CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 2 • p. 90 – 101
ISSN 1983-7399

ARTICOLO ORIGINALE/ORIGINAL ARTICLE

Martha Isabel **FANDIÑO PINILLA**[1]
Bruno **D'AMORE** [1, 2]

Teorie di didattica della matematica a confronto

Comparing mathematics teaching theories

[1] NRD Università di Bologna, ITALIA

[2] Università Francisco José de Caldas, Bogotá, COLOMBIA

Indirizzi email:

marisafp@hotmail.it
bruno.damore@unibo.it

SUNTO

Si riassumono i capisaldi di diverse teorie della Didattica della Matematica e si presentano riflessioni relative alle relazioni fra esse.

Parole chiave: Teorie della Didattica della Matematica; storia della Didattica della Matematica; TSD; TO; EOS.

ABSTRACT

The cornerstones of different theories of the Mathematics Education are summarized and reflections on the relationships between them are presented.

Keywords: Theories of Mathematics Education; history of Mathematics Education; TSD; TO; EOS.

Ricevuto il 08/09/2022
Accettato il 31/10/2022

INTRODUZIONE

Senza alcun dubbio, sia la preistoria sia la storia di quella disciplina che oggi si chiama *Didattica della Matematica* può essere espressa, narrata, analizzata sulla base delle diverse teorie interpretative che sono state proposte nei decenni.

Per "preistoria" intendiamo qui tutto quel che ha avuto a che fare con il processo di insegnamento – apprendimento della Matematica negli ultimi 60–70 anni, fino ad arrivare alla nascita di quella disciplina che fu battezzata con il nome che ora le è proprio: *Didattica della Matematica*, verso i primi anni '80, dunque poco più di 40 anni fa. Per vari motivi scientifici e affettivi, a noi fa piacere e comodo puntare sul 1986, anno di pubblicazione di uno studio che da molti (e da noi) è ancora oggi considerato un punto di partenza della nostra disciplina (Brousseau, 1986). (Si vedano anche: Brousseau, 1988, 1989).

Negli anni precedenti l'attenzione era puntata quasi esclusivamente sul versante dell'insegnamento, con posizioni che, viste oggi, sono piuttosto ingenue; il che ci ha portato a denominare quella fase come *Didattica A* ("A" non solo è la prima lettera dell'alfabeto e dunque rappresenta un inizio, un punto di partenza, ma sta anche per *docendi Ars*, la traduzione più diffusa in latino classico del sostantivo italiano femminile singolare *didattica* offerto dai migliori dizionari latino–italiano). Solo dopo il rivoluzionario lavoro scientifico di Guy Brousseau, si è imposta la tendenza a prendere in considerazione nella ricerca il problema dell'apprendimento come fattore scientifico determinante, il che ci portò a definire la Didattica *B* (*B* come processo successivo ad *A*) (D'Amore, 1999, 2006).

L'inizio degli anni '80 si può anche assumere come la data di nascita di una prima teoria dell'attuale Didattica della Matematica, la "teoria delle situazioni" il cui indiscusso creatore fu appunto Guy Brousseau (Artigue, Gras, Laborde, Tavignot, & Balacheff, 1994). Ma non è vero, come talvolta si afferma in modo inadeguato, che non ci fossero teorie precedenti; c'erano sì teorie che si occupavano della matematica scolare, ma ben poco esse hanno a che fare con quelle che noi oggi riconosciamo come significative.

Certo, invece, dopo la nascita della moderna Didattica della Matematica, teorie diverse si sono succedute. Per chiarire bene questo nostro atteggiamento è necessario chiarire che cosa intendere con *teoria*; un lungo studio – resoconto storico appare in D'Amore (2007) ma, per brevità e per attualità, preferiamo citare Radford (2008a, b) per avere un'idea semplice e significativa dei contenuti nei quali si esprimono il senso e la struttura di una teoria.

Secondo Radford, una teoria include necessariamente dei principi, o meglio, un sistema di principi (P) concettualmente organizzati, dei modelli di domande di ricerca (D) e una metodologia (M). Il sistema di principi P include alcuni costrutti–chiave sui quali i principi stessi si fondano. La metodologia M include le tecniche di raccolta, analisi e interpretazione dei dati, fatti o evidenze empiriche che supportano le risposte alle domande di ricerca D. Le tre componenti (P, D, M) di una teoria T sono tra loro in relazione dialettica e dunque si modificano in relazione ai risultati che la teoria produce; in altre parole, nessuna teoria è statica, ogni teoria evolve nel tempo. Il che spiega come teorie datate, proprio grazie a questo tipo di analisi strutturale e, secondo noi, grazie al paragone con altre teorie, possono evolversi. Il che inoltre spiega come, pur conservando le idee originali di fondo, le diverse teorie e le loro analisi contribuiscano a fornire ancora oggi spiegazioni e dunque costituire interesse. Per esempio, a nostro avviso questo succede tuttora con la teoria delle situazioni didattiche (TSD), la più celebrata e fondamentale (dal punto di vista storico) fra le teorie di Didattica della Matematica, come è stato mostrato in Fandiño Pinilla (2020).

