



Héctor Mauricio Becerra GALINDO¹

La coscienza semiotica degli insegnanti in relazione agli insiemi infiniti, a partire dall'idea di metafora

The semiotic awareness of teachers in the teaching of infinite sets, from the idea of metaphor

SUNTO

Questo articolo presenta alcuni risultati ottenuti nel corso di una ricerca dottorale sui problemi semiotici nelle rappresentazioni di insiemi infiniti nella pratica didattica. Ciò nasce dalle difficoltà che gli studenti presentano nella costruzione cognitiva di insiemi infiniti. Ci concentreremo sulla difficoltà associata alla mancanza di coscienza semiotica da parte dei docenti nelle rappresentazioni scelte nell'insegnamento-apprendimento degli insiemi infiniti. Per affrontare questa difficoltà sono stati indagati e descritti i problemi semiotici e le metafore presentati nelle rappresentazioni di insiemi infiniti nei libri di testo e nelle pratiche didattiche. A seguito dell'indagine, vengono presentate alcune manifestazioni degli insegnanti che descrivono i problemi semiotici presentati nelle rappresentazioni degli insiemi infiniti nelle pratiche didattiche dalla metafora, che hanno permesso di avviare una consapevolezza semiotica da parte degli insegnanti.

Parole chiave: Coscienza semiotica, rappresentazione semiotica, metafora, insiemi infiniti, insegnamento-apprendimento.

ABSTRACT

This article presents some results of doctoral research on semiotic problems in the representations of infinite sets in teaching practice. This arises from the difficulties that students present in the cognitive construction of infinite sets. We will focus on the difficulty associated with the lack of semiotic awareness on the part of teachers in the representations chosen in the teaching-learning of infinite sets. To address this difficulty, semiotic problems and metaphors presented in the representations of infinite sets in textbooks and in teaching practices were investigated and described. As a result of the investigation, some manifestations of the teachers are presented that describe the semiotic problems presented in the representations of the infinite sets in the teaching practices from the metaphor, which allowed to initiate a semiotic awareness by them teachers.

Keywords: Semiotic awareness, semiotic representation, metaphor, infinite sets, teaching-learning.

¹NRD – Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica Università di Bologna, ITALIA.

Docente Secretaria de Educación del Distrito, Bogotá D.C., COLOMBIA

CADE Grupo de Investigación Matemáticas Escolares Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C., COLOMBIA

Indirizzi email:

hbecerra@educacionbogota.edu.co;
hemabe2@yahoo.es;

<https://orcid.org/0000-0002-5477-4680>

Ricevuto il 03/09/2022

Accettato il 31/10/2022



INTRODUZIONE

“Non c’è noesis senza semiosis”¹
Raymond Duval (1995/1999)

Problema

Le diverse indagini che sono state condotte sul processo di insegnamento e apprendimento di insiemi infiniti (Fischbein, Tirosh, & Hess, 1979; Duval, 1983; Moreno & Waldegg, 1991; Arrigo & D’Amore, 1999, 2002; Tsamir, 2000; Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011) evidenziano difficoltà negli studenti riguardo alla loro costruzione cognitiva. Queste difficoltà si associano alla difficoltà oggettiva degli studenti di fronte al tema più generale dell’infinito (che costituisce un ostacolo epistemologico) come conclude la ricerca di Arrigo, D’Amore e Sbaragli (2011), e al tema generale della formazione di un’opportuna rappresentazione semiotica. Scrive Duval (1993, p. 38, nella traduzione di D’Amore, 2002): “da un lato, l’apprendimento di oggetti matematici può essere solo un apprendimento concettuale e, dall’altro, è solo attraverso rappresentazioni semiotiche che è possibile un’attività su oggetti matematici”. Facciamo qui esplicito riferimento al famoso “paradosso di Duval” e al ben noto motto di Duval (1995/1999, p. 15): “non c’è noesis senza semiosis”.

Le suddette difficoltà sono già state oggetto di molte ricerche in passato, motivo per cui la nostra attenzione in questa ricerca si è concentrata sulle difficoltà legate soprattutto a: 1) la mancanza di “coscienza semiotica” (conoscenza consapevole dei sistemi di rappresentazioni che sono mobilitati nell’attività matematica e che è specifica per la semiotica) eventualmente presente negli insegnanti quando scelgono le rappresentazioni per indicare insiemi infiniti nel loro processo didattico; 2) le interpretazioni che gli studenti fanno di queste rappresentazioni scelte dall’insegnante, al fine di promuovere una riflessione critica da parte degli insegnanti sulle rappresentazioni semiotiche adottate e sulle metafore utilizzate nelle loro spiegazioni nella generazione di detti conflitti e difficoltà.

Questa difficoltà diventa evidente quando gli insegnanti generano argomentazioni da ciò che

“vedono” nelle rappresentazioni e non dal coordinamento di registri di rappresentazioni semiotiche che sono necessari per la concettualizzazione (Duval, 1993) di insiemi infiniti. Per esempio, quando il docente (da noi codificato con la lettera C) vede la rappresentazione grafica (Figura 1) comune nei libri di testo e nelle pratiche didattiche, è portato a dare le seguenti risposte alle domande da noi poste:

Pensi che gli elementi che compongono l’insieme dei numeri interi siano: più, meno o lo stesso numero degli elementi che contiene l’insieme dei numeri naturali?

