CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 2 • p. 102 – 112
ISSN 1983-7399

ARTICOLO ORIGINALE/ORIGINAL ARTICLE

Maura **IORI** [1]

Riflessioni e puntualizzazioni su alcuni concetti specifici e fondanti della teoria dei registri di rappresentazione semiotica di Duval

Reflections and clarifications on some specific and fundamental concepts in Duval's theory of semiotic representation registers

[1] NRD Università di Bologna, ITALIA

Indirizzo email:

maura@iori-maura.191.it

Ricevuto il 09/09/2022
Accettato il 31/10/2022

SUNTO

Si prendono in esame alcuni concetti specifici e fondanti della teoria dei registri di rappresentazione semiotica di Raymond Duval nel tentativo di una loro chiarificazione sia concettuale sia operativa.

Parole chiave: Teoria dei registri di rappresentazione semiotica; oggetto matematico; sistema semiotico; registro di rappresentazione semiotica; segno; rappresentazione semiotica; trattamento; conversione; oggettivazione; apprendimento.

ABSTRACT

Some specific and fundamental concepts of Raymond Duval's theory of semiotic representation registers are examined in an attempt to clarify them, both conceptually and operationally.

Keywords: Theory of semiotic representation registers; mathematical object; semiotic system; semiotic representation register; sign; semiotic representation; treatment; conversion; objectification; learning.

INTRODUZIONE

La teoria dei registri di rappresentazione di Duval (1993, 1995, 1996, 2006a, b, 2011, 2017) è senza dubbio una delle più interessanti e influenti nel già vasto e articolato mondo delle teorie a disposizione dei ricercatori in didattica della matematica. Essa permette di analizzare da un punto di vista sia semiotico sia cognitivo il modo di pensare e di lavorare in matematica, qualunque sia il campo della matematica in cui si opera (geometria, algebra, analisi, ecc.) e qualunque siano i concetti matematici coinvolti.

I termini utilizzati in tale teoria, in particolare "oggetto matematico", "sistema semiotico", "segno", "rappresentazione semiotica", "trattamento", "conversione", "oggettivazione", "conoscenza", "apprendimento", hanno significati concettuali e operativi specifici, da non confondere con i significati che i medesimi termini assumono in altre teorie. Risulta dunque importante riflettere il più possibile su tali termini e sui loro diversi significati per poterli usare con maggiore consapevolezza, non ingenuamente o ambiguamente sulla base di una semplice assonanza linguistica, anche nella prospettiva di un confronto tra teorie in didattica della matematica.

Il *significato* di un concetto, come puntualizza Agazzi (2014), ha sia una componente *referenziale* (un *riferimento*, un "nucleo stabile", indipendente dalla teoria, ovvero una "intensione di fondo", cioè un insieme strutturato di attributi che non muta al variare della teoria in quanto esprime una relazione del concetto con qualcosa di *esterno* alla teoria), sia una componente *contestuale* (un *senso* che dipende dal contesto teorico, dalla struttura della teoria all'interno della quale il concetto è usato, ovvero una "intensione mutevole", legata alla teoria in questione). Entrambe queste componenti permettono di riconoscere i molteplici usi di un medesimo concetto o termine in situazioni o contesti differenti. In particolare, i significati dei concetti ai quali rinviano i termini sopra menzionati contengono, da una parte, un nucleo stabile di significato, legato a specifiche pratiche di carattere matematico, indipendenti dalla teoria considerata in didattica della matematica, dall'altra, una componente mutevole, dipendente dal contesto della teoria in esame che specifica i loro usi in relazione ad altri termini della teoria; usi, per esempio, di natura semiotica e cognitiva nel caso della teoria dei registri di rappresentazione di Duval, di natura ontologica e semiotica nel caso dell'approccio ontosemiotico (EOS) (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002), socioculturale e semiotico-culturale, nel caso della teoria dell'oggettivazione (TO) (Radford, 1997, 2002, 2003). Il confronto tra teorie non presuppone in ogni caso l'invarianza di tutte le componenti intensionali dei termini che caratterizzano le teorie. (Per approfondire tali aspetti si veda: Asenova et al., 2020).

In quel che segue, ci limiteremo alla sola considerazione di alcuni termini e concetti, specifici e fondanti della teoria dei registri di rappresentazione semiotica di Duval. Avvisiamo fin da subito che tali termini e concetti sono strettamente correlati tra loro; impossibile parlare di uno senza includere, implicitamente o esplicitamente, l'altro o gli altri.

