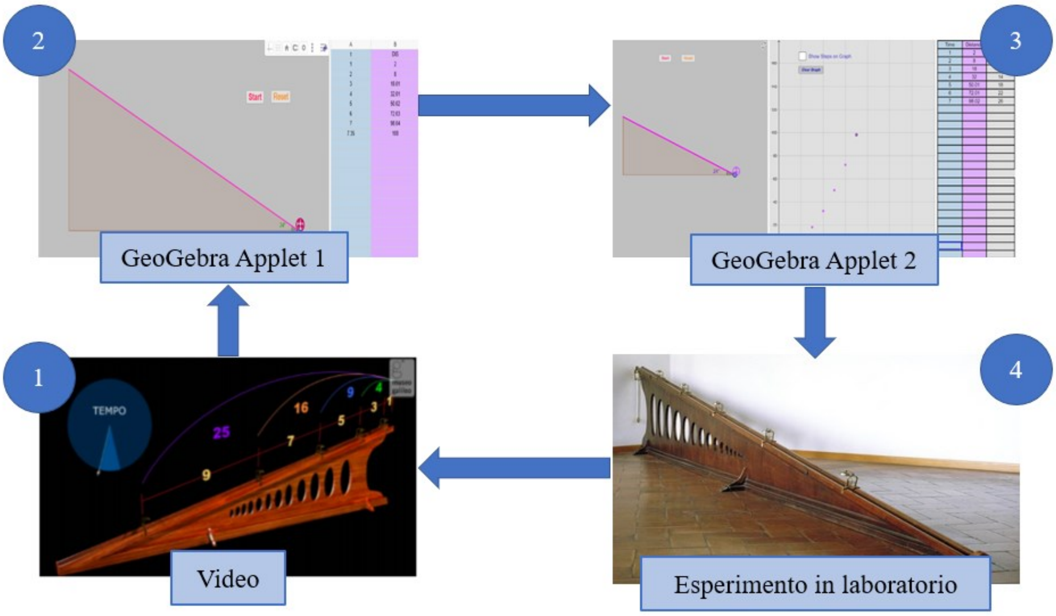
Per caratterizzare meglio la natura e le peculiarità dei due ordini di covariazione finora descritti, proponiamo ora alcuni esempi tratti da una sperimentazione in classe.

Nel 2019 è stata condotta una sperimentazione didattica in una classe seconda di un liceo scientifico, in provincia di Torino. Oggetto della sperimentazione era il moto di una pallina che rotola lungo un piano inclinato ovvero l'esperimento condotto e descritto da Galileo (1638). Obiettivo delle attività era duplice: (a) ottenere la formula che descrive la legge del moto della pallina $s = k \cdot t^2$ dove s è lo spazio percorso dalla pallina, t il tempo e k un coefficiente che dipende dall'angolo di inclinazione del piano; (b) esplorare la relazione tra l'angolo di inclinazione del piano e il grafico spazio-tempo. Durante la sperimentazione sono stati utilizzati vari artefatti che hanno supportato gli studenti nel processo di concettualizzazione del fenomeno reale: 1) un video online che riproduceva l'esperimento di Galileo; 2) un'applet di GeoGebra che simulava sulla sinistra un piano inclinato con la possibilità di modificarne l'inclinazione e sulla destra una tabella contenente i valori numerici del tempo e del relativo spazio percorso; 3) una seconda applet di GeoGebra contenente informazioni addizionali quali i valori delle differenze finite prime della distanza nella tabella sulla destra e un grafico spazio-tempo discreto nello spazio centrale dell'applet; 4) lo svolgimento dell'esperimento di Galileo da parte degli studenti nel laboratorio di fisica. Tali artefatti sono rappresentati anche in Figura 1.

Figura 1

Artefatti utilizzati durante la sperimentazione in classe: 1) vide che riproduce l'esperimento di Galileo; 2) applet di GeoGebra che simula il piano inclinato e contenente valori numerici di tempo e relativo spazio percorso; 3) applet di GeoGebra contenente informazioni addizionali quali differenze finite prime della distanza e un grafico spazio-tempo discreto; 4) lo svolgimento dell'esperimento in laboratorio.*

*https://catalogo.museogalileo.it/multimedia/PianoInclinato.html



Da un punto di vista metodologico, la sperimentazione si è sviluppata in un'alternanza tra attività di lavoro di gruppo e discussioni guidate dall'insegnante. Durante la fase di lavoro di gruppo, gli studenti si sono concentrati principalmente su una singola rappresentazione (video, applet GeoGebra, grafico...) e, grazie ad alcune istruzioni fornite da un foglio di lavoro, gli studenti sono stati guidati attraverso una fase esplorativa consistente nella formulazione di alcune ipotesi sul fenomeno in esame. Tali attività di gruppo sono sempre state seguite da una discussione in classe in cui venivano discusse le risposte formulate dai vari gruppi. Durante le fasi successive, grazie alle nuove informazioni fornite dall'artefatto appena introdotto, gli studenti avevano la possibilità di convalidare o falsificare le loro precedenti congetture e riformularle in una forma più corretta e completa. Nel seguito riporteremo e commenteremo tre brevi esempi tratti da discussioni di classe e attività di gruppo che esemplificano forme diverse di ragionamento covariazionale.

- Esempio 1 - Covariazione al primo ordine

Questo breve estratto è tratto dalla prima discussione in classe guidata dall'insegnante (I) svoltasi dopo una sessione di lavori di gruppo sul video che riproduce l'esperimento. In esso viene misurato il tempo attraverso le oscillazioni di un pendolo e viene mostrato che in intervalli di tempo della stessa ampiezza la pallina percorre spazi sempre maggiori. In questo episodio l'insegnante sta domandando a uno studente (S1) quali congetture sul moto della pallina ha formulato dopo la visione del video.

1 I: Quali congetture hai fatto semplicemente guardando il video?
2 S1: A seconda dell'angolo, l'accelerazione è tale per cui [la pallina] percorreva

distanze di un'unità dispari sempre consecutive come 1, 3, 5…

3 I: Ok, quindi la pallina percorreva spazi che erano…

4 S1: Sempre maggiori…

5 I: Con numeri dispari consecutivi, le distanze fra gli spazi[2] erano numeri dispari consecutivi

6 S1: E li percorreva nello stesso tempo… cioè in un'oscillazione del pendolo

7 I: Ok, in un'oscillazione del pendolo percorreva prima uno spazio 1, poi uno spazio 3, poi 5…

In questo breve episodio si può osservare come lo studente sta cercando di elaborare la relazione tra spazio e tempo a partire dai dati numerici forniti nel video. Grazie alla guida dell'insegnante che lo aiuta a formulare in modo completo il ragionamento, lo studente afferma che la pallina percorre spazi sempre maggiori [4] nello stesso tempo, ovvero quello marcato dall'oscillazione del pendolo [6]. Le grandezze in gioco sono spazio e tempo e lo studente riesce a esplicitare la covariazione tra le due grandezze coordinandone i valori numerici. Il ragionamento covariazionale di S1 è del primo ordine ed utilizzando la tassonomia di Thompson e Carlson (2017) si potrebbe classificare come coordinazione dei valori (L3).

- Esempio 2 - Transizione dal primo al secondo ordine di covariazione

Questo breve episodio è tratto dalla discussione di classe tenutasi dopo i lavori di gruppo con le due applet di GeoGebra. L'insegnante sta chiedendo agli studenti la formula che descrive il movimento della palla e in particolare sta favorendo ragionamenti covariazionali al secondo ordine invitando gli studenti a spiegare meglio la dipendenza della funzione dall'angolo di inclinazione del piano. Uno studente prova a rispondere.

8 I: E come è risultata l'equazione?

9 S2: Praticamente varia a seconda dell'angolo.

10 I: La funzione varia a seconda dell'angolo.

11 S2: Il coefficiente varia.

In questo episodio si può cogliere un avvicinamento alla COV 2: lo studente S2 riesce a concettualizzare che la funzione che descrive il moto, o meglio il suo coefficiente [11], dipende da una certa grandezza, che in questo caso è l'angolo di inclinazione del piano [9]. Lo studente non utilizza un termine propriamente matematico ovvero 'parametro', ma predilige un'espressione più intuitiva, ovvero "coefficiente che varia" [11].

- Esempio 3 - Covariazione al secondo ordine

Durante il lavoro di gruppo con la seconda applet di GeoGebra, agli studenti è stato richiesto di esplorare e descrivere la relazione che esiste tra l'angolo di inclinazione del piano e il grafico della curva spazio-tempo. Seguono le risposte di tre diversi gruppi (A, C ed E) che rivelano ragionamenti covariazionali al secondo ordine.