A nostro avviso, nessuna delle teorie precedenti alla TSD di Brousseau può classificarsi come scientificamente ben fondata; tuttavia riteniamo che una breve presentazione di quelle più diffuse nel periodo che abbiamo chiamato "preistoria" possa essere significativa e utile a chi, occupandosi di Didattica della Matematica, ritiene doveroso, utile, culturalmente opportuno conoscere l'evoluzione storico – critica del proprio oggetto di studio.

LA "PREISTORIA": ZOLTAN DIENES E GEORGES PAPY

Per quanto riguarda le tendenze aventi a che fare con il problema dell'insegnamento della Matematica, gli anni '60 sono certo dominati dal lavoro proposto dai coniugi belgi George Papy e Fréderique Lenger Papy e, indipendentemente, dall'ungherese Zoltan Dienes.

George Papy fu tra i più decisi fautori, a metà degli anni '50, della proposta internazionale della cosiddetta *New Mathematics* (in Italia *Nuova Matematica* o *Matematica Moderna*), che si diffuse a macchia d'olio in Francia, Belgio, USA e poi pian piano in (quasi) tutto il mondo. La base di tale proposta, nella visione di Papy, era in sintonia con le vedute dei Bourbakisti e dunque consisteva nello studio, come punto di partenza, addirittura ancor prima della scuola primaria, della teoria degli insiemi (la cosiddetta "insiemistica" in Italia) e delle strutture algebriche (anche se non formalmente definite). Circondato da discepoli che lo assecondavano acriticamente, Papy lanciava dogmi di tipo rappresentativo, disegni imposti agli allievi, colorazioni speciali per frecce relazionali che accennavano alle strutture algebriche, recinti colorati "a forma di patata" per rappresentare insiemi (papygrammi), … (Papy, 1963, 1969a). Nulla di veramente significativo sul piano dell'apprendimento, a nostro avviso.

Era famoso anche per un cosiddetto minicalcolatore che portava il suo nome; ma su questo sorvoliamo (Papy, 1969b).

Fréderique Papy si occupava delle relazioni scolastiche e didattiche dei ragazzi in difficoltà (anche di casi straordinariamente gravi) nell'apprendimento e nella socializzazione della matematica.

George Papy aveva creato nel 1970 un gruppo di studio e di ricerca, il GIRP (*Groupe International de Recherche en Pédagogie de la Mathématique*) con sede ufficiale a Walferdange (Lussemburgo), vicinissimo alla capitale, del quale fu presidente fino al 1991. Il GIRP organizzava un convegno internazionale di studi annuale nelle diverse nazioni d'Europa, solitamente durante il mese di agosto. Si disintegrò per dissidi soprattutto culturali interni del 1996 (D'Amore, 2021, pp. 45–47, 65–75).

Zoltan Dienes era anch'egli uno dei maggiori fautori internazionali della *Nuova Matematica* o *Matematica moderna* e la sua fama è soprattutto legata a una scatola di eleganti e attraenti oggetti colorati di varie forme geometriche elementari, i *blocchi logici*, con i quali faceva giocare i bambini della scuola elementare, scommettendo sul fatto che avrebbero così, di conseguenza, automaticamente appreso la logica. Ovviamente, si trattava di un'illusione: in realtà i bambini imparavano a giocare con gli oggetti coloratissimi della elegante scatola (quando imparavano). L'illusione che il *transfer cognitivo*, cioè il passaggio astratto da un apprendimento in determinate circostanze a un apprendimento di tipo generale, sia spontaneo era dominante, allora. Oggi sappiamo bene che apprendere in generale grazie a un esempio specifico circoscritto non è un fatto automatico, perché l'apprendimento concettuale significativo richiede circostanze e situazioni ben diverse. Questo sogno appartiene a quella categoria di illusioni che abbiamo altrove definito "panacee" (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2014) e che ancora sono proposte in modo acritico da persone che non hanno idea delle ricerche scientifiche in Didattica della Matematica e ben accette da quei (pochi, sempre meno) insegnanti acritici che si aspettano delle "ricette per insegnare", piuttosto che informazioni su che cosa significa apprendere, fondate su studi significativi che si basano sulla ricerca.

Dienes fu molto presente in Italia, addirittura come figura dominante, dai primi anni '70, fino a oltre la metà degli '80, quando fu nominato direttore dell'Istituto Regionale di Ricerca Educativa (IRRE) dell'Emilia Romagna, una tipologia di enti creati dal Ministero della P. I. nel 1974.

Nei primi anni '80, Brousseau, con una lucidità analitica finalmente significativa e una spietatezza unica (della quale poi si dichiarò pentito, in colloqui personali), studiava scientificamente (tra le altre) queste proposte basandosi su indiscutibili prove fatte nelle aule e le condannava in maniera pesantissima, citando anche esplicitamente i nomi dei loro creatori. La sua denuncia del cosiddetto negativo "effetto Dienes" ebbe un impatto assolutamente deleterio nei confronti di chi non solo usava i blocchi logici in aula, ma soprattutto di chi seguiva nel proprio insegnamento atteggiamenti "alla Dienes" (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sarrazy, 2020).