C: Ovviamente ce ne sono di più, ci sono anche tutti gli interi negativi.

Ric.: Come rappresenteresti questi insiemi numerici ai tuoi studenti?

C: Metterei gli interi sulla retta e i naturali, invece, sulla semiretta. [...]

Ric.: Lo presenti così in aula?

C: Ovviamente dico che i numeri negativi devono sempre precedere i numeri positivi. (Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209)

Figura 1

Rappresentazione grafica di \mathbb{N} e \mathbb{Z}



Fonte: Arrigo, D’Amore, & Sbaragli (2011, p. 222)

In questo caso, la rappresentazione grafica porta docenti e studenti a pensare che il numero degli interi sia il doppio dei numeri naturali, in altre parole che l’insieme degli interi abbia più elementi dell’insieme dei naturali; stabilisce inoltre che “tutti i numeri [naturali] 0, 1, 2, 3, ... sono il doppio dei numeri interi, perché mancano quelli dispari” (Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209), il che genera il “fenomeno della dipendenza”, termine proposto da Arrigo e D’Amore (1999) che si riferiscono all’assioma euclideo: “Il tutto è

traduzioni dell’autore.

¹ Tutte le citazioni contenute in questo testo sono



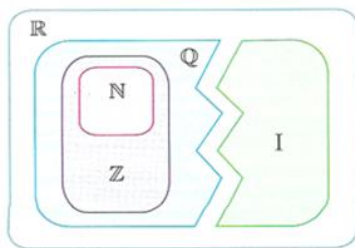
maggiore della parte” come verità assoluta. In questo caso ritroviamo un problema relativo alla rappresentazione e concettualizzazione di insiemi infiniti, poiché “ad una maggiore lunghezza deve corrispondere una maggiore cardinalità dell’insieme dei punti” (già segnalata da Fischbein, 1992, 2001).

Nelle argomentazioni precedenti si mostra in una certa misura la mancanza di “coscienza semiotica” negli insegnanti nella scelta delle rappresentazioni scelte quando cercano di far costruire cognitivamente ai loro studenti gli insiemi infiniti. Purtroppo in questa scelta semiotica, gli insegnanti non sono aiutati da quanto appare in parecchi libri di testo di matematica, testi ai quali ricorrono come riferimento e sostegno per la pianificazione e la progettazione delle attività.

Il problema comincia a diventare evidente anche quando gli insegnanti, per la costruzione cognitiva dei numeri reali, propongono alla loro classe una definizione come la seguente che traiamo da un libro di testo della scuola secondaria (8° grado):

I numeri naturali N , gli interi Z e i razionali Q formano, insieme con gli irrazionali I , l’insieme dei numeri reali R .

Per capire come si relazionano gli insiemi di numeri appena citati, osserviamo lo schema seguente:



In questa definizione si può osservare un problema nella rappresentazione semiotica (Becerra Galindo, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021) che genera una contraddizione tra il registro multifunzionale e discorsivo della rappresentazione nel linguaggio naturale e la rappresentazione ausiliaria; non c’è una rappresentazione corretta dell’insieme dei numeri reali, non c’è coordinamento dei registri semiotici (Duval, 2017).

In una prima analisi metaforica, lo schema proposto, dal punto di vista degli elementi costitutivi, può essere classificato come schema contenitore (è uno

schema di immagini che si basa sull’esperienza concreta, reale): gli elementi del contenitore formano l’unità, e questa ha tre parti contenenti: un interno, un bordo e un esterno. Questo schema è legato alla metafora concettuale del tipo extramatemático (grounding), nel quale lo schema del contenitore si trova nel dominio di partenza e i numeri reali si trovano nel dominio di arrivo; esso fa parte esattamente degli esempi metaforici proposti da Font (2007): “Le classi sono contenitori, i punti sono oggetti e una funzione è una macchina” (p. 118).

Osservando lo schema si può capire che la prima linea è vista come il contenitore, quindi è l’unità, e in questo caso tutto ciò che è all’interno di quella linea sarebbero i numeri reali, ma senza tener conto delle altre linee interne di Q e di I . La difficoltà sorge quando abbiamo tre contenitori, uno per R , uno per Q e uno per I , ma alcuni oggetti di R non sono in Q o I . Quindi questo contraddice la logica dello schema del contenitore e, a sua volta, quella del contenitore dei numeri reali, perché dovrebbero allora esistere oggetti di R , che non sono né in Q né in I .

Da questo problema che sorge sulle rappresentazioni si pone la seguente domanda di ricerca: *Quali manifestazioni della coscienza semiotica si producono nel docente problematizzando la sua scelta delle rappresentazioni semiotiche nel processo di insegnamento-apprendimento di insiemi infiniti?*

Per rispondere a questa domanda di ricerca, le manifestazioni di “coscienza semiotica” che si evidenziano nell’insegnante sono state caratterizzate in maniera specifica, mostrando all’insegnante stesso le diverse interpretazioni che gli studenti hanno dato alle rappresentazioni semiotiche utilizzate dall’insegnante. Questi riteneva le sue scelte ottimali dal punto di vista didattico, ma gli studenti hanno assai spesso interpretato semioticamente queste rappresentazioni in modi del tutto inattesi, diversi da quelli auspicati dal docente.