12 Gruppo A Con l'aumentare dell'angolo la curva si avvicina sempre di più all'asse delle y, perché grazie all'accelerazione percorre lo stesso spazio ma più velocemente.

13 Gruppo C All'aumentare dell'angolo del piano la curva della parabola è più accentuata a causa del fatto che la pallina percorre lo stesso spazio più velocemente, di quando l'angolo è minore.

14 Gruppo E Maggiore è l'angolo, maggiore sarà la distanza percorsa in un secondo e la parabola crescerà più velocemente.

Le forme di ragionamento degli studenti in questa attività di gruppo rivelano un pieno raggiungimento della COV 2. Gli studenti descrivono qualitativamente come l'angolo di inclinazione del piano influenzi il grafico spazio-tempo. Questo modo di ragionare è fortemente supportato dall'applet GeoGebra che permette di esplorarlo: infatti gli studenti possono variare l'inclinazione del piano

[2] Qui l'insegnante si riferisce agli spazi tra le campanelle posto lungo il piano inclinato che vengono mostrate nel video e riproducono quanto descritto da Galileo nel suo esperimento.

muovendo il punto blu collocato alla fine del piano inclinato e dunque osservare gli effetti prodotti sull'andamento del grafico. Tutti gli studenti, inoltre, si riferiscono al variare di una funzione rappresentata graficamente (curva, parabola).

DEFINIZIONE CATEGORIALE DI COVARIAZIONE AL SECONDO ORDINE

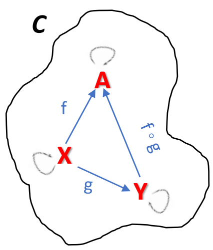
Strumenti tecnici categoriali

Di seguito esponiamo gli elementi del frammento di teoria delle categorie che contiene le nozioni tecniche necessarie per la definizione cercata, cui si accennava nel §2. Successivamente interpreteremo tale modello nel contesto covariazionale delle funzioni; infine immergeremo una copia del modello così interpretato nel contesto della didattica della matematica, allo scopo di studiarla e analizzarla dal punto di vista epistemologico.

Una categoria è un sistema composto da due tipologie di entità, chiamate oggetti e morfismi (detti anche frecce), che sono collegate tra loro tramite le nozioni di oggetto dominio e oggetto codominio, unici per ciascuna freccia. Inoltre, risulta definita un'operazione di composizione di frecce che è associativa e per ogni oggetto è definita una freccia identità che ha quell'oggetto sia come oggetto dominio sia come oggetto codominio (Figura 2).

Figura 2

*Rappresentazione di una categoria **C** composta da tre oggetti: A, X e Y e dai rispettivi morfismi.*



Definizione 1 (Categoria). Una *categoria* C si definisce mediante i seguenti dati e assiomi. Dati: (i) una classe di oggetti $Ob(\boldsymbol{C})$; (ii) per ogni $X, Y \in Ob(\boldsymbol{C})$, un insieme di morfismi $\boldsymbol{C}(X,Y)$; (iii) per ogni $X \in Ob(\boldsymbol{C})$, un morfismo $id_x \in \boldsymbol{C}(X,X)$; (iv) una operazione di composizione, indicata con $\circ$, che agisce sui morfismi, $\boldsymbol{C}(X, Y) \times \boldsymbol{C}(Y, Z) \rightarrow \boldsymbol{C}(X, Z)$: $(f, g) \mapsto g \circ f$. Assiomi: (v) gli insiemi dei morfismi sono disgiunti a due a due; (vi) id_x agisce come identità per $\circ$ (cioè $f \circ id_x = id_x \circ f = f$); (vii) l'operazione di composizione è associativa (cioè, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Data una categoria ***C***, possiamo definire il concetto di sottocategoria di ***C***.

Definizione 2 (Sottocategoria). Una categoria ***K*** è *sottocategoria* di ***C*** se $Ob(\boldsymbol{K}) \subset Ob(\boldsymbol{C})$ e se $\forall\ X, Y \in Ob(\boldsymbol{K})$ $\{\boldsymbol{K}(X,Y) \subset \boldsymbol{C}(X,Y)\}$. Inoltre, se si ha che $\boldsymbol{K}(X,Y) = \boldsymbol{C}(X,Y)$ allora ***K*** è detta *sottocategoria piena* di ***C***.

Data una categoria ***C***, la categoria che ha gli stessi oggetti, ma nella quale i morfismi sono invertiti, si chiama categoria duale di ***C*** e si indica con $\boldsymbol{C}^{op}$.

Definizione 3 (Categoria duale). Data una categoria ***C***, la sua *categoria duale* $\boldsymbol{C}^{op}$ si definisce mediante una preservazione di oggetti (i) $Ob(\boldsymbol{C}^{op}) = Ob(\boldsymbol{C})$ e di identità (ii) $(id_x)\boldsymbol{C}^{op} = (id_x)\boldsymbol{C}$, e mediante una inversione di morfismi (iii) $\boldsymbol{C}^{op}(X,Y) = \boldsymbol{C}(Y,X)$ (…), (iv) $g \circ_{\boldsymbol{C}^{op}} f = f \circ_{\boldsymbol{C}} g$. (Zalamea, 2021, p. 166).

Nella teoria delle categorie vale il cosiddetto *principio di dualità*, secondo cui una affermazione (proposizione) formulata in uma categoria ***C*** dà luogo a un'affermazione (proposizione) duale nella categoria duale di ***C***, $\boldsymbol{C}^{op}$.

La teoria degli insiemi può essere vista come una particolare categoria: la categoria degli insiemi ***Set***, i cui oggetti sono insiemi e i cui morfismi sono funzioni tra essi. Una categoria i cui oggetti sono insiemi e non classi proprie (Facchini & Lolli, 2009), è detta *piccola*.

Introduciamo di seguito il concetto di *categoria prodotto.*

Definizione 4 (Categoria prodotto). Date due categorie $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$, è possibile definire la *categoria prodotto* $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{D}$, i cui oggetti sono coppie ordinate di oggetti (c, d) con $c \in Ob(\boldsymbol{C})$ e $d \in Ob(\boldsymbol{D})$ e i cui morfismi sono coppie ordinate di morfismi (f_i, g_i) con $f_i \in \boldsymbol{C}(X_i,Y_i)$ e $g_i \in \boldsymbol{D}(X_i,Y_i)$, con $i \in \mathbb{N}$ e in cui l'operazione di composizione è definita componente per componente, cioè: $(f_1,g_1) \circ (f_2,g_2) = (f_1 \circ' f_2, g_1 \circ'' g_2)$, con $\circ'$ e $\circ''$ operazioni di composizione in $\boldsymbol{C}$ e in $\boldsymbol{D}$, rispettivamente.

Date due categorie, è possibile pensare a una mappa che mandi una di esse nell'altra. Una tale mappa prende il nome di *funtore*. Un funtore F è dunque una mappa tra due categorie che manda oggetti in oggetti e morfismi in morfismi. In particolare, è possibile distinguere tra *funtori covarianti* (che preservano i morfismi identità e l'operazione di composizione di morfismi (Figura 3a)) e *funtori contravarianti* (che preservano i morfismi identità, ma invertono i morfismi e di conseguenza la loro composizione (Figura 3b)).