OGGETTO MATEMATICO – RAPPRESENTAZIONI

La nozione di oggetto matematico è molto dibattuta, non del tutto condivisa, anche in didattica della matematica. In generale, come fa notare Duval (2009), quando si parla di "oggetto" si tende spesso a confondere, anche nel contesto didattico, diversi tipi di oggetti: l'oggetto come *cosa* (l'oggetto concreto, accessibile attraverso i sensi, direttamente o strumentalmente, nel senso espresso nella *Metafisica* di Aristotele), l'oggetto *intenzionale* (ciò che un individuo percepisce, vede o nota immediatamente – forma, colore, suono etc. – quando dirige l'attenzione verso qualcosa), l'oggetto *fenomenologico* (l'oggetto così come appare nella coscienza e che permette al soggetto di riconoscerlo nelle sue occorrenze), l'oggetto *di conoscenza* (ciò che risulta invariante in molteplici *rappresentazioni* possibili, indipendentemente dal suo eventuale modo di "esistere"), in particolare:

- l'oggetto (di conoscenza) *sperimentale*, cioè l'invariante causale di una molteplicità di fenomeni osservati (*rappresentazioni non-semiotiche*);
- l'oggetto (di conoscenza) *matematico*, cioè l'invariante operatorio o logico-discorsivo di una molteplicità di *rappresentazioni semiotiche*.

Nell'insegnamento-apprendimento della matematica si fa riferimento sia a oggetti matematici sia a oggetti intesi come *cose*, sia a oggetti intenzionali o fenomenologici, spesso tra loro confusi.

Un oggetto matematico è completamente differente da un oggetto sperimentale, come quello della fisica, della biologia, o della chimica (Duval, 1999). In matematica, infatti, non è possibile un accesso multisensoriale, diretto o strumentale (attraverso microscopi, telescopi, sensori etc.), agli oggetti di conoscenza (insiemi, numeri, figure geometriche, funzioni, successioni, limiti, spazi vettoriali etc.). In altre parole, un oggetto matematico non ha rinvii ostensivi, non può essere identificato con un *oggetto reale*, una *cosa*, un *oggetto* dal punto di vista del realismo ingenuo; in matematica, quindi, la concettualizzazione non può basarsi sulla realtà concreta (D'Amore, 2000, 2003). "*Non c'è noesi senza semiosi*, non c'è pensiero matematico senza alcuna trasformazione di rappresentazioni semiotiche, qualunque esse siano" (Duval, 2017, p. 22).[1]

Da qui la necessità di ricorrere, per l'attività matematica, a particolari sistemi semiotici, detti *registri di rappresentazione*, con funzioni non solo di *comunicazione* e di presa di coscienza di qualcosa (*oggettivazione*), ma anche di *trasformazione* delle rappresentazioni semiotiche per ottenere nuove informazioni o nuove conoscenze.

In matematica, dunque, è soltanto *attraverso* (e non prima né dopo) le rappresentazioni semiotiche che è possibile un accesso cognitivo agli oggetti matematici, essendo impossibile un riferimento di tipo ostensivo a tali oggetti. Precisamente, l'accesso cognitivo a un oggetto matematico è possibile soltanto *attraverso* attività specifiche di produzione e di trasformazione o sostituzione di rappresentazioni semiotiche, dal momento che:

"*Ci sono sempre molte rappresentazioni possibili per lo stesso oggetto*" (Duval, 2017, p. 2).[2]

La molteplicità delle possibili rappresentazioni di un oggetto matematico ha due origini: (1) dal fatto che si possono produrre numerose rappresentazioni dello stesso tipo (si pensi per esempio alle possibili rappresentazioni di una retta in geometria); (2) dal fatto che si possono utilizzare diversi tipi di strumenti di rappresentazione o mezzi semiotici (figure geometriche, grafici, equazioni ...):

"*La diversità delle rappresentazioni di uno stesso oggetto deriva dalla varietà dei sistemi fisici o semiotici che possono produrre rappresentazioni*" (Duval, 2017, p. 3).

Questa molteplicità di tipi di rappresentazione porta a caratterizzare le rappresentazioni anche in base al sistema che permette di produrle e che determina le capacità e i limiti delle rappresentazioni prodotte.

Il concetto di "rappresentazione" sembra implicare in qualche modo l'assunzione di una reale "esistenza" dell'oggetto rappresentato. Nel caso di una rappresentazione semiotica ci si può allora chiedere:

L'oggetto matematico a cui rinvia una rappresentazione semiotica che tipo di esistenza ha?

