



Ivan VALENCIA¹

Rodolfo VERGEL²

¹PhD in Didattica, Insegnante della Segreteria dell'Educazione del Distretto di Bogotá-COLOMBIA.

²PhD in Didattica della Matematica, Docente presso l'Universidad Distrital Francisco José de Caldas, COLOMBIA.

Indirizzi email:

iovalenciat@correo.udistrital.edu.co

rvergelc@udistrital.edu.co

Ricevuto il 11/09/2022
Accettato il 31/10/2022

La mediazione computazionale nei processi di generalizzazione dei pattern

Computational mediation in pattern generalization processes

SUNTO

In generale, si propone che l'uso dell'artefatto come mediazione per la mobilitazione del linguaggio di programmazione consenta processi di abduzione algebrica che configurano una comunità-macchina agente associata a una generalità nell'operatività degli oggetti indeterminati all'interno delle espressioni algebriche che si evidenziano nei processi di *analiticità computazionale*, al fine di ricavare una formula che descriva le relazioni riscontrate nelle sequenze, che porta a concludere che l'introduzione dell'artefatto generi variazioni nei modi di pensare algebricamente e riveli una trasformazione nei processi di aggiornamento della conoscenza.

Parole chiave: algebra scolastica, analiticità computazionale, artefatto culturale.

ABSTRACT

In general, it is argued that the use of the artifact as a mediation for the mobilization of the programming language allows algebraic abduction processes that configure a community-machine actant associated with a generality in the operation of indeterminate objects within the algebraic expressions that are evidenced in computational analytics processes, in order to deduce a formula that describes the relationships found in the sequences, which leads us to think that the introduction of the artifact generates variations in the ways of thinking algebraically and reveals a transformation in the updating processes of knowledge.

Keywords: School algebra, computational analytics, cultural artifact.



INTRODUZIONE

Nella natura dell'algebra scolastica è necessario considerare non solo la prospettiva semiotica (Radford, 2014), ma anche la dialettica tra le forme del pensiero algebrico e i modi in cui gli studenti risolvono i problemi legati alla generalizzazione dei modelli (Vergel, 2014). Tuttavia, la suddetta visione ha un trattamento speciale in termini di analisi della teoria che è stata sollevata dall'attività socio-culturale di Vygotsky (1930) e dei principi della base storico-culturale di Leontiev (2009). Per poi effettuare alcune analisi incentrate su una possibile comprensione di terza generazione dell'attività di Engeström (2001) e della teoria dell'Attore-Rete di Latour (2005).

In primo luogo, secondo la teoria dell'oggettivazione, Radford (2008) interpreta gli oggetti matematici come modelli fissi di attività umana riflessiva inseriti nel mondo in continua evoluzione della pratica sociale mediata dagli artefatti. Sulla base di quanto sopra, in questo articolo si espone l'analisi della semiosi e delle azioni cinestesiche relative all'attività di studenti di età compresa tra i 10 e i 14 anni attraverso l'approccio di compiti di sequenze figurali che includono la mediazione dell'artefatto computazionale nell'attività d'aula per determinare l'oggettivazione relativa alla generalizzazione dei modelli. In pratica, viene presentata un'analisi associata all'indagine di Valencia (2021), nella quale gli studenti, in base al loro rapporto con l'insegnante, dimostrano esperienze individuali che, attraverso un processo sociale, storico e culturale, rendono possibile l'emergere di modelli generalizzati.

L'analisi di questo processo ha come strumento una serie di compiti proposti nell'attività in aula, intesa come attività storico-culturale (Vygotskij, 1929; Leontyev, 1978; Engeström, 2001) che introduce le attuali tecnologie culturali, in particolare l'uso del computer e di un linguaggio di programmazione. Quest'ultimo viene utilizzato come mezzo semiotico di oggettivazione che permette di generare conflitti negli studenti al fine di propiziare l'emergere di soluzioni innovative che consentano di risolvere i problemi posti e di effettuare, a partire da questo processo, analisi volte a caratterizzare le trasformazioni che avvengono nell'oggetto di studio e che permettono di osservare il cambiamento nell'attività.

L'oggetto di studio della ricerca in questione è la generalizzazione di modelli da parte degli studenti di scuola e l'evidenza di una serie di costanti trasformazioni nell'apprendimento, che non si limita a raggiungere obiettivi a breve termine, mostrando un legame con l'approccio di una nuova generazione di studi sulla teoria dell'attività secondo Latour (2005) ed Engeström (2001). Per sviluppare un'analisi di questo tipo, si tiene conto del fatto che la metodologia di realizzazione del compito e la discussione dei risultati ruotano attorno all'uso di artefatti informatici in classe e alle tensioni derivanti dal lavorare senza di essi, data la coesistenza forzata con gli artefatti associati alle nuove tecnologie.

In generale, questo articolo afferma che l'introduzione dell'artefatto computazionale nell'attività in classe permette di modificare i processi di apprendimento, consentendo così agli studenti di organizzare e regolare i propri processi cognitivi associati all'artefatto culturale. Questa situazione è prodotta da due elementi importanti. Il primo ha a che fare con il fatto che il compito che utilizza l'artefatto computazionale può essere posto al di sopra delle capacità naturali del bambino (Vygotskij, 1929). Questo permette di affrontare l'esercizio proposto con metodi che non sono naturali o primitivi, realizzando così la sua relazione con le funzioni psicologiche superiori. Il secondo elemento consiste nella mediazione computazionale che genera una struttura specifica dell'attività predominante nell'attualità culturale; pertanto, viene discusso un problema che solleva i cambiamenti a livello cognitivo che possono essere correlati allo svolgimento dell'attività con l'esercizio dell'apprendimento legato alle tecnologie computazionali e allo sviluppo di processi di generalizzazione in sequenze figurative e numeriche, processi che sono sollevati nella domanda posta nel problema associato alla ricerca.

L'analisi presentata nella ricerca offre alcuni progressi nella determinazione dei contributi che l'uso di un linguaggio di programmazione visuale offre ai processi di argomentazione in procedimenti che consentono lo svolgimento del pensiero algebrico in relazione alla questione sollevata; inoltre, vengono valutate le tensioni emergenti nell'attività d'aula che scaturiscono dalle scienze cognitive e dalla prospettiva storico-culturale, considerando che la cultura è una manifestazione



delle capacità cognitive degli esseri umani, che le attuali società umane sono determinate dai loro aspetti culturali e che la cognizione umana utilizza gli strumenti di questi aspetti che, in questo caso specifico, sono associati alla cognizione umana e agli strumenti computazionali, come presentato da Lampis (2012).

Gli anticipi del lavoro di ricerca in questione concludono che, entro i limiti che si manifestano nelle forme di produzione di conoscenza degli studenti, si evidenzia l'emergere di un ragionamento abduttivo delle produzioni analitiche degli studenti in termini di uso dell'artefatto e delle forme di generalizzazione che evidenziano il ragionamento deduttivo. Nella natura dell'algebra scolastica è necessario considerare non solo la prospettiva semiotica (Radford, 2014), ma anche la dialettica tra le forme del pensiero algebrico e i modi in cui gli studenti risolvono i problemi legati alla generalizzazione dei modelli (Vergel, 2014). Tuttavia, la suddetta visione ha un trattamento speciale in termini di analisi della teoria che è stata sollevata dall'attività socio-culturale di Vygotsky (1930) e dei principi della base storico-culturale di Leontiev (2009). Per poi effettuare alcune analisi incentrate su una possibile comprensione di terza generazione della dell'attività di Engeström (2001) e della teoria dell'Attore-Rete di Latour (2005).