Figura 3a

Schema che rappresenta il concetto di funtore covariante (F) tra due categorie $\boldsymbol{C}$ *e* $\boldsymbol{D}$*: il morfismo* $f\colon X \to Y$ *viene mappato da F nel morfismo* $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$*.*

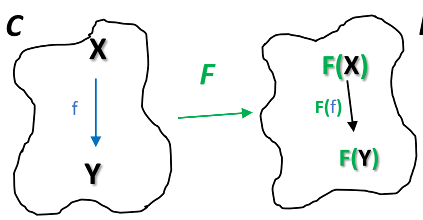
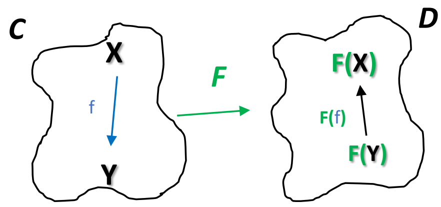


Figura 3b

Schema che rappresenta il concetto di funtore contravariante (F) tra due categorie $\boldsymbol{C}$ *e* $\boldsymbol{D}$*: il morfismo* $f\colon X \to Y$ *viene mappato da F nel morfismo* $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$*.*



Definizione 5 (Funtore covariante e Funtore contravariante). Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono due categorie, un *funtore* $F\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *covariante* tra $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ è una mappa da $Ob(\boldsymbol{A})$ a $Ob(\boldsymbol{B})$ tale che, per ogni $X, Y \in Ob(\boldsymbol{A})$, è definita l'applicazione $F(X;Y)\colon \boldsymbol{A}(X,Y) \to \boldsymbol{B}(F(X), F(Y))$, che manda ogni morfismo $f\colon X \to Y$ di $\boldsymbol{A}$ in un morfismo $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$ di $\boldsymbol{B}$ e per la quale vale: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ e $F(id_X) = id_{F(X)}$. Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ sono due categorie, un *funtore* $F\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *contravariante* tra $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ è una funzione da $Ob(\boldsymbol{A})$ a $Ob(\boldsymbol{B})$ tale che, per ogni $X, Y \in Ob(\boldsymbol{A})$ è definita l'applicazione $F(X;Y)\colon \boldsymbol{A}(X,Y) \to \boldsymbol{B}(F(Y), F(X))$, che manda ogni morfismo $f\colon X \to Y$ di $\boldsymbol{A}$ in un morfismo $F(f)\colon F(Y) \to F(X)$ di $\boldsymbol{B}$ e per la quale vale: $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ e $F(id_X) = id_{F(X)}$.

Un funtore particolare è il *funtore immersione*, la cui caratteristica consiste nel fatto che esso introduce le caratteristiche di una categoria all'interno di un'altra, creando in quest'ultima una sottocategoria che è una copia di quella di partenza, ma che acquisisce le caratteristiche della categoria di arrivo del funtore. Un esempio classico di immersione di una struttura in un'altra è quello dell'immersione di $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$, dove la struttura di $\mathbb{N}$ è riprodotta in $\mathbb{Z}_0^+$.[3]

[3] Notiamo che spesso tale immersione viene impropriamente formulata in termini di inclusione tra insiemi numerici fornendo, anche in alcuni libri di testo, la scrittura errata $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Definizione 6 (Funtore immersione). Un funtore F: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}$ è detto *immersione* se, dati $f_1, f_2 \in \boldsymbol{C}(X,Y)$, da $F(f_1) = F(f_2)$ segue $f_1 = f_2$.

Per ora abbiamo visto due diverse tipologie di relazioni che vengono definite nella teoria delle categorie: i *morfismi*, che sono relazioni (dette anche "frecce") tra oggetti di una categoria, e i *funtori*, che sono mappe tra categorie.

Sorge spontanea la domanda se sia possibile definire delle relazioni tra funtori, cioè se è possibile pensare a una "traduzione" tra il modo in cui un funtore mappa gli oggetti e le frecce (morfismi) tra due categorie e il modo in cui un altro funtore compie tale mappatura. La risposta è affermativa: l'oggetto matematico che compie una tale "traduzione" è chiamato *trasformazione naturale* (Figura 4).

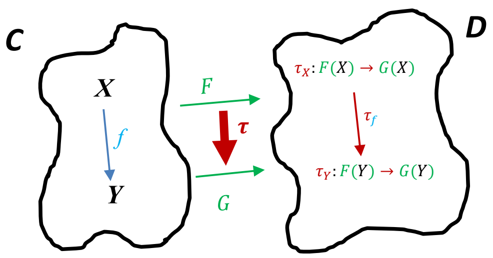
Definizione 7 (Trasformazione naturale). Dati due funtori F, G: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{D}$, una *trasformazione naturale* τ: $F \Rightarrow G$ è una classe $N \subseteq \boldsymbol{D}(X;Y)$ tale che $N = \{\tau_X \colon F(X) \rightarrow G(X) \mid X \in Ob(\boldsymbol{C})\}$. τ è "naturale" nel senso che induce un diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\
F(Y) \arrow[r, "\tau_Y"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

secondo cui vale la seguente uguaglianza: $G(f) \circ \tau_X = \tau_Y \circ F(f)$. Se $\forall\, X \in Ob(\boldsymbol{C})$ τ_X è un isomorfismo in $\boldsymbol{D}$ allora τ è un *isomorfismo naturale*. Notiamo inoltre che si ha id_τ: $F \Rightarrow F$.

Figura 4

Schema che rappresenta il concetto di trasformazione naturale (τ) intesa come "traduzione" tra funtori (covarianti) tra le stesse categorie.



Un tipo di funtore che è di interesse per la presente trattazione è l'hom-funtore che mappa una categoria piccola $\boldsymbol{C}$ nella categoria degli insiemi ***Set***, i cui oggetti sono insiemi e i cui morfismi sono funzioni tra essi, esprimendo le relazioni tra gli oggetti in $\boldsymbol{C}$ in funzione di un unico oggetto $A \in Ob(\boldsymbol{C})$. Gli hom-funtori contravarianti dalla categoria duale di una categoria piccola $\boldsymbol{C}$ nella categoria ***Set*** prendono il nome di *prefasci*.

Definizione 8 (Hom-funtore covariante e hom-funtore contravariante). Sia $\boldsymbol{C}$ una categoria. Un *hom-funtore covariante* rappresentato da un oggetto $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ è il funtore: $\boldsymbol{C}(A,-)$: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{Set}$, definito come segue: $\boldsymbol{C}(A,-)(X) = \boldsymbol{C}(A, X)$ per ogni $X \in Ob(\boldsymbol{C})$; se $f \in \boldsymbol{C}(X, Y)$ si pone $\boldsymbol{C}(A, f) = \boldsymbol{C}(A,-)(f) = \boldsymbol{C}(A, X) \rightarrow \boldsymbol{C}(A, Y)$ l'applicazione $\boldsymbol{C}(A,f)\,(g\colon A \rightarrow X) = f \circ g\colon A \rightarrow Y$. In maniera analoga si definisce il concetto di *hom-funtore contravariante* $\boldsymbol{C}(-, A)$: $\boldsymbol{C}^{op} \rightarrow \boldsymbol{Set}$. La categoria i cui oggetti sono gli hom-funtori contravarianti da $\boldsymbol{C}^{op}$ a ***Set*** è detta *categoria di prefasci su* $\boldsymbol{C}^{op}$ *a valori in* ***Set*** e tali funtori sono detti *prefasci*.

Una trasformazione naturale tra un funtore F che mappa da una categoria piccola $\boldsymbol{C}$ a ***Set*** e un hom-funtore contravariante che mappa $\boldsymbol{C}$ in funzione di un oggetto $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ in ***Set***, dà origine a un funtore rappresentabile dall'oggetto A.

Definizione 9 (Funtore rappresentabile). Un *funtore* F: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{Set}$ si dice *rappresentabile* se esiste un oggetto $A \in Ob(\boldsymbol{C})$ e un isomorfismo naturale τ: $F \Rightarrow \boldsymbol{C}(A,-)$. La coppia (A, τ) si dice *rappresentazione di* F. Se h^A è un funtore (covariante) rappresentabile da un oggetto A, allora il funtore contravariante rappresentabile da A è il funtore h_A: $\boldsymbol{C}^{op} \rightarrow \boldsymbol{Set}$.

Di seguito forniamo l'enunciato del lemma di Yoneda, per la cui dimostrazione rimandiamo a Mac Lane (1978, pp. 59-62).

Proposizione (Lemma di Yoneda). Sia $\boldsymbol{C}$ una categoria piccola e sia F: $\boldsymbol{C} \rightarrow \boldsymbol{Set}$ un funtore (covariante) e sia $A \in Ob(\boldsymbol{C})$. Vi è una corrispondenza biunivoca y: $Nat(h^A, F) \rightarrow F(A)$ tra l'insieme delle trasformazioni naturali $h^A \Rightarrow F$ e l'insieme $F(A)$.

Introduciamo infine il concetto di esponenziale in una categoria, fondamentale per la caratterizzazione del concetto covariazione.