Dienes aveva coniato, come espressione del suo modo di vedere il rapporto fra insegnamento e apprendimento della matematica, la dicitura *mathématique vivante*. Si trattava di far *agire* concretamente, fisicamente, gli allievi; a suo avviso, facendo, agendo, in modo fisico, corporeo, essi avrebbero assimilato e appreso anche senza volere, senza accorgersene. (Esattamente il contrario di quanto asserirà Brousseau, che non c'è apprendimento senza consapevolezza, senza una volontà esplicita di impegnarsi ad apprendere). Per esempio aveva creato uno strumento musicale a 4 corde e lo suonava. A seconda del tipo di suono, il bambino doveva sollevare la mano destra o (aut) la mano sinistra o la gamba destra o la gamba sinistra. Dienes teneva corsi per insegnanti mostrando tutto ciò. Se però i suoni erano due, le cose si complicavano. Se il bambino doveva contemporaneamente sollevare le due braccia o una gamba e un braccio, tutto bene; ma se avesse dovuto sollevare contemporaneamente le due gambe, allora questo doppio compito andava sostituito dal seguente: sollevare solo il braccio destro. Si tratta del "prodotto" fra due elementi:

gd (alza la gamba destra) × gs (alza la gamba sinistra) = bd (alza il braccio destro)
gs (alza la gamba sinistra) × gd (alza la gamba destra) = bs (alza il braccio sinistro)

A questo punto l'insieme delle coppie di ordini viene strutturato algebricamente.

×	bd	bs	gd	gs
bd				
bs				
gd				bd
gs			bs	

Abbiamo posto i risultati dell'operazione di "moltiplicazione" solo nei due casi esemplificati; gli altri risultati si possono inventare in modo opportuno. L'importante è che nelle caselle vuote appaiano alla fine solo simboli che rappresentano oggetti dell'insieme definito e non altri, così che l'operazione sia interna all'insieme di definizione, in modo da avere una struttura algebrica (chiusa).

L'idea base è che, eseguendo corporalmente per davvero questo gioco, si sta obbligando il bambino a "vivere un ambiente" (che l'adulto colto sa essere) di algebra strutturale, un gruppo finito abeliano a 4 elementi con una composizione interna, un vero e proprio gruppo algebrico finito (basta metterci un elemento neutro, far sì che la moltiplicazione sia associativa e che ogni elemento abbia un inverso). A che scopo? Vivendo tutto ciò fisicamente, il bambino implicitamente assorbe questa struttura di gruppo, la vive, e potrà così rispondere a domande su tali strutture algebriche che diverranno naturali. Sappiamo che oggi questa nostra narrazione lascia come minimo perplessi o stupefatti, ma allora era l'idea imperante (Dienes, 1972. Immediatamente tradotto in italiano: Dienes, 1975).

Dienes "resistette", esclusivamente grazie alla fama conquistata con i suoi giocattoli presso gli insegnanti di scuola primaria, fino ai primi anni '90, e poi sparì definitivamente dal circuito di quella che già si chiamava Didattica della Matematica.

Già nei Nuovi Programmi scolastici italiani di Matematica del 1985 appaiono idee legate agli studi e alle proposte finalmente scientifiche di Brousseau e solo qualche cenno a possibili attività con gli insiemi ricordavano le passate avventure con Papy, Dienes e analoghi.

Nei prossimi paragrafi presenteremo in assoluta sintesi solo alcune delle teorie più significative o più diffuse o più note fra quelle create lungo il corso della storia della Didattica della Matematica. Per alcune, quelle più conosciute e tuttora vive, daremo presentazioni brevissime, sia perché si tratta di temi talmente noti da non richiedere approfondimenti in questa sede, sia perché quel che a noi interessa in questa occasione è solo far cenno a quel che significa oggi il confronto fra teorie, un tema che ci appassiona perché lo riteniamo utile e opportuno per evitare inutili campanilismi.

Con adeguate citazioni bibliografiche, rinvieremo alla consultazione di testi più specifici e profondi per ciascuna delle teorie. la nascita della didattica della matematica: teoria delle situazioni didattiche tsd

TSD. Il docente decide di affrontare un tema *t* di studio a lui ben noto, sia dal punto di vista matematico – epistemologico e storico, sia dal punto di vista didattico, per favorirne l'apprendimento da parte degli studenti della sua classe. Sceglie a questo proposito un (buon) problema opportuno, interessante e specifico, che coinvolge il tema *t*. Crea una situazione adidattica nella quale l'obiettivo è far sì che gli allievi apprendano *t*. Lanciata l'idea del tema, lo propone agli studenti e seguono così le classiche fasi che costituiscono la situazione adidattica: devoluzione, implicazione, costruzione di conoscenza privata (emergere spontaneo di *t*), validazione, socializzazione (costruzione sociale di *t*), istituzionalizzazione. Sappiamo bene che la prima e l'ultima di queste fasi sono a carico del docente, mentre le altre sono totalmente demandate alle attività personali e di gruppo dello studente, degli studenti; questi discutono fra loro, socializzano gli apprendimenti personali parziali, li negoziano e negoziano anche la terminologia. Il docente è lì, fisicamente presente, lavora con gli studenti, insieme a loro, cioè partecipa a un lavoro comune, condiviso, ma non come docente, semplicemente come regista: dà la parola, ascolta, sollecita. Nel corso del lavoro in comune, gli studenti singolarmente acquisiscono conoscenza privata, giungono cioè a far proprie quelle conoscenze istituzionalizzate che costituiscono le attese della società nei loro confronti, dunque auspicate dal docente. Dopo di che o contemporaneamente condividono le conoscenze private acquisite, discutendone tra loro, giungendo perfino a una terminologia comune che è oggetto di negoziazione, come abbiamo già detto. Dunque entrano a far parte della Società, modificando sé stessi proprio grazie all'apprendimento raggiunto. Contemporaneamente anche il docente cambia perché con questa esperienza ha acquisito conoscenze almeno di tipo didattico. Non è necessario adottare una posizione realista, ancor meno platonica, dato che non è necessario che l'oggetto matematico implicito in *t* sia preesistente; su questo punto vi sono state diverse discussioni ma, di fatto, *mai*, in tutta la TSD, questa preesistenza è mai stata ritenuta necessaria. Anzi, a noi sembra più opportuna una posizione pragmatista.