In primo luogo, secondo la teoria dell'oggettivazione, Radford (2008) interpreta gli oggetti matematici come modelli fissi di attività umana riflessiva inseriti nel mondo in continua evoluzione della pratica sociale mediata dagli artefatti. Sulla base di quanto sopra, questo articolo espone l'analisi della semiosi e delle azioni cinestesiche relative all'attività di studenti di età compresa tra i 10 e i 14 anni attraverso l'approccio di compiti di sequenze figurali che includono la mediazione dell'artefatto computazionale nell'attività d'aula per determinare l'oggettivazione relativa alla generalizzazione dei modelli. In pratica, viene presentata un'analisi associata all'indagine di Valencia (2021), in cui gli studenti, in base al loro rapporto con l'insegnante, dimostrano esperienze individuali che, attraverso un processo sociale, storico e culturale, rendono possibile l'emergere di modelli generalizzati.

L'analisi di questo processo ha come strumento una serie di compiti proposti nell'attività in aula, intesa

come attività storico-culturale (Vygotskij, 1929; Leontyev, 1978; Engeström, 2001) che introduce le attuali tecnologie culturali, in particolare l'uso del computer e di un linguaggio di programmazione. Quest'ultimo viene utilizzato come mezzo semiotico di oggettivazione che permette di generare conflitti negli studenti al fine di propiziare l'emergere di soluzioni innovative che consentano di risolvere i problemi posti e di effettuare, a partire da questo processo, analisi volte a caratterizzare le trasformazioni che avvengono nell'oggetto di studio e che permettono di osservare il cambiamento nell'attività. L'incorporazione del computer come artefatto, in effetti, introduce l'idea che l'individuo non può essere compreso senza i suoi mezzi culturali, come i computer e la loro programmazione, e ci permette anche di intravedere come la società odierna non possa essere compresa senza il suo uso e la sua produzione.

L'oggetto di studio della ricerca in questione è la generalizzazione di modelli da parte degli studenti di scuola e l'evidenza di una serie di costanti trasformazioni nell'apprendimento, che non si limita a raggiungere obiettivi a breve termine, mostrando un legame con l'approccio di una nuova generazione di studi sulla teoria dell'attività secondo Latour (2005) ed Engeström (2001). Per sviluppare un'analisi di questo tipo, si tiene conto del fatto che la metodologia di realizzazione del compito e la discussione dei risultati ruotano attorno all'uso di artefatti informatici in classe e alle tensioni derivanti dal lavorare senza di essi, data la coesistenza forzata con gli artefatti associati alle nuove tecnologie.

In generale, questo articolo afferma che l'introduzione dell'artefatto computazionale nell'attività in classe permette di modificare i processi di apprendimento, consentendo così agli studenti di organizzare e regolare i propri processi cognitivi associati all'artefatto culturale. Questa situazione è prodotta da due elementi importanti: il primo ha a che fare con il fatto che il compito che utilizza l'artefatto computazionale può essere posto al di sopra delle capacità naturali del bambino (Vygotskij, 1929). Questo permette di affrontare l'esercizio proposto con metodi che non sono naturali o primitivi, realizzando così la sua relazione con le funzioni psicologiche superiori; il secondo elemento riguarda la mediazione computazionale che genera una struttura specifica dell'attività



predominante nell'attualità culturale. Pertanto, più in generale, viene discusso un problema che solleva i cambiamenti a livello cognitivo che possono essere correlati allo svolgimento dell'attività con l'esercizio dell'apprendimento legato alle tecnologie computazionali e allo sviluppo di processi di generalizzazione in sequenze figurative e numeriche, e che sono sollevati nella domanda posta nel problema associato alla ricerca.

L'analisi presentata nella ricerca offre alcuni progressi nella determinazione dei contributi che l'uso di un linguaggio di programmazione visuale offre ai processi di argomentazione in procedimenti che consentono lo svolgimento del pensiero algebrico in relazione alla questione sollevata; inoltre, vengono valutate le tensioni emergenti nell'attività d'aula che scaturiscono dalle scienze cognitive e dalla prospettiva storico-culturale, considerando che la cultura è una manifestazione delle capacità cognitive degli esseri umani, che le attuali società umane sono determinate dai loro aspetti culturali e che la cognizione umana utilizza gli strumenti di questi aspetti, che in questo caso specifico sono associati alla cognizione umana e agli strumenti computazionali come presentato da Lampis (2012).

Gli anticipi del lavoro di ricerca in questione concludono che, entro i limiti che si manifestano nelle forme di produzione di conoscenza degli studenti, si evidenzia l'emergere di un ragionamento abduttivo dalle produzioni analitiche degli studenti in termini di uso dell'artefatto e delle forme di generalizzazione che evidenziano il ragionamento deduttivo.

PROBLEMA ASSOCIATO ALLA RICERCA

La ricerca riportata da Valencia (2021) stabilisce i contributi generati dall'uso del linguaggio di programmazione visuale ai processi di argomentazione nei processi di approccio ai compiti che permettono di sviluppare il pensiero algebrico in studenti di età compresa tra i 10 e i 14 anni. All'interno di questi, si presenta come notevole il fatto che il gruppo di studenti che ha avuto accesso all'artefatto computazionale presenta prestazioni che permettono di verificare la generalizzazione algebrica ottenuta in diversi compiti in contrasto con un gruppo più ristretto di studenti che non ha

avuto accesso all'attività utilizzando l'artefatto menzionato. Il problema in relazione al quale è stata sviluppata la ricerca ruota attorno all'introduzione dell'algebra precoce negli studenti delle scuole e alle difficoltà che sorgono nell'affrontare i problemi di variazione, in particolare la generalizzazione di sequenze figurative e numeriche, e si riferisce alla domanda: Quali contributi genera l'uso di un linguaggio di programmazione visuale ai processi di argomentazione nel processo di approccio ai compiti che permettono lo sviluppo del pensiero algebrico in studenti di età compresa tra i 10 e i 14 anni?

Nello specifico, questo articolo affronta questi risultati e analizza un problema alla base della ricerca sopra citata che riguarda l'idea di attività in relazione all'uso dell'artefatto. Più precisamente, quando un artefatto computazionale viene introdotto nell'attività d'aula, si pone una nuova questione che viene affrontata in questo articolo esclusivamente in relazione alla domanda: Quali sono le caratteristiche di variazione e trasformazione nella natura dell'apprendimento degli studenti, con l'uso di questo strumento e nella sua programmazione come mezzo semiotico di oggettivazione?

L'approccio specifico a questa domanda di ricerca ci porta a riflettere sull'idea dello sviluppo del pensiero algebrico come un processo che non si riduce solo agli obiettivi raggiungibili dagli studenti, ma anche agli sviluppi evolutivi che gli esseri umani hanno in termini di manufatti facenti parte del carico storico e culturale che generano cambiamenti nelle funzioni superiori dello studente.