Definizione 10 (Esponenziali). Una categoria $\boldsymbol{C}$ ha *esponenziali* se in essa è definito il prodotto per ciascuna coppia di oggetti $K, L \in Ob(\boldsymbol{C})$ esiste un oggetto L^K e una freccia ev chiamata "valutazione" ev: $L^K \times K \rightarrow L$, tale che per ogni oggetto di $Ob(\boldsymbol{C})$ e ogni freccia g: $M \times K \rightarrow L$, esiste una unica freccia $\hat{g}$: $M \rightarrow L^K$ tale che il seguente diagramma commuta:

$$\begin{tikzcd}
L^K \times K \arrow[dr, "ev"] & \\
& L \\
M \times K \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times id_K"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Questo significa che esiste un'unica freccia $\hat{g}$ tale che $ev\ (m \times id_K) = g$. L'assegnazione di $\hat{g}$ a g stabilisce una biiezione $\boldsymbol{C}(M \times K,\ L) \cong \boldsymbol{C}(M,\ L^K)$, dove il simbolo $\cong$ denota un'equivalenza di categorie (Goldblatt, 1984).

Due morfismi, g e $\hat{g}$, che si corrispondono per mezzo di una tale biiezione sono chiamati *aggiunti esponenziali* l'uno dell'altro.

Interpretazione degli strumenti categoriali nel contesto covariazionale delle funzioni

Interpretiamo ora il diagramma della definizione 10 nel contesto consueto delle funzioni. A tale scopo adottiamo la seguente nomenclatura:

- X è l'insieme di variazione della variabile indipendente x;
- A è l'insieme di variazione dei parametri associati a famiglie di funzioni;
- $Y^X = \{f: X \rightarrow Y\}$ significa che f è una funzione da X a Y;
- $A \times X$ è il prodotto cartesiano degli insiemi di variazione dei parametri associati alle famiglie di funzioni e della variabile indipendente x;
- $ev: (Y^X \times X) \rightarrow Y$ è la freccia che valuta una relazione funzionale tra gli insiemi X e Y al variare di $x \in X$ e associa a essa una specifica funzione f;
- $g: (A \times X) \rightarrow Y$ è la freccia che prende un oggetto $(a; x) \in A \times X$ e vi associa una famiglia di funzioni $\mathcal{F}$;
- $\hat{g} \times id_X$ è la freccia che mappa una coppia ordinata $(a; x) \in A \times X$ nella coppia ordinata $(y^x; x) \in (Y^X \times X)$.

Con questa notazione il diagramma della definizione 10 assume il seguente aspetto:

$$\begin{tikzcd}
Y^X \times X \arrow[dr, "ev"] & \\
& Y \\
A \times X \arrow[uu, dashed, "\hat{g} \times id_X"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Esso costituisce la base della definizione di COV 2 che verrà fornita di seguito.

Due diverse modalità di intendere la covariazione

Dal punto di vista tecnico la covariazione al secondo ordine può essere caratterizzata in due modi, uno statico e uno dinamico.

Definizione statica di covariazione al secondo ordine

La caratterizzazione statica è espressa nel diagramma contenuto nella definizione 10, seguendo la sua interpretazione nel contesto funzionale proposta in §4.2, tramite la richiesta dell'esistenza e unicità di $\hat{g} \times id_X$. In questo senso l'oggetto matematico COV 2 è descritto tramite la commutatività del diagramma riferito alla categoria $\boldsymbol{C}$, i cui oggetti sono $Y^X \times X$, $L \equiv Y$ e $M \times K \equiv A \times X$ e i cui morfismi sono la funzione di valutazione $ev: (Y^X \times X) \rightarrow Y$, g e $\hat{g} \times id_X$.

Forniamo dunque la seguente definizione statica di covariazione al secondo ordine.

Definizione 11 (Covariazione al secondo ordine in senso statico). Sia $\boldsymbol{C}$ una categoria con esponenziali in cui per ogni copia di oggetti $Y, X \in Ob(\boldsymbol{C})$ esiste un oggetto Y^X. Allora il morfismo $\hat{g} \times id_x: A \times X \rightarrow Y^X \times X$ esprime la *covariazione al secondo ordine in senso statico*. Esso collega la covariazione tra le variabili dipendente e indipendente di una funzione (COV 1) alla covariazione dell'equazione della funzione al variare del parametro (covariazione intermedia tra COV 1 e COV 2).

Definizione dinamica di covariazione al secondo ordine

Nella caratterizzazione dinamica della COV 2, le relazioni espresse nel diagramma della definizione 10 sono considerate non in maniera strutturale, ma in riferimento a una successione temporale atta a esprimere la costruzione della categoria piena, costituita dai tre oggetti $Y^X \times X, Y$ e $A \times X$, facendo ricorso al concetto di funtore rappresentabile (definizione 9) e al lemma di Yoneda.

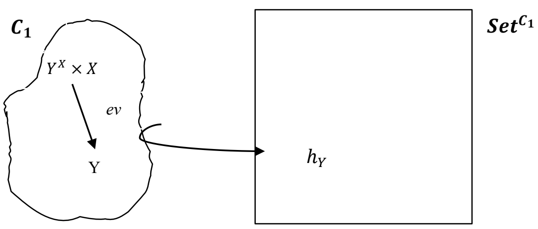
Per introdurre il percorso costruttivo della definizione dinamica di covariazione al secondo ordine, descriviamo brevemente l'azione del funtore rappresentabile, fondamentale per le interpretazioni successive.

L'azione del funtore h_O, rappresentabile dall'oggetto $O \in Ob(\boldsymbol{C})$ (si veda la definizione 9), dove $\boldsymbol{C}$ è una categoria piccola, consiste nel creare una copia di $\boldsymbol{C}$ nella categoria $\boldsymbol{Set^C}$, tramite la quale tutte le relazioni e gli oggetti di $\boldsymbol{C}$ sono espressi in funzione dell'oggetto O. L'oggetto O viene così espresso come oggetto sintetico, cioè tramite le sue relazioni nel contesto della categoria $\boldsymbol{C}$ e non come oggetto in sé (Asenova, 2021; Zalamea, 2021).

Consideriamo dapprima la categoria $\boldsymbol{C_1}(Y^X \times X; Y)$, in cui si hanno come oggetti $Y^X \times X$ e Y e come frecce la funzione di valutazione ev e i morfismi identità $id_{Y^X \times X}$ e id_Y. Questo punto di partenza è quello più plausibile dal punto di vista epistemico poiché lo studente apprende prima il concetto di funzione come relazione che descrive la covariazione tra una variabile indipendente, appartenente a un insieme detto dominio (X), e una variabile dipendente, appartenente a un insieme detto codominio (Y), nonché la valutazione della funzione in un punto del suo dominio. Se consideriamo il funtore rappresentabile h_Y, possiamo dire che esso crea una copia di $\boldsymbol{C_1}$ in $\boldsymbol{Set^{C_1}}$, espressa in funzione di Y (Figura 5). Questo aspetto è rappresentato in Figura 5 tramite la freccia ricurva. Qui possiamo riconoscere le caratteristiche relative alla covariazione al primo ordine, come essa è stata descritta nell'esempio 1 in §3.2.

Figura 5

Funtore rappresentabile h_Y che crea una copia della categoria $\boldsymbol{C_1}$ in $\boldsymbol{Set^{C_1}}$.



Consideriamo ora la categoria $\boldsymbol{C_2}(A \times X; \bar{Y})$, in cui si hanno come oggetti $A \times X$ e $\bar{Y}$ e come frecce g, $id_{\bar{Y}}$ e $id_{A \times X}$, e in cui $\bar{Y}$ è l'insieme delle famiglie di funzioni $F \in \mathcal{F}$.[4] Dal punto di vista epistemico questa categoria esprime la questione relativa alla concettualizzazione del

[4] Facciamo notare che $\bar{Y}$ non deve essere confusa con Y. Mentre Y è un insieme di funzioni, $\bar{Y}$ è un insieme di famiglie di funzioni. Infatti, Y è l'insieme di funzioni f con dominio X, mentre $\bar{Y}$ è l'insieme quoziente di Y che si ottiene tramite la seguente relazione di equivalenza: due funzioni appartengono alla stessa classe di equivalenza (famiglia di funzioni) se sono rappresentate dalla stessa equazione, in cui compare il parametro a.

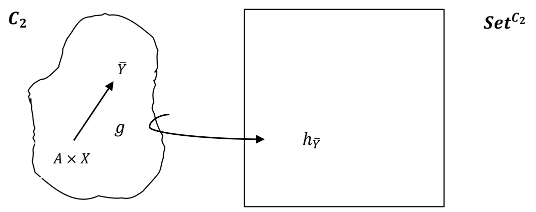
ruolo dei parametri nelle relazioni funzionali, che qui si suppone varino nell'insieme A. Questo apprendimento avviene di solito successivamente a quello descritto in riferimento alla categoria precedente. In particolare, qui ci si riferisce alla covariazione tra il parametro $a \in A$ e la funzione f_a all'interno di una famiglia $\mathcal{F}$ di funzioni (ciascuna $f_a \in \mathcal{F}$ è rappresentata da un'equazione in cui a assume un valore particolare). Qui possiamo riconoscere le caratteristiche relative alla covariazione di livello intermedio tra COV 1 e COV 2, come essa è stata descritta nell'esempio 2 del §3.2.