Nell'approccio semio-cognitivo di Duval, l'assunzione di un'eventuale esistenza o preesistenza dell'oggetto matematico rappresentato non è necessaria né utile. Un oggetto matematico è concepito come ciò che rimane invariante in una molteplicità di rappresentazioni semiotiche, indipendentemente da qualsiasi interpretazione filosofica o caratterizzazione ontologica della natura dell'oggetto matematico in questione. Più in generale, i termini "oggetto matematico", "segno", "rappresentazione" … non necessitano di alcuna assunzione filosofica sulla natura, sul modo di esistere, sulla eventuale "preesistenza" delle entità matematiche alle quali essi rinviano.

Un oggetto matematico è concepito come un'entità emergente dal riconoscimento di una equivalenza *referenziale* di segni (rappresentazioni semiotiche) con *contenuti* differenti, dunque tra loro relativamente distanti dal punto di vista cognitivo, ovvero non necessariamente *semanticamente congruenti* o simili per qualche aspetto.

Un oggetto matematico non dovrebbe quindi essere confuso con il contenuto di una rappresentazione semiotica utilizzata per designarlo: questa è l'esigenza epistemologica fondamentale che caratterizza il processo di comprensione e tutta la conoscenza scientifica: non confondere un'immagine o il contenuto di una rappresentazione con ciò che essa rappresenta, oppure il contenuto di

[1] Tutte le citazioni in italiano sono traduzioni nostre.

[2] Il corsivo, qui e nel seguito, è dell'Autore.

un segno con ciò a cui esso rinvia (per approfondire si veda: Iori, 2021).

La natura filosofica degli oggetti matematici, lo ripetiamo, è irrilevante nell'approccio semio-cognitivo di Duval. Nessuna interpretazione filosofica (di tipo realista o idealista, costruttivista o platonica ...) può essere dedotta dalla caratterizzazione cognitiva degli oggetti matematici e dall'attività semiotica che permette una loro oggettivazione.

Al fine di comprendere i processi di apprendimento della matematica, la questione rilevante non è se gli oggetti matematici esistano o emergano prima o dopo le attività matematiche, prima o dopo specifiche pratiche istituzionali o personali, prima o dopo le rappresentazioni semiotiche … ma: *Come non confondere un oggetto matematico con il contenuto di una delle sue rappresentazioni semiotiche, se non è possibile un accesso percettivo diretto o strumentale all'oggetto matematico?*

La mancanza di un doppio accesso (diretto e indiretto) agli oggetti matematici porta quasi inevitabilmente a confondere il contenuto di una rappresentazione di un oggetto matematico con l'oggetto stesso (Duval, 1993), generando ostacoli alla comprensione per un gran numero di studenti, ma non solo.

La produzione e la gestione di rappresentazioni semiotiche referenzialmente equivalenti, nel senso di Frege (1892), ma non semanticamente congruenti permette di evitare la confusione tra il contenuto di un segno (o di una rappresentazione) – che costituisce un oggetto concreto, in particolare un *oggetto semiotico*, sul quale torneremo in seguito – e l'oggetto matematico al quale il segno può rinviare, dunque di aggirare il ben noto paradosso cognitivo della matematica (Duval, 1993, 2017; D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2013, 2015) e, di conseguenza, numerosi ostacoli alla comprensione dei contenuti matematici.

SISTEMA SEMIOTICO - REGISTRO DI RAPPRESENTAZIONE SEMIOTICA

Ispirandosi all'approccio semiotico di de Saussure e a quello di Frege, Duval (2006a) definisce un *sistema semiotico* come un insieme costituito da:

1) elementi (*segni*) che assumono valore di senso solo in opposizione di scelta ad altri elementi;
2) regole organizzatrici che permettono di effettuare operazioni intenzionali di designazione e di combinare o di raggruppare gli elementi in unità significanti (espressioni o unità figurali, per esempio).

La rete di opposizioni, differenze, valori e l'insieme di regole organizzatrici costituisce la *struttura* del sistema semiotico.

Ogni sistema semiotico ha dunque sue specifiche possibilità di rappresentazione, che spesso occorre completare o integrare con quelle di altri sistemi semiotici. Non tutti i sistemi semiotici, d'altra parte, risultano cognitivamente "creatori", ovvero in grado di produrre ulteriori segni in maniera originale per ottenere nuove informazioni o nuove conoscenze. I codici, per esempio, sono sistemi semiotici che permettono solo la trasmissione di informazioni o, più in generale, la comunicazione; non permettono la trasformazione dei contenuti dei segni che li costituiscono per ottenere nuove conoscenze. (Per approfondire tali aspetti si veda: Duval, 2017).

