CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 1 – 17
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Michele **ARTAUD**,
Université d'Aix-Marseille, ADEF.

De la modélisation des savoirs en théorie anthropologique du didactique

Knowledge modelling in the anthropological theory of the didactic

RESUMÉ

Quels outils la théorie anthropologique du didactique fournit-elle au didacticien pour rendre compte de la vie des savoirs dans les institutions ? Telle est la question à laquelle cet article prétend apporter des éléments de réponses. Nous explicitons notamment l'épistémologie incluse dans la théorie anthropologique du didactique, avant de développer la notion de besoin épistémologique et de besoin praxéologique ainsi que leur relativité à travers des exemples pris principalement dans l'enseignement des mathématiques au lycée (élèves de 15 à 18 ans). Nous mettons également en évidence que les organisations de l'étude conditionnent l'épistémologique.

Correspondance:

michele.artaud@univ-amu.fr

Mots-clés: Besoins épistémologiques, besoins praxéologiques, théorie anthropologique du didactique.

ABSTRACT

What tools does the anthropological theory of the didactic provide to the didactician to account for the life of knowledge in institutions? This is the question to which this article aims to provide some answers. In particular, we explain the epistemology included in the anthropological theory of the didactic, before developing the notion of epistemological need and praxeological need as well as their relativity through examples taken mainly from the teaching of mathematics in high school (students aged 15 to 18). We also highlight that the didactic organizations condition the epistemologic.

Keywords: Didactics of the ATD, Didactic testimonies, Previous subjections, Relation to the object of study.

Reçu dans 01/10/2023
Approuvé en 01/11/2023

INTRODUCTION

Dès l'émergence de la science didactique, le savoir a été au cœur des théories dont s'est dotée cette science. La théorie anthropologique du didactique (TAD), dont la pierre inaugurale a été la théorie de la transposition didactique, ne fait pas exception. Elle a intégré, au fil de son développement, des ingrédients permettant de rendre explicite ce qui caractérise le rapport au savoir créé par la didactique – soit les manipulations spécifiquement didactiques du savoir qui sont utiles, voire indispensables, au travail du didacticien – mais aussi de modéliser « le savoir ».

La notion de savoir a d'abord été considérée comme première, désignant une certaine forme d'organisation des connaissances – la notion de connaissance étant pour sa part définie à partir de celle de rapport. Voici par exemple ce qu'écrivait Yves Chevallard dans la *Postface* à la deuxième édition de l'ouvrage *La transposition didactique*:

Une certaine connaissance, c'est-à-dire une certaine qualité du rapport à un objet, se donne à voir. Au lieu qu'un savoir est toujours *supposé*. Il se présente à nous par ses emblèmes (sa dénomination, etc.) et nous le rencontrons présent *in abstentia*, comme une *potentialité* – ou un *manque*, quand nous voulons « l'apprendre ». (CHEVALLARD, 1991, p. 209)

À cette notion première de savoir, s'est ajoutée celle, *relative*, que l'on peut modéliser à l'aide de la notion de praxéologie (CHEVALLARD, 1997) : le savoir d'une praxéologie est assimilé au bloc technologico-théorique de cette praxéologie. Cela permet en quelque sorte de rendre présent et de manipuler le savoir évoqué dans le passage cité plus haut de la même façon que les non-ostensifs sont accessibles au moyen d'ostensifs (BOSCH & CHEVALLARD, 1999). Pour le dire autrement, quand on suppose l'existence ou le manque d'un savoir, son existence ou son manque peut être matérialisé à travers le bloc technologico-théorique, le *logos*, d'une certaine praxéologie. Nous développerons ci-après l'épistémologie incluse dans la TAD, avant de mettre en évidence certaines des caractéristiques qui nous paraissent centrales dans la modélisation des savoirs en TAD ainsi que quelques-unes de leurs implications dans l'élucidation des phénomènes didactiques.

UNE EPISTEMOLOGIE RENOUVELEE

Dans la *Postface* à la deuxième édition de l'ouvrage *La transposition didactique* déjà citée, Y. Chevallard situe l'épistémologie dans le champ de l'anthropologie comme anthropologie des savoirs:

Versons l'adjectif *cognitif* du côté de la connaissance, l'adjectif *épistémologique* du côté des savoirs. Au lieu d'anthropologie *des savoirs*, parlons alors d'anthropologie *épistémologique*. La synonymie se conçoit ; elle peut s'accepter. Abrégeons à nouveau, selon un procédé déjà utilisé. Et disons donc : anthropologie épistémologique ou… *épistémologie* tout court. L'anthropologie des savoirs ne serait donc rien d'autre que l'épistémologie, cette vieille connaissance !

Avouons sans ambages qu'il y a là, non un tour de passe-passe, mais un coup de force. Car faire d'*épistémologie* le synonyme d'*anthropologie des savoirs*, c'est bien polémiquer contre l'épistémologie actuelle ; c'est « anthropologiser » l'épistémologie comme nous avions, un peu plus haut, « anthropologisé » les didactiques.