Consideriamo ora il funtore rappresentabile $h_{\bar{Y}}$; esso crea una copia di $\boldsymbol{C_2}$ in $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C_2}}$, espressa in funzione di $\bar{Y}$ (Figura 6) ed esprime la covariazione tra la variazione della relazione tra parametro e variabile *nella* funzione e la variazione della famiglia di funzioni.

Anche se sia h_Y sia $h_{\bar{Y}}$ sono funtori rappresentabili in $\boldsymbol{Set}^{-}$, essi non rappresentano una unica categoria ma due categorie distinte e quindi tra essi non ci sono necessariamente delle trasformazioni naturali ed essi non formano una sottocategoria piena di $\boldsymbol{Set}^{-}$.

Figura 6

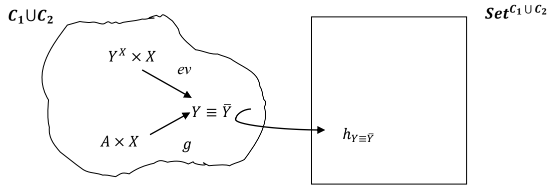
Funtore rappresentabile $h_{\bar{Y}}$ che crea una copia della categoria $\boldsymbol{C_2}$ in $\boldsymbol{Set}$.



Consideriamo ora la categoria che risulta unendo tra loro gli oggetti e i morfismi delle categorie $\boldsymbol{C_1}$ e $\boldsymbol{C_2}$ (Figura 7). In questo caso Y coincide con $\bar{Y}$ e vi è un unico funtore rappresentabile $h_{Y\equiv\bar{Y}}$ che esprime le relazioni in $\boldsymbol{C_1} \cup \boldsymbol{C_2}$ in funzione dell'oggetto $Y \equiv \bar{Y}$. In questo caso la covariazione al primo ordine (esempio 1) e la covariazione intermedia (esempio 2) sono ricondotte a un unico oggetto-funzione.

Figura 7

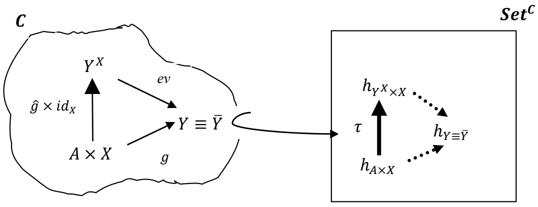
Funtore rappresentabile $h_{Y\equiv\bar{Y}}$ che crea una copia della categoria $\boldsymbol{C_1} \cup \boldsymbol{C_2}$ in $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C_1}\cup\boldsymbol{C_2}}$.



Anche se dalla definizione 10 sappiamo che tra $\boldsymbol{C_1}(A \times X; \bar{Y})$ e $\boldsymbol{C_2}(A; Y^X)$ sussiste una relazione di equivalenza di categorie, tale equivalenza non è sufficiente per spiegare l'emergenza della covariazione al secondo ordine dal punto di vista epistemologico. Infatti, è necessario caratterizzare i funtori rappresentabili che costituiscono, insieme ad $h_{Y\equiv\bar{Y}}$ e alle trasformazioni naturali tra essi, una sottocategoria piena in $\boldsymbol{Set}$. È facile mostrare che tali funtori sono $h_{Y^X \times X}$ e $h_{A\times X}$. Essi sono funtori rappresentabili della categoria $\boldsymbol{C}$ avente come oggetti $Y^X \times X$, $A \times X$ e $Y \equiv \bar{Y}$ e come frecce $id_{Y^X \times X}$, $id_{Y\equiv\bar{Y}}$, $id_{A\times X}, ev, g$ e $\hat{g} \times id_X$, $\hat{g} \times id_x \circ ev$, cioè la categoria mostrata nella definizione 10, e che $\hat{g} \times id_X$ è l'unica freccia per la quale i funtori rappresentabili $h_{A\times X}$, $h_{Y^X \times X}$ e $h_{Y\equiv\bar{Y}}$, insieme alle trasformazioni naturali tra essi, costituiscono una sottocategoria piena in $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C}}$, cioè nella categoria dei funtori contravarianti da $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{Set}$. L'aggiunta della freccia $\hat{g} \times id_X$ consente di esprimere il legame tra la covariazione legata al parametro e all'equazione della funzione (covariazione intermedia tra COV 1 e COV 2) e quella tra le variabili nella funzione (covariazione al primo ordine). Infatti, la composizione di frecce $\hat{g} \times id_x \circ ev$: $(A \times X) \rightarrow (Y^X \times X) \rightarrow Y$ consente di inquadrare questo aspetto (Figura 8). La trasformazione naturale tra i funtori rappresentabili $h_{A\times X}$, $h_{Y^X \times X}$ esprime le caratteristiche relative alla covariazione al secondo ordine, come esse sono state descritte nell'esempio 3 in §3.2.

Figura 8

La trasformazione naturale $\tau: h_{A\times X} \Rightarrow h_{Y^X \times X}$ *tra i funtori rappresentabili* $h_{A\times X}$ *e* $h_{Y^X \times X}$ *che emerge dall'aggiunta del morfismo* $\hat{g} \times id_X$.



Possiamo condensare la definizione dinamica di covariazione al secondo ordine tramite la seguente formulazione.

Definizione 12 (Covariazione al secondo ordine in senso dinamico). Sia $h_{Y\equiv\bar{Y}}$ il funtore rappresentabile della categoria ottenuta unendo tra loro le categorie $\boldsymbol{C_1} \cup \boldsymbol{C_2}(Y^X \times X; Y)$ e $\boldsymbol{C_2}(A \times X; \bar{Y})$, facendo coincidere gli oggetti Y e $\bar{Y}$[5] e aggiungendo il morfismo $\hat{g} \times id_X: (a; x) \to (y^x \times x)$. Allora $h_{Y\equiv\bar{Y}}$, insieme ai funtori rappresentabili $h_{Y^X \times X}$ e $h_{A\times X}$ che creano copie della categoria $\boldsymbol{C}(Y^X \times X; Y; A \times X)$ in $\boldsymbol{Set^C}$, e alle trasformazioni naturali tra essi, formano una sottocategoria piena in $\boldsymbol{Set^C}$. La trasformazione naturale $\tau: h_{A\times X} \Rightarrow h_{Y^X \times X}$ esprime l'emergenza della covariazione al secondo ordine.

INTERPRETAZIONE DELLA DEFINIZIONE DI COVARIAZIONE AL SECONDO ORDINE NEL CONTESTO EPISTEMOLOGICO DELLA DIDATTICA DELLA MATEMATICA

L'interpretazione di modelli matematici categoriali in didattica della matematica: caratterizzazione teorica

In accordo con D'Amore (1974), possiamo affermare che la classe dei funtori covarianti $F_i(\boldsymbol{C};\boldsymbol{D})$ da una categoria $\boldsymbol{C}$ a una categoria $\boldsymbol{D}$ e dei funtori covarianti $F_j(\boldsymbol{D};\boldsymbol{C})$ dalla categoria $\boldsymbol{D}$ alla categoria $\boldsymbol{C}$, con $i, j \in \mathbb{R}$ costituisce, insieme alle trasformazioni naturali $A_{i;j}$ tra $F_i(\boldsymbol{C};\boldsymbol{D})$ e $F_j(\boldsymbol{D};\boldsymbol{C})$ come morfismi, una categoria.[6] Infatti, essendo le trasformazioni naturali biunivoche, è possibile definire un'operazione di composizione su di esse che è associativa; inoltre, per ogni trasformazione naturale è possibile definire una trasformazione naturale identità $id_{A_{i;j}}$ che manda il suo funtore dominio in sé stesso.

L'insieme $\{A_{i;j}\}$ delle trasformazioni naturali così caratterizzate stabilisce un'analogia tra i morfismi delle categorie $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$. Tale analogia corrisponde a un isomorfismo strutturale tra le categorie $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ (D'Amore, 1974), sul quale si basa il concetto di metafora strutturale (Pimm, 1981): tale isomorfismo è inteso qui come funtore immersione.