Un *registro di rappresentazione semiotica* è definito da Duval (2017, 2020) come un sistema semiotico che svolge una funzione cognitiva specifica, non svolta da tutti i sistemi semiotici: trasformare una rappresentazione che il sistema semiotico permette di produrre in altre rappresentazioni per ottenere nuove informazioni o nuove conoscenze. In altri termini, un registro di rappresentazione semiotica è un sistema semiotico cognitivamente "produttivo" o "creatore", ovvero in grado di produrre rappresentazioni sempre nuove in maniera originale e specifica: "La produzione di nuove rappresentazioni permette di ottenere nuovi oggetti di conoscenza" (Duval, 2017, p. 48).

Non tutti i sistemi semiotici utilizzati nelle attività matematiche sono registri di rappresentazione semiotica; i gesti, per esempio, non costituiscono un registro di rappresentazione semiotica (Duval, 2020).

Oltre alla funzione cognitiva specifica sopra descritta, un registro di rappresentazione semiotica svolge altre funzioni cognitive, comuni a tutti i sistemi semiotici.

In modo specifico e dettagliato, Duval (2017) caratterizza un *registro di rappresentazione semiotica* come un sistema semiotico che ha tre funzioni cognitive fondamentali per la concettualizzazione (*noetica*), esposte di seguito.

- *Produzione di rappresentazioni semiotiche*. Il valore cognitivo della produzione di rappresentazioni semiotiche è dato dal loro riferirsi a qualche cosa, a una caratteristica, relazione, proprietà, entità … "E questa produzione è relativa a oggetti che *sono stati già più o meno descritti o mostrati in precedenti rappresentazioni semiotiche prodotte da altri o da noi stessi*. (…) Le rappresentazioni mentali sono rappresentazioni semiotiche interiorizzate" (Duval, 2017, pp. 69–70).
- *Oggettivazione*. La produzione di rappresentazioni semiotiche è prima di tutto una *oggettivazione* (Duval, 2017), ovvero una presa di coscienza a livello individuale di qualche cosa di invariante, un *oggetto*, del quale non si era consapevoli prima di cercare di produrre, per sé stessi, rappresentazioni semiotiche di quell'oggetto.

  > *La produzione di rappresentazioni semiotiche precede in qualche modo il pensiero degli oggetti* che sono rappresentati. Questo è evidente nell'uso della lingua naturale. La pratica di un dialogo interiore (…) è cruciale per lo sviluppo individuale e per l'apprendimento. Ma anche la produzione di disegni, diagrammi o grafici. (Duval, 2017, p. 70)

- *Trasformazione di rappresentazioni semiotiche*. La trasformazione di rappresentazioni, ovvero la produzione di nuove rappresentazioni, è un processo cognitivo specifico del modo di pensare in matematica che non si riduce al processo di associazione di una rappresentazione a un'altra già prodotta. È qualcosa di più. Si tratta di un processo di *sostituzione* che permette di ottenere nuove informazioni o nuove conoscenze. Sì, ma in che modo? "*La produzione di nuove rappresentazioni dipende solo dal cambio di registro e dall'operazione di sostituzione specifica del registro selezionato*" (Duval, 2017, p. 70). Precisamente, Duval (2020) distingue due tipi di sostituzione con requisiti cognitivi differenti: il trattamento e la conversione. Il *trattamento* è un processo di sostituzione graduale di rappresentazioni semiotiche all'interno dello stesso registro, sulla base delle operazioni specifiche di sostituzione che il registro permette di effettuare. La *conversione* è la sostituzione di una rappresentazione di un registro con un'altra di un altro registro, in funzione delle possibilità specifiche di sostituzione che il cambiamento di registro di rappresentazione permette di effettuare.

Duval (2017, 2020) distingue inoltre due tipi di registri di rappresentazione:

- *registri multifunzionali* [lingua naturale (scritta o orale), per la designazione di oggetti, il ragionamento o l'enunciazione; forme iconiche (immagini); forme non-iconiche (configurazioni geometriche)];
- *registri monofunzionali* [scritture simboliche (sistemi di numerazione, scrittura algebrica, linguaggi formali); rappresentazioni bidimensionali di relazioni o di legami (grafici cartesiani, diagrammi)].

I registri multifunzionali e i registri monofunzionali si differenziano per il loro modo di sostituire una rappresentazione semiotica con un'altra. Nei registri multifunzionali la sostituzione non può mai essere effettuata mediante algoritmi o procedure automatizzabili. Nei registri monofunzionali, invece, la sostituzione si basa su algoritmi (Duval, 2020). In altri termini, nei registri multifunzionali i trattamenti non possono essere convertiti in algoritmi, mentre nei registri monofunzionali i trattamenti possono assumere la forma di algoritmo.

I registri monofunzionali sono specifici della matematica, mentre i registri multifunzionali si utilizzano soprattutto al di fuori della matematica. Questi ultimi svolgono principalmente funzioni di comunicazione e di oggettivazione; solo in particolari condizioni svolgono la funzione di trattamento (Duval, 2017).