L'origine di tutto ciò è il lavoro di Brousseau (1989). [Per maggiori dettagli, si veda anche D'Amore (1999)].

ALTRE TEORIE ALTERNATIVE O SPECIFICHE

TAD. Il lavoro comune condiviso rientra nella *praxeologia* che sempre nella TAD (Teoria antropologica del Didattico) si delinea come fattore preponderante; entra in gioco una relazione al sapere istituzionalizzato, quello che, sia nella TSD ma ancor più nella TAD, si chiama *Savoir savant* (il Sapere in sé, quello accademico, ufficiale, storico, non quello scolastico, atteso nelle istituzioni scolastiche). Molto di quel che si è detto a proposito di TSD si può replicare nella TAD. Non è necessaria una posizione realista; anzi, ci sembra più opportuna anche in questo caso una posizione pragmatista.

Perché questo aggettivo "antropologico"? Esso non è un'esclusività dell'approccio creato da Yves Chevallard negli anni '80, come lui stesso dichiara, ma un "effetto del linguaggio" (Chevallard, 1999, p. 222): contraddistingue la teoria, la identifica, la caratterizza, ma non le è peculiare in modo univoco.

La TAD si centra quasi esclusivamente sulla dimensione istituzionale della conoscenza matematica, come uno sviluppo del programma di ricerca iniziato con la cosiddetta "didattica fondamentale" (Brousseau, 1989; si veda anche: Gascón, 1998). Per maggiori dettagli, si veda: Chevallard (1992).

Varianti a TSD e TAD. Essendo nate entrambe in Francia queste due teorie, fra loro fortemente connesse, è ovvio che molti sono gli studiosi francesi che hanno fornito contributi al loro sviluppo, spesso semplicemente analizzandone gli elementi costitutivi in modalità diverse o con specifiche analisi. Data la natura e lo scopo di questo testo, abbiamo deciso di non entrare in dettagli, limitandoci solo a citare alcuni dei nomi che, negli anni '80 e '90, hanno contribuito a questo tipo di sviluppo ma che, al giorno d'oggi possono essere fatti rientrare in una delle teorie dette o osservati come studiosi di appoggio allo sviluppo delle due teorie. Ci limitiamo solo a ricordare Perrin–Glorian (1994), ma i nomi da fare sarebbero tanti.

A proposito della parola "teoria", evitiamo di uscire dal preciso binario che abbiamo deciso di seguire, relativo solo alle teorie di Didattica della Matematica, evitando dunque di citare e illustrare teorie che alla nostra disciplina hanno sì contribuito, ma non come teorie generali della Didattica della Matematica bensì come teorie specifiche relative a temi particolari e non come tentativi di teorizzazione generale. Ci limitiamo a esemplificare: Perrenoud (1984), Schoenfeld (1985), Vergnaud (1990), Sfard (1991, 2019), Fischbein (1993), Duval (2017).

Torniamo dunque a brevissime presentazioni di teorie che hanno l'ambizione di essere generali per la Didattica della Matematica.

TEORIE NEL SENSO DI MODELLI

Modello di Van Hiele: modelli di apprendimento geométrico

Si tratta di un'ipotesi sul processo più idoneo per l'insegnamento – apprendimento della geometria, supportata da esperienze concrete, che ha avuto una discreta risonanza negli anni '80 – primi '90, con origine basata sulla tesi di dottorato del 1957 dei coniugi Dina van Hiele Geldof e Pierre van Hiele, presso l'Università di Utrecht, nei Paesi Bassi.

Secondo molti autori, ancora nel decennio 1980 – 1990, nonostante il proliferare di teorie finalmente scientifiche di Didattica della Matematica, che rispondevano dunque ai requisiti da noi esplicitati sopra, la didattica della matematica (senza maiuscole perché non è qui un nome proprio) avrebbe dovuto avere come scopo principale la stesura dei curricoli e dunque contribuire alla teoria e pratica del curriculo e dell'innovazione curricolare. Si vedano, per esempio: Fey (1980), Romberg e Carpenter (1986), Rico (1990).