L'épistémologie actuelle, en effet, nous donne une vision très restreinte de la *vie des savoirs* dans la société. (CHEVALLARD, 1991, p. 210)

Cette vision restreinte de la vie des savoirs attachée à l'épistémologie au sens usuel est celle liée à l'étude de la production des savoirs comme de leurs producteurs. Pourtant, nous dit l'auteur, « ce qui est caractéristique des savoirs, notamment, c'est leur "multilocation" » et l'épistémologie néglige donc « et leur *utilisation*, et leur *enseignement* » (CHEVALLARD, 1991, p. 210-211):

Or ceux-ci ne peuvent être écartés d'une étude anthropologique des savoirs. Chaque sphère a sans doute son autonomie ; mais cette autonomie n'est jamais que *relative*. (CHEVALLARD, 1991, p. 211).

L'extension de la vision usuelle de l'épistémologie est en quelque sorte consubstantielle à l'avènement du didactique dès lors que la manipulation didactique d'un savoir, qui comprend son enseignement mais qui n'y est pas réduite, ne peut « en bien des aspects se comprendre si l'on ignore et ses utilisations et la production » (CHEVALLARD, 1991, p. 211).

Cette mise en avant de la production des savoirs est liée à des conditions et des contraintes du niveau de la civilisation, et notamment le fait que, si la production des savoirs est valorisée, leur « *utilisation* reste opaque, ignorée » et leur « enseignement plus visible culturellement que leur utilisation, est cependant péjoré » (CHEVALLARD, 1991, p. 212).

Dès l'origine, ainsi, la TAD s'appuie sur, pour ne pas dire intègre, une épistémologie étudiant non seulement la *production* des savoirs, mais encore leur *utilisation*, leur *étude* – dont l'enseignement est une partie – et leur *transposition*. Son développement a donné des outils pour prendre en charge l'étude de ces quatre « régimes épistémologiques » des savoirs et pour se déprendre des conditions et contraintes liées aux institutions où vivent les savoirs.

PRAXEOLOGIES

La modélisation des savoirs prend appui en TAD sur la notion de praxéologie : une praxéologie est un ensemble de types de tâches T_{ijk} – ensembles de tâches du même type qu'il s'agit d'accomplir –, des techniques τ_{ijk} qui permettent d'accomplir ces types de tâches, des technologies θ_{jk} qui justifient, produisent ou rendent intelligible les techniques, et enfin des théories Θ_k, qui à leur tour justifient, produisent ou rendent intelligibles les technologies. Notons qu'une assertion ne sera pas « par nature » technologique ou théorique ; cela dépendra de la fonction qu'elle joue dans la praxéologie examinée.

Nous l'avons dit en introduction, le savoir associé à une praxéologie est modélisé par le *logos* de cette praxéologie, soit le bloc technologico-théorique $[\theta_{jk} / \Theta_k]$ et cette définition du savoir associé à une praxéologie permet d'attraper, de manipuler, le savoir supposé présent ou manquant dans une institution. Ainsi lorsque l'on dit qu'il y a des mathématiques, ou de l'analyse, de l'algèbre, ou encore de l'informatique, etc. dans une institution donnée, ce qui permet de caractériser les mathématiques, l'analyse, l'algèbre ou l'informatique présentes dans cette institution est constitué du *logos* des praxéologies mathématiques, analytiques, algébriques, informatiques etc. qui vivent dans cette institution. Ajoutons que ce *logos* dépend à la fois des institutions et des positions occupées dans une institution donnée : dans une même institution d'enseignement par exemple, le savoir de la position de professeur et le savoir de celle d'élève diffèrent.

Ainsi, sur le thème des suites numériques en classe de terminale du Lycée en France (élèves de 17-18 ans), on devrait savoir, dans la position d'élève, étudier en quasi autonomie didactique une suite homographique, c'est-à-dire une suite définie par $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$, u_0 avec c non nul, en mettant en œuvre une technique produite par le raisonnement par récurrence et les propriétés de la fonction associée, f, qui à x associe $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, pourvu que f soit croissante. En effet, le programme contient à la fois le théorème de convergence monotone (toute suite croissante et majorée, respectivement décroissante et minorée, converge) et la capacité « raisonner par récurrence pour établir une propriété d'une suite », ce qui permet d'envisager une technique conjecturant graphiquement avec l'aide d'une calculatrice graphique les propriétés de la suite avant de les établir par récurrence et de conclure en appliquant le théorème de convergence monotone.