FONDAMENTI TEORICI

In conformità con le ricerche condotte sull'algebra primitiva, si propongono le analisi della teoria socioculturale di Vygotskij e il suo rapporto con elementi di mediazione semiotica. Questa prospettiva è determinata in corrispondenza di oggetti matematici che vengono introdotti agli studenti di scuola e che hanno a che fare con il raggiungimento di modelli, regolarità e generalizzazioni, utilizzando sequenze figurative e numeriche. Gli elementi riscontrati nella ricerca si configurano a partire dalla teoria dell'oggettivazione ideata da Radford (2021) e in generale con la teoria dell'attività che è stata affrontata da Vygotskij (1978) e il concetto di



attività di Leontiev (1978). Tuttavia, in questo articolo si considera l'idea di attività dal punto di vista della teoria dell'attore-rete di Latour (1999), in quanto l'apprendimento degli studenti è situato in una rete eterogenea di attori umani (studenti e insegnanti) e non umani (artefatti computazionali), detti "attanti" con proprietà sistemiche interne identificabili.

In questo senso, la ricerca intorno alla domanda posta, presenta un'analisi ravvicinata dell'attività matematica degli studenti utilizzando elementi relativi alle forme di pensiero algebrico e ai tipi di generalizzazione riscontrati nel raggiungimento di modelli provenienti da diversi lavori di ricerca di Radford (2021), Vergel (2021), Bayona (2021) e degli studi che si occupano della concezione multimodale del pensiero umano in cui si propone che segni, gesti e sguardi costituiscano un "pacchetto semiotico" in cui i bambini iniziano le loro attività (Arzarello, 2006).

METODOLOGIA

Lo studio di riferimento è stato condotto in un istituto scolastico pubblico situato nella città di Bogotá (Colombia) e ha preso in considerazione un gruppo di studenti di età compresa tra i 10 e i 14 anni.

La ricerca è stata sviluppata dalla prospettiva semiotico-culturale; i dati qualitativi sono stati raccolti e sottoposti a un trattamento inferenziale, che ha costituito un approccio integrativo alla metodologia di ricerca mista. Questo approccio ha determinato la realizzazione di un'analisi concomitante, ossia i dati sono stati ottenuti simultaneamente e integrati fianco a fianco dalle analisi qualitative e quantitative, con la stessa importanza, come proposto da Creswell (2009).

In questo studio proponiamo un paradigma di triangolazione simultanea che è stato stabilito per determinare alcune fasi di attuazione dei compiti nell'attività, da cui si sono ottenuti i dati per un'interpretazione e un'analisi comparativa di due gruppi di studenti, suddivisi secondo diverse strategie di approccio al compito. Ai fini di questo articolo, un'attenzione particolare è rivolta ai 19 studenti che hanno affrontato i compiti utilizzando l'artefatto computazionale dal quale hanno

mobilitato un linguaggio di programmazione visuale come mezzo semiotico di oggettivazione.

I dati qualitativi ottenuti sono stati interpretati a partire dall'idea di una concezione multimodale del pensiero umano che considera i segni, i gesti e gli sguardi corrispondenti a un primo pacchetto semiotico da cui si arricchisce il processo di produzione di significati che stabiliscono un rapporto con altre risorse semiotiche a cui gli studenti ricorrono per mediare la loro oggettivazione. I dati a cui si fa riferimento in parte di questa ricerca rientrano nelle tipologie di generalizzazione che sono state categorizzate come generalizzazioni aritmetiche, aritmetiche sofisticate o algebriche (Radford, 2021; Vergel et al, 2021).

RISULTATI E DISCUSSIONI

I risultati ottenuti nella ricerca in questione mostrano ambiti associati agli avanzamenti teorici determinati nelle ricerche di Radford (2014) e Vergel (2015) riguardanti i mezzi semiotici di oggettivazione utilizzati dagli studenti per effettuare generalizzazioni che si manifestano come forme di pensiero aritmetico, proto-forme di pensiero algebrico o forme di pensiero algebrico.

Le generalizzazioni utilizzate dagli studenti si evidenziano in forme di pensiero simbolico che sono anche legate al registro semiotico determinato dal linguaggio di programmazione Scratch, che mostrano somiglianze nella gestione delle variabili rispetto all'uso di carta e matita. In un primo approccio alla ricerca, si stabiliscono alcuni dati e analisi rispetto alla programmazione dell'artefatto computazionale, per poi effettuare un'analisi del linguaggio di programmazione utilizzato come mezzo semiotico di oggettivazione. Questa sezione caratterizza il lavoro in classe, per poi stabilire come gli studenti utilizzino l'artefatto computazionale come strumento per stabilire il linguaggio della loro programmazione come mezzo semiotico di oggettivazione.

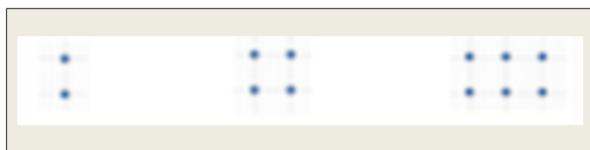
CARATTERIZZAZIONE DELL'ATTIVITÀ DI IMPLEMENTAZIONE DELL'ARTEFATTO COMPUTAZIONALE

In una prima attività, gli studenti hanno sviluppato, nell'ambito dell'attività in classe, la



generalizzazione della sequenza di numeri pari, che è stata associata al raggiungimento dello schema all'interno della seguente sequenza figurale, come mostrato nella Figura 1.

Figura 1 - Attività di sequenza figurale con numeri pari



Fonte: Valencia (2021)

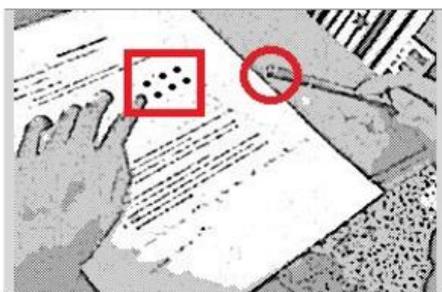
L'attività associata alla Figura 1 è stata orientata in studenti (questa applicazione informatica si riferisce a un linguaggio di programmazione visuale creato dal MIT e pensato per i principianti del mondo della programmazione) per dimostrare una generalizzazione del modello trovato, relativo all'attività in questione.

Nello sviluppo di questa attività si presenta in particolare una conversazione con l'insegnante nel corso della quale lo studente presenta nel suo discorso alcune caratteristiche associate alla prosodia e al gesto che sono state discusse nel lavoro di ricerca e che vale la pena di rivedere:

Studente 1: Beh, mi sono reso conto che c'è uno schema che, per esempio, è 1 per 2 che fa 2, 2 per 2 che fa 4, 3 per 2 che fa 6 e così via, quindi per trovare la cifra 15 devo moltiplicare 15 per 2 e mi ha dato 30 e la variante sarebbe n volte 30.

Nel suo discorso, lo studente 1 ha fatto uso di una successione di gesti accompagnati dall'uso del puntamento per stabilire alcune unità significative all'interno del registro semiotico e la loro associazione con l'istituzione del modello trovato come mostrato nella fotografia della Figura 2.