Definizione 13 (Analogia). Date due categorie $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$, un'*analogia* è una categoria che ha come oggetti i funtori covarianti $F_i(\boldsymbol{C};\boldsymbol{D})$ e $F_j(\boldsymbol{D};\boldsymbol{C})$, con $i, j \in \mathbb{N}$, e come morfismi l'insieme delle trasformazioni naturali $A_{i;j}$ che mappano tra $F_i(\boldsymbol{C};\boldsymbol{D})$ e $F_j(\boldsymbol{D};\boldsymbol{C})$.

Quanto appena esposto vale nel caso in cui le classi dei morfismi delle categorie $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ sono equipotenti. In caso contrario si può però pensare a un'analogia tra una sottocategoria di $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$, se $|\boldsymbol{C}(X;Y)|>|\boldsymbol{D}(X;Y)|$ (o tra una sottocategoria di $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{C}$, se $|\boldsymbol{D}(X;Y)|>|\boldsymbol{C}(X;Y)|$). In tale caso si avrebbe dunque un'analogia che è parziale poiché un funtore tra $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ non trasforma *tutti* i morfismi di $\boldsymbol{C}$ in morfismi di $\boldsymbol{D}$ (o viceversa). Tuttavia, dato che una sottocategoria $\boldsymbol{K}$ di $\boldsymbol{C}$ è comunque una categoria,

[5] L'oggetto che si ottiene facendo coincidere Y e $\bar{Y}$, cioè l'oggetto $Y \equiv \bar{Y}$, ha la caratteristica di poter essere visto sia come un insieme di funzioni sia come l'insieme quoziente stabilito su tale insieme di funzioni, sulla base della relazione di equivalenza esplicitata nella nota 5.

[6] Ricordiamo che le trasformazioni naturali sono relazioni biunivoche e che quindi nell'insieme $\{A_{i;j}\}$ sono comprese tutte le trasformazioni biunivoche tra $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$.

i funtori covarianti tra ***K*** e ***D*** costituiscono una categoria, insieme alle rispettive trasformazioni naturali intese come morfismi. Consideriamo il caso $|\boldsymbol{D}(X;Y)|>|\boldsymbol{C}(X;Y)|$ e un funtore immersione F: $\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{D}$. Tale funtore immerge la struttura della categoria ***C*** nella categoria ***D*** creando in essa una sottocategoria ***K*** che ha la struttura di ***C*** ma che acquisisce tutte le caratteristiche di ***D*** in quanto sua sottocategoria. Tramite il funtore F ogni relazione tra due morfismi in ***K***, $F(f_1)=F(f_2)$ corrisponde a una relazione tra i rispettivi morfismi $f_1, f_2 \in \boldsymbol{C}(X,Y)$.

Definizione 14 (Metafora strutturale). Siano ***C*** e ***D*** due categorie e sia F: $\boldsymbol{C}\rightarrow\boldsymbol{D}$ un funtore covariante tra ***C*** e ***D***. Se esiste ***K*** sottocategoria di ***D*** tale che per ogni $F(*1)$, $F(*2) \in \boldsymbol{K}(X,Y)$ per i quali vale $F(*1) = F(*2)$ vale $*1= f_1$ e $*2= f_2$, con $f_1, f_2 \in \boldsymbol{C}(X,Y)$, allora F è un'immersione e prende il nome di *metafora strutturale* di ***C*** in ***D***.

Supponiamo che sia possibile stabilire un'analogia tra due contesti che possono essere visti come due categorie.[7] Nel presente lavoro tali categorie sono da un lato un frammento della teoria delle categorie interpretato nel contesto matematico specifico della covariazione funzionale, dall'altro un frammento della didattica della matematica relativo alla dimensione epistemica della covariazione al secondo ordine. Questo caso è rappresentato nel diagramma in Figura 9, dove la categoria $\boldsymbol{C}_{COV}$ è il frammento di teoria delle categorie interpretato in riferimento alla covariazione funzionale ($\boldsymbol{CT}_{COV}$) e ***D*** è un frammento della didattica della matematica (***Ddm***), per esempio in termini di elementi concettuali relativi all'apprendimento della covariazione al secondo ordine. Nell'individuare l'analogia tra $\boldsymbol{C}_{COV}$ e ***D***, il fatto che esse siano sottocategorie di $\boldsymbol{CT}_{COV}$ e ***Ddm***, rispettivamente, non è rilevante; questo fatto è rappresentato in Figura 9 attraverso il tratteggio dei contorni che rappresentano $\boldsymbol{CT}_{COV}$ e ***Ddm***. L'analogia si stabilisce supponendo che ci sia la possibilità di mettere in corrispondenza biunivoca gli oggetti e i morfismi delle rispettive categorie, in modo tale che l'insieme dei funtori tra esse formi, con le trasformazioni naturali tra quest'ultimi, una categoria, detta *categoria analogica*. Chiamiamo la categoria $\boldsymbol{C}_{COV}$ *categoria dominio* e chiamiamo la categoria ***Ddm*** *categoria codominio*. Supposta l'esistenza dell'analogia strutturale tra le due categorie $\boldsymbol{C}_{COV}$ e ***D*** (Figura 9), è possibile considerare un funtore immersione che immerga la categoria dominio $\boldsymbol{C}_{COV}$ nella categoria codominio (***Ddm***) creando in essa una copia ***K*** di ***D*** che è una sottocategoria di ***Ddm*** (Figura 10).

Figura 9

*Analogia tra due categorie, $\boldsymbol{C}_{COV}$ e **D**, che sono dei frammenti di due categorie differenti (teoria delle categorie, **CT**, e didattica della matematica, **Ddm**).*

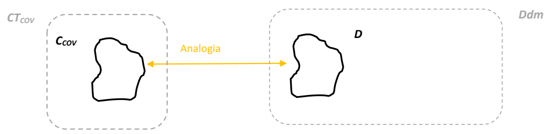
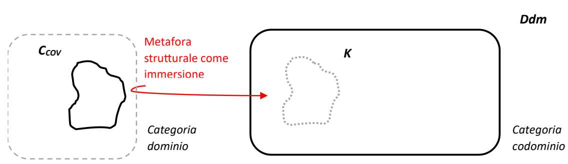


Figura 10

*Uso metaforico di $\boldsymbol{C}_{COV}$ in **Ddm** come risultato di un'immersione di $\boldsymbol{C}_{COV}$ in **Ddm**, dove **K** (sottocategoria di **Ddm**) corrisponde a **D**.*



[7] Ricordiamo che una categoria è una struttura "aperta", nel senso che non esiste una proprietà caratteristica che determini a priori quali oggetti vi appartengono, e che possono entrare a far parte della classe di oggetti della categoria anche elementi che non ne facevano parte in precedenza. Infatti, una definizione alternativa di categoria, rispetto alla definizione 1 fornita in §4.1, definisce gli oggetti a partire dalle frecce, nel senso che un oggetto si "configura" in corrispondenza di ogni freccia identità.

Tale immersione è una metafora strutturale che consente di usare gli elementi della categoria dominio C_{COV}, reinterpretandoli nella categoria codominio ***Ddm***, in cui sono stati immersi. In questo caso, cioè quando si tratta non di un'analogia ma di una metafora strutturale, l'appartenenza di ***K*** a ***Ddm*** è rilevante e questo fatto è rappresentato in Figura 10 tramite il tratto continuo del riquadro che raffigura ***Ddm***, mentre non è rilevante l'appartenenza di C_{COV} a ***CT*** (riquadro tratteggiato). Consideriamo per esempio una categoria generica come categoria dominio. Le sue caratteristiche concettuali, sulla base della definizione 1, sono le seguenti: (1) essa consente di esprimere relazioni tra oggetti tramite i morfismi; (2) in essa è possibile comporre in maniera associativa le relazioni espresse dai morfismi. Dunque, ogni volta che in un contesto applicativo si presenta una situazione simile: (1') è possibile esprimere relazioni tra oggetti intesi in senso generale; (2') è possibile comporre tali relazioni in maniera associativa[8] e dunque sarà possibile stabilire un'analogia tra il frammento di teoria delle categorie coinvolto (categoria, funtore etc.) e un frammento corrispondente in didattica della matematica. Tale analogia garantirà la possibilità di immergere il frammento di teoria delle categorie coinvolto, che prenderà il nome di *categoria dominio*, nella categoria di cui il frammento di didattica della matematica rappresenta una sottocategoria; tale categoria più ampia sarà la categoria della didattica della matematica in generale e prenderà il nome di *categoria codominio*. Di conseguenza, nella categoria della didattica della matematica (la categoria codominio) sarà possibile "lavorare" con i concetti categoriali interpretandoli nell'ambito della didattica della matematica attraverso il ricorso a una metafora strutturale, rappresentata dal funtore immersione. Questo modo di usare gli strumenti matematici è chiamato uso *metaforico* degli strumenti categoriali (Asenova, 2021).