Si f est décroissante, la suite obtenue ne sera pas monotone et, dans la position d'élève, on ne pourra pas établir le comportement de la suite en autonomie didactique. Par contraste, dans la position de professeur, on « sait », ou du moins est « supposé savoir », qu'une suite homographique peut s'exprimer en fonction d'une suite arithmétique ou géométrique, ce qui lui permet d'obtenir [1] l'expression du terme général de la suite en fonction de n et, par suite, son comportement. Cela lui donnera par exemple la possibilité de fabriquer un énoncé d'exercice permettant à la position d'élève d'étudier, grâce à ce secours didactique, une suite homographique pour laquelle f est décroissante en définissant d'abord une suite auxiliaire à partir de la suite $(u_n)_n$, qui sera géométrique ou arithmétique, etc. On en trouvera un exemple dans la figure 1 ci-dessous. Dans la position de professeur, on « sait », ou est « supposé savoir », également qu'une suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f décroissante peut s'étudier en étudiant les deux suites extraites formées des termes de rangs pairs, d'une part, des termes de rangs impairs, d'autre part, suites qui sont adjacentes et qui encadrent la suite (u_n). Dans le cadre du programme actuellement en vigueur au lycée en France, la notion de suite adjacente est quasi absente et cela ne sera donc pas vraiment utile à la position de professeur pour aider les élèves à étudier une suite homographique définie à partir d'une fonction décroissante.

L'objet de savoir « suite homographique » recouvre ainsi une réalité différente dans la

[1]. La notion de suite adjacente est mentionnée dans les « approfondissements », qui forment une partie optionnelle du programme.

position d'élève et dans la position de professeur, et il en irait de même si l'on examinait des individus au lieu de considérer des positions institutionnelles : d'un côté, si l'on considère deux individus occupant la même position, le rapport personnel de chacun est conforme à celui de la position occupée ; d'un autre côté, le rapport personnel de chacun d'eux différera sur certains points.

Figure 1 – Une étude de suite homographique avec *f* décroissante

109 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

1. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Source : Arnaud & al. (2020), p. 34

Dans toutes les institutions de la société où l'objet « suite homographique » est reconnu comme présent ou manquant, le *logos* des praxéologies dont l'ostensif est l'emblème différera entre les institutions et, au sein d'une même institution, entre les positions institutionnelles. C'est ce que nous identifions en termes de phénomènes de transposition institutionnelle – didactique lorsque l'institution cible est animée d'une intention d'enseignement.

L'un des moteurs de la transposition institutionnelle réside dans les besoins en savoir que l'institution cible a, ou est supposée avoir, pour réaliser les activités qu'elle abrite.

BESOINS EPISTEMOLOGIQUES, BESOINS PRAXEOLOGIQUES

La notion de besoin fait référence dans la langue française à la notion de manque ou de nécessité ; cependant les deux mots, besoin et nécessité, tout en étant liés, ne sont pas synonymes. En effet, une nécessité permet de répondre à un besoin mais un besoin peut être quelque chose d'assez large. Voici ainsi la définition de besoin que l'on trouve dans le dictionnaire *Trésor de la langue française informatisé* (TLFi) (Centre national de ressources textuelles et lexicales [CNRTL], 2012) : « Situation de manque ou prise de conscience d'un manque ». Toujours selon le TLFi, son origine remonte au XI^e^ siècle : « *estre bosoinz* "être nécessaire" » (*ibid.*). Nous l'employons ici avec un complément et un adjectif déterminatif, ce qui met l'accent, en suivant encore le TLFi, sur « l'origine de la demande » et la « nature du manque ».

Par rapport à l'acception dans la langue courante, nous introduirons une différence notable en introduisant deux instances : l'instance, personne ou position institutionnelle, à l'origine de la demande est celle qui a identifié un manque, une nécessité, chez une deuxième instance, personne ou position institutionnelle ; cette deuxième instance peut être la première ou être différente.

Conformément à ce que nous avons explicité plus haut, les besoins sont généralement exprimés sous forme de *besoins épistémologiques* : c'est un manque en termes de savoir supposé qui est indiqué. Par exemple, tel didacticien des mathématiques dira que la position de professeur de mathématiques en France, p_E, a « des besoins en grandeurs ». Il exprime ainsi que le rapport de la position p_E à un certain nombre d'objets n'est pas conforme à un rapport qu'il juge souhaitable et que cela tient à un manque de savoir sur les grandeurs.

Pour préciser, considérons comme instance $\hat{w}$ le chercheur en didactique des mathématiques évoqué, comme instance $\hat{u}$ la position de professeur de mathématiques français ($\hat{u} = p_E$), et plaçons-nous dans le cas où $\hat{w}$ juge le rapport de $\hat{u}$ à l'objet grandeur, o_g. On pourra dire que $\hat{w}$ juge que le rapport de $\hat{u}$ à o_g n'est pas conforme à un rapport à o_g qu'elle souhaiterait voir exister, et que nous noterons génériquement $R(*\hat{s}, o_g)$, où $*\hat{s}$ est en quelque sorte la *position qui devrait exister*, selon ce qu'imagine $\hat{w}$. C'est dans ce cas que nous parlerons d'un *besoin épistémologique de* $\hat{u}$ *selon* $\hat{w}$. On soulignera que l'origine de la demande ici n'est pas $\hat{u}$, mais $\hat{w}$, et que $R(*\hat{s}, o_g)$ n'est pas $R(\hat{w}, o_g)$: $\hat{w}$ peut par exemple souhaiter que $R(*\hat{s}, o_g)$ comprenne « une » praxéologie autour de certains types de tâches, sans pour autant que $R(\hat{w}, o_g)$ contienne cette praxéologie. En effet, $\hat{w}$ peut souhaiter que $R(p_E, o_g)$ contienne par exemple « une » praxéologie permettant de réaliser un type de tâches T comme « ou encore s'appuyant sur un objet o' qu'il juge pertinent sans pour autant qu'une praxéologie autour de T ou s'appuyant sur o' soit incluse dans son rapport à o_g.