Dal punto di vista matematico, i registri monofunzionali sono più efficaci e semplici dei registri multifunzionali, ma cognitivamente più complessi e difficili da comprendere per la maggior parte degli studenti, in quanto si distaccano dalla pratica discorsiva (Duval, 2017, 2020). In particolare:

> La consapevolezza della designazione funzionale nei registri simbolici [monofunzionali] e della designazione descrittiva nella lingua naturale [multifunzionale] è il primo requisito cognitivo per la comprensione delle espressioni incomplete [gruppi di segni collegati da un simbolo di operazione]. La consapevolezza della necessità di due espressioni incomplete che denotano lo stesso oggetto è il secondo requisito cognitivo per la messa in equazione. (Duval, 2020, p. 726).

Nell'insegnamento-apprendimento della matematica i registri multifunzionali sono importanti almeno quanto quelli monofunzionali, ma occorre essere consapevoli dei diversi usi dei registri multifunzionali. In particolare, la lingua naturale non è solo utile per far capire agli studenti con le parole ciò che essi non riescono a capire o a fare in altri registri, ma anche per la realizzazione di operazioni discorsive che sono specifiche della matematica: enunciazione, designazione ed espansione discorsiva. (Per approfondire tali aspetti si veda: Duval, 2017).

SEGNO - RAPPRESENTAZIONE SEMIÓTICA

Un *segno* è un elemento di un sistema semiotico, dunque assume valore di senso solo in opposizione di scelta ad altri elementi (segni) del sistema semiotico. Il senso di un segno è strettamente e indissolubilmente legato al sistema nel quale esso funziona come segno.

Per esempio, "1", di per sé, non è un segno; non è un segno se non si specifica il sistema in cui lo si considera. È un segno nel sistema binario (per la sua opposizione alla cifra "0" del sistema binario), oppure nel sistema decimale (per la sua opposizione alle altre nove cifre del sistema decimale) etc.; al di fuori del sistema da cui riceve il valore di segno è soltanto una macchia, priva di senso, non rappresenta alcun numero, nulla.

L'uso dei segni, in altri termini, non è subordinato agli oggetti che i segni possono evocare o designare ma è vincolato al sistema semiotico che li produce, ovvero alla struttura di opposizioni interne che si considera, o che si ritiene più adeguata o efficace in determinati contesti, anche da un punto di vista puramente segnico. Tale struttura determina le possibilità di trasformazione o di sostituzione dei segni all'interno del sistema, cioè la funzione cognitiva di *trattamento* per la produzione di nuove informazioni o nuove conoscenze.

"*La proprietà principale dei segni è quella di poter* ESSERE SOSTITUITI L'UNO ALL'ALTRO INDIPENDENTEMENTE DAGLI *oggetti che possono evocare*" (Duval, 2017, p. 10).[3]

La possibilità di sostituire segni ad altri segni non dipende dalla conoscenza degli eventuali oggetti rappresentati, ma dal sistema produttore. Inoltre, il riferimento di un segno a un oggetto matematico risulta soltanto da una operazione esplicita di designazione, non da una relazione di causalità.

"*La relazione tra i segni e le cose che significano è una* RELAZIONE DI RIFERIMENTO *e non una relazione di causalità*" (Duval, 2017, p. 6).

"*Una relazione di riferimento risulta da un'*OPERAZIONE INTENZIONALE DISCORSIVA DI DESIGNAZIONE" (Duval, 2017, p. 7).

I segni non si identificano, in ogni caso, con le rappresentazioni, in quanto il loro uso non è subordinato alla sola designazione di oggetti. Ci sono infatti situazioni in cui i segni non evocano di per sé alcun oggetto, ma sostituiscono semplicemente altri segni, come in algebra quando si utilizzano lettere per sostituire un dato insieme di possibili valori numerici.

Nell'approccio di de Saussure viene meno la dipendenza del segno dall'oggetto tipica dell'approccio semiotico classico. Nell'approccio semiotico classico, non

[3] Il corsivo e il maiuscoletto, qui e nel seguito, sono dell'Autore.

strutturalista, i segni sono considerati isolati (in assenza di sistemi semiotici) e rapportati all'oggetto a cui rinviano sulla base di relazioni di:

- somiglianza (relazione iconica) o no (relazione convenzionale);
- causalità (relazione indicale) o no (relazione iconica o convenzionale);
- riferimento, attraverso un'operazione discorsiva intenzionale di designazione (irriducibile alla relazione di somiglianza o di causalità).