Figura 2 - Gesti che accompagnano il discorso enunciato

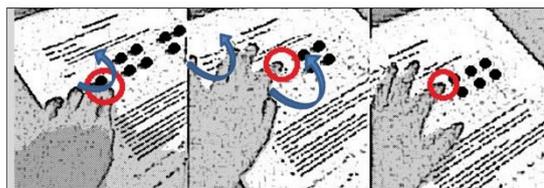


Fonte: Elaborazione propria (2022)

La segnalazione riferita alla Figura 2 ed evidenziata da quanto indicato nella circonferenza rossa (che è anche accompagnata dall'indice diretto ai 6 punti segnati nel rettangolo rosso), porta a presentare l'identificazione delle unità significative (variazione dei fattori intorno al numero 2 come costante) che si trovano nei prodotti evidenziati a voce dall'allievo e che sono sviluppate dalla psicologia cognitiva in prima istanza e in relazione al processo di associazione dell'allievo con l'insegnante. Da ciò è possibile stabilire che lo stesso studente determina l'invariante (la moltiplicazione di ogni termine della sequenza con il 2) e che permette di stabilire il raggiungimento della regolarità incarnata nei primi termini della sequenza figurale. In altre parole, l'uso dell'indicale viene utilizzato come mezzo semiotico di oggettivazione per nominare un elemento importante all'interno della regolarità che verrà poi utilizzato all'interno della formula per effettuare la generalizzazione.

Ora, non c'è solo un'associazione di gesto indicale e verbalizzazione nel discorso dello studente per mostrare questa unità significativa associata al modello. Lo studente ricorre anche al movimento nei segni che usa per incorporare per mostrare nei primi tre termini della sequenza come mostrato nella Figura 3.

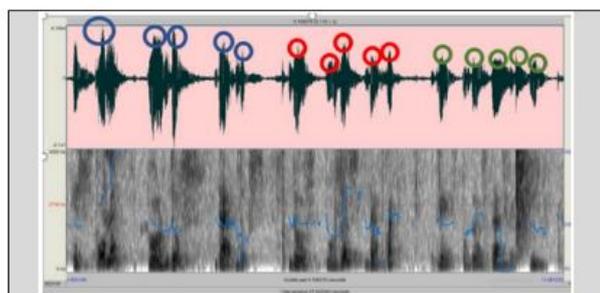
Figura 3 - Movimento gestuale associato ai primi tre termini della sequenza figurale



Fonte: Elaborazione propria (2022)

Lo schema riscontrato dallo studente, e che costituisce l'invariante per stabilire la regolarità, è evidenziato in una rapida analisi prosodica che si stabilisce all'interno dei parametri stabiliti da Vergel (2015) nella quale egli usa, all'interno del suo discorso, un'associazione con il ritmo e l'ampiezza del suono vocale, nel corso del suo discorso, come mostrato in Figura 4.

Figura 4 - Composizione spettrale del campione sonoro associato al discorso dello studente



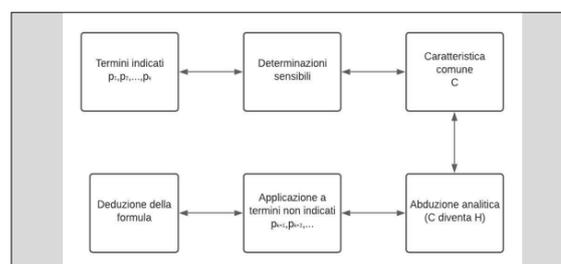
Fonte: Valencia (2021)

Per ottenere la composizione spettrale del campione sonoro è stato utilizzato il software di fonetica gratuito Praat; la figura 4 evidenzia alcune ampiezze d'onda nei punti blu che descrivono i picchi di ampiezza ottenuti nel discorso dello studente quando dichiara: “1 per 2 fa 2”, i numeri associati ai cerchi rossi mostrano “2 per 2 fa 4” e i numeri associati ai cerchi verdi indicano “3 per 2 fa 6”.

La lettura del grafico in figura 4 si basa sulla mobilitazione di mezzi semiotici di oggettivazione come il gesto, il linguaggio naturale e il ritmo, che si manifestano nei picchi di ampiezza delle onde e si articolano per indicare gli elementi variabili all'interno della regolarità che lo studente trova, individuando così unità significative all'interno dei registri di rappresentazione semiotica che lo studente mobilita come mezzi semiotici di oggettivazione e che consentono allo studente di trovare lo schema, descriverlo e associarlo in modo intuitivo a un elemento che varia e si riflette in modo gestuale.

L'espressione del discorso a cui fa riferimento lo studente si presenta come una proposizione composta il valore di verità della quale si stabilisce nella condizione espressa nel discorso e che lo studente riesce a identificare in base a fatti simili trovati nella sequenza figurale. Tale proposta presentata dallo studente diventa plausibile e si evidenzia come una forma di ragionamento abduttivo che nasce all'interno del processo di strutturazione della generalizzazione algebrica proposto da Radford (2013), come mostrato nella Figura 5.

Figura 5 - Struttura della generalizzazione algebrica

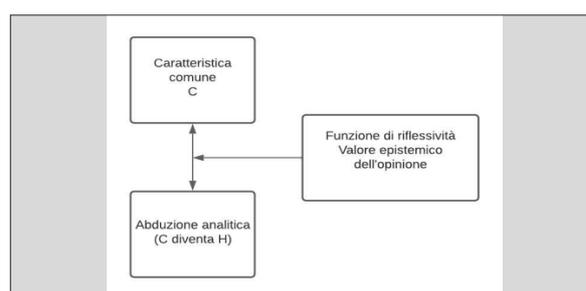


Fonte: Radford (2013)

La Figura 5 mostra la struttura relativa al discorso dello studente in quanto, trovata una caratteristica comune, vengono da lui presentate proposte plausibili per le applicazioni dei termini sconosciuti nella sequenza numerica associata alle figure e che sono evidenti all'interno del discorso in funzione della riflessività, dando un valore epistemico di opinione (in quanto non è ancora attribuito un valore di verità alla condizione posta).

Nel resoconto della ricerca in esame, la struttura nella trasformazione della caratteristica comune (C) nell'ipotesi (H) è integrata nella Figura 6 come evidenza della funzione di riflessività, da cui si evince un valore epistemico di opinione, come mostrato nella stessa Figura 6.

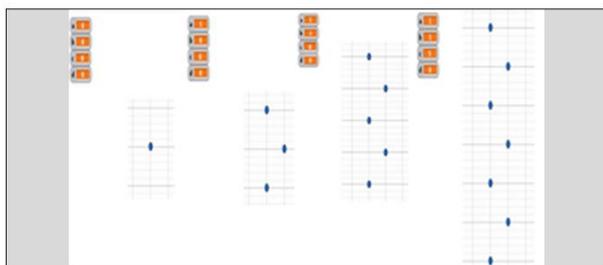
Figura 6 - Valore epistemico dell'opinione del passaggio da caratteristica comune (C) a ipotesi (H)



Fonte: Valencia (2021)

Al fine di stabilire un'analisi più specifica del rapporto con l'artefatto culturale, in una seconda attività proposta agli studenti viene presentata la sequenza figurale associata ai numeri dispari, come mostrato in Figura 8.