Interpretazione della definizione dinamica di covariazione al secondo ordine nel contesto funzionale in didattica della matematica:

Corrispondenze analogiche

Al fine di consentire una interpretazione metaforica in didattica della matematica della definizione dinamica di covariazione al secondo ordine fornita in §4.3.2, stabiliamo le seguenti corrispondenze analogiche:

Categoria ≈ Contesto epistemico in cui i concetti si configurano in reti concettuali;

Categoria ***Set*** ≈ Contesto epistemico in cui si conforma l'attribuzione di significato all'attività matematica svolta;

Sottocategoria piena ≈ Contesto epistemico incluso in un altro contesto epistemico più ampio, ma con una chiusura semantica rispetto a esso, nel senso che i concetti e le relazioni tra loro che conformano il contesto più ristretto sono sufficienti per attribuire significato a quest'ultimo;

Funtore ≈ modalità di attribuzione di significato;

Funtore rappresentabile ≈ attribuzione di significato a un contesto epistemico espressa in funzione di un particolare concetto che ne fa parte;

Funtore immersione ≈ attribuzione di significato a un contesto epistemico all'interno del contesto della pratica matematica in senso metaforico;

Trasformazione naturale ≈ traduzione tra due modi di attribuire significato a un contesto epistemico.

Interpretazione della definizione dinamica di covariazione al secondo ordine

Siano h_Y e $h_{\bar{Y}}$ due attribuzioni di significato riferite ai contesti epistemici espressi tramite le categorie $\boldsymbol{C_1}(Y^X \times X; Y)$ e $\boldsymbol{C_2}(A \times X; \bar{Y})$ rispettivamente, e sia $h_{Y \equiv \bar{Y}}$ l'attribuzione di significato riferita al contesto risultante dall'unione dei contesti epistemici

[8] Come è possibile notare, si tratta di condizioni molto generali che sono soddisfatte in numerosi e diversi contesti.

espressi tramite $\boldsymbol{C_1}$ e $\boldsymbol{C_2}$[9]. Allora $h_{Y^X \times X}$ è l'attribuzione di significato che crea un'immagine operativa del contesto epistemico covariazionale espresso tramite la categoria $\boldsymbol{C}(Y^X \times X; Y \equiv \overline{Y}; A \times X)$ in $\boldsymbol{Set^C}$, dove $\boldsymbol{Set}$ rappresenta il contesto epistemico più ampio della pratica matematica. L'attribuzione di significato $h_{Y^X \times X}$, insieme a $h_{Y \equiv \overline{Y}}$ e $h_{A \times X}$ e alle trasformazioni naturali tra esse, forma un contesto completo di significati. La traduzione tra le attribuzioni di significato $h_{A \times X}$ e $h_{Y^X \times X}$ esprime l'emergenza epistemica della covariazione al secondo ordine.

Questa interpretazione esprime il fatto che l'attribuzione di significato alla COV 1, qui espressa tramite il funtore h_Y, nel contesto epistemico delle relazioni tra le variabili dipendente e indipendente di una funzione, qui espresso tramite la categoria $\boldsymbol{C_1}(Y^X \times X; Y)$, e l'attribuzione di significato alla covariazione di livello intermedio tra COV 1 e COV 2, espressa tramite il funtore $h_{\overline{Y}}$, nel contesto epistemico della variazione della relazione funzionale al variare del parametro, qui espresso tramite la categoria $\boldsymbol{C_2}(A \times X; Y)$, sono il presupposto per l'emergenza della COV 2. La COV 2 emerge dalla traduzione dell'attribuzione di significato alla COV 1 nell'attribuzione di significato alla covariazione di livello intermedio tra COV 1 e COV 2. Tale traduzione è espressa tramite la trasformazione naturale $\tau: h_{A \times X} \Rightarrow h_{Y^X \times X}$.

In riferimento agli esempi forniti in §3.2, ciò significa che dal punto di vista epistemico la covariazione espressa nell'esempio 3 (COV 2) si ottiene traducendo il significato dell'esempio di covariazione dell'esempio 2 (covariazione di livello intermedio tra COV 1 e COV 2) nel significato dell'esempio di covariazione dell'esempio 1 (COV 1).

Più precisamente, facendo sempre riferimento al contesto dei tre esempi in §3.2, sulla base della definizione dinamica categoriale di COV 2, si ottengono i seguenti passaggi epistemici:

- Facendo variare l'angolo, l'equazione cambia (covariazione di livello intermedio, esempio 2);
- La variazione del parametro corrisponde a diverse successioni di distanze percorse dalla pallina nella stessa successione temporale. Dunque, al variare del parametro si passa da un'equazione a un'altra perché cambia la legge che associa la successione di distanze percorse dalla pallina alla successione temporale in cui essa compie il percorso (covariazione di livello intermedio, espressa nell'esempio 2, tradotta nella covariazione al primo ordine, espressa nell'esempio 1);
- In particolare, a ogni valore del parametro corrisponde una funzione diversa di una famiglia di funzioni che è caratterizzata da diverse successioni di distanze percorse dalla pallina nella stessa successione temporale (covariazione al secondo ordine come risultato della traduzione tra la covariazione espressa nell'esempio 2 e quella espressa nell'esempio 1).

CONCLUSIONI

L'articolo illustra il costrutto di covariazione al secondo ordine (COV 2) come estensione di quello al primo ordine (COV 1) di Thompson e Carlson (2017) evidenziandone sia le componenti epistemologiche sia quelle epistemiche attraverso il linguaggio della teoria delle categorie. Il problema affrontato è piuttosto complesso: da un lato, COV 2 è un costrutto epistemologico fondamentale per la modellizzazione matematica che estende concettualmente COV 1 nel contesto del linguaggio delle funzioni; dall'altro, la comprensione di COV 2 avviene attraverso un processo epistemico opportuno di elaborazione dalla covariazione al primo ordine in ambienti didattici opportuni. La ricerca qui presentata indaga la natura epistemologica ed epistemica

[9] In accordo con quanto esposto nella nota 6, $h_{Y \equiv \overline{Y}}$ esprime la categoria $\boldsymbol{C}$ in funzione dell'oggetto $Y \equiv \overline{Y}$.

di COV 2 studiando in particolare lo sviluppo della transizione da COV 1 a COV 2. I tre esempi del §3.2 concretizzano la dinamica dell'intero processo in cui si articola e matura il ragionamento covariazionale degli studenti e permettono di riferire a tale contesto emblematico la discussione generale sul costrutto di COV 2 in relazione alla sua genesi epistemologica ed epistemica da COV 1.

Gli strumenti della teoria delle categorie permettono di sistemare in un quadro teorico unificato l'estensione/elaborazione da COV 1 a COV 2, includendovi la fase intermedia di transizione, tema che non era stato approfondito nei lavori precedenti degli autori (per es. Arzarello, 2019; Bagossi, 2022). Il nucleo unificante di tale processo è dato dall'analisi della nozione di aggiunzione degli esponenziali (definizione 10) secondo una duplice caratterizzazione, dapprima statica (§4.3.1), all'interno di un contesto funzionale strutturale vicino alla sistemazione classica della nozione di funzione (§4.2), e successivamente dinamica (§4.3.2), in cui si segue il processo di genesi della costruzione della categoria finale di COV 2 introducendone via via i suoi costituenti. Nella fase statica (definizione 11) si coglie l'aggiunzione come collegamento della covariazione tra la variabile dipendente e indipendente di una funzione (COV 1) con l'equazione della funzione al variare del parametro (COV 2): si tratta della covariazione intermedia tra COV 1 e COV 2, illustrata dall'esempio 2 del §3.2. Nella fase dinamica (definizione 12) si coglie l'aggiunzione come la variazione della relazione tra parametro e variabile nella funzione da un lato e la variazione della famiglia di funzioni dall'altro. In tal modo si hanno due aspetti dell'aggiunzione: si ottiene la COV 2 quando si traducono le due caratterizzazioni una nell'altra all'interno di un'unica categoria. Questo è tecnicamente possibile grazie alla trasformazione naturale $\tau: h_{A\times X} \Rightarrow h_{Y^X \times X}$ tra i funtori rappresentabili $h_{A\times X}$ e $h_{Y^X \times X}$: essa si ottiene come aggiunzione del morfismo $\hat{g} \times id_X$, quale conseguenza del lemma di Yoneda. Tale trasformazione esprime la traduzione dell'attribuzione di significato alla COV 1 nell'attribuzione di significato alla covariazione di livello intermedio tra COV 1 e COV 2.