FONDAMENTO TEORICO

I riferimenti teorici sui quali si basa questo articolo sono relativi agli elementi semiotico-noetici proposti nei lavori di Duval (1995/1999, 2004, 2006, 2008, 2016, 2017). Poiché gli oggetti della matematica non sono “cose” che possano venire percepite dai sensi (nessuno può vederli, toccarli, gustarli, udirli, pesarli, colorarli, romperli, ...), l’unica cosa che possiamo fare in relazione a questi “oggetti matematici è descriverli, definirli, denotarli, nominarli, disegnarli ecc., vale a dire darne rappresentazioni semiotiche” (D’Amore, Fandiño, & Iori, 2013, p. 125).

Le rappresentazioni semiotiche non sono le uniche che fanno parte dei processi dell’attività matematica. Come afferma Font (2007), anche le metafore sono parte di questi processi che strutturano la conoscenza degli oggetti matematici in base alle nostre conoscenze e che “agiscono in modo iconico, poiché una rappresentazione iconica, oltre a rappresentare l’oggetto, informa la struttura di detto oggetto” (Font, 2007, p. 125). Verranno inoltre utilizzati gli elementi relativi alle metafore proposte da Lakoff e Nuñez (2000).

Rappresentazioni semiotiche

Nelle parole di Duval (1995/1999, 2004, 2016), una rappresentazione è “qualcosa che viene messo al posto di qualcos’altro” (Duval, 2016, p. 62) e la struttura proposta da Duval (2008) di una semiotica rappresentazionale è:

{ {contenuto di rappresentazione, registro semiotico rappresentato}, oggetto rappresentato }.

Ci sono quattro registri che vengono mobilitati in matematica: discorsivo, non discorsivo, multifunzionale e monofunzionale. La figura 2 presenta la classificazione dei registri mobilitati in matematica.

È necessario chiarire che esistono alcune rappresentazioni ausiliarie che non dipendono dal registro semiotico e vengono utilizzate in matematica, come certi materiali (per esempio il manipolativo come: l’abaco, i numeri in colore di Cuisenaire, i blocchi logici ecc.), gli esempi, le illustrazioni, l’organizzazione (per esempio le tabelle) ecc. (Duval, 2004).

I due tipi di trasformazioni che si verificano nella rappresentazione semiotica sono:






- **Trattamenti:** sono trasformazioni delle rappresentazioni di un oggetto (matematico) nello stesso registro; ad esempio: $\frac{1}{2} = 0,5$; si passa da una rappresentazione di scrittura frazionaria a una rappresentazione di scrittura decimale, entrambe appartenenti a un nel registro monofunzionale e a un registro discorsivo.
- **Conversioni:** sono trasformazioni delle rappresentazioni di un oggetto (matematico) che consistono nel cambiare il registro senza cambiare gli oggetti denotati; per esempio passando dal registro multifunzionale e discorsivo con la rappresentazione del linguaggio naturale al registro multifunzionale e non discorsivo con la rappresentazione pittografica, come nell’esempio che segue:



Quest’ultima trasformazione è la radice dei “problemi che molti studenti hanno con il pensiero matematico [... a causa della sua...] complessità cognitiva [... e per il...] cambiamento di rappresentazione” (Duval, 2016, p. 85).

Figura 2

Classificazione delle diverse tipologie di registri mobilitati in matematica.

	RAPPRESENTAZIONI risultanti da uno dei tre tipi de OPERAZIONI DISCORATIVE: 1 Denotazione di oggetti (nomi, marche, ...) 2 Enunciato di relazioni o proprietà 3 Inferenza (deduzione, calcolo...)	RAPPRESENTAZIONE Non DISCORATIVA (Configurazioni di forma 1D/2D, 2D/2D, 3D/2D)
REGISTRI MULTIFUNZIONALI: I processi NON sono algoritmi	NEL LINGUAGGIO NATURALE: due modalità non equivalenti nella loro espressione • Spiegazioni ORALI,  • SCRITTI (visuali): teoremi, dimostrazioni, 	ICONICO: disegno, schizzo, modello  NON ICONICO: figure geometriche che si possono costruire con strumenti
	Rappresentazioni AUSILIARI transitorie senza regole di combinazione (appoggio libero) ↓ ↓ ↓	
REGISTRI MONOFUNZIONALI: La maggior parte dei processi sono algoritmici	IN SISTEMI SIMBOLICI Solo scritti: impossibile da contare oralmente se non pronunciando lettera per lettera  Calcolo, dimostrazione	D2 COMBINAZIONE DI FORME D1 e D0, orientate o no (frece)  Diagrammi, grafici

Fonte: Duval & Sáenz-Ludlow (2016, p. 71)

Metafore

Lakoff e Johnson hanno evidenziato l'importanza del pensiero metaforico, inteso come interpretazione di un campo di esperienze nei termini di un altro già noto (Lakoff & Johnson, 1991). Il ruolo del pensiero metaforico nella formazione dei concetti matematici è un argomento sempre più rilevante per la ricerca nell'insegnamento-apprendimento della matematica (Van Dormolen, 1991; English, 1997; Lakoff & Núñez, 1998, 2000; Núñez, 2000; Núñez & Lakoff, 1998; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2012).