Figura 8 - Attività di sequenza figurale con numeri dispari



Fonte: Valencia (2021)

Affinché gli studenti possano avanzare le loro proposte di generalizzazione, si utilizza una serie di test che permettono di assegnare un valore di verità alle espressioni presentate, che vengono poi simboleggiate algebricamente; ma prima è possibile osservare che i gesti che gli studenti erano soliti compiere utilizzando artefatti come la carta e la penna si trasformano in gesti associati allo schermo dell'artefatto informatico, come è evidente nella seguente analisi del dialogo con lo studente 1:

Insegnante: Pensi che ci sia un modo per sapere quanti punti ha la figura 15 senza disegnarla, senza costruirla?

Studente 1: Sì, penso di poter sommare due a due, 15 volte.

Insegnante: Due a due, 15 volte?

Studente 1: Sì, la cifra 10 è la stessa, ma dovrebbe essere il risultato dispari.

Insegnante: Deve dare un risultato dispari, sì, e poi una figura può dare 28 punti?

Studente 1: No, non credo. Perché l'ho fatto, diciamo, come ho fatto con gli altri e ho ottenuto 27 o 29, quindi è per questo che non credo.

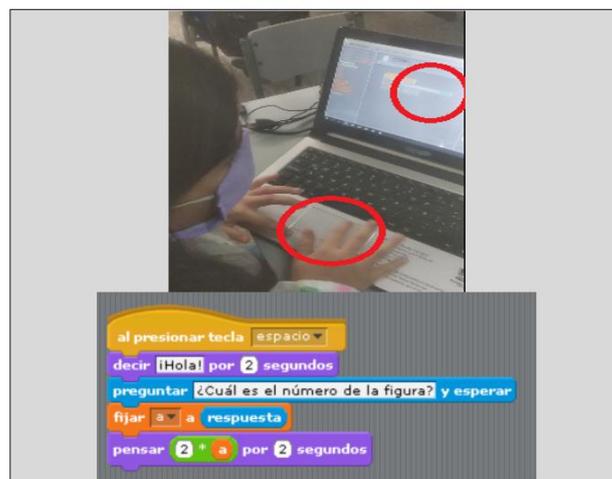
Insegnante: E sapete costruire un'espressione?

Studente 1: Sì, ho fatto un esempio, lì volevo che n rappresentasse qualsiasi numero, quindi diciamo 4 per 1, 4 meno 3.

Nella conversazione con l'insegnante, si nota che lo studente è in grado di determinare la regolarità implicita nella sequenza e che ciò è evidente nell'espressione: "Sì, credo di poter aggiungere due per due, 15 volte". Il fatto che nell'espressione sia presente il verbo "credere" dimostra che fino a questo punto le viene attribuito un valore epistemico

e che non si manifesta esplicitamente nella sua verbalizzazione un senso di indeterminatezza, indispensabile per determinare se è evidente una forma di pensiero algebrico. Tuttavia, quando lo studente utilizza i blocchi del linguaggio di programmazione visuale come mezzo semiotico di oggettivazione, è evidente che riesce a "catturare" la variazione dei termini della sequenza figurale in un blocco che rappresenta la variabile, dimostrando così il senso di l'indeterminatezza che lo studente dà alla sequenza figurale. Nel processo descritto e realizzato dallo studente, si osserva come vengano identificate le forme gestuali associate ai segni dati dall'uso di carta e matita; nello stesso senso, si riscontra che questi segni precedentemente utilizzati abitualmente su carta, migrano verso l'uso del cursore del mouse dell'artefatto informatico come mostrato nella Figura 9, una particolarità riscontrata in tutti gli studenti che hanno avuto accesso all'uso dell'artefatto informatico.

Figura 9 - Gestualità associata all'artefatto computazionale



Fonte: Valencia (2021)

L'evento riportato nella fotografia è accompagnato da una costruzione argomentativa in cui viene presentata l'esibizione di una generalizzazione associata a un'espressione simbolica e al linguaggio di programmazione:

Studente 1: Ho messo $n-1$ la variabile meno 1 e poi ho premuto join e ho messo più n e la mia teoria è questa ... mmm ... è di aggiungere il numero dalla figura precedente alla figura attuale ... diciamo che per la figura 15 dovremmo aggiungere 14, per la figura 13 dovremmo aggiungere 12, per la figura 4

dovremmo aggiungere 3 e così via ... Quindi quello che ho fatto è stato mettere n meno 1 più n punti.

In questa verbalizzazione dello studente, si rileva un senso di indeterminatezza nell'assegnare a uno dei blocchi di programmazione di Scratch la variabile "n". È importante stabilire che questa denominazione, data nel linguaggio di programmazione, è diversa dal modo di alfa-simbolizzazione numerica scritta, in quanto il suo trattamento analitico è stabilito da un uso automatizzato da parte dell'artefatto.

Allo stesso modo, nel discorso sviluppato dallo studente, è possibile stabilire una forma di operabilità che implica il rapporto che si stabilisce tra il linguaggio naturale come mezzo semiotico di oggettivazione e la sua rappresentazione in un altro mezzo semiotico associato al linguaggio dell'artefatto. Allo stesso tempo, l'operatività associata agli elementi di una manifestazione analitica della simbolizzazione associata all'artefatto non si limita solo all'automazione delle operazioni di addizione e sottrazione che sono solitamente utilizzate nell'analisi aritmetica e proto-algebrica (Vergel, Godino, Font & Pantano, 2021; Bayona, 2021), ma si stabilisce una forma diversa da quella associata agli sviluppi con carta e matita che ha a che fare con la menzione che lo studente fa nella verbalizzazione ("unire"), che alla fine risulta essere una caratteristica operativa del linguaggio di programmazione dell'artefatto e che viene introdotta come nuovo importante elemento di simbolizzazione negli sviluppi che lo studente propone all'interno dei suoi possibili risultati, dai quali emerge una forma analitica associata all'automazione dell'artefatto computazionale.

IL LINGUAGGIO DI PROGRAMMAZIONE COME MEZZO SEMIOTICO DI OGGETTIVAZIONE

Tra i risultati emersi dall'indagine in esame, si propone una forma differenziata di lavoro nell'attività svolta dallo studente, dall'insegnante e dalla mediazione dello strumento computazionale, dato che le caratteristiche del lavoro intellettuale dello studente in cui il suo uso era limitato a un insieme di prove cartacee. Quella che Duval (1999) chiama usualmente "prova di avanzamento" si

trasforma in una successione di proposte che vengono introdotte nella macchina in modo analitico; per cui le espressioni che prima erano plausibili vengono automatizzate in modo da diventare espressioni che migrano da un valore epistemico a un valore di verità associato a una proposizione vera.

La possibilità di ottenere in modo agile una notevole quantità di prove che dimostrino la caratteristica comune riscontrata nella sequenza figurale è trattata in un modo analitico nel quale, come afferma Radford (2013), l'abduzione cessa di essere una semplice possibilità e diventa un principio assunto che permette la deduzione apodittica di una formula che comporta, dall'uso dell'artefatto, un'automazione di attività che, in linea di principio, erano state designate analiticamente dallo studente per cogliere la relazione trovata nella sequenza in una forma di pensiero simbolico.