Il nous faut maintenant préciser la nature du manque, ce qui suppose d'examiner plus avant le rapport $R(\hat{w}, o_g)$: on pourra alors déterminer ce qu'il manque, selon $\hat{w}$, pour que le rapport de $\hat{u}$ à o_g soit conforme à $R(*\hat{s}, o_g)$, ce qu'en théorie anthropologique du didactique nous faisons à partir de la notion de praxéologie.

Pour établir ce verdict de conformité, et lui donner une potentielle opérationnalité, ce sont ainsi des besoins praxéologiques que l'analyse doit identifier. Illustrons ce point sur la question des grandeurs[2].

Nous prendrons pour support un extrait du compte rendu d'une classe de seconde en France (élèves de 15-16 ans) qui étudie les fonctions (ALFIERI, 2019). Il s'agit du début de l'étude de ce thème et une première situation est donnée, qui demande d'optimiser un volume : on a alors à calculer le volume d'une boîte sans couvercle fabriquée à partir d'une feuille rectangulaire de dimensions 29,7 cm × 21 cm (format A4) selon le patron reproduit sur la figure 2 ci-après par découpage et pliage suivant les pointillés (patron non fourni aux élèves)[3]. Les élèves ont à disposition des boîtes déjà construites dont la hauteur varie et, parmi les boîtes distribuées, il y a cinq hauteurs différentes. Le travail s'engage à partir de mesures prises sur ces boîtes.

Figure 2 – Patron des boîtes dont le volume est à optimiser.

---

[2] . Dans la suite, nous considérons l'infrastructure épistémologique autour de la notion de grandeur sur laquelle repose le programme français. Une grandeur est définie comme une classe d'équivalence associée à une relation sur un ensemble d'objets : par exemple, si l'on considère les segments comme ensemble d'objets, la relation d'équivalence « [AB] est superposable à [CD] » définit l'espèce de grandeurs des longueurs, une longueur étant une classe l'équivalence de segments. Une mesure est alors définie par la donnée d'une application de l'ensemble des classes d'équivalence dans **R**+, unique à un facteur multiplicatif près. Une mesure d'une grandeur est donc un nombre positif. Voir notamment les articles de Yves Chevallard & Marianna Bosch (2001 & 2002).

[3]. La situation de départ n'a rien d'original. Elle est très présente dans la noosphère du système d'enseignement comme dans celui-ci sous des formes variées.

Source: L'auteure.

Dans le début de la séance, ce sont des grandeurs qui sont manipulées, comme en témoigne les deux extraits suivants – les élèves travaillent par deux et le professeur circule dans la classe:

> P. C'est quoi le volume d'une boîte ? Vous ne vous souvenez pas M ?
>
> M. C'est pas longueur fois largeur... multiplié par deux… au carré non ? il n'y a pas une histoire de carré ?
>
> P. Le carré c'est plutôt pour une surface… Dès qu'on prend du volume, c'est plutôt au cube non ? Vous avez d'autres moyens de vérifier. On peut aussi chercher une formule sur internet si vous avez besoin d'une formule pour le volume.
>
> [...]
>
> E. Madame, est-ce que c'est possible que ça fasse 56 cm^2 ?
>
> P. Des centimètres carrés pour un volume ?
>
> E. Cubes !
>
> P. Comment vous avez fait votre volume ? Comment vous avez calculé ?
>
> E. Ben je fais longueur fois largeur divisé par hauteur.
>
> P. Vous êtes d'accord, M ? [...] Parce que là si vous faites longueur fois largeur divisé par hauteur, la longueur elle est en centimètres, la largeur est en centimètres et vous divisez par hauteur qui était en centimètres. Dans ce cas ce que vous allez obtenir est en quoi ?
>
> E. En centimètres.
>
> P. En centimètres. Est-ce que c'est des centimètres cubes ?

Ce sont ainsi principalement des grandeurs des espèces volume, longueur et aire qui sont présentes, et les unités dans lesquelles sont exprimées ces grandeurs permettent de vérifier certains des résultats obtenus par les élèves.