Questi studi conducono all'ideazione di architetture curricolari spesso basate più su intuizioni o consuetudini relative all'insegnamento che non sul problema da decenni considerato centrale, quello dell'apprendimento.

Ma, nella cosiddetta teoria dei livelli di ragionamento dei Van Hiele (1986), l'apprendimento viene preso in esame; viene proposto come una successiva accumulazione, organizzata a rete, di una quantità sufficiente di esperienze adeguate attorno a un certo argomento (insegnamento); pertanto, esiste la possibilità di raggiungere livelli alti di conoscenza in genere, di ragionamento in particolare, fuori dall'insegnamento scolare consueto, se si ha l'occasione di compiere esperienze adeguate.

Nonostante ciò, queste esperienze generalmente non sono sufficienti a produrre uno sviluppo della capacità di ragionamento completo e rapido; ed è per questo che il compito dell'insegnamento matematico scolare è quello di far sì che si compiano esperienze ulteriori rispetto a quelle scolari standard, ben organizzate affinché siano utili al massimo livello possibile. Ciò che i Van Hiele chiamano "fasi di apprendimento" sono delle tappe nella graduazione e nell'organizzazione delle attività che deve realizzare uno studente per acquisire le esperienze che lo portino a un livello superiore di ragionamento su di un ben determinato argomento. Lungo queste fasi, l'insegnante deve fare in modo che i suoi allievi costruiscano la rete mentale di relazioni di quel "livello di ragionamento" al quale li si vogliono far accedere, creando per prima cosa i nodi della rete (gli "oggetti") e poi le connessioni tra questi ("relazioni"). Detto in altro modo, è necessario ottenere, in primo luogo, che gli studenti acquisiscano in modo significativo le conoscenze di base necessarie (concetti, proprietà, termini etc.) con i quali dovranno lavorare, in modo che possano poi accentrare la loro attività nell'apprendere a farne uso e a combinarli tra loro.

Le fasi dell'apprendimento proposte da Van Hiele sono cinque; noi ci limiteremo qui solo a denominarle; forniremo poi un rinvio bibliografico preciso per chi volesse disporre di ulteriori informazioni più dettagliate e specifiche.

- Fase 1: *Informazione*. Si tratta di una fase di presa di contatto, di informazioni di contenuto che l'insegnante deve fornire ai propri studenti, facendo il più possibile riferimento a loro esperienze extra curricolari personali.
- Fase 2: *Orientazione rigida*. In questa fase gli studenti iniziano a esplorare il campo di studio per mezzo di ricerche basate sul materiale che è stato loro proposto dal docente, creando di fatto gli elementi di base della rete di relazioni concernenti il tema in oggetto.
- Fase 3: *Esplicitazione*. Una delle finalità principali della terza fase è far sì che gli studenti scambino tra loro le proprie esperienze in un contesto di dialogo nel contesto del gruppo – classe.
- Fase 4: *Orientazione libera*. Ora gli allievi dovranno applicare le conoscenze e il linguaggio che stanno acquisendo ad altre ricerche, diverse dalle precedenti, perfezionando, ampliando e concretando le proprie conoscenze.
- Fase 5: *Integrazion*e. Nelle fasi precedenti, gli studenti hanno acquisito nuove conoscenze e abilità, ma tuttavia devono ancora raggiungere una visione generale dei contenuti e metodi che hanno a propria disposizione, in relazione alle nuove conoscenze in altri campi che hanno studiato in precedenza. Per arrivare a questa visione generale, è determinante la funzione dell'insegnante in quanto tale.

Non è difficile intravvedere in questo elenco di fasi elementi che costituiscono e determinano la TSD di Brousseau, soprattutto la scelta del docente di non entrare in funzione di insegnante fin dall'inizio, limitandosi dunque a proporre buoni, significativi, idonei, opportuni problemi che gli studenti dovranno affrontare da soli, ma discutendoli in gruppo (creare dunque qualcosa di molto simile alle situazioni adidattiche); e riapparire alla fine del processo, nell'ultima fase di istituzionalizzazione, riassumendo la sua veste di docente al quale occorre fare riferimento concreto esplicito.

Per ulteriori informazioni si veda: D'Amore (1999, pp. 84–89). Per avere un esempio concreto dell'applicazione di questa proposta curricolare si veda: Afonso Martin, Camacho Machin e Socas Robayna (1999).

APÓS

Si tratta dello sviluppo di un'idea dello statunitense Edward (Ed) Dubinsky, un modello per spiegare l'apprendimento della matematica inserito nel filone del costruttivismo di stampo neopiagettiano, dato che fa riferimento alla cosiddetta "astrazione riflessiva nell'apprendimento". Con la sigla APOS si intende sintetizzare la successione dei seguenti momenti considerati anche come strumenti: azioni, processi, oggetti, schemi, per spiegare e valutare successi e fallimenti negli impegni di natura matematica da parte degli studenti, distinguendo le fasi nelle quali essi hanno operato (in termini positivi o negativi). L'idea è che questa successione costituisce una specie di ossatura ordinata dei passaggi che lo studente deve compiere per apprendere un dato tema di matematica. In altre parole, allo studente non solo va insegnato il concetto matematico in questione, ma egli va reso padrone della successione delle strutture mentali necessarie a questo scopo.