Questa deduzione della formula che viene sperimentata utilizzando l'artefatto non si limita a un'associazione di lavoro sullo schermo, ma si scopre anche che nella dialettica del puntamento si mettono in relazione caratteristiche che si trasferiscono ai movimenti con il mouse e alla loro rappresentazione sullo schermo del computer, come mostrato nella Figura 10.

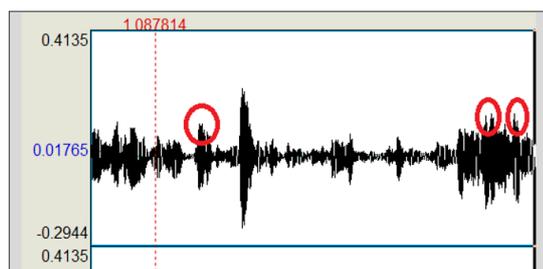
Figura 10 - Segni associati ad artefatti



Fonte: Valencia (2021)

Allo stesso modo, i gesti, la forza dell'intonazione della voce e il puntamento sono messi in relazione tra loro, utilizzando la modalità indicativa, che viene usata dagli studenti per stabilire gli elementi che mostrano la regolarità riscontrata nella sequenza, come si può vedere nella Figura 11.

Figura 11 - Picchi di ampiezza dell'onda nell'intonazione discorsiva



Fonte: Valencia (2021)

Gli elementi di intonazione che si possono osservare nel grafico sono identificati dai cerchi rossi della Figura 12. Essi rappresentano l'aumento dell'ampiezza dell'onda del discorso dello studente e sono associati alla regolarità identificata:

“Se si sommano due numeri e si inizia con uno, sono numeri dispari, quindi si sommano per due e come abbiamo qui la figura due ha tre punti e la figura tre ne ha cinque, si può vedere che si aggiunge due e la figura ha sette punti”.

In questa stessa comunicazione dichiarativa, usata dallo studente, sono evidenti: l'uso del linguaggio naturale, i gesti come dispositivo di segnalazione, l'intonazione che influenza il discorso e l'uso del linguaggio di programmazione come mezzo semiotico di oggettivazione. Tale articolazione dei mezzi semiotici di oggettivazione, percepibile anche dall'analisi prosodica del discorso, è evidenziata in primo luogo l'operazione della predicazione come funzione apofantica, che rivela anche una struttura tematica data dall'articolazione che identifica lo schema con la denominazione dei numeri dispari. In questo modo si riesce a integrare il discorso con la proprietà associata alla regolarità per stabilire la differenza tra due termini della sequenza.

In generale, il modello racchiuso nella costruzione dei blocchi che permettono lo sviluppo di un'operazione automatizzata a partire dal linguaggio di programmazione per mostrare gli infiniti risultati dalla compilazione dello stesso, è associato a un termine che nella ricerca in questione è stato denominato *analiticità computazionale*. Si tratta del processo operativo con gli oggetti indeterminati che l'individuo stabilisce nella sua ansia di presentare proposte plausibili del suo ragionamento abduttivo e che sottopone alla prova

automatica con l'uso dello strumento computazionale e che sono stabiliti nel linguaggio di programmazione come mezzo semiotico di oggettivazione. Questa caratteristica, associata alla suddetta operatività, consente una verifica automatizzata delle proposte dello studente in quanto l'instaurazione della regolarità è verificata solo con valore logico in presenza di una verifica finita e automatico dei termini della sequenza che, una volta verificata, risulta in detrazione della formula.

Tale deduzione della formula è evidenziata nel discorso dello studente come segue:

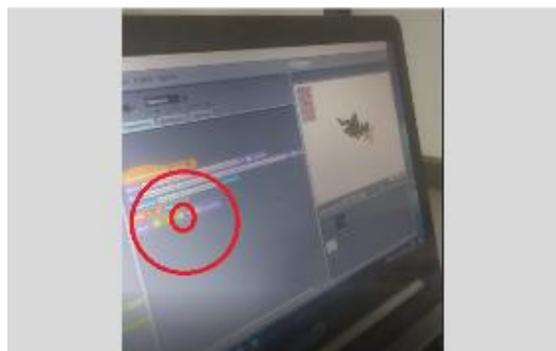
Studente 1: L'ho costruito con, ... eeehh ... Guarda come aggiungono due e iniziano con uno, quindi sono numeri dispari.

L'intenzione e lo sforzo che lo studente manifesta nell'instaurare una relazione con l'interlocutore dimostra la funzione della riflessività nel discorso, che permette anche allo studente di proporre oralmente la deduzione della formula come segue:

Studente: Quindi l'ho fatto facendo il due per la cifra meno uno e questo è stato il risultato.

Tale espressione in linguaggio naturale è associata nel discorso alla sua rappresentazione sullo schermo dell'artefatto computazionale, che riflette anche una forma di linguaggio specializzato, e incarnato nella struttura visiva del linguaggio di programmazione, come illustrato nella Figura 12.

Figura 12 - Simbolizzazione specializzata e associata al linguaggio di programmazione



Fonte: Valencia (2021)

I CAMBIAMENTI GENERATI NELL'IMPLEMENTAZIONE DI UN LINGUAGGIO VISIVO DI PROGRAMMAZIONE NELL'ATTIVITÀ IN AULA.

L'articolazione che è evidente tra i diversi mezzi semiotici di oggettivazione è inquadrata nella concezione della conoscenza con una sequenza culturalmente codificata di azioni esemplificata nella pratica sociale Radford (2014). In questo caso, quindi, l'artefatto computazionale fa parte dell'attività nota come "conoscenza" che permette l'aggiornamento delle forme di movimento culturalmente codificate, che in questo caso specifico si riferisce alla realizzazione di schemi e alla definizione della loro generalizzazione. In accordo con questo approccio epistemologico, si propone che, all'interno dell'attività, l'artefatto computazionale consenta l'uso del linguaggio di programmazione visuale (Scratch) che viene assunto dagli studenti come mezzo semiotico di oggettivazione il quale consente, insieme all'articolazione con altri mezzi semiotici, l'emergere di idee nel mondo concreto del lavoro, dell'azione, dell'attività degli studenti e dei fatti evidenziati.

Allo stesso modo, si concorda sul fatto che l'uso di queste tecnologie digitali aggiunge uno strato di complessità alla pratica della matematica e, come si può vedere nei risultati, questo non si limita ad ampliare alcune possibilità in termini di rappresentazioni semiotiche, ma piuttosto trasforma ciò che è conoscibile in termini di emersione di una nuova forma di analiticità che, come già detto, è stata chiamata *analiticità computazionale* e che rivela un elemento importante in termini di ragionamento abduttivo e di raggiungimento di diverse ipotesi plausibili che vengono messe alla prova nell'attività con l'uso dell'artefatto.

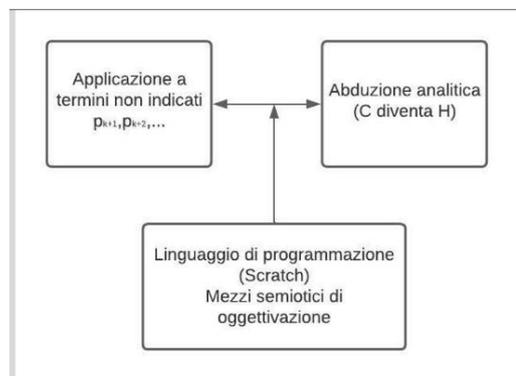
Questo uso artefattuale e mediato del linguaggio di programmazione, nel momento in cui diventa parte della pratica della conoscenza, non si limita alla sua rappresentazione, ma la sua caratteristica trasformativa è una conseguenza della visione di Radford (2013b) della conoscenza come movimento verso ciò che istanziamo attraverso la riflessione critica sensibile e materiale nell'attività.