Dans la suite de cette même séance, le professeur entre les données dans un tableur pour créer un milieu collectif et mettre à l'épreuve les résultats annoncés par les élèves ; on obtient alors des formulations en termes de mesures, avant qu'un élève ne fasse partiellement intervenir les grandeurs. À l'issue du travail en autonomie par deux, P fait un point. Certains ont comparé les volumes des deux boîtes et expliquent qu'ils ont d'abord cherché la formule du parallélépipède rectangle. La classe s'entend sur la formule du volume du parallélépipède rectangle à mobiliser (longueur fois largeur fois hauteur), puis P demande à un élève le volume de sa boîte:

> Ma. 742.
>
> P. Alors vous avez fait quoi comme calcul ?
>
> L'élève commence à lui donner les calculs mais P l'interrompt :
>
> P. Attendez, Je vais noter les résultats au fur et à mesure… Dans quoi je vais les noter pour que ça soit facile pour moi de vérifier ?
>
> Les élèves disent de les noter dans un tableur, ce que P approuve.
>
> P. Je vais noter quoi alors dans un tableur pour pouvoir vérifier ? Je fais quoi ? Comment je présente les calculs ?
>
> E1. Longueur, largeur, hauteur et ensuite le volume.
>
> P demande à Ma les données relevées sur sa boîte et les inscrit dans la feuille de calcul qui est projetée au tableau.
>
> Ma. 13,5 ; la largeur, 10 ; la hauteur, 5,5 et le volume 742,5.

P note, explique qu'elle a mis la formule qui permet de vérifier le résultat, *et puis demande la* proposition du deuxième élève du binôme.

F. Longueur, 23,3 ; largeur, 14,8 ; hauteur, 3,3 ; et le volume 1 137,972.

P. C'est parfait. Qu'est ce qui se passe après ? Quel était notre objectif ?

E2. Avoir la boîte avec le plus grand volume possible.

P. Là qu'est-ce qu'on a fait pour l'instant ?

S. On a calculé le volume de deux boîtes. Et peut-être qu'on pourrait continuer pour trouver la plus grande boîte, celle avec le plus grand volume possible…

P. Est-ce qu'il y en a qui ont trouvé d'autres résultats que ceux-là ?

N donne les données de sa boîte.

N. La base c'est 18,7 fois 9,8, la hauteur est de 5,6 cm et le volume est 1 026,256 cm3.

P. D'accord donc là le résultat, on va bien préciser à côté qu'il est en centimètres cubes.

Dans la suite du travail, ce sont principalement les mesures qui sont convoquées, même si on trouve parfois des formulations mêlant grandeurs et mesure: pour une hauteur de 4 cm par exemple, on dira qu'on trouve un volume de 1128,4. Après un travail numérique non négligeable qui s'étendra sur trois séances, la classe obtient une expression algébrique du volume donnée par $V(h) = h(21 - 2h)(29{,}7 - 2h)$, h étant désignée comme la hauteur. Si h est une longueur, l'expression $21 - 2h$ n'a pas de sens... et pour obtenir la grandeur volume il faudrait écrire : $V(h) = h(21\text{ cm} - 2h)(29{,}7\text{ cm} - 2h)$, h étant la grandeur hauteur – l'unité dans laquelle on exprime la mesure de h n'ayant alors aucune importance. Et si l'on raisonne en mesure, il faut préciser l'unité dans laquelle on exprime les mesures pour que l'expression soit unique et que l'on sache l'unité dans laquelle on obtient le volume. On pourrait en effet avoir également, si h désigne la mesure en décimètres de la hauteur, $V(h) = h(2{,}1 - 2h)(2{,}97 - 2h)$ et on obtiendrait alors la mesure du volume en litres ; on pourrait encore donner la mesure de h en millimètres, etc. Si, donc, l'expression algébrique du volume dans le système des grandeurs, $V = h(L - 2h)(\ell - 2h)$ où L est la longueur de feuille et ℓ sa largeur, est unique, l'expression algébrique de sa mesure, dans le système des nombres donc, ne l'est pas.

Selon $\hat{w}$, ainsi, la notion de grandeur manque explicitement dans la praxéologie que l'on voit mise en œuvre par le professeur et les élèves dans la modélisation : elle s'efface en quelque sorte au profit de la mesure sans qu'il en reste véritablement de traces, ce qui conduit à éviter tout un travail autour de la modélisation qui pourrait s'avérer productif.

En notant L la longueur de la feuille et ℓ sa largeur, on obtient d'abord, nous l'avons dit, un premier modèle sous la forme d'une formule relevant de l'algèbre des grandeurs, établi à partir de l'examen du système, qui donne le volume en fonction de la hauteur : $V = h(L - 2h)(\ell - 2h)$. Ce premier modèle est unique, indépendant de la mesure des grandeurs en jeu. Pour faire parler ce modèle, on peut le considérer comme système et fabriquer un deuxième modèle, mobilisant les mesures des grandeurs en jeu, modèle qui ne sera pas unique puisque dépendant de l'unité choisie pour exprimer V. Pour aider le lecteur, nous avons rassemblé les principales notations et unités utilisées ci-après dans un tableau (voir tableau 1).

Tableau 1 – Principales notations et unités des grandeurs manipulées

$V = \varpi$ cm^3 = ϖ' 100 cm^3 ;
$h = \eta$ cm = η' mm ;
$\ell = \lambda$ cm ; pour le format de feuille choisi $\lambda = 21$;
L = Λ cm ; pour le format de feuille choisi $\Lambda = 29{,}7$.

Source: L'auteure.

Les grandeurs dont V dépend étant de la même espèce, celle des longueurs, on peut faire le choix d'une unité commune, u, pour ces grandeurs. En considérant alors la mesure de h, ℓ, et L selon cette unité, que l'on notera respectivement η, λ, Λ, on obtient $V = \eta(\Lambda - 2\eta)(\lambda - 2\eta)$ u^3. On peut alors poser le problème du choix de l'unité la plus appropriée pour constituer un troisième modèle – numérique celui-ci et permettant donc d'introduire les fonctions numériques –, qui associera à la mesure η de h dans l'unité u, la mesure ϖ de V dans l'unité v. En reprenant les valeurs des paramètres ℓ et L correspondant à la situation étudiée par la classe, et pour unité u le centimètre, on obtient comme second modèle : $V = \eta(21 - 2\eta)(29{,}7 - 2\eta)$ cm^3, et comme troisième modèle, en prenant v = 1 cm^3 : $\varpi = \eta(21 - 2\eta)(29{,}7 - 2\eta)$. Les valeurs de ϖ étant comprises entre 526,3 et 1128,4 pour η appartenant à {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, pour représenter plus facilement les données, on pourrait choisir comme unité de volume v' = 100 cm^3 : on obtiendrait alors $\varpi' = 0{,}01\eta(21 - 2\eta)(29{,}7 - 2\eta)$ en notant ϖ' la mesure de V dans cette unité. On pourrait également choisir d'exprimer la mesure de h en millimètres pour examiner plus finement ce qu'il se passe autour de 4 cm, qui est la plus grande valeur obtenue : on obtiendrait alors $\varpi = 0{,}001\eta'(210 - 2\eta')(297 - 2\eta')$, où η' est la mesure de h en mm (et ϖ la mesure de V en cm^3). Etc. Les modèles proposés ici sont des formules, et l'on peut aussi considérer les *fonctions* qui leur sont associées. Dans le premier cas, il s'agit d'une fonction de l'espèce des longueurs dans celle des volumes : $h \mapsto h(L - 2h)(\ell - 2h)$; le troisième modèle et ses variantes sont des fonctions de **R** dans **R**, qui dépendent des unités choisies pour h et V:

$x \mapsto x(21 - 2x)(29{,}7 - 2x)$ avec h mesuré en cm et V en cm³ ;

$x \mapsto 0{,}01x(21 - 2x)(29{,}7 - 2x)$ avec h mesuré en cm et V en 100 cm3 ;

$x \mapsto 0{,}001x(210 - 2x)(297 - 2x)$ avec h mesuré en mm et V en cm3 ;

$x \mapsto x(2{,}1 - 2x)(2{,}97 - 2x)$ avec h mesuré en dm et V en L.

C'est tout cela qui disparaît quand on ignore les grandeurs pour travailler avec leurs seules mesures. Cette observation conduit $\hat{w}$ à conclure que la position de professeur a besoin de la notion de grandeurs pour diriger l'étude des mathématiques au collège et au lycée, et notamment pour faire vivre la modélisation. En effet, « modéliser » est l'une des six compétences à étudier au collège et au lycée. Le choix d'un modèle, sa validation ou son invalidation, figure dans la description de cette compétence. Le fait de « fixer les unités » au départ ne permet pas d'étudier ce que cela produit du point de vue du modèle ou mettre à l'épreuve le modèle obtenu au regard de la question étudiée, en faisant comme s'il n'y avait qu'un modèle possible.

RELATIVITE DES BESOINS EPISTEMOLOGIQUES

Le savoir dont une instance û est jugée avoir besoin est toujours relatif. Il dépend bien entendu de l'instance ŵ qui juge et, en particulier, du rapport que cette instance juge souhaitable. Ainsi par exemple, concernant les grandeurs, un autre didacticien des mathématiques pourrait juger que la notion de grandeur n'a pas besoin d'être manipulée explicitement dans le travail de modélisation, il suffit de travailler avec les mesures, et un débat pourrait alors s'engager entre les deux concernant la pertinence de l'objet grandeur pour la position de professeur et pour la position d'élève des systèmes didactiques considérés. Ce type de débats, dans lequel les besoins épistémologiques d'une instance sont mis en cause, est une constante des processus de transposition institutionnelle. Dans le cadre du processus de transposition des mathématiques en économie que nous avons étudié (ARTAUD, 1993 & 1994) par exemple, des débats, tournant le plus souvent à la polémique, sur la pertinence des mathématiques pour produire de l'économie sont réguliers. À partir du jugement par une instance $\hat{w}$, qui est généralement au départ une instance personnelle assujettie à l'instance positionnelle de chercheur en économie, il y a tout un débat autour de la pertinence de ce jugement qui permet de constituer une instance positionnelle nouvelle, $p_{\xi\hat{w}}$, adoptant le même jugement que $\hat{w}$. Ainsi le débat suscité par la publication par Paul A. Samuelson de l'ouvrage intitulé *Foundations of Economic Analysis* (SAMUELSON, 1947) a permis la transposition du calcul différentiel et intégral en dimension n (voir ARTAUD, 1993 & 1994). C'est l'activité de cette nouvelle instance, $p_{\xi\hat{w}}$, dans la noosphère de l'institution de recherche en économie, qui permettra que s'engage le travail transpositif proprement dit. Ce débat prend appui à partir du début du XX^e siècle sur le fait que les chercheurs en économie assument le fait que les mathématiques sont un *savoir fondamental* pour l'économie, soit un savoir qui permet de produire de l'économie et de mettre en œuvre le savoir ainsi produit (voir ARTAUD, 1993, pp. 41-42) ; le débat porte alors sur la nature des mathématiques dont on a besoin avec en toile de fond la question de l'étude de ces mathématiques : quasiment jamais posée, cette question joue pourtant un rôle non négligeable dans le débat (ARTAUD, 1993 & 1994).

Voici encore un exemple de la relativité des besoins épistémologiques, qui nous permettra d'en illustrer un autre aspect en revenant à l'étude d'un système didactique. Considérons l'étude de la question déjà envisagée plus haut : « Comment déterminer l'optimum d'une grandeur sous des contraintes données ? » toujours dans le cadre d'une classe de seconde d'un lycée français. Dans un mémoire professionnel réalisé lors de leur année de stage, trois élèves professeurs de la promotion 2008-2009 de l'IUFM d'Aix-Marseille [4] Souad Benhadi, Sihame El Kaine et David Félix (2009) proposaient de faire émerger cette question de la situation problématique suivante[5]:

Un maître-nageur dispose d'un cordon flottant de 160 mètres de longueur. Il veut délimiter une surface de baignade de forme rectangulaire. Comment peut-il disposer le cordon ? (BENHADI, EL KAINE & FÉLIX, 2009, p. 40).

4 Les Instituts Universitaires de Formation des Maîtres, créés au début des années 90 pour former les enseignants en deux ans après une licence.

5. Là encore, la situation n'a rien d'original et est présente sous diverses formes dans la noosphère.

Le développement proposé dans le mémoire prend la forme d'un « guide de recherche du problème » – en fait, une suite de questions cruciales permettant d'aboutir à la solution –, assorti d'un « compte rendu fictif » de deux séances permettant le début du processus d'étude de cette question.

Dans ce cadre, l'étude du problème est prévue en deux étapes : une première étape qui permettra d'aboutir à la modélisation de l'aire de la zone de baignade en fonction de l'un de ses côtés ; une seconde qui partira de l'expression de l'aire pour en déterminer le maximum. Dans la première étape, après le traitement de quelques exemples, les auteurs envisagent la « résolution du système » $\begin{cases} A = x \times y \\ 2x + y = 160 \end{cases}$, que l'on peut juger « trop éloignée de la dynamique de l'étude et inutilement compliquée » (ARTAUD, CIRADE & JULLIEN, 2011). En d'autres termes, là encore, deux positions différentes, celle d'élève professeur(p_{eE}) d'un côté, celle de didacticien de l'autre ($p_{\xi m}$), et deux jugements différents : la première position juge qu'il y a besoin de la notion de système de deux équations à deux inconnues dans le système didactique évoqué alors que la seconde juge que ce n'est pas le cas.

Pour étayer leur jugement de « non-besoin » de la notion de système de deux équations à deux inconnues, les auteurs de l'article, occupant la position $p_{\xi m}$, explicitent une manière de diriger l'étude qui permet de ne pas poser le système de deux équations mais de produire, à partir d'une expérimentation numérique, une expression de l'aire en fonction de l'un des côtés du rectangle. Le fait qu'un besoin épistémologique, un besoin en savoir donc, s'exprime peut donc dépendre, dans le cadre d'un système didactique, de la façon dont est réalisée l'étude, ce qui se modélise avec le modèle des moments de l'étude – moments qui modélisent les six fonctions qu'un processus d'étude doit remplir pour que l'étude soit complète.

ORGANISATIONS DE L'ETUDE ET BESOINS EPISTEMOLOGIQUES

L'enjeu de l'étude dans le système didactique considéré est relatif au type de tâches T : « déterminer l'optimum d'une grandeur sous des contraintes données ». L'apparition du besoin de la notion de système de deux équations à deux inconnues dépend alors de la réalisation du moment exploratoire, qui voit *l'exploration* (plus ou moins poussée) du type de tâches *T* et de *l'émergence d'une technique* τ permettant d'accomplir T. Cette technique consiste d'abord à exprimer cette grandeur en fonction d'une autre grandeur du système comme nous l'avons vu avec l'exemple du volume explicité plus haut, et c'est là que p_{eE} mobilise la notion de système de deux équations. Par contraste, $p_{\xi m}$ propose, à partir de l'étude expérimentale amorcée, en réponse à la question « Est-on capable de trouver des rectangles correspondant à des surfaces de baignade possibles ? » sur deux cas dans la proposition de p_{eE}, de développer la base expérimentale (les unités sont systématiquement indiquées alors que ce n'est pas le cas dans le scénario proposé par p_{eE}):

On pourrait par exemple obtenir assez vite sans doute les égalités complémentaires suivantes et les valeurs des aires correspondantes :

> 10 m + 140 m + 10 m = 160 m ; aire = 1400 m^2 // 30 m + 100 m + 30 m = 160 m ; aire = 3000 m^2 // 40 m + 80 m + 40 m = 160 m ; aire = 3200 m^2 // 60 m + 40 m + 60 m = 160 m ; aire = 2400 m^2 // 70 m + 20 m + 70 m = 160 m ; aire = 1400 m^2.

On pourrait voir ainsi que, apparemment, l'aire augmente, puis diminue, ou encore que parmi les données produites, la valeur maximale de l'aire est 3200 m^2. (ARTAUD, CIRADE & JULLIEN, 2011, pp. 779-780)[6]

Toujours selon la position $p_{\xi m}$, cela aurait pu permettre d'obtenir d'abord un tableau résumant les résultats obtenus comportant trois lignes relatives aux trois grandeurs présentes: coté 1, coté 2, aire. Puis, pour augmenter la base expérimentale et vérifier les conjectures effectuées, toujours selon $p_{\xi m}$, le recours à un tableur pourrait s'avérer pertinent : la répétition du calcul du deuxième côté à partir du premier ferait alors apparaître le fait que côté 2 = 160 m – 2 × côté 1, ce qui permettrait, quand cela s'avère nécessaire, d'exprimer l'aire en fonction du premier côté. (Suivant la modélisation, il pourrait bien entendu apparaître également le fait que le premier coté est la moitié de la différence entre le périmètre et le deuxième côté.)

$p_{\xi m}$ propose donc l'arborescence de questions cruciales suivante:

> Est-on capable de trouver des rectangles correspondant à des surfaces de baignade possibles ?
>
> Si certains rencontrent des problèmes : comment s'y prend-on pour trouver un rectangle qui convient ?
>
> Si l'expression de l'un des côtés en fonction de l'autre apparaît, la mettre à l'épreuve : est-ce que cette technique de détermination des côtés fonctionne ?
>
> Peut-on trouver d'autres rectangles ? (Pour relancer éventuellement la fabrication de données.)
>
> Parmi les rectangles dont on dispose, lequel correspond à la plus grande surface de baignade ? Peut-on en trouver une plus grande ?
>
> Si la proposition de faire le travail avec le tableur n'émerge pas : comment pourrait-on obtenir davantage de données plus rapidement ?
>
> Etc.
>
> (ARTAUD, CIRADE & JULLIEN, 2011, p. 781-782)

On voit ainsi apparaître des besoins didactiques, besoins praxéologiques d'étude ou de direction d'étude, voire besoins épistémologiques en matière de didactique, comme conditionnant le jugement de besoins épistémologiques mathématiques cette fois.

Ces interrelations fortes entre enjeu de l'étude et processus didactique dans l'étude des systèmes didactiques sont une source de difficulté dans les analyses à mener (ARTAUD, 2020) et l'élucidation de la frontière entre le savoir enjeu de l'étude, d'une part, et celui qui en permet l'étude, d'autre part, nous paraît cruciale pour observer et analyser le didactique sans entrer dans sa dénégation voire son refoulement comme nous y pousse la culture courante.

Pour voir le didactique derrière

---

[6]. On trouvera dans l'article proposé par A. Kuzniak, E. Montoya et L. Vivier dans ce même numéro des notations sur ces questions dans le contexte de la formation des professeurs des écoles.

l'épistémologique, les moments de l'étude fournissent un outil essentiel qui permet d'interroger de façon systématique ce que propose l'institution et ses modèles, qu'ils soient établis par la recherche en didactique ou non, notamment en examinant différentes façons dont les moments peuvent être réalisés. Nous ne reprendrons pas ici des développements que le lecteur pourra trouver dans nos travaux, et notamment dans une publication récente de cette même revue écrite en collaboration avec G. Cirade (ARTAUD & CIRADE, 2021).

MODELE PRAXEOLOGIQUE DE REFERENCE ET DIALECTIQUE DES MEDIAS ET DES MILIEUX

Nous l'avons dit, il y a une valorisation sociale de la production « savante »[7] de savoirs dont l'épistémologie au sens usuel se fait largement l'écho. L'étude d'un phénomène didactique nécessite pourtant de se déprendre de cette condition et nous avons indiqué des éléments que la TAD met à la disposition du chercheur pour cela et qui nous paraissent essentiels, sans prétendre à l'exhaustivité. Cette nécessité, pour le chercheur, du « pas de côté » - même si cette expression est quelque peu réductrice - s'exprime dans la notion de modèle praxéologique