Si vedano: Dubinsky (1987, 1989, 1991).

TEORIE PIÙ RECENTI

Le teorie che citiamo in questo paragrafo sono talmente note e diffuse che evitiamo di trattarne a lungo; ci limitiamo solo a un cenno estremamente riassunto. Ma forniamo in ogni caso poi una bibliografia opportuna.

EOS

L'EOS (Enfoque Onto Semiótico – Approccio Onto Semiotico) è un sistema teorico di assai vasto raggio che articola vari approcci e diversi modelli teorici utilizzati nella ricerca in Didattica della Matematica a partire da ipotesi antropologiche e semiotiche sulla matematica e il suo insegnamento – apprendimento. È nato nell'ambito del gruppo di ricerca Teoria della Didattica della Matematica dell'Università di Granada nei primi anni '90 ed è attualmente sviluppato e applicato da diversi altri gruppi di ricerca internazionali, soprattutto spagnoli e latinoamericani.

Una sua descrizione prende in esame il gruppo formato da studenti e docente che si impegnano nel lavoro comune in modo spontaneo, cioè quella che si chiama *comunità di pratica*, che nasce non solo attorno a un determinato tema matematico ***t*** ma anche sulla base delle modalità del lavoro che è di intercambio, di compartecipazione, di lavoro condiviso. Per lo studio – analisi di questi fattori, è necessaria una posizione pragmatista, dato che è proprio il lavoro comune che crea e modella ***t*** e lo fa emergere, condiviso, grazie al lavoro (insistiamo: comune) fra allievi e fra allievi e docente. La nascita e l'evoluzione di ***t*** comporta un ingresso marcato nella società adulta e storicizzata che delinea l'EOS, dal punto di vista ontologico, mentre lo scambio di elementi co–strutturanti dal lavoro comune ne costituisce l'ossatura semiotica.

Si vedano: Godino e Batanero (1994), Godino (2002), D'Amore e Godino (2006), Godino, Batanero e Font (2019), D'Amore e Fandiño Pinilla (2017, 2020).

TO

Nella TO (Teoria dell'Oggettivazione) il tema ***t*** di lavoro comune, dunque di apprendimento, è proposto direttamente dal docente o può sorgere spontaneamente nell'ambito di un'attività nella quale è impegnata la classe o parte di essa (gruppo di allievi, con o senza la partecipazione concreta del docente). Il lavoro di scambio è strettamente configurato attorno alle prese di posizioni personali degli apprendenti, ma all'interno di un *labour* (in inglese, maschile; *labor* in spagnolo, femminile; intraducibile in italiano) comune. L'emergere spontaneo di ***t*** segna e contraddistingue il momento *clou* dell'oggettivazione, la personalizzazione dell'impegno dal punto di vista marxiano, di produzione, dunque di ingresso nella società auspicata come demarcazione dell'apprendimento avvenuto. Prima e ultima fase sono a carico del docente; il resto, intermedio, è partecipazione, ma anche regia. Naturalmente, capiamo bene e noi stessi evidenziamo che tale atteggiamento può essere interpretato in svariate forme, anche tra loro in opposizione. La fase nella quale il docente smette i panni di docente, appunto, per collaborare con gli studenti, senza fornire risposte o soluzioni, ma semplicemente per sollecitare opinioni, confronti fra opinioni, dando la parola a chi si pone in disparte, nella TO può essere anche vista come un'azione regolatrice dei processi di adattamento alla situazione di apprendimento, quell'attività corale che si chiama *labor* comune, condivisa.

Si veda soprattutto Radford (2021); ma anche D'Amore (2015) e D'Amore e Radford (2017).

RELAZIONI FRA TEORIE

In alcuni lavori degni di nota si danno spiegazioni (anche tra loro diverse) dei motivi della nascita e della specifica diffusione delle varie teorie con analisi storico – critiche di alto livello (Teppo, 1998; Lerman, 2006; Prediger, Bikner–Ahsbahs, & Arzarello, 2008; Sriraman & English, 2005, 2010; Prediger, Bosch, Kidron, Monaghan, & Sensevy, 2010; Bikner–Ahsbahs & Prediger, 2014).

Lo studio delle relazioni fra teorie può portare a unificazioni almeno parziali, a decise contrapposizioni o a parziali paragoni (Prediger, Bikner–Ahsbahs, & Arzarello, 2008; Radford, 2008a, b). Per nostra natura, noi siamo per lo più propensi a cercare (almeno parziali) similitudini. Ed è per questo che abbiamo partecipato con convinzione alla stesura di recenti lavori che avevano lo scopo di porre in relazione, e non solo opporre tra loro teorie, per esempio TSD e TO (Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Santi, 2020).

Spinti dai risultati ivi ottenuti e dalle nostre convinzioni che sottolineano l'importanza di non creare necessariamente e solo contrapposizioni ma soprattutto paragoni fra teorie, abbiamo deciso di ampliare questa ricerca, ponendo in rilievo elementi non di disaccordo totale ma anzi di comunanza fra alcune teorie storicamente radicate nella Didattica della Matematica, come quelle storiche: TSD e TAD, e altre più recenti, come EOS e TO.