Ora, non c'è solo un significato che nasce dall'interazione sociale, ma c'è ovviamente anche

un significato del legame tra le rappresentazioni del linguaggio di programmazione che emerge da un significato storico in quanto negli ultimi decenni il ruolo della programmazione di artefatti computazionali ha assunto un ruolo importante all'interno delle nuove proposte tecnologiche che mirano all'intelligenza artificiale e che richiedono metodi di programmazione che incorporano strategie abduttive con le quali un programma può modificare le proprie operazioni, come afferma Lampis (2012).

Da questa prospettiva, il significato sociale e storico che è implicito nell'incorporazione dell'artefatto computazionale e che è evidente nella trasformazione della conoscenza e nell'analiticità computazionale presentata nell'articolazione dei mezzi di oggettivazione utilizzati dagli studenti, permettono di dedurre la formula che, all'interno della struttura della generalizzazione algebrica proposta da Radford (2013), si stabilisce come applicazione dei termini dati, come mostrato nella Figura 13.

Figura 13 - Il linguaggio di programmazione visuale all'interno della struttura della generalizzazione algebrica

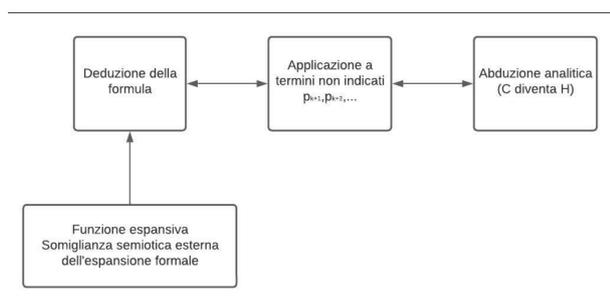


Fonte: Valencia (2021)

In altre parole, la mobilitazione del linguaggio di programmazione permette di stabilire successivamente una validazione analitica che si presenta nel discorso evidenziato come una funzione espansiva che ammette una somiglianza semiotica esterna di espansione formale, vale a dire che lo studente enuncia significanti per mezzo di risorse associate a simboli algebrici e che si sviluppa nella deduzione della formula nella struttura della generalizzazione algebrica come mostrato in Figura 14.



Figura 14 - La funzione espansiva nel discorso che evidenzia la deduzione della formula

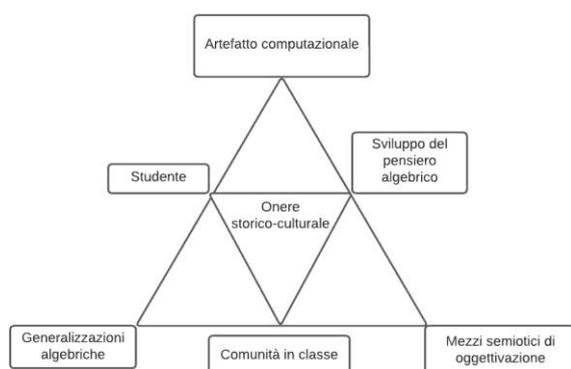


Fonte: Valencia (2021)

Pertanto, l'argomentazione precedente porta al fatto che la trasformazione dell'oggetto di conoscenza associato alla generalizzazione aritmetica (quando viene introdotto l'artefatto computazionale), generalizzazione che appare nel processo di analiticità computazionale associato a un sistema di attività, ai fini di questa analisi viene inteso a partire da una teoria delle attività cosiddette di terza generazione.

In relazione all'idea precedente, Engeström (2001) ha avanzato una "teoria dell'attività" basata sui termini teorici degli sviluppi di Werstch (1991), Bakhtin (1986), Russell (1997) e Latour (1993). In tale proposta teorica si rileva che, per il caso specifico sollevato dalla generalizzazione delle sequenze figurali, lo stato iniziale si configura nell'analisi delle regolarità suscettibili di essere riscontrate nella sequenza figurale che, per la natura dell'operazione dei processi sviluppati dall'allievo, si limita a un numero limitato e ridotto di prove.

Figura 15 - Modello di attività in aula



Fonte: Elaborazione propria

L'analisi che procede dalla Figura 15 permette di considerare l'attore 1 come lo studente in comunicazione con i punti di vista degli altri attori all'interno dell'attività d'aula; in tale azione si possono trovare partner indipendenti all'interno della sequenza figurale che, nel caso dell'attore 2, si manifesta con l'uso dell'artefatto come mediazione per la mobilitazione del linguaggio di programmazione inteso come proposta di generalizzazione algebrica che viene testata in relazione a un attante comunità-macchina associato a una generalità nell'operatività dell'oggetto indeterminato. Tale funzione è stata denominata come l'analiticità computazionale che si trova all'intersezione dei due oggetti.

Questa prospettiva teorica ha come conseguenza la visione che le azioni individuali e di gruppo (dirette all'obiettivo di deduzione della formula che permette di osservare lo sviluppo del pensiero algebrico) sono indipendenti ma subordinate e comprensibili nel sistema dell'attività, oltre all'interazione tra i partecipanti dell'attività, gli studenti e l'insegnante. Essi contribuiscono con diversi punti di vista associati alle loro tradizioni e interessi che si concretizzano negli artefatti (matita, carta, computer) in cui vengono evidenziate le rispettive storie. Quanto sopra è stabilito come approccio collettivo alla zona di sviluppo prossimale (Vygotskij, 1930) attraverso le azioni quotidiane degli studenti che trasformano i loro modi di pensare, includendo quindi gli artefatti computazionali e le nuove forme di attività sociale che sono state culturalmente e storicamente costituite. Il risultato è chiaramente la conversione dello studente in un soggetto diverso, grazie all'articolazione di vari artefatti che vengono categorizzati in attori che condividono la responsabilità dell'azione per generare, come mostra Latour (1999), un processo di scambio di competenze che offre nuove possibilità, obiettivi e funzioni che si concretizzano in quella che è stata chiamata *analiticità computazionale*.

CONCLUSIONE

L'approccio delle attività che gli studenti hanno sviluppato in ambiente classe e che sono state analizzate in questa ricerca, stabilisce che esiste un'attività matematica congiunta a cui partecipano



l'insegnante e gli studenti e nella quale i mezzi semiotici di oggettivazione appaiono come risorse con cui pensare durante questa attività.

Per cominciare, osservare gli artefatti culturali come strumenti cognitivi che influenzano la configurazione, le dinamiche e le azioni dei partecipanti alla situazione educativa che stiamo trattando, e che mediano la relazione tra insegnante, studenti e conoscenza; tuttavia, esiste una dimensione collettiva nel processo di apprendimento che ci permette di concentrarci sulla conoscenza.

Allo stesso modo, esiste una dimensione sistemica tra insegnante-studente-conoscenza che viene spiegata dal classico concetto di *zona di sviluppo prossimale*, ma questo sistema è insufficiente quando si cerca di spiegare la relazione dinamica con l'artefatto.