Per cogliere a fondo il significato epistemico di tale traduzione si ricorre alla definizione categoriale di analogia (definizioni 13 e 14), che elabora nel linguaggio categoriale la nozione di metafora strutturale di Pimm (1981). In tal modo si stabilisce un'analogia tra il frammento di teoria delle categorie usato per interpretare epistemologicamente la covariazione funzionale ($\boldsymbol{C_{COV}}$) e un frammento della categoria didattica della matematica (***Ddm***) come descritto in forma generale da Asenova (2021): in questo caso il frammento di didattica della matematica considerato riguarda l'apprendimento della covariazione al secondo ordine. Tramite una metafora strutturale (analogia) è possibile immergere la categoria $\boldsymbol{C_{COV}}$ in ***Ddm*** (Figura 10) e conseguentemente interpretare i concetti categoriali precedentemente introdotti nel contesto della didattica della matematica. Il lavoro di interpretazione è svolto dai funtori (rappresentabili) $h_{A\times X}$ e $h_{Y^X \times X}$. In didattica della matematica essi sono tradotti e unificati vicendevolmente tramite trasformazioni naturali in un unico contesto epistemico, generando così l'emergenza di COV 2. I vari passaggi epistemici possono così essere sinteticamente illustrati con riferimento ai tre esempi del §3.2, come discusso alla fine del §5. Il diverso modo con cui negli esempi si collegano le variazioni degli oggetti matematici in gioco (la successione delle distanze percorse dalla pallina, l'equazione che lega spazio e tempo, l'angolo inteso come parametro, la famiglia delle funzioni coinvolte) bene illustra quella che potremmo chiamare la 'prospettiva di Yoneda', secondo la quale gli oggetti matematici sono completamente determinati dalle loro relazioni con altri oggetti.

Il lavoro qui svolto ne costituisce un'illustrazione, che pensiamo possa convincere i lettori dell'utilità e profondità di questa prospettiva unificante: i due aspetti, epistemologico ed epistemico, della genesi di COV 2 sono espressi in modo 'doppiamente naturale': sia nel significato corrente del termine nel senso di non artefatto, sia nel significato relativo alle trasformazioni naturali che producono questa unificazione.

È qui il caso di osservare che per la stessa natura degli oggetti categoriali, che non sono essenzialmente mai completamente determinati, la ricerca secondo la prospettiva di Yoneda potrà continuare percorrendo nuove vie. In particolare, la varietà di contesti in cui il ragionamento covariazionale compare lascia intravedere varie possibilità:

- sperimentazioni didattiche a livelli diversi di età, sia con numeri più alti di allievi, così da approfondire i risultati sperimentali ottenuti, sia variando i contesti delle situazioni didattiche scelte per generare i ragionamenti covariazionali (esempi in Bagossi, 2022, cap. 12), così da produrre ulteriori evidenze empiriche alla generalità dei risultati teorici qui illustrati;
- instrumentazione dei ragionamenti covariazionali al secondo ordine tramite il supporto di opportuni artefatti, digitali e non, ampliando il costrutto della *covariazione instrumentata* in analogia a quanto discusso in Arzarello (2019) per la covariazione al primo ordine.

Queste ulteriori ricerche permetteranno di arricchire ulteriormente le proprietà della COV 2, secondo il principio categoriale che le proprietà di un oggetto sono essenzialmente date dal modo in cui l'oggetto si relaziona con gli altri.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Arzarello, F. (2019). La covariación instrumentada: Un fenómeno de mediación semiótica y epistemológica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. Año 14. Número 18, 11–29.

Asenova, M. (2021). *Definizione categoriale di Oggetto matematico in Didattica della matematica*, Bologna: Pitagora.

Bagossi, S. (2022). *Second-order covariation: An analysis of students' reasonings and teacher's interventions when modelling real phenomena*, Ph.D. Thesis, Università degli studi di Modena e Reggio Emilia in convenzione con Università degli studi di Ferrara e Università degli studi di Parma.

Bagossi, S., Ferretti, F., & Arzarello, F. (2022). Assessing covariation as a form of conceptual understanding through comparative judgement. *Educational Studies in Mathematics*, 1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10178-w

Bloedy-Vinner, H. (2001). Beyond unknowns and variables-parameters and dummy variables in high school algebra. The notion of parameter. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, & R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*, 177–189. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C. B. (1946). Proportion, equation, function: Three steps in the development of a concept. *Scripta Mathematica*, *12*, 5–13.

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*, 352–378. https://doi.org/10.2307/4149958

D'Amore, B. (1974). Su un possibile concetto di analogia. La categoria analogica. *Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena*, XXIII, 231–232.

Dörfler, W. (2005). Diagrammatic thinking: Affordances and constraints. In M. Hoffmann, J. Lenhard, & F. Seeger (Eds.), *Activity and sign* (pp. 57–66). Springer.

Facchini, A., & Lolli, G. (2009). Insiemi e classi. *Matematica nella Società e nella Cultura*, *2*(3), 415–424.

Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti la meccanica e i movimenti locali.*

Verona (IT): Cierre, Simeoni Arti Grafiche. ISBN 9788895351049

Goldblatt, R. (1984). *Topoi: the categorial analysis of logic*. Elsevier.

Mac Lane, S. (1978). *Categories for the Working Mathematician*. Berlin: Springer-Verlag.

Monk, S., & Nemirovsky, R. (1994). The case of Dan: Student construction of a functional situation through visual attributes. *CBMS Issues in Mathematics Education*, *4*, 139–168.

Oizumi, M., Albantakis, L., & Tononi, G. (2014). From the phenomenology to the mechanisms of consciousness: integrated information theory 3.0, *PloS Computational Biology*, 10(5): e1003588. https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1003588

Peirce, C. S. (1960). *Collected papers of Charles Sanders Peirce*, In C. Hartshorne & P. Weiss (Eds.) (Vol. 1-6). The Belknap Press of Harvard University Press.

Phillips, S. (2018). What underlies dual-process cognition? Adjoint and representable functors. In C. Kalish, M. Rau, J. Zhu, & T. T. Rogers (Eds.), *Proceedings of the 40th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, pp. 2250–2255. Austin, TX: Cognitive Science Society.

Phillips, S. (2020). Sheaving—a universal construction for semantic compositionality, *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 375 (1791), 20190303. https://doi.org/10.1098/rstb.2019.0303

Pimm, D. (1981). Metaphor and analogy in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *1*(3), 47–50.

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking co-variation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In: Berenson, S. B. & Coulombe, W. N. (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the Psychology of Mathematics Education* – North America Vol 1, Raleigh, NC: North Carolina State University, 298–304.

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*(3), 259–281.

Swidan, O., Bagossi, S., Beltramino, S., & Arzarello, F. (2022). Adaptive instruction strategies to foster covariational reasoning in a digitally rich environment. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100961. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100961

Tall, D., & Vinner, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics,* 12, 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, *25*(3), 165–208. https://doi.org/10.1007/BF01273861

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179–234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. In L. L. Hatfield, S. Chamberlain & S. Belbase (Eds.*), New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education. WISDOMe Monographs* (Vol. 1, pp. 33–57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 421–456.

Thompson, P. W., Hatfield, N. J., Yoon, H., Joshua, S., & Byerley, C. (2017). Covariational reasoning among US and South Korean secondary mathematics teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 95–111. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.08.001

Tononi, G. (2012). The integrated information theory of consciousness: an updated account. *Archives italiennes de biologie*, *150*(2/3), 56–90. https://doi.org/10.4449/aib.v149i5.1388

Tsuchiya, N., Taguchi, S., & Saigo, H. (2016). Using category theory to assess the relationship between consciousness and integrated information theory. *Neuroscience research*, 107, 1–7. https://doi.org/10.1016/j.neures.2015.12.007

Zalamea, F. (2012). *Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. New York (NY): Sequence Press.

Zalamea, F. (2021). *Modelos en haces para el pensamiento matemático*. Bogotà: Universidad Nacional de Colombia.