Il significato di un segno risulta da una di queste tre relazioni (di somiglianza, causalità o riferimento) tra segno e oggetto. Si riduce alle prime due nell'approccio di Peirce, alla terza in quello di Frege. Il segno non risulta dunque completamente distinto dalla rappresentazione, in quanto la sua principale funzione è ridotta a quella della rappresentazione: "stare al posto di" o "evocare" un oggetto assente.

Rispetto all'approccio semiotico classico, l'approccio di de Saussure, esteso a tutti i sistemi semiotici utilizzati in matematica e integrato con quello di Frege, risulta dunque più appropriato e utile per l'analisi delle produzioni matematiche, non solo degli studenti.

Duval (2020) caratterizza una rappresentazione semiotica in termini di unità significanti specifiche del registro utilizzato mediante la seguente coppia:

((Registro utilizzato, unità significanti fuse insieme), *un oggetto semiotico identificabile*)

Un *oggetto semiotico* è concepito come "ciò che il contenuto della rappresentazione esibisce esplicitamente: parole, frasi, sequenze di numeri e simboli, linee, forme, diagrammi, etc." (Duval, 2020, p. 724). Il riconoscimento degli oggetti semiotici che due rappresentazioni esibiscono non presenta particolari difficoltà per gli studenti. Le difficoltà si presentano invece quando gli studenti non sono in grado di cogliere l'unicità dell'oggetto matematico che diversi oggetti semiotici denotano (Duval, 2020), cioè di riconoscere o stabilire corrispondenze tra le unità significanti di rappresentazioni semiotiche referenzialmente equivalenti ma relativamente distanti dal punto di vista cognitivo, ovvero non semanticamente congruenti.

Ogni attività matematica si basa sulla gestione di rappresentazioni semiotiche di oggetti matematici. Tale gestione richiede, in primo luogo, il riconoscimento delle *unità significanti* specifiche del registro, ovvero dei dati o delle informazioni matematicamente rilevanti nei contenuti delle rappresentazioni, riconoscimento non sempre immediato o spontaneo; in secondo luogo, la sostituzione di tali unità significanti con altre unità significanti del medesimo registro (*trattamento*), oppure di altri registri (*conversione*).

> *Queste sono le due condizioni cognitive necessarie* per capire e fare qualsiasi cosa in matematica. Esse riguardano il modo specifico di lavorare e di pensare in matematica. In caso contrario, la maggior parte degli studenti non potrà che sentirsi incapace di apprendere la matematica. (Duval, 2017, p. 73)

TRATTAMENTO – CONVERSIONE

Il *trattamento* è un processo di sostituzione, passo dopo passo, di rappresentazioni semiotiche all'interno dello stesso registro, sulla base delle operazioni specifiche di sostituzione che il registro permette di effettuare.

Il trattamento collega, per esempio, i vari passi di una dimostrazione, di una spiegazione, di un'esplorazione euristica, di un calcolo, della risoluzione di un'equazione (Duval, 2020).

Dipende, in ogni caso, dal registro utilizzato, registro che può essere *discorsivo* (con caratteristiche di linearità, in quanto basato su sequenze organizzate di parole o di simboli, come per esempio la lingua naturale o le scritture simboliche, per enunciare, designare, dimostrare o inferire), oppure non-discorsivo (come per esempio le immagini iconiche, le figure geometriche, i grafici cartesiani o i diagrammi).

Ogni passo di un trattamento fornisce nuove informazioni e, come suggerisce Duval (2020), può essere caratterizzato dalla coppia:

((Rappresentazione semiotica di partenza, unità significante specifica del registro), *rappresentazione semiotica di arrivo*)

Una *conversione* è la sostituzione di una rappresentazione semiotica di un registro con un'altra rappresentazione semiotica di un altro registro, in funzione delle possibilità specifiche di sostituzione che il cambiamento di registro permette di effettuare.

Le conversioni richieste in una data situazione possono essere implicite o esplicite, per esempio quando si deve passare continuamente da un tipo di rappresentazione all'altro, implicitamente o esplicitamente, sia nelle situazioni di *multi-rappresentazione* (ovvero in presenza in parallelo di enunciati, diagrammi, tabelle, immagini etc.) sia nelle situazioni di mono-rappresentazione:

> Sia in una situazione di multi-rappresentazione che di mono-rappresentazione è sempre lo stesso processo cognitivo fondamentale di conversione di rappresentazioni che viene richiesto. Ed è sempre il diverso grado di congruenza o di non congruenza tra i rispettivi contenuti della rappresentazione di partenza e di quella di arrivo che facilita o inibisce la conversione. (Duval, 2017, p. 87)

In una conversione, il contenuto della rappresentazione di partenza non ha di solito nulla in comune (semanticamente o sintatticamente) con il contenuto della rappresentazione di arrivo. Per evidenziare ciò, Duval (2020) caratterizza le sostituzioni per conversione mediante la coppia:

(((Registro di partenza, un oggetto semiotico), (Registro di arrivo, un altro oggetto semiotico)), *lo stesso oggetto matematico denotato*)

In altri termini: "*L'oggetto matematico è l'unicità di due oggetti semiotici immediatamente convertibili l'uno nell'altro*" (Duval, 2020, p. 725).