Johnson (1991) afferma che gli schemi di immagini sono strutture di conoscenza interconnesse e dinamiche, modificabili attraverso l'esperienza e modellate dal ripetersi di esperienze passate. Per Lakoff e Núñez (2000), gli schemi di immagini hanno una funzione cognitiva speciale, di natura

percettiva e concettuale, generando un ponte tra linguaggio e ragionamento, da un lato, e visione, dall'altro. Per esempio, uno schema di immagini può essere adattato alla percezione visiva, come quando vediamo che il latte è nel bicchiere; in questo caso abbiamo un contenitore (il bicchiere) e possiamo vedere il latte, ivi contenuto. Gli schemi di immagini sono il legame tra il linguaggio e la percezione spaziale.

Dalla prospettiva di cui sopra, Johnson (1991) definisce uno schema come: "ricorrente, una forma e una regolarità in queste attività di ordinamento in corso" (Johnson, 1991, p. 85); propone anche lo schema del contenitore come uno degli schemi più importanti con la sua corrispondente struttura interna.

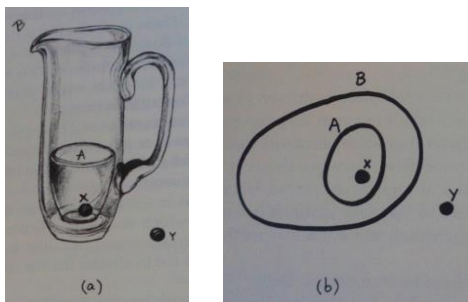
Lakoff e Núñez (2000) riconoscono in questo schema tre parti: interno, confine ed esterno; inoltre, sulla base di due esempi (Figura 3), espongono la

logica spaziale di questo schema, che viene spiegato come segue:

- 1) Dati due schemi contenitore A e B, e un oggetto X, se A è in B e X è in A, allora X è in B. (a)
- 2) Dati due schemi contenitore A e B, e un oggetto Y, se A è in B e Y è esterno a B, allora Y è esterno ad A. (b)

Figura 3

Classificazione delle diverse tipologie di registri mobilitati in matematica



Fonte: Lakoff & Núñez (2000, p. 32)

Questo schema è specificamente correlato alla metafora del contenitore.

La metafora è caratterizzata dalla creazione, tra un dominio di partenza e un dominio di arrivo, di un ponte di collegamento concettuale che consente la trasfusione delle proprietà del dominio di partenza nel dominio di arrivo. In altre parole, creano un certo “isomorfismo” che permette di trasporre una serie di caratteristiche e strutture. Ora, la metafora rivela solo un aspetto del dominio di arrivo che non racchiude la sua totalità; essa serve a mostrare l’aspetto che vogliamo evidenziare ma nasconde altri aspetti, di cui spesso non siamo nemmeno consapevoli.

La ricerca sul pensiero metaforico ha rilevato diversi tipi di metafore. Un primo gruppo è costituito da tipi extramatematici (grounding), come “una funzione è una macchina”, che servono a spiegare o interpretare situazioni matematiche in termini di situazioni reali. Un esempio, forse il più notevole di questo tipo per la ricerca, è quello del “contenitore”, che viene utilizzato per strutturare la teoria delle classi che, secondo Núñez (2000), è una

metafora inconscia, radicata nella teoria delle classi, che possiamo visualizzare nella Tabella 1.

Tabella 1

Le classi sono container

[Dominio iniziale] Schemi di contenitori	[Dominio di arrivo] Classi
Interni di schemi di contenitori	→ Classi
Oggetti negli interni	→ Membri della classe
Essere un oggetto in un interno	→ Il rapporto di appartenenza
L'interno di un contenitore	→ Una sottoclasse in una classe più ampia
Schema all'interno di uno più vasto	→ L'intersezione di due classi
La sovrapposizione degli interni di due schemi di contenitori	→ L'unione di due classi
L'intero interno di due schemi di contenitori	→ Il complemento di una classe.
L'esterno di uno schema contenitore	

Fonte: Núñez (2000, p. 13)

Metodologia

La nostra ricerca è inquadrata in un approccio di ricerca qualitativo, di tipo descrittivo-comparativo, comprendendo il significato della prima come quella che “descrive le caratteristiche di un insieme di soggetti o aree di interesse” (Tamayo, 2001, p. 66) e della seconda come: “l’attività della ragione che mette alcune realtà in corrispondenza con altre per vederne somiglianze e differenze” (Sierra-Bravo, 1994, p. 161).