Di conseguenza, dalla suddetta articolazione, nello specifico con l'artefatto computazionale, si evidenzia l'emergere di una forma insolita di operatività con gli oggetti indeterminati impliciti nelle sequenze figurali di numeri pari e dispari, che è stata denominata come *analiticità computazionale*. Questo tipo di operatività è descritta nella ricerca di Kilhamn, Bråting, Helenius e Mason (2022), quando l'uso di una variabile contatore per esplorare l'addizione di numeri consecutivi e di altre sequenze generate in successione, amplia l'opportunità di sperimentare modelli che vanno oltre i semplici calcoli con numeri a una cifra, offrendo la possibilità di sperimentare la generalizzazione, modificando gli aspetti della funzione generatrice. Sebbene il precedente rilievo non sia esplicitato all'interno della categoria dell'analiticità computazionale, esso risponde alle caratteristiche di tale categorizzazione ed è supportata dall'uso dello strumento come fattore che permette la trasformazione dei processi che portano alla conoscenza e, di fatto, all'aggiornamento della conoscenza, il che costituisce anche un elemento culturale nel quale, sulla base dell'interazione sociale, si evidenzia un rapporto dialogico e storico di produzione di conoscenza, che mostra l'artefatto non solo come strumento o come semplice utensile, ma come attante del quale gli esseri umani non hanno alcun potere di dominio (Latour, 1999) e che permette agli studenti di avvicinarsi a conoscenze matematiche

culturali oggettive (Radford, 2014) associate all'attività in cui gli studenti si relazionano con l'artefatto e che viene evidenziato nel documento come una serie di caratteristiche che permettono di mettere in relazione diversi mezzi semiotici di oggettivazione, artefatti e attori che evidenziano un carattere operativo degli oggetti indeterminati attraverso diverse analiticità che vanno dall'evidenziare il ragionamento abduttivo al ragionamento deduttivo.

Il particolare tipo di analiticità computazionale in cui gli studenti manifestano l'abduzione deve continuare a essere analizzato in termini di rilevanza dell'inclusione di artefatti computazionali in classe su base continuativa, dato che, sebbene nell'esercizio di apprendimento all'interno dell'attività matematica vi siano diverse somiglianze in relazione ad altri mezzi semiotici di oggettivazione, vi sono elementi che generano nuove configurazioni e che sono specifici dell'agente conformato come studente-macchina e che rendono il modo di pensare algebricamente diverso.

Pertanto, è importante sviluppare analisi intorno ad alcune delle domande lasciate aperte in questo articolo, come, per esempio:

• Quali elementi rendono diverse le forme di analiticità computazionale che si trovano nell'attante associato allo studente-macchina?

• Quali caratteristiche dello studente-macchina mostrano un particolare modo di pensare algebricamente e che contribuiscono allo sviluppo del pensiero matematico in relazione alla cultura della conoscenza attuale?

Le domande precedenti sono considerate importanti in questo articolo, visti i progressi tecnologici che rendono significative le interazioni tra umani e non umani nei processi di sviluppo del pensiero algebrico.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a Multimodal Process [La semiosi come processo multimodale], In B. D'Amore (Ed), *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, 267 - 299. <http://funes.uniandes.edu.co/9710/1/Arzarelo2006Semiosis.pdf>



- Bakhtin, M. (1986) *Speech Genres and Other Late Essays* [J. University of Texas Press.
- Bayona, L. (2021). *Generalizaciones aritméticas, generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas en estudiantes de grado quinto de educación básica primaria (con edades de 10 y 11 años)*. [Tesis de Doctorado no publicada]. Repositorio institucional Universidad Santo Tomas. <https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/34520/2021BayonaLiliana.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Creswell, J. (2009). *Diseño de Investigación: Métodos Cualitativo, Cuantitativo y Mixto*. Sage.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Peter lang.
- Engeström, Y. (2001). Expansive Learning at Work: Toward an activity theoretical reconceptualization [Apprendimento espansivo al lavoro: Verso una riconcettualizzazione teorica dell'attività.]. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156. <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/13639080020028747?needAccess=true>
- Kilhamn, C., Bråting, K. Helenius, O. & Mason, J. (2022). Variables in early algebra: exploring didactic potentials in programming activities [Variabili nell'early algebra: esplorazione delle potenzialità didattiche nelle attività di programmazione]. *ZDM Mathematics Education*, 54(5). <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01384-0>.
- Lampis, M. (2012). *La inteligencia y los artefactos. Un enfoque semiótico*. Wydanie privé.
- Latour, B. (1993). *Ethnography of a 'high-tech' case: About Aramis*. Lemonier.
- Latour, B. (1999). *La esperanza de pandora*. Gedisa.
- Latour, B. (2005). *Reensamblar lo social*. Manantial.
- Leontiev, A. (2009). *Activity and consciousness*. Marxists Internet Archive.
- Radford, L. (2008). *The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning, Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom and culture*. Sense Publishers.
- Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización [Su tre problemi di generalizzazione]. In M. Cañadas, J. Gutierrez, M. Molina & I.Molina (Eds), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Homenaje a Encarnación Castro*. Comares.
- Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning [Sul ruolo delle rappresentazioni e degli artefatti nella conoscenza e nell'apprendimento]. *Educational Studies in Mathematics*, 85(3), 405–422. <http://www.jstor.org/stable/43589828>
- Radford, L. (2021). O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação [L'insegnamento-apprendimento dell'algebra nella teoria dell'oggettivazione]. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural*. Livraria da Física.
- Russell, D. (1997). Rethinking Genre in School and Society: An Activity Theory Analysis, *Written Communication*, 14(4), 504-554. <https://doi.org/10.1177/074108839701400404>
- Valencia, I. (2021). Análisis de aprendizajes asociados al álgebra escolar desde la programación visual de computadores, en estudiantes de 10-14 años. [Tesis de Doctorado no publicada]. Repositorio institucional Universidad Santo Tomas. <https://repository.usta.edu.co/bitstream/handle/11634/38784/2021IvanValencia%28Trabajo%20de%20grado%29.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años). [Tesis de Doctorado no publicada]. Repositorio institucional Universidad Distrital Francisco José de Caldas. <https://repository.udistrital.edu.co/bitstream/handle/11349/2608/CausadoVergelRodolfo2014.pdf?sequence=1&isAllowed=y>



- Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano [Generalizzazione di schemi e forme di pensiero algebrico precoce]. *PNA*, 9(3), 193-215.
- Vergel, R., Godino, J. D., Font, V., & Pantano, Ó. L. (2021). Comparing the views of the theory of objectification and the onto-semiotic approach on the school algebra nature and learning [Confronto tra i punti di vista della teoria dell'oggettivazione e dell'approccio onto-semiotico sulla natura e l'apprendimento dell'algebra scolastica.]. *Mathematics Education Research Journal*. Advanced online publication. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00400-y>
- Vygotsky, L. (1929). The problem of the cultural development of the child. *Journal of Genetic Psychology*, 36, 415 – 434.
- Vygotsky, L. (1930). *Mind and society*. Harvard University press.
- Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind: a sociocultural approach to mediated action*. Harvard University Press.