La conversione di rappresentazioni semiotiche da un registro all'altro può richiedere l'uso di *rappresentazioni ausiliarie di transizione* (tabelle, schemi, frecce, rappresentazioni libere o individuali) ovvero di rappresentazioni che mescolano le caratteristiche proprie di due o più registri per facilitare il passaggio da un registro all'altro (Duval, 2017).

La conversione e il trattamento sono "gli unici due aspetti dell'attività matematica che possono essere osservati oggettivamente, in quanto *i processi cognitivi specifici del pensiero matematico sono processi di sostituzione, non di associazione*" (Duval, 2020, p. 727).

Il principale ostacolo alla comprensione e all'apprendimento della matematica risiede in questi due requisiti cognitivi, che permettono di cogliere l'unicità dell'oggetto matematico denotato da differenti oggetti semiotici (Duval, 2020).

OGGETTIVAZIONE – APPRENDIMENTO

Il termine "oggettivazione" nell'approccio semio-cognitivo di Duval assume un significato differente da quello che assume in altri contesti teorici, in particolare nella teoria dell'oggettivazione di Radford (2002, 2006, 2013, 2014, 2021).

Nell'approccio di Duval il termine "oggettivazione" indica una presa di coscienza a livello individuale di qualcosa, di un oggetto, di cui non si era coscienti prima di produrre (per sé stessi) una rappresentazione, senza alcuna intenzione comunicativa (Duval, 1995, 2017). Non si identifica con la conoscenza, ma è una condizione necessaria (non sufficiente) per la costruzione cognitiva degli oggetti matematici. Può riguardare non solo il modo di riconoscere un oggetto matematico, attraverso diverse sue rappresentazioni semiotiche nel medesimo registro o in registri differenti, ma anche il modo di riconoscere il tipo di trattamento da effettuare nel registro più opportuno. Dunque, la conversione e il trattamento di rappresentazioni sono strettamente legati alla funzione di oggettivazione.

Tuttavia, come afferma Duval (1995), l'oggettivazione si accompagna spesso a una produzione di rappresentazioni semiotiche che può apparire insufficiente, inaccettabile o incomprensibile dal punto di vista della comunicazione (cosa ben nota agli insegnanti). Analogamente, la produzione di rappresentazioni semiotiche può essere soddisfacente dal punto di vista della comunicazione, ma non corrispondere ad alcuna oggettivazione da parte del soggetto che la produce (altra cosa ben nota agli insegnanti). In altre parole, la funzione di oggettivazione è indipendente da quella di comunicazione. Da qui la necessità da parte dell'insegnante di una presa di coscienza della peculiarità e complessità della gestione delle rappresentazioni semiotiche nelle attività matematiche, della inscindibilità di tale gestione dalla costruzione cognitiva di oggetti matematici e dunque dai processi di apprendimento in matematica.

Nella teoria dell'oggettivazione di Radford, invece, la parola "oggettivazione" è utilizzata per indicare un processo di natura sociale, un processo attraverso il quale

> gli studenti *incontrano*, *notano* e diventano *criticamente consapevoli* dei sistemi di pensiero, di riflessione e di azione culturalmente e storicamente costituiti. In questo incontro gli studenti si trovano di fronte l'alieno, l'*Altro*. Questo incontro è percepito come l'incontro con qualcosa che è *posto davanti* (etimologicamente parlando, qualcosa che si *contrappone* o che si *oppone*) all'individuo. (Radford, 2021, p. 40)

Si tratta dunque di un processo non cognitivo, ma storico-culturale. D'altra parte, in tale teoria, i processi di oggettivazione sono inscindibili da altri processi di natura storico-culturale, quelli di *soggettivazione*. In particolare l'*apprendimento* è concepito in termini di processi di oggettivazione intrecciati a processi di *soggettivazione* ovvero a "processi di creazione di un sé particolare (e unico)" (Radford, 2021, p. 90). Nello specifico: "I processi di *soggettivazione* sono processi di incessante costruzione del soggetto, di continua creazione di un soggetto storico e culturale singolare (e unico)" (Radford, 2021, p. 40). Si tratta di un processo che coinvolge sia il conoscere (*knowing*) sia il divenire (*becoming*), ma sempre in senso storico-culturale.