Per evidenziare le manifestazioni di consapevolezza semiotica degli insegnanti, sulla base delle rappresentazioni semiotiche e delle metafore scelte dall’insegnante stesso relative agli insiemi numerici nella loro pratica didattica, nella proposta di una costruzione cognitiva degli insiemi infiniti, è stata presa in considerazione la seguente opzione metodologica:

- 1) sono stati selezionati e analizzati 35 libri di testo, seguendo il percorso metodologico: a) è stato chiesto ai docenti partecipanti quali libri utilizzavano per insegnare i numeri reali, il che ha portato allo studio e all’esame di 35 libri diversi; b) i libri esaminati sono stati raggruppati in tipologie in base alle rappresentazioni utilizzate, ottenendo 10 diversi tipi di testi; c) è stata effettuata un’analisi dettagliata delle rappresentazioni semiotiche e delle metafore di ciascun tipo (come spiegato nella sezione seguente);
- 2) le lezioni di questi docenti sono state osservate e registrate, evidenziando la scelta di rappresentazioni semiotiche e metafore



degli insiemi numerici utilizzati dal docente per la proposta di costruzione cognitiva degli insiemi infiniti;

- 3) sono stati successivamente intervistati gli studenti, insistendo soprattutto sulle loro interpretazioni personali delle rappresentazioni semiotiche che gli insegnanti avevano usato in aula per insegnare gli insiemi di numeri; si è messo in evidenza il fatto che le interpretazioni semiotiche personali degli studenti assai spesso non coincidevano con quelle che gli insegnanti credevano di aver proposto ritenendole corrette, facilmente interpretabili, doverose, uniche; le frasi, i frammenti video e i fogli di risposta degli studenti, sono state registrate e trascritte;
- 4) ai singoli docenti sono state poste domande relative alla motivazione della scelta delle rappresentazioni semiotiche scelte in relazione all'insegnamento degli insiemi numerici infiniti, e su cosa essi pensassero a proposito della costruzione cognitiva di tali insiemi da parte dei propri studenti; sono state mostrate loro le risposte dei propri studenti: esse hanno evidenziato la diffusissima se non totale mancanza di apprendimento o di comprensione, e le diverse interpretazioni delle scelte semiotiche (tramite frammenti video, frasi e fogli di risposta degli studenti). Nell'interpretazione data da ciascuno docente dell'evidente realtà, si raccoglievano le manifestazioni della sua consapevolezza semiotica sulla scelta delle rappresentazioni semiotiche e delle metafore degli insiemi numerici utilizzati per favorire la costruzione cognitiva di insiemi infiniti.

La ricerca è stata condotta in due scuole pubbliche a Bogotá (Colombia); sono stati scelti 6 docenti di matematica, ma l'intero processo dettagliato di ricerca è poi stato svolto con 2 docenti. Gli studenti appartenevano ai gradi 9a e 11a, per un totale di 67 studenti (tra i 14 e i 18 anni circa); la selezione di questi studenti è stata effettuata in modo casuale.

Analisi dei dati

In questa sezione vengono caratterizzate le metafore presentate nella spiegazione degli insiemi numerici dal docente D₂₁. Queste metafore ci consentono di

analizzare i problemi semiotici e/o le difficoltà che sorgono nelle rappresentazioni semiotiche, poiché le metafore nel tempo diventano rappresentazioni (Font, 2007).

La Tabella 2 mostra un primo confronto dello schema - contenitore di Lakoff e Núñez (2000) con la rappresentazione ausiliaria del libro di testo, quella scelta dall'insegnante D₂₁ nella sua pratica didattica e quella di uno studente, nella costruzione cognitiva degli insiemi.

Dal punto di vista degli elementi metaforici, le Figure 5, 6 e 7 possono essere classificate in uno "schema contenitore" (schema di immagini basato sull'esperienza corporea), dove gli elementi del contenitore formano l'unità che contiene tre parti: l'interno, il bordo e l'esterno. Questo schema è legato alla metafora concettuale extramatematica (grounding), dove lo "schema contenitore" si trova nel dominio di partenza e l'insieme dei numeri reali si trova nel dominio di arrivo, e che farebbe parte degli esempi proposti da Font (2007) della metafora: "Le classi sono contenitori" (p. 118).

Successivamente, l'analisi dello schema contenitore viene svolta centrandola sui poli usuali del "triangolo della didattica": scuola (sapere), insegnante e studente (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2002).

La Figura 5 mostra la rappresentazione ausiliaria del gruppo scelto a lezione dall'insegnante D₂₁, ispirandosi al suo testo scolastico. Si può capire che la prima linea chiusa è il contenitore, quindi è l'unità, e in questo caso tutto ciò che sta all'interno di quella linea sarebbero i numeri reali (R), senza tener conto delle altre linee interne che delimitano Q e I; in questo caso, non ci sono problemi con lo schema del contenitore.

Ora, si osservi la rappresentazione ausiliaria (Figura 5) del testo scolastico e si considerino i tre contenitori:

- a. il primo contenitore visualizzato con la prima linea chiusa, rappresenta i numeri reali (R) al suo interno;
- b. il secondo contenitore descritto con la linea chiusa, rappresenta i numeri irrazionali (I) al suo interno;


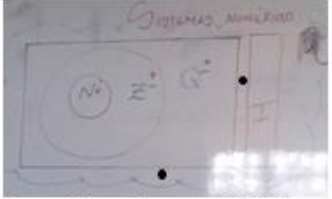
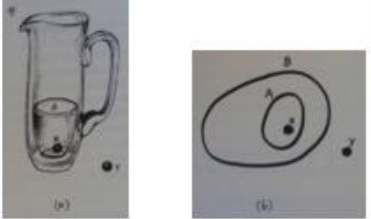
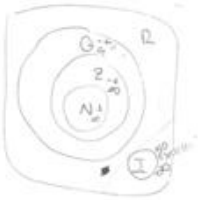


- c. il terzo contenitore ricoperto dalla linea chiusa, rappresenta i numeri razionali (Q) al suo interno.

I due punti sono numeri che fanno parte dei numeri reali (R), ma non dei numeri irrazionali (I) né dei numeri razionali (Q). Quindi la logica dello schema contenitore è contraddetta; e così quella dei numeri reali (R), perché ci devono essere numeri reali (R) che sono o numeri razionali (Q) o (aut) numeri irrazionali (I).

Tabella 2

Confronto tra lo schema del contenitore e la rappresentazione ausiliaria del docente D₂₁

Lakoff & Núñez (2000)	Situazione didattica dell'insegnante D ₂₁
<ol style="list-style-type: none"> 1. Dati due schemi contenitore <i>A</i> e <i>B</i>, e un oggetto <i>X</i>, se <i>A</i> è in <i>B</i> e <i>X</i> è in <i>A</i>, allora <i>X</i> è in <i>B</i>. (a) 2. Dati due schemi contenitore <i>A</i> e <i>B</i>, e un oggetto <i>Y</i>, se <i>A</i> è in <i>B</i> e <i>Y</i> è esterno a <i>B</i>, allora <i>Y</i> è esterno ad <i>A</i>. (b) 	<p><i>Testo scolastico (sapere)</i></p> <p>Figura [5] <i>Schema (Rappresentazione ausiliare di R).</i></p>  <p>Fonte: Dueñas, Garavito, & Lara, 2007, p. 48.</p> <p><i>Insegnante</i></p> <p>Figura [6] <i>Rappresentazione ausiliaria: insieme dei numeri reali.</i></p>  <p>Fonte: Appunti personali di D₂₁.</p>
<p>Schema del contenitore</p>	<p>Figura [4] <i>Esempi di schemi di contenitori.</i></p>  <p>Fonte: Lakoff & Núñez, 2000, p. 32.</p>
	<p><i>Alunno</i></p> <p>Figura [7] <i>Rappresentazione ausiliaria</i></p>  <p>Fonte: Foglio di risposta di E₂₄.</p>

Fonte: Becerra Galindo (2020, p. 283)



Si osservi ora la Figura 6:

- a. il primo contenitore descritto con la prima linea curva chiusa rappresenta i numeri reali (R), contenuti al suo interno;
- b. il secondo contenitore descritto con la linea chiusa (a forma di rettangolo), rappresenta i numeri irrazionali (I), contenuti al suo interno;
- c. il terzo contenitore racchiuso dalla linea chiusa (rettangolo grande), rappresenta i numeri razionali (Q), contenuti al suo interno.

I due punti neri sono numeri che fanno parte dei numeri reali (R), ma non dei numeri irrazionali (I), né dei numeri razionali (Q), come appare anche nella figura del testo scolastico. In questa rappresentazione ausiliaria è contraddetta la logica dello schema contenitore e a sua volta quella dei numeri reali (R), perché, come abbiamo già detto, devono esserci numeri reali (R) che sono numeri razionali (Q) o (aut) numeri irrazionali (I).

La Figura 7 mostra la rappresentazione ausiliaria del gruppo proposta da E₂₄, una studentessa dell'insegnante D₂₁. Se si osserva tale rappresentazione e si prendono i tre contenitori, come nel caso del testo scolastico e dei poli insegnante, risulta:

- a. il primo contenitore disegnato con la prima linea curva chiusa rappresenta i numeri reali (R);
- b. il secondo contenitore disegnato con la linea curva chiusa (ovale piccolo) rappresenta i numeri irrazionali (I);
- c. il terzo contenitore disegnato con la linea curva chiusa (ovale grande) rappresenta i numeri razionali (Q).

Un punto nero è un numero che fa parte dei numeri reali (R) ma non dei numeri irrazionali (I), né dei numeri razionali (Q). La logica dello schema contenitore è ancora una volta contraddetta.

Nella studentessa E₂₄ si genera dunque un conflitto cognitivo nel processo di apprendimento (D'Amore, 1999/2006).

Problemi e difficoltà con lo schema contenitore si riscontrano lungo tutto il percorso della situazione di insegnamento-apprendimento proposto dal docente D₂₁.

Nell'analisi si può evidenziare che ciò è dovuto alla contraddizione logica dello schema contenitore; è evidente che l'insegnante D₂₁ non possiede gli elementi metaforici o semiotici per indicare che i numeri dei numeri reali (R) sono razionali (Q) o irrazionali (I). Questo problema rivela una mancata comprensione dello schema contenitore da parte dell'insegnante D₂₁.

Nel colloquio con la docente D₂₁, i problemi e le difficoltà con lo schema del contenitore sono del tutto evidenti, come si verifica nel testo che segue:

[Ric.] [63]: “Che cosa accadrebbe se uno studente chiedesse: se ho un punto in questo spazio [quello contrassegnato da un punto nero nella rappresentazione ausiliaria dell'insieme \mathbb{R} , figure 6 e 7], che numero è?”. Risponde la docente D₂₁ [64]: “Potrei dirti che è un numero reale, che non fa parte dei numeri irrazionali, poiché non è dentro l'insieme, che non fa parte dei numeri razionali, perché non è dentro la rappresentazione dei numeri razionali”. (Becerra Galindo, 2020, pp. 285-286)

L'insegnante D₂₁ presenta una mancanza di “coscienza semiotica” rispetto alla rappresentazione che propone; inoltre mostra problemi semiotici, evidenziati nelle difficoltà che l'insegnante esternalizza con lo schema contenitore sopra analizzato.

Rivela difficoltà con lo schema del contenitore (Figure 4), ma le presenta anche con la metafora, cioè con la metafora “Le classi sono container” (Tabella 2), perché ci sono problemi nel suo insieme di partenza soprattutto con: “Oggetti negli interni”, “Essere un oggetto in un interno” e “La sovrapposizione degli interni di due schemi di contenitori”, come evidenziato sopra con lo schema del contenitore.

Per il processo di insegnamento-apprendimento, D₂₁ propone una sua propria metafora: personale affermando che “i numeri reali sono il padre di tutti questi sistemi”, il che si può correlare alla metafora: “Le classi sono container”.

Questa metafora viene esplicitata nell'intervista, quando l'insegnante D₂₁ introduce i numeri reali e li mette in relazione con la rappresentazione ausiliaria degli insiemi, affermando che: “l'insieme dei



numeri reali è il padre di tutti questi sistemi [metafora]; che cosa fa un padre?, [...] se ho mia figlia in grembo è perché mia figlia ha le mie caratteristiche, è parte di me; faccio agli studenti questo esempio folle per mostrare loro quali sono le caratteristiche” (Becerra Galindo, 2020, p. 287). Collegando questa nuova metafora alla rappresentazione ausiliaria degli insiemi, in particolare all’insieme dei numeri reali, si vede una relazione con lo schema del contenitore e, a sua volta, con la metafora “Le classi sono container”, come già evidenziato sopra.

Una seconda metafora è espressa nell’intervista dall’insegnante D_{21} , quando le viene chiesto quali esempi fa nelle sue lezioni, come spiega i diversi insiemi numerici, in particolare quello degli interi e dei numeri razionali:

D_{21} [64]: “Sì, ho fatto un esempio pazzesco: che gli interi sono una casa e quelli razionali una fattoria, e la casa è dentro la fattoria. L’ho fatto per spiegare loro un po’ con un esempio più concreto, il senso di contenimento di un sistema numerico in un altro, quindi, per esempio, do loro sempre questo tipo di interpretazioni, quindi faccio loro domande del tipo: Tutti i numeri naturali sono razionali? Per esempio, sì, tutti i numeri interi sono razionali. E poi chiedo: Tutti i numeri razionali sono interi? C’è sempre una discussione fra loro; guarda, quel doppio senso non è facile per loro, e prima del grado scolastico 11 è molto difficile per loro capire perché non tutti i razionali sono anche interi, non importa quanto si spieghi loro. [...] Ecco perché faccio quel tipo di esempio della casa che è all’interno di una fattoria”. (Becerra Galindo, 2020, p. 287)

Collegando questa metafora alla rappresentazione ausiliaria degli insiemi, in particolare all’insieme dei numeri interi (casa) e dei numeri razionali (fattoria), essa può essere classificata con la metafora parte-tutto. Non dovrebbero sorgere problemi con lo schema del contenitore, cioè con la metafora “Le classi sono container”; tuttavia, in relazione a questa metafora, l’insegnante D_{21} riconosce che dovrebbe includere ed espandere nella sua spiegazione l’insieme dei numeri reali in relazione ai numeri naturali, interi, razionali per

giungere ai reali, utilizzando diverse rappresentazioni ausiliarie per i diversi insiemi.

CONCLUSIONI

Nell’analisi è evidente che i problemi delle rappresentazioni semiotiche, in particolare quello delle rappresentazioni ausiliarie degli insiemi numerici, iniziano con difficoltà nello schema contenitore (schema di immagini basato sull’esperienza corporea), che genera problemi con la metafora “Le classi sono container”, che fa parte del processo che permette di strutturare la conoscenza degli oggetti matematici in base alle nostre conoscenze e che “agisce in modo iconico, poiché una rappresentazione iconica, oltre a rappresentare l’oggetto, ci informa della struttura di detto oggetto” (Font, 2007, p. 125) attraverso la comprensione, in questo caso, della costruzione cognitiva di insiemi infiniti dalla rappresentazione ausiliaria dell’insieme dei numeri reali.

I problemi che sorgono nelle rappresentazioni di insiemi infiniti supportati a volte dalla metafora, sebbene siano stati evidenziati dalla ricerca in didattica della matematica, continuano a manifestarsi nell’insegnamento dei docenti. Pertanto, dovrebbe essere favorito un cambiamento nella consapevolezza semiotica sulla scelta delle rappresentazioni utilizzate nell’insegnamento e nell’apprendimento degli insiemi infiniti, proprio tenendo conto della metafora.

Il presente studio fornisce dati empirici che dimostrano che la metafora concettuale è uno strumento rilevante per analizzare non solo i libri di testo, ma anche il discorso matematico degli insegnanti in classe, il che contribuirà a una migliore comprensione delle rappresentazioni di insiemi infiniti da parte degli studenti delle scuole superiori e universitari.

RINGRAZIAMENTI

Ringrazio il Ph. D. Bruno D’Amore direttore della mia tesi di dottorato, per la sua competenza e disponibilità, per avermi guidato nelle riflessioni sulla didattica della matematica e sulla matematica, supporto incondizionato nella mia formazione dottorale.



Ringrazio la Ph. D. Martha Isabel Fandiño Pinilla per i suoi orientamenti, i suoi notevoli contributi alla didattica di matematica e il suo prezioso supporto umano supporto nella mia formazione dottorale.

Ringrazio il Ph. D. Vicenç Font Moll per avermi introdotto e guidato sul tema delle metafore.

Ringrazio gli insegnanti Cristhian Bello e Ironú Martínez e gli studenti delle classi 9a e 11a della scuola Tomás Cipriano de Mosquera Istituzione Scolastica Distrettuale e Repubblica Bolivariana di Venezuela Istituzione Scolastica Distrettuale, per la loro partecipazioni a questa ricerca dottorale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). “Lo veo, pero no lo creo”. Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*, 11(1), 5-24.
- Arrigo, G., & D'Amore, B. (2002). “Lo vedo ma non ci credo...”, secunda parte. Ancora su ostacoli epistemologic e didattici al proceso di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*, 10(1), 4-57.
- Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti*. Erickson. [Versión en idioma español: (2011). Infinitos infinitos. Magisterio].
- Becerra Galindo, H. M. (2017). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente. *La matematica e la sua didattica*, 25(2), 191-201.
- Becerra Galindo, H. M. (2018). Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos. *II congreso de educación matemática de américa central y el caribe [II CEMACYC]*, 1-8.
- Becerra Galindo, H. M. (2020). *Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. [https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2021/02/Hector-M-Becerra-G-Tesis-doctoral.pdf]
- Becerra Galindo, H. M. (2021). Manifestazioni della coscienza semiótica degli insegnanti nell'insegnamento degli insiemi infiniti. In D'Amore, B. (Ed.) (2021). *La didattica della matematica: riflessioni teoriche e proposte concrete. Atti del Convegno Incontri con la matematica n. 35*, Castel San Pietro Terme (Bo), 5-6-7 novembre 2021, pp. 175-176. Pitagora.
- Becerra Galindo, H. M., & Font, V. (2019). Las problemáticas semióticas y la metáfora en las representaciones de los conjuntos infinitos. *Revista Acta latinoamericana de matemática educativa [ALME]*, 32(1), 531-540.
- Brousseau, G. (1983). Ostacles Epistemologiques en Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 4(2), 165-198.
- D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *Revista Tecné, Episteme y Didaxis: TED. Universidad Pedagógica Nacional*, 11, 63-71.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica*. Pitagora. [Versión en idioma español: 2006, Didáctica de la matemática, Magisterio].
- D'Amore B., & Fandiño Pinilla M.I. (2002). Un acercamiento analítico al triángulo de la didáctica. *Educación Matemática*, 14(1), 48-62.
- D'Amore, B., & Fandiño, Pinilla M. I. (2012). *Matematica, come farla amare. Miti, illusioni, sogni e realtà*. II edición 2016. Giunti Scuola.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática*. Magisterio.
- Dueñas, W., Garavito, A., & Lara, G. (2007). *Aciertos matemáticos 8*. Grupo Editorial Educar.
- Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, 14(4), 385-414.
- Duval, R. (1993). Registres de Répresentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitive*, 6(5), 37-65.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. [Versión en idioma español: (1999). Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Universidad del Valle].
- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo*. Universidad del Valle.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Duval R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. En: Radford L., Schubring G., Seeger E. (Eds) (2008). *Semiotics in mathematics education:*



- epistemology, history, classroom, and culture*. Sense Publishers. 39-61.
- Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking-the registers of semiotic representations*. Springer.
- Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- English, L. D. (1997). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Erlbaum.
- Fishbein, E. (1992). Intuizione e dimostrazione. En: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, pp. 1-24. B. D'Amore (Ed.). Pitagora.
- Fishbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics. Infinity-The Never-ending Struggle*, 48(1), 2-3.
- Fishbein, E., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The intuitions of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10(1), 3-40.
- Font, V. (2007). Una perspectiva ontosemiótica sobre cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular/general, representación, metáfora y contexto. *Educación Matemática*, 19(2), pp. 95-128.
- Johnson, M. (1991). *El cuerpo en la mente*. Debate.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Cátedra.
- Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.
- Moreno, L., & Walldeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Education Studies in Mathematics*, 22(3), 211-231.
- Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. In T. Nakaora & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of PME24*, vol.1 (pp. 3-22). Hiroshima University.
- Núñez, R., & Lakoff, G. (1998). What did Weierstrass really define? The cognitive structure of natural and ϵ - δ continuity. *Mathematical cognition*, 4(2), 85-101.
- Sierra-Bravo, R. (1994). *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios*. Thomson.
- Tamayo, M. (2001). *El proceso de la investigación científica*. Limusa.
- Tsamir, P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, 14(2), 167-207.
- Van Dormolen, J. (1991). Metaphors Mediating the Teaching and Understanding of Mathematics. In A. J. Bishop & S. Melling Olsen (Eds.). *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching* (pp. 89-106). Kluwer A.