Fra i diversi scritti possibili, citiamo solo Fandiño Pinilla (2020). Per esempio, studiando le fonti originali, il che non sempre è banale, noi riteniamo oggi che l'origine dell'idea di alcune delle fasi che caratterizzano TSD: implicazione, costruzione di conoscenza privata, validazione e socializzazione all'interno di una situazione adidattica, non sia affatto in alternativa a quella di *labor* comune della TO [anche se, all'epoca, anni '70 – '80 – primi '90, non sembrava necessaria una presa di posizione sulle caratteristiche di questo tema (*labor*), forse date per scontate].

Ci ripetiamo: abbiamo dedicato molte delle nostre analisi a cercare di far accettare questa posizione, a prima vista distante da alcuni punti di vista che tendono soprattutto a porre l'accento sulle differenze fra teorie, piuttosto che sulle concordanze (per quanto parziali) o sulle analogie (per quanto nascoste).

Questa nostra posizione richiede sempre un'attenta rilettura delle fonti prime e dei lavori di base, di nascita di una teoria. Il che sembra attualmente essere / è discordante dal punto di vista di chi, con molta faciloneria, ingenuità, ignoranza o malizia, tende a far sì che sia prioritario, anche nei centri di ricerca, fare riferimenti solo alle teorie di datazione più recente, rispetto a quelle precedenti, che tendono addirittura a essere dimenticate. Senza rendersi conto che una teoria nata nel 2022, sarà superata fra un decennio … da una teoria che, senza che gli autori se ne rendano conto, potrebbe replicare posizioni precedenti oramai obsolete.

Esempio chiarissimo, ma evitiamo qui citazioni dirette e precise, è la recente riscoperta dell'idea di contratto didattico (elemento tipico della TSD), ovviamente battezzato con altra denominazione e con grande frastuono auto elogiativo (che ha scomodato anche un periodico a tiratura nazionale), da parte di *parvenus* senza base teorica storicamente fondata in relazione al mondo della Didattica della Matematica. Sarebbe come riscoprire principi di matematica ritenendoli nuovi. D'altra parte, quando una psicologa francese, durante prove in aula, scoprì la famosa faccenda dell'*età del capitano* nel 1980 e fece una denuncia pubblica di questo fatto, accusando i docenti di scuola primaria di insegnare male la matematica, la questione finì sui periodici; nessuno, né lei né i giornalisti sapevano che la questione era già in fase avanzata di studio critico – scientifico da parte di Brousseau sotto il tema assai più generale del contratto didattico.

CONCLUSIONE

Lo scopo di questo breve testo è solo quello di fornire elementi di base critica per riflettere ancora una volta sia sulla differenza sia sulle similitudini fra quelle teorie che molti giudicano (a nostro avviso talvolta frettolosamente e superficialmente) tra loro distanti, inconciliabili, opposte.

Le nostre analisi, approfondite, basate sui presupposti originali delle singole teorie, mostrano invece che, spesso, punti di convergenza o almeno similitudini possono essere evidenziate. Anzi: che esistono spesso più elementi comuni che differenze.

Per esempio nel lungo studio Fandiño Pinilla (2020) si danno numerosi esempi di questo tipo; lo stesso si fa in Asenova, D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori e Santi (2020); in D'Amore e Fandiño Pinilla (2020); e altrove.

Si tratta dunque di un invito (concreto) a considerare le teorie, tutte le teorie, degne di serio studio (anche se solo storico) da parte dei ricercatori del settore, evitando quel modo assurdo ma diffuso di fare, cioè "dimenticare" le teorie più datate promuovendo presso i neofiti solo lo studio delle teorie più recenti. Questa pseudopatente di "modernismo a tutti i costi" non giova allo studioso serio che voglia essere critico e soprattutto competente.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Artigue, M., Gras, R., Laborde, C., Tavignot P., & Balacheff, N. (Eds) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*. La Pensée Sauvage.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica, 28*(1), 7–61.

Bikner–Ahsbahs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer International Publishing.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignements des mathématiques* (Thèse d'État). Université Sciences et Technologies, Bordeaux I.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: Le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309–336.

Brousseau, G. (1989). La tour de Babel. *Études en didactiques des mathématiques*, 2. IREM – Université de Bordeaux I.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques: Didactique des mathématiques 1970–1990* (Textes rassemblés et préparés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield). La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221–266.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Prefazioni di Colette Laborde e Guy Brousseau. Pitagora. [Versione in spagnolo: (2006). *Didáctica de la Matemática*. Prólogos de Colette Laborde, Guy Brousseau y Luis Rico Romero. Editorial Magisterio]. [Versione in portoghese: (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. Prefácios de Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau. Livraria da Física].

D'Amore, B. (2006). Didattica della matematica "C". In S. Sbaragli (Ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent'anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006 (pp. 93–96). Carocci.

D'Amore, B. (2007). Voci per il dizionario: Frabboni, F., Wallnöfer, G., Belardi, N., & Wiater, W. (Eds.) (2007). *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a* *confronto*. Torino: Bollati Boringhieri. Voci: Didattica disciplinare (pp. 72–75), Formazione in scienze naturali (pp. 140–142), Formazione in matematica (pp. 145–147), Scienza (pp. 335–337). [Versione in tedesco: (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich*. Wortschatzeintrag: Fachdidaktik (pp. 98-101), Mathematische Bildung (pp. 227-228), Naturwissenschaftliche (pp. 255-258), Wissenschaft (p. 362-364). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren].

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and Learning Mathematics. Some Past and Current Approaches to Mathematics Education*. Isonomia, On–line Journal of Philosophy – Epistemologica (pp. 151–171). University of Urbino Carlo Bo.

D'Amore, B. (2021). *Memorie di una vita: i personaggi, le storie, le idee*. Bologna: Pitagora. (Versione in spagnolo: in corso di traduzione).

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2014). Illusioni, panacee, miti nell'insegnamento–apprendimento della matematica. *DiM Difficoltà in Matematica*, *11*(1), 89–109.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. Theoretical reflections on the basis of the onto–semiotic approach to Didactic of Mathematics. In J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López–Martín (Eds.) (2017). *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23–26 marzo 2017. Sito web: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto–Semiótico). *Paradigma*, *41*(1), 130–150. http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/issue/viewIssue/71/5
DOI: https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011–2251.0.p130–150.id870

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sarrazy, B. (2020). *Gli effetti del contratto didattico in aula*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [Versione in spagnolo: (2018). *El contrato didáctico en Educación Matemática*. Prólogo y epílogo de Guy Brousseau. Magisterio].

D'Amore, B., & Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico e ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos. Prefacios de Michèle Artigue y Fernando Arzarello. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Dienes, Z. (1972). *La mathématique vivante*. CDL – Creative Destruction Lab.

Dienes, Z. (1975). *Matematica viva*. OS Organizzazioni Speciali.

Dubinsky, E. (1987). On Teaching Mathematical Induction, I. *Journal of Mathematical Behaviour*, *6*(1), 305–317.

Dubinsky, E. (1989). On Teaching Mathematical Induction, II. *Journal of Mathematical Behaviour*, *8*(3), 285–304.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Kluwer.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang. [Versione in spagnolo: (1999). *Sémiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y Aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle].

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Foreword by Bruno D'Amore. Springer International Publishing AG.

Fandiño Pinilla, M. I. (2020). A proposito di relazioni fra teorie: Alcuni punti di contatto e altri di divergenza fra TAD, TSD, EOS e TO. *La matematica e la sua didattica*, *28*(2), 159–197.

Fey, J. T. (1980). Mathematics education research on curriculum and instruction. In R. J. Shumway (Ed.), *Research in Mathematics Education* (pp. 388–432). National Council of Teachers of Mathematics.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational studies in mathematics*, *24*(2), 139–162.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *18*(1), 7–33.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto–semiotic approach: implication for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, *39*(1), 37–42.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2–3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Lerman, S. (2006). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, *38*(1), 8–13.

Papy, G. (1963). *Mathématique moderne*. Didier.

Papy, G. (1969a). *L'enfant et les graphes*. Didier.

Papy, G. (1969b). *Minicomputer*. Ivac.

Perrenoud, P. (1984). De l'inégalité quotidienne devant le système d'enseignement. L'action pédagogique et la différence. *Revue européenne des sciences sociales*, *20*(63), 87–142.

Perrin–Glorian, M.–J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, & N. Balacheff (Eds) (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud* (pp. 97–147). La Pensée Sauvage.

Prediger, S., Bikner–Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 165–178.

Prediger, S., Bosch, M., Kidron, I., Monaghan, J., & Sensevy, G. (2010). Different theoretical perspectives and approaches in mathematics education research: Strategies and difficulties when connecting theories. In V. Durand–Guerrier, S. Soury–Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1529–1534). Institut National de Recherche Pédagogique.

Radford, L. (2008a). On theories in mathematics education and their conceptual differences. In B. Sirakov, P. de Souza, & M. Viana (Eds.), *Proceedings of the international congress of mathematicians* (Vol. 4, pp. 4055–4074). World Scientific Publishing.

Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill–Sense.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matematica. Una perspectiva cultural. In S. Llinares, & M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (pp. 17–62). Alfar.

Romberg, T., & Carpenter, T. P. (1986). Research on the teaching and learning mathematics: two disciplines of scientific inquiry. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 850–873). Macmillan.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflection on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1–36.

Sfard, A. (2009). *Psicologia del pensiero matematico*. Prefazione di Bruno D'Amore. Erickson.

Sriraman, B., & English, L. D. (2005). Theories of mathematics education: A global survey of theoretical frameworks/trends in mathematics education research. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *37*(6), 450–456.

Sriraman, B., & English, L. D. (Eds.). (2010). *Theories of mathematics education: Seeking new frontiers*. Springer.

Teppo, A. R. (Ed.). (1998). *Qualitative research methods in mathematics education*. National Council of Teachers of Mathematics.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A theory of mathematical education*. Academic Press.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*, *10*(23), 133–169. [Versione in italiano (1992): La teoria dei campi concettuali. *La matematica e la sua didattica*, *24*(1), 4–19].