CONCLUSIONE

I concetti espressi dai termini presi in esame nei precedenti paragrafi sono solo alcuni dei concetti chiave della teoria dei registri di rappresentazione semiotica di Duval, una delle più conosciute a livello internazionale, citata e utilizzata in numerosi studi e ricerche in didattica della matematica. Si tratta di concetti introdotti da Duval per descrivere il "volto nascosto" dell'attività matematica, vale a dire "il modo di vedere, di definire, di ragionare, di passare da una rappresentazione semiotica all'altra di oggetti che sono accessibili unicamente attraverso le rappresentazioni semiotiche che si producono" (Duval, 2014, pp. 23–24); un volto che appare "nascosto" in quanto non si nota più quando si inizia a comprendere la matematica. In altre parole, si tratta di concetti introdotti per descrivere le condizioni cognitive necessarie per apprendere e fare matematica, tenendo conto dello status epistemologico specifico della matematica; uno status che vincola l'accesso cognitivo agli oggetti di conoscenza all'uso di particolari sistemi semiotici, i registri di rappresentazione.

I registri di rappresentazione semiotica sono sistemi semiotici che permettono di ottenere nuove informazioni o nuove conoscenze mediante due tipi di processi con requisiti cognitivi differenti: *trattamento* (sostituzione di rappresentazioni semiotiche all'interno dello stesso registro) e *conversione* (sostituzione di una rappresentazione semiotica con un'altra di un altro registro). Sono dunque strumenti fondamentali per l'analisi dei processi cognitivi specifici del pensiero matematico.

Dal punto di vista cognitivo, infatti, la comprensione in matematica nasce dalla capacità di coordinare in modo sinergico diversi registri di rappresentazione semiotica, ossia dalla capacità di riconoscere una corrispondenza diretta e immediata tra le unità significanti di due o più rappresentazioni semiotiche, indipendentemente dal loro grado di congruenza.

In tale prospettiva, gli oggetti matematici non sono altro che ciò che rimane invariante in una molteplicità di rappresentazioni semiotiche prodotte mediante trattamenti e conversioni in differenti registri, indipendentemente da qualsiasi interpretazione filosofica o caratterizzazione ontologica della loro natura.

Come puntualizza Duval (2020), "I registri non sono principalmente una teoria, ma una metodologia per analizzare il modo specifico di pensare e di lavorare in matematica, indipendentemente dai concetti matematici e dalle aree matematiche" (p. 727).

I gesti, le posture o i movimenti del corpo, in quanto rappresentazioni spontanee, libere, individuali, o parti integranti dell'attività e del pensiero di studenti e insegnanti (Radford, 2003, 2021), come pure gli artefatti, in quanto strumenti non spontanei ma potenti di mediazione semiotica (Bartolini Bussi & Mariotti, 2008), hanno un ruolo cognitivo, sociale e culturale notevole, ma non permettono di descrivere i *gesti intellettuali* (Duval, 2014) del fare matematica, ovvero il "volto nascosto", cognitivamente produttivo, dell'attività matematica sul quale si focalizza l'approccio di Duval.

Speriamo che le riflessioni e puntualizzazioni proposte in questo articolo possano essere utili per un uso condiviso e consapevole dei termini specifici dell'approccio semio-cognitivo di Duval; tutto ciò per evitare fraintendimenti o interpretazioni divergenti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Agazzi, E. (2014). *Scientific objectivity and its contexts*. Cham: Springer International Publishing.

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 7–61.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artefacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 746–783). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum

D'Amore, B. (2000). "Concetti" e "oggetti" in matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*, *3*(6), 143–151.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefazione di Guy Brousseau. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto "paradosso di Duval". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(3), 207–236.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "paradoja cognitiva de Duval". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(2), 177–212.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349–382.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3–26). Cuernavaca, Morelos, Mexico.

Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 585–619.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103–131.

Duval, R. (2009). «Objet»: un mot pour quatre ordres de réalité irréductibles? In J. Baillé (Ed.), *Du mot au concept: Objet* (pp. 79–108). Grenoble: PUG.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas* (M. A. Dias, Trans.). São Paulo: PROEM.

Duval, R. (2014). Comment analyser le problème crucial de la compréhension des mathématiques? *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 37, 9–29.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Cham: Springer International Publishing AG.

Duval, R. (2020). Registers of semiotic representation. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 724–727). Cham: Springer.

Frege, G. (1892). Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, *100*(1), 25–50.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2-3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Iori, M. (2021). *La dimensione semio-cognitiva nell'apprendimento della matematica*. Bologna: Pitagora.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, *22*(2), 14–23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 103–129.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7–44.

Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 132–150.

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill Sense.