CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 2 • p. 68 – 79
ISSN 1983-7399

ARTICOLO ORIGINALE/ORIGINAL ARTICLE

Agnese Del **ZOZZO**[1]
George **SANTI**[2]

L'inclusione in matematica come differenziazione per tutti e per ciascuno: un'interpretazione semiotica

Inclusion in mathematics as differentiation for all and for each: a semiotic interpretation

[1] Università di Trento, Italia – NRD Università di Bologna, ITALIA

[2] Università di Macerata, Italia, NRD Università di Bologna, ITALIA

Indirizzi email:

agnese.delzozzo@unit.it

george.santi@unimc.it

SUNTO

In questo articolo proponiamo l'interpretazione semiotica di Duval come possibile lente teorica per l'analisi e la realizzazione di contesti di apprendimento della matematica inclusivi, nel senso della differenziazione per tutti gli (e per ciascuno degli) studenti. Descriveremo quattro episodi, due che riguardano studenti con Disturbo Specifico dell'Apprendimento (DSA) e due che riguardano studenti ciechi, che analizzati alla luce della semiotica Duvaliana, ci permetteranno di mostrare come la differenziazione per tutti gli studenti è interconnessa alla gestione, specifica di ciascuno studente, di trasformazioni semiotiche tra i sistemi di rappresentazione sottostanti il pensiero matematico.

Parole chiave: Inclusione; Semiotica e noetica; Differenziazione per tutti; Trattamento e conversione; Sistemi semiotici.

ABSTRACT

In this paper we propose Duval's semiotic interpretation as a possible theoretical lens for the analysis and implementation of inclusive mathematics learning contexts, in the sense of differentiation for all the (and for each) students. We will describe four episodes, two involving students with Specific Learning Disorder (SLD) and two involving blind students, which, analysed with Duval's semiotics, will allow us to show how differentiation for all students is interconnected with the student-specific management of semiotic transformations between the underlying representational systems of mathematical thinking.

Keywords: Inclusion; Semiotics and noetics; Differentiation for all; Processing and conversion; Semiotic systems.

Ricevuto il 06/09/2022
Accettato il 31/10/2022

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

INTRODUZIONE

La pedagogia inclusiva è stata concettualizzata in diversi modi. Nella letteratura internazionale troviamo un certo consenso su una distinzione generale tra definizione stretta e ampia (Ainscow et al. 2006). Un'idea ampia di inclusione pone una grande sfida al modo in cui i processi di apprendimento possono essere sostenuti nelle scuole, tenendo conto delle differenze di tutti gli studenti e garantendo allo stesso tempo la loro partecipazione a un progetto di apprendimento comune. La differenziazione è stata discussa da diversi autori come uno strumento che può contribuire ad affrontare la sfida. La differenziazione è stata concettualizzata da Spandagou e colleghi (2018) come un continuum con un'idea socio-costruttivista dell'apprendimento che tiene conto di tutte le differenze degli studenti (Tomlinson, 2014).

È immediatamente evidente che non tutti i modi di definire la differenziazione contribuiscono all'idea ampia di inclusione, semplicemente perché alcune definizioni non prendono in considerazione tutte le differenze degli studenti ma si concentrano solo su alcune di esse. Per questo articolo, in linea con l'approccio proposto da Demo e colleghi (2021), abbiamo scelto una concettualizzazione della differenziazione che considera le differenze di apprendimento degli studenti e quindi considera la differenziazione uno strumento che coinvolge *tutti* gli studenti.

L'apprendimento della matematica riveste un ruolo di primo piano nel percorso formativo di uno studente. Richiede il raggiungimento di elevati standard cognitivi, in termini di creatività, razionalità, controllo di diversi registri semiotici, metacognizione, ecc. La matematica può essere un campo di conoscenza in cui l'autostima e l'autoefficacia dell'individuo possono fiorire. Le potenzialità educative della matematica si scontrano con le difficoltà che la ricerca in didattica della matematica ha delineato con precisione. Per brevità, ne citiamo una tra le più importanti, strettamente legate ai tratti ontologici ed epistemologici costitutivi della matematica: la conoscenza matematica si riferisce a entità ideali che non consentono alcun riferimento ostensivo. L'unico accesso agli oggetti matematici avviene attraverso segni, strutturati in sistemi semiotici complessi, che gli studenti devono gestire con una specifica competenza cognitiva.

Per inquadrare i processi di insegnamento-apprendimento della matematica in una prospettiva inclusiva ci avvaliamo di un approccio semiotico che coniuga i principi alla base del funzionamento cognitivo specifico della disciplina con la potenzialità di accogliere le differenze di tutti gli studenti quando si confrontano con la matematica. Presentiamo una serie di esempi di studenti impegnati in task matematici e mostriamo come le difficoltà e le strategie risolutive sono interconnesse alla gestione di trasformazioni semiotiche tra i sistemi di rappresentazione sottostanti il pensiero matematico. L'analisi degli esempi evidenzia che le difficoltà degli studenti non sono un fenomeno intrinseco ma nascono e si evolvono nella relazione tra le caratteristiche specifiche di ciascun individuo e le risorse semiotiche che egli impiega nella pratica matematica. In alcuni casi, un'interpretazione non specifica dei processi cognitivi degli alunni rischia di tralasciare tale relazione considerando come errate procedure che esprimono forme di pensiero non previste. La prospettiva semiotica si propone, dunque, come una possibile lente teorica che realizza contesti di apprendimento della matematica inclusivi, nel senso della differenziazione per tutti gli (e per ciascuno degli) studenti.

Nel paragrafo 2, presentiamo il quadro teorico costruito intorno all'approccio semio-cognitivo di Duval. Nel paragrafo 3, discuteremo alla luce del quadro teorico alcuni esempi significativi in una prospettiva di differenziazione per tutti gli studenti. Nell'ultimo paragrafo, presentiamo alcune considerazioni conclusive su inclusione e apprendimento della matematica.

QUADRO TEORICO

All'inizio degli anni '90, Raymond Duval ha proposto la semiotica come nuova lente teorica per indagare e caratterizzare il pensiero e l'apprendimento matematico. La sua ricerca di punta (Duval, 1993, 1995, 2017) ha introdotto un approccio strutturale e funzionale alla semiotica, delineando le caratteristiche e le potenzialità dei sistemi semiotici, e le funzioni di trasformazione che informano il pensiero e la conoscenza matematica.

Secondo Duval, ogni concetto matematico fa riferimento a oggetti che non appartengono alla nostra esperienza percettiva. In matematica, i

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

riferimenti ostensivi sono impossibili, poiché non possiamo accedere direttamente agli oggetti matematici tramite i nostri sensi. Pertanto, ogni concetto richiede intrinsecamente l'uso di rappresentazioni semiotiche (semio-cognitive) degli oggetti matematici. La mancanza di riferimenti ostensivi ha portato Duval ad assegnare, nel pensiero matematico, un ruolo costitutivo all'uso di rappresentazioni appartenenti a specifici sistemi semiotici. Da questo punto di vista, Duval (2017, p. 23) sostiene che non c'è "noetica senza semiotica", cioè non c'è comprensione concettuale senza uso di segni.

La natura peculiare degli oggetti matematici ci permette di delineare uno specifico funzionamento cognitivo che caratterizza l'evoluzione e l'apprendimento della matematica. Possiamo dire che la concettualizzazione stessa, in matematica, si identifica con questo complesso coordinamento di più sistemi semiotici. Un sistema semiotico (o registro) è definito (Duval, 1995; Ernest, 2006) come:

- un insieme di segni di base che hanno un significato solo se contrapposti o in relazione ad altri segni di base (ad esempio, il sistema di numerazione decimale);
- un insieme di regole per la produzione di segni, a partire da quelli di base, e per la loro trasformazione.

D'Amore (2004) identifica la concettualizzazione con le seguenti funzioni semiotiche, specifiche per la matematica:

- scelta dei *tratti distintivi* di un oggetto matematico;
- il *trattamento*, cioè la trasformazione di una rappresentazione in un'altra rappresentazione dello stesso registro semiotico;
- la *conversione*, cioè la trasformazione di una rappresentazione in un'altra rappresentazione di un *altro* registro semiotico.

La combinazione stessa di queste tre "azioni" su un oggetto matematico può essere considerata come la "costruzione della conoscenza in matematica". Tuttavia, la gestione di queste tre azioni non è spontanea, anzi. Fandiño Pinilla (2010) declina il processo di apprendimento della matematica in (almeno) cinque componenti:

- *apprendimento concettuale*, legato alla noetica, alla comprensione concettuale;
- *apprendimento strategico*, legato alla risoluzione di problemi e a processi come il congetturare, l'analizzare, il comprendere (una situazione problematica);
- *apprendimento algoritmico*, legato al calcolare, operare, eseguire procedimenti e procedure;
- *apprendimento comunicativo*, che, considerando il carattere essenzialmente sociale dell'apprendimento stesso, assume un senso molto ampio e allargato;
- e *apprendimento semiotico*, legato alle specificità delle funzioni semiotiche.

Quest'ultima componente, per le ragioni ben messe a fuoco da Duval, non può che avere un ruolo trasversale rispetto alle altre componenti dell'apprendimento. Ma, per le stesse ragioni, si tratta anche di una sorta di involucro che, in qualche modo, racchiude e compenetra tutto il resto. Infatti, come ben messo in evidenza da D'Amore e colleghi (2013), "Non c'è apprendimento concettuale, algoritmico, strategico o comunicativo senza apprendimento semiotico" (p. 88).

Gli oggetti matematici sono riconosciuti come entità invarianti che legano diverse rappresentazioni semiotiche, quando si effettuano trasformazioni di trattamento e conversione, e come tali non possono essere riferiti direttamente. Come già anticipato, per questo motivo Duval identifica il funzionamento cognitivo specifico della matematica con il coordinamento di una varietà di registri di rappresentazione. Sia lo sviluppo della matematica come campo di conoscenza che il suo apprendimento si realizzano attraverso tale funzionamento cognitivo.

Duval va oltre il classico triangolo semiotico di Frege sinn-bedeutung-zeichen (senso-significato-espressione) e identifica il significato con la coppia (segno-oggetto), cioè con la relazione tra un segno e un oggetto. Il segno diventa una struttura ricca che condensa sia l'espressione (zeichen, che con la terminologia di Duval corrisponde alle rappresentazioni semiotiche) sia il senso (sinn) cioè, il modo in cui la rappresentazione semiotica offre l'oggetto secondo il significato sottostante la struttura del sistema semiotico. Per Duval, il significato ha quindi una duplice dimensione:

- *sinn*, il modo in cui una rappresentazione

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

semiotica offre un oggetto matematico;

- *bedeutung*, il riferimento a un oggetto matematico inaccessibile.

I processi di costruzione del significato e l'apprendimento richiedono di connettere i diversi sensi (sinn) attraverso le possibili trasformazioni semiotiche, senza perdere la referenza all'oggetto matematico.

La prospettiva semio-cognitiva di Duval che abbiamo descritto è capace di accogliere un'idea di inclusione che considera le differenze di apprendimento degli studenti e quindi considera la differenziazione un approccio che coinvolge tutti gli studenti. Secondo la prospettiva semio-cognitiva, l'apprendimento della matematica non può e non deve seguire un solo percorso cognitivo, affinché l'allievo raggiunga la noetica secondo le sue specifiche caratteristiche. La rete di trasformazioni semiotiche a disposizione di insegnante e allievo per raggiungere gli obiettivi di apprendimento permette di progettare attività didattiche creative e differenziate che tengono conto dei bisogni di ciascuno studente. Un ostacolo che gli studenti devono spesso superare è legato a pratiche didattiche che presentano i concetti matematici in un solo registro semiotico, tipicamente quello simbolico per l'aritmetica e l'algebra e quello figurale per la geometria. In queste situazioni, l'allievo non solo tende a identificare l'oggetto matematico con la rappresentazione semiotica, ma non sviluppa la capacità di interpretare il significato dei concetti coerentemente con il contesto delle pratiche matematiche a cui è esposto; capacità interpretative che si sviluppano nella ricchezza e profondità della coppia segno-oggetto e, di fronte a scelte semiotiche incoerenti con l'oggetto matematico e inadeguate ai bisogni specifici dell'allievo, la coppia segno-oggetto si appiattisce sul lato del segno, vuoto di significato. Nel prossimo paragrafo, mostriamo attraverso alcuni episodi che coinvolgono studenti con bisogni educativi speciali come le difficoltà e le strategie impiegate per superarle sono specifiche di ciascuno studente, nel modo in cui egli gestisce sia le risorse semiotiche fornite dall'insegnante che quelle messe in campo dallo studente stesso.

EPISODI

In questa sezione, descriveremo e commenteremo quattro episodi. I primi due riguardano studenti, di diversi livelli scolastici, con diagnosi di Disturbo Specifico dell'Apprendimento (DSA); gli ultimi due riguardano studenti ciechi di scuola secondaria di secondo grado[1]. Tutti gli episodi sono tratti da esperienze professionali (come operatrice di doposcuola specializzato per ragazzi con DSA) e di ricerca (nell'ambito della tesi di laurea magistrale) di uno degli autori del presente articolo. Per la tutela della privacy, i nomi dei ragazzi sono di fantasia.

Episodio 1: la calcolatrice

In caso di diagnosi di DSA, le difficoltà legate all'acquisizione di alcuni automatismi e le frequenti debolezze nella memoria a breve termine e memoria di lavoro, rendono spesso necessario ricorrere all'uso della calcolatrice per lo svolgimento di calcoli. Infatti, tale strumento permette di bypassare gli aspetti puramente algoritmici del calcolo (che ai ragazzi con DSA possono richiedere un investimento di energia spropositato e nei quali il rischio di errore può essere elevato), fornendo maggiore spazio agli aspetti più strategici e concettuali. D'altra parte, la calcolatrice è un oggetto appositamente programmato per effettuare calcoli di diversa tipologia e il suo funzionamento è

[1] In Italia il diritto allo studio di studenti che hanno una qualche forma di fragilità o svantaggio, è riconosciuto, tutelato e regolamentato a livello normativo. Nel caso della disabilità, la Legge che tutela l'assistenza, l'integrazione sociale e i diritti è la n. 104 emessa il giorno 5 febbraio 1992: https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/1992/02/17/092G0108/sg. Nel caso dei DSA la Legge di riferimento è la n. 170 emessa il giorno 8 ottobre del 2010 che, nell'Art. 1 c. 1 "riconosce la dislessia, la disgrafia, la disortografia e la discalculia quali disturbi specifici di apprendimento, di seguito denominati «DSA», che si manifestano in presenza di capacità cognitive adeguate, in assenza di patologie neurologiche e di deficit sensoriali, ma possono costituire una limitazione importante per alcune attività della vita quotidiana" https://www.gazzettaufficiale.it/eli/id/2010/10/18/010G0192/sg. Il 27 dicembre 2012, è stata emessa una direttiva ministeriale che riguarda gli strumenti di intervento per alunni con bisogno educativi speciali e l'organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica: https://miur.gov.it/ricerca-tag/-/asset_publisher/oHKi7zkjcLkW/document/id/368339.

copyrigth©2023neuroMATH – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

in parte regolato da scelte di progettazione che spesso rimangono implicite. L'esempio che segue ci permetterà di riflettere sulle possibili conseguenze, in termini di apprendimento della matematica, che potrebbe avere il non considerare tali dettagli impliciti o apparentemente invisibili.

Sonia è una ragazza con DSA che frequenta la terza media. L'insegnante ha iniziato da poco ad affrontare l'insieme dei numeri interi e, dopo aver lavorato sulle operazioni di somma algebrica e di moltiplicazione, ha assegnato alcuni esercizi sul calcolo delle potenze. Il primo esercizio chiede di calcolare $(-3)^2$. Sonia, dopo aver usato la calcolatrice, scrive come risultato -6 ma sa che c'è qualcosa che non va perché sul libro viene indicato un valore diverso. Sonia prova e riprova, le viene anche detto che "non deve fare la moltiplicazione 3 per 2 ma deve moltiplicare la base per sè stessa tante volte quante dice l'esponente" ma non c'è niente da fare: continua ad ottenere sempre -6. Cosa sta succedendo? Sonia, che sta svolgendo i calcoli con la calcolatrice, digita la sequenza di tasti "-3x-3=" ma, nella sua calcolatrice, il secondo "-" va a sostituire il segno di moltiplicazione che lo precede. Quindi, Sonia ha chiesto alla calcolatrice di calcolare -3x-3 ma, di fatto, ha ottenuto il risultato di -3-3. Una volta chiarito questo punto, Sonia inizia a svolgere il calcolo della potenza prima valutando il segno e poi svolgendo la potenza del valore assoluto della base.

Analisi dell'episodio 1. Come anticipato, per gli studenti con DSA l'uso della calcolatrice è spesso ciò che permette lo sviluppo di un ragionamento fluido, che altrimenti rischierebbe di essere interrotto a causa delle fragilità a livello di memoria a breve termine e memoria di lavoro. Lo sviluppo di un ragionamento fluido e degli aspetti strategici, per quanto presentato nel paragrafo 2 non può essere avulso dall'apprendimento semiotico, rispetto al quale l'introduzione della calcolatrice richiede l'integrazione di un ulteriore sistema semiotico. Infatti, un uso sapiente e funzionale della calcolatrice non è un punto di partenza ovvio e scontato ma è un obiettivo didattico di grande importanza che dovrebbe essere oggetto di attenzione esplicita e mirata. Spunti per attività e riflessioni specifiche in questo senso possono essere trovate, ad esempio, in Fandiño Pinilla (2010) e Arrigo (2001).

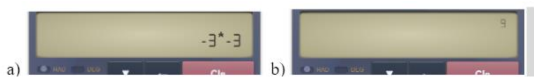
D'altra parte, l'episodio di Sonia solleva una questione tutt'altro che banale; a titolo di esempio, inserendo la stessa sequenza di tasti di Sonia, riportiamo in Figura 2 il diverso comportamento che la calcolatrice integrata nel sistema operativo Windows ha a seconda che si imposti la modalità *Standard* (Figura 1a) o *Scientifica* (Figura 1b) e, in Figura 2, viene mostrato il comportamento di una calcolatrice online[2] (Figura 2a si riferisce a prima della pressione del tasto "="; Figura 2b al dopo):

Figura 1

Risultato della digitazione di "-3×-3=" nella calcolatrice intergrata nel sistema operativo Windows a) in modalità Standard b) in modalità Scientifica

Figura 2

a) Output della digitazione di -3×-3 nella calcolatrice online all'indirizzo http://www.calcolatrice.io/; b) risultato visualizzato dopo la pressione del tasto "="



L'uso della calcolatrice introduce un ulteriore sistema semiotico di tipo simbolico tra quelli che lo studente deve coordinare attraverso le funzioni trattamento e conversione.

Il primo elemento che emerge dall'analisi di questo primo episodio è la difficoltà a riconoscere i significati dei segni in relazione alla struttura del sistema semiotico che individua i segni elementari e regola la costruzione di rappresentazioni a partire da tali segni elementari. Nell'uso della calcolatrice, lo studente deve riconoscere il *sinn* - il significato che le rappresentazioni assumono all'interno del sistema di segni. Nel caso di Sonia, il significato dei segni (*sinn*) nelle operazioni

[2] http://www.calcolatrice.io/

copyrigth©2023neuroMATH – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

segue una sintassi specifica diversa da quella del sistema simbolico dell'aritmetica utilizzato dalla studentessa. Infatti, la rappresentazione "-3×-3" assume due significati diversi nel sistema della calcolatrice e nel sistema simbolico aritmetico. La situazione è ulteriormente complicata dal fatto che tale espressione può assumere significati diversi al variare del tipo di calcolatrice in uso (Figure 1 e 2). Nel caso di Sonia, "-3×-3" nel sistema simbolico aritmetico rappresenta una moltiplicazione ripetuta, invece, la calcolatrice lo interpreta come una sottrazione. D'altra parte, l'intervento adulto che dice a Sonia che "non deve fare la moltiplicazione 3 per 2" - l'interpretazione tipica di questo tipo di errore da parte degli insegnanti - essendo scollegato dall'attività semiotica con cui Sonia si sta confrontando, si rivela inefficace.

Con l'introduzione della calcolatrice, Sonia deve coordinare almeno due sistemi semiotici, quello della calcolatrice e quello simbolico aritmetico, attivando un gioco di interpretazione che riconosca i *sinn* specifici di ciascun sistema semiotico e li coordini mantenendo la referenza all'oggetto matematico comune. La calcolatrice si configura da un lato come uno strumento indispensabile agli studenti con DSA per svolgere i calcoli, dall'altro come uno strumento che permette l'evoluzione del loro apprendimento semiotico. L'introduzione di uno strumento che sostiene l'apprendimento di uno studente, richiede un'attenzione dell'insegnante per sostenere tale evoluzione del suo apprendimento semiotico, derivante dal conseguente allargamento delle potenzialità rappresentative che esso introduce.

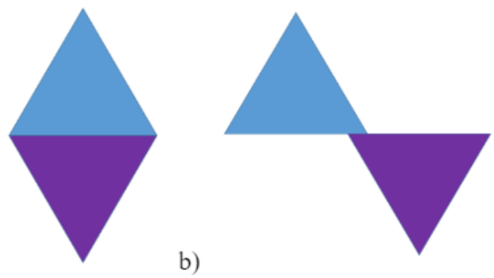
Episodio 2: pensiero semioticamente divergente

L'episodio che segue fornisce interessanti informazioni riguardo quello che, in linea con i punti di forza che, di solito, si riscontrano nelle persone con DSA - come, ad esempio, la capacità di fare collegamenti non convenzionali o l'abilità nella risoluzione di problemi che richiedono di immaginare soluzioni possibili (Stella & Grandi, 2016, in particolare p. 13) - potremmo chiamare pensiero "semioticamente divergente".

Angelo è un ragazzo con DSA di seconda media. Sta frequentando un laboratorio estivo e, insieme ad altri compagni, ha appena terminato un'attività su area e perimetro con il Tangram. Chi conduce il laboratorio pone al gruppo la seguente domanda: "secondo voi, se due figure geometriche hanno la stessa area, avranno sempre anche lo stesso perimetro?" Il gruppo si spacca: alcuni sono per il si e altri per il no. La proposta è quindi quella di chiedere, a chi vuole, di difendere la propria posizione. Ed ecco che si alza Angelo: si guarda intorno e, da uno dei Tangram, prende due triangoli congruenti, li appoggia sul pavimento nella posizione mostrata in Figura 3a e poi dice: "guarda". Lentamente, fa scorrere uno dei due triangoli sull'altro in modo da ottenere la seconda figura mostrata in Figura 3b.

Figura 3

Controesempio di Angelo: a) Figura di partenza b) Figura di arrivo



Le azioni di Angelo, pur non essendo accompagnate da un ragionamento verbale, sono incredibilmente comunicative: Angelo fornisce un controesempio, pratica comunicativa tipica della matematica, per mostrare che due figure con la stessa area non è detto che abbiano lo stesso perimetro.

Analisi dell'episodio 2. Angelo mostra un comportamento creativo nell'affrontare i problemi. Precisiamo che tale creatività non si è sviluppata sulla base di un pensiero astratto ma è intrecciata con scelte semiotiche in termini di tratti distintivi e trasformazioni di trattamento e conversione, in linea con il principio di Duval secondo il quale non c'è noetica senza semiotica. Nella situazione di DSA, le strategie risolutive sono l'esito del dialogo delle specificità della cognizione in matematica con le specificità degli studenti in termini di bisogni e potenzialità.

L'aspetto interessante dell'episodio è l'intreccio tra la scelta dei tratti distintivi del Sapere

copyrigth©2023neuroMATH – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

matematico in gioco e le successive trasformazioni semiotiche di trattamento. La scelta dei tratti distintivi è individuata a seguito di una sottile capacità interpretativa del *sinn* offerto dalla rappresentazione iniziale da cui lo studente ha attivato il processo risolutivo. Nel caso di Angelo, la sua capacità interpretativa, legata dal modo (*sinn*) in cui la rappresentazione in Figura 3a mostra il rombo, gli permette di cogliere i tratti distintivi dell'oggetto geometrico relativi al problema di area e perimetro, disaccoppiando i due concetti per attivare il trattamento che mostra l'indipendenza tra la variazione di area e perimetro nella figura geometrica. Nell'esempio, Angelo mostra un caso in cui un incremento del perimetro lascia l'area invariata.

Episodi 3 e 4: cecità e visualizzazione

Gli episodi riportati in questo gruppo sono tratti dai lavori di tesi magistrale di Del Zozzo (2010) e Cortesi (2010).

In mancanza della percezione visiva (in una qualche sua forma), la conoscenza del mondo deve, e può, avvenire attraverso l'integrazione di tutte le percezioni ottenute con i sensi vicarianti della vista: tatto, udito, olfatto, gusto, senso termico, senso anemestico (ventosità/immobilità dell'aria), la cinestesia (percezione che una persona ha del movimento e della posizione del corpo e delle sue parti), la sensibilità muscolare e plantare ma anche la memoria associativa, la capacità associativa e l'immaginazione. In particolare, molte delle informazioni che ad un vedente pervengono tramite la vista, ad un cieco sono accessibili (sotto alcune condizioni) tramite il tatto o, più precisamente, il tatto integrato al movimento (percezione aptica): il movimento delle mani sull'oggetto permette di ricavare informazioni utili alla sua conoscenza o identificazione. Naturalmente, per permettere l'accesso tattile-cinestetico a rappresentazioni di tipo figurale, è necessario ricorrere ad artefatti e strumentazioni opportune. Ad esempio, il *piano in gomma*, che è un particolare supporto di scrittura la cui base è ricoperta da un foglio in gomma su cui vengono fissati particolari fogli in plastica, permette di realizzare disegni in rilievo (dunque, disegni percettibili apticamente).

Episodio 3. Anna è in terza superiore e ha avuto da sempre una condizione visiva significativamente compromessa, ha perso la vista molto gradualmente, passando da una grave ipovisione al vedere ombre e luci, in un lungo arco di tempo durante il quale ha subito numerosi interventi oculistici. La sua storia clinico-sanitaria e quella psico-emotiva ad essa associata, non le hanno permesso di frequentare la scuola con continuità e fiducia in sé stessa, per cui Anna non ha potuto sviluppare gli apprendimenti scolastici come il resto della sua classe. Nel corso della sua terza superiore, Anna ha partecipato ad un laboratorio di geometria impostato in modo da introdurre la geometria del piano partendo da sezioni e sviluppi piani di poliedri (Arrigo & Sbaragli, 2004). Durante tale laboratorio, sono stati costruiti una serie di artefatti e sono state attuate delle strategie che permettessero ad Anna di accedere alle, e agire sulle, rappresentazioni proposte attraverso il tatto. Il laboratorio si è snodato in dieci incontri da un'ora e mezza ciascuno ed è stato per Anna uno dei primi veri approcci con la geometria. L'episodio che ci interessa in questa sede si è verificato durante il quinto incontro, a metà del percorso.

Dopo aver svolto alcune attività di previsione della ricostruzione di un poliedro a partire dal suo sviluppo piano, ad Anna è stato fornito un cartoncino con una configurazione di quadrati messi a forma di L. Senza dirle di cosa si trattava esattamente, ad Anna è stato chiesto di analizzare l'oggetto, valutando (senza chiuderlo, usando solo l'immaginazione) se secondo lei potesse essere lo sviluppo di qualche solido e, se sì, di quale. Anna ha prima esplorato la forma globale, poi le pieghe interne, ed ha intuito la sequenza di sei quadrati (Figura 4):

Figura 4

Alcuni screenshot tratti dalla videoregistrazione dell'attività di Anna

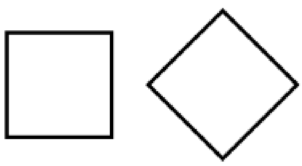
Dopo una lunga analisi, Anna conclude "Non capisco cosa potrebbe diventare...forse come cubo non si chiude però...secondo me non può diventare un cubo". La sofisticata esplorazione tattile messa in atto da Anna in tale episodio è stata ripresa da Radford (2013) e lì analizzata, usando la prospettiva teorica della Teoria dell'Oggettivazione (Radford, 2021), in termini di nodo semiotico.

Episodio 4. Prima di raccontare il prossimo episodio, è necessario fare una premessa. In ambito di ricerca in didattica della matematica, uno dei temi di studio riguarda le misconcezioni che, in breve, sono "concezioni momentaneamente non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica" (D'Amore, 1999, pag. 124). Tra le misconcezioni più diffuse, sono molto note quelle che riguardano questioni geometriche e che dipendono da un uso ripetuto di rappresentazioni sempre uguali e stereotipate, in cui la particolare posizione della figura geometrica rappresentata diventa un invariante. Tra gli esempi di tale tipo di misconcezioni, sono noti i due seguenti:

- rombo/quadrato, secondo cui, di fronte ai due disegni in Figura 5, quella di sinistra è riconosciuta come quadrato mentre quella di destra come un rombo (D'Amore et al. 2019).

  Figura 5

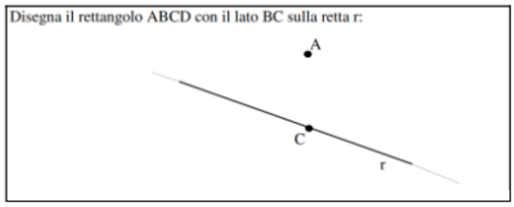
  Rombo/quadrato

- Il "rettangolo storto", secondo cui, prendendo da D'Amore (2011), di fronte al quesito illustrato in Figura 6.

Figura 6

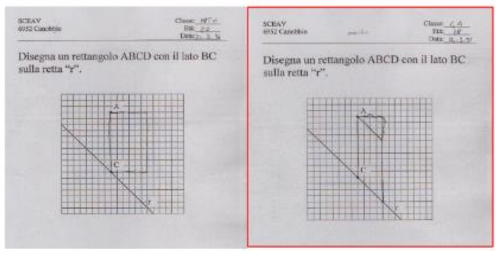
Quesito sperimentale sul rettangolo (D'Amore, 2011, p.18)



sono estremamente frequenti (ad ogni livello scolastico) risposte come quelle riportate in Figura 7:

Figura 7

Alcuni protocolli di risposta autentici tratti da D'Amore (2011, p.19)

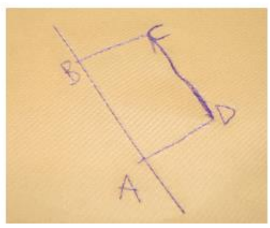


Per comprendere la relazione tra la percezione aptica e il ragionamento geometrico, tali quesiti sono stati proposti a Marco, uno studente di V Liceo Scientifico che ha perso la vista intorno ai due anni e non ha alcuna memoria visiva (cosciente). Il problema del rettangolo da disegnare e i disegni da esplorare nel caso del rombo/quadrato sono stati proposti a Marco nel piano in gomma; le consegne sono state date oralmente.

Per quanto riguarda il quesito del rettangolo, Marco ha disegnato immediatamente e senza alcun dubbio ciò che è visibile in Figura 8:

Figura 8

Foto del disegno realizzato da Marco per risolvere il quesito del rettangolo



neuroMATH
copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

Nel realizzare tale disegno, Marco, si è sin dall'inizio preoccupato solo di mantenere il parallelismo dei lati opposti, controllando istante per istante che venisse conservato, e della perpendicolarità dei lati consecutivi. Detto in altre parole, Marco si è solo premurato che il suo disegno rispettasse tutte le richieste del quesito. Il costante monitoraggio di Marco è documentato dal maggiore spessore del segmento DC: infatti, tale segmento è stato tracciato un piccolo tratto alla volta, alternando ciascun tratto con un controllo del mantenimento di parallelismo tra AB e CD (controllo che Marco ha condotto valutando l'assenza di variazione tra l'apertura tra il proprio dito indice e il medio mentre li faceva scorrere lungo i due segmenti). Poco dopo, è stato proposto a Marco di esplorare la coppia di disegni sul piano in gomma di Figura 9, chiedendogli di individuare i poligoni rappresentati.

Figura 9

Coppia di disegni esplorati da Marco

Marco li ha esaminati uno alla volta: prima ne ha percorso il contorno con le dita, poi ha valutato il parallelismo dei lati opposti ed ha stimato l'ampiezza degli angoli (spiegando che, per regolarsi ha usato il polpastrello di un dito). Al termine dell'esplorazione, con sicurezza, ha detto che secondo lui si trattava dello stesso quadrato. Per approfondire, gli è stato chiesto se il diverso posizionamento dei due disegni lo avesse in qualche modo indotto a pensare che uno dei due non fosse di un quadrato ma ha detto di non aver neanche pensato a questa possibilità. Ha aggiunto poi che, se proprio doveva trovare una differenza tra le due figure, ed era riluttante a farlo, questa consisteva nel fatto che una aveva un vertice più vicino a lui e l'altra un lato.

Analisi degli episodi 3 e 4. Il caso degli alunni ciechi è paradigmatico nel confermare il nostro punto di vista secondo il quale le difficoltà non sono intrinseche ma sono espressione del rapporto tra le caratteristiche dell'allievo e le risorse semiotiche a cui è esposto. Inoltre, Anna e Marco confermano l'intuizione di Duval e Fandiño Pinilla che l'uso adeguato delle funzioni semiotiche costituisce un apprendimento specifico della matematica connesso a quello concettuale, algoritmico, comunicativo e strategico (Fandiño Pinilla, 2010). Infatti, il deficit visivo ha costretto i due allievi ciechi a sviluppare un modo specifico, che passa prevalentemente attraverso il canale tattile, di attuare le funzioni semiotiche descritte nel paragrafo precedente. Il loro apprendimento semiotico è molto diverso da quello dei loro pari vedenti anche se gli altri apprendimenti relativi alla geometria sono gli stessi. La specificità del loro apprendimento semiotico è testimoniata dal fatto che i pari vedenti, se non opportunamente istruiti, non sarebbero in grado di mettere in campo un'attività semiotica non basata sull'uso del canale visivo. Questo episodio ha un'ulteriore rilevanza da un punto di vista inclusivo, in quanto sposta l'attenzione da una prospettiva di semplice accettazione o integrazione della differenza alla valorizzazione della specificità, che in un opportuno percorso didattico può diventare una risorsa per tutti gli studenti (Del Zozzo, 2013). L'incontro della prospettiva semiotica con quella inclusiva costringe a considerare due funzionamenti specifici nell'apprendimento. Quello specifico della matematica, caratterizzato dalle funzioni semiotiche, e quello specifico dell'allievo che tra le varie configurazioni rappresentazionali possibili, individua e sceglie quelle più consone ai suoi bisogni e alle sue potenzialità.

Il modo in cui Marco disinnesca il rischio di incorrere nelle classiche misconcezioni della geometria è legato alle sue specifiche modalità percettive che lo costringono a ricorrere a una semiotica "tattile". Il *sinn* delle rappresentazioni incise sul piano di gomma, cioè il senso delle rappresentazioni all'interno del sistema di segni, e percepite apticamente sono coerenti con i tratti distintivi dell'oggetto rettangolo - parallelismo tra lati opposti e perpendicolarità tra lati consecutivi - e, di conseguenza, i trattamenti che egli opera gli consentono di accedere al significato geometrico corretto. Infatti, come descritto sopra, il modo in cui Marco scrive sul piano di gomma rispecchia i tratti distintivi di perpendicolarità e parallelismo. Generalmente, lo studente vedente è prigioniero di alcune caratteristiche del disegno incoerenti con i tratti distintivi del rettangolo o del quadrato che inducono le misconcezioni descritte sopra. Tipicamente, gli studenti si concentrano su aspetti legati a direzioni privilegiate, derivanti dal modo in cui siamo abituati a collocare nello spazio i disegni di figure geometriche, che nulla hanno a che fare con i tratti distintivi dell'oggetto stesso. In questo caso, il *sinn* - il significato dei segni secondo la struttura del sistema semiotico - cui fanno riferimento è legato alla posizione stereotipata dei disegni, che confligge con i tratti distintivi dell'oggetto rettangolo/quadrato (si veda per esempio la Figura 7).

CONCLUSIONI

In questo articolo presentiamo un approccio inclusivo, inteso come differenziazione per tutti gli allievi, caratteristico dell'apprendimento della matematica. Il punto di vista che proponiamo realizza ambienti di apprendimento della matematica inclusivi attraverso l'incontro tra la didattica inclusiva e la didattica della matematica. La didattica inclusiva come differenziazione per tutti riconosce il diritto dello studente di accedere al Sapere secondo le sue specificità cognitive. La prospettiva semio-cognitiva di Duval ha individuato un funzionamento specifico della matematica identificato con le funzioni semiotiche che intrecciano diversi sistemi semiotici, vale a dire che non c'è noetica senza semiotica. L'inclusione in matematica è concettualizzata come il dialogo caratteristico di ogni studente tra i suoi bisogni e potenzialità e le configurazioni semiotiche (rete di trasformazioni tra sistemi semiotici) che mette in gioco nell'apprendimento della matematica. In matematica, la differenziazione per tutti è possibile grazie alla varietà di sistemi semiotici e delle possibili relazioni tra loro realizzabili grazie alle funzioni di trattamento e conversione. La realizzazione di ambienti inclusivi in matematica è garantita dalle competenze didattiche dell'insegnante che, da un lato, fornisce allo studente risorse semiotiche adeguate alle sue specificità, dall'altro fornisce anche il supporto necessario a sostenere la complessità che egli deve sostenere nel gestire la rete di trasformazioni da eseguire.

Dal primo episodio emerge che le difficoltà degli studenti non sono intrinseche e oggettive ma possono dipendere dalla struttura, in termini semiotici, della consegna a cui vengono esposti, che determina il rapporto che si instaura tra le specificità dello studente e le risorse semiotiche a cui accede. Nell'episodio 1 di Sonia, l'uso della calcolatrice non è stato introdotto in modo tale da sostenere l'allieva nella gestione del sistema semiotico della calcolatrice e del significato dei segni all'interno della struttura di tale sistema di segni. Sonia ha concettualizzato correttamente il concetto di potenza ma l'introduzione della calcolatrice richiede di operare una conversione tra il sistema simbolico aritmetico e quello della calcolatrice per interpretare correttamente il significato dell'operazione che ha già appreso.

Dal secondo episodio emerge che quando lo studente riesce a instaurare una relazione adeguata tra le risorse semiotiche che mette in gioco e le sue caratteristiche di apprendimento, la pratica matematica è sostenuta da operazioni semiotiche funzionali alla noetica in forme creative e insolite. In questo episodio, la rappresentazione figurale del rombo (Figura 4a), che disaccoppia la percezione dell'area da quella del perimetro del quadrilatero, innesca un trattamento creativo che mostra con estrema sintesi e semplicità la soluzione di Angelo al compito.

Dal terzo e quarto episodio emerge che gli studenti ciechi, in un adeguato rapporto tra le loro caratteristiche e la risorse semiotiche a cui possono accedere, sviluppano uno specifico modo di apprendere la geometria che si configura come una nuova risorsa per l'apprendimento di tutti gli studenti. In senso più generale, lo specifico modo di apprendere degli

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

studenti ciechi porta un ulteriore contributo alla comprensione della complessità e ricchezza del pensiero e dell'apprendimento della matematica.

Sottolineiamo ancora una volta che interpretare il comportamento di uno studente sulla base del proprio sapere di insegnante, e intervenire poi solo sulla base della propria interpretazione, è didatticamente molto rischioso. In linea con le interpretazioni costruttive di misconcezioni ed errori proposte da diversi autori (D'Amore, 1999; D'Amore & Sbaragli, 2005; Sbaragli, 2012; Zan, 2007), sosteniamo l'importanza e la necessità di ripensare alla visione dell'errore guardandolo sempre più come espressione di un sapere e non come evidenza di un non-sapere.

Per concludere, nonostante abbiamo analizzato episodi che coinvolgono studenti con bisogni educativi speciali, il quadro concettuale dell'inclusione in matematica descritto nell'articolo è generalizzabile a tutti gli studenti e ci auguriamo che le riflessioni riportate possano essere di spunto per pratiche didattiche efficaci e coinvolgenti nell'apprendimento della matematica.

RINGRZIAMENTI

Ringraziamo Sonia, Angelo, Anna e Marco e, in generale, anche tutti i ragazzi e tutti i professionisti del gruppo GIpA (Gruppo Informatica per l'Autonomia) con cui abbiamo avuto l'onore di poter lavorare e che ci hanno permesso di riflettere su aspetti cruciali legati al tema dell'inclusione.

Ringraziamo anche il professor Bruno D'Amore per gli insegnamenti che hanno ispirato il quadro teorico qui presentato.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Ainscow, M., T. Booth T. & Dyson, A. (2006). *Improving Schools, Developing Inclusion*. Routledge.

Arrigo, G. (2001). Il calcolo a scuola (2): l'uso della calcolatrice. *Bollettino dei docenti di matematica, 43*, 57-63.

Arrigo, G. & Sbaragli, S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria.* Carocci.

Cortesi, E. (2010). Mezzi semiotici di rappresentazione tattili per l'apprendimento della Geometria dei Poliedri. [Tesi di laurea, Università di Bologna]. AMSLaurea. https://amslaurea.unibo.it/1267/1/cortesi_elisa_tesi.pdf

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Pitagora. [anche in spagnolo: D'Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio].

D'Amore B. (2004). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivisticas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. Uno. Barcelona, *España. 35*, 90-106.

D'Amore (2011). Frasi illuminanti di studenti e di docenti in 40 anni di ricerca. In: B. D'Amore, S. Sbaragli (Eds.). *Un quarto di secolo al servizio della didattica della matematica. Atti del Convegno "Incontri con la matematica", n. 25*, Castel San Pietro terme (BO). Pitagora. Pagg. 15-20.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., & Iori M. (2013), *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Pitagora. [anche in spagnolo: D´Amore, B., Fandiño Pinilla, M. y Iori, M. (2014). *La Semiótica en la Didáctica de la Matemática*. Nueva Editorial Iztaccíhuatl].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., & Sbaragli S. (2019). *Le difficoltà di apprendimento della matematica. Il punto di vista della didattica*. Pitagora.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica. 2*, 139-163.

Del Zozzo, A. (2010). Percezione aptica e apprendimento della geometria: immagini mentali, ostacoli e misconcezioni in presenza di deficit visivo. [Tesi di laurea, Università di Bologna]. AMSLaurea. https://amslaurea.unibo.it/1268/1/Del_Zozzo_Agnese_tesi.pdf

Del Zozzo, A. (2013). Geometria a occhi chiusi. *La vita scolastica*, 5, 16-18.

Demo, H., Garzetti, M., Santi, G., & Tarini, G. (2021). Learning mathematics in an inclusive and open environment: An interdisciplinary approach. *Education Sciences*, *11*(5), 199.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37-65.
Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Springer International Publishing.
Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: the case of number. *Educational studies in Mathematics*, *61*(1-2), 67-101.
Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática. Prólogo de Giorgio Bolondi*. Bogotá: Magisterio. [Prima edizione in italiano: 2008, Erickson].
Radford, L. (2013). Perceiving with the eyes and with the hands. *RIPEM*, *3*(1), 56-77.
Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning.* Brill.
Sbaragli, S. (2012). Il ruolo delle misconcezioni nella didattica della matematica. In G. Bolondi, & M. I. Fandiño Pinilla (2012). *I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*. 121-139. Edises.
Spandagou, I., Graham L. J., & de Bruin, K. (2018). Differentiation For Inclusive Education: Whence The Confusion? *ECER 2018*, Bolzano.
Stella, G., & Grandi, L. (2016). *Come leggere la dislessia ei DSA: conoscere per intervenire: metodologie, strumenti, percorsi e schede*. Giunti Edu.
Tomlinson, C. (2014). *The differentiated classroom*. ASCD.
Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica*. Springer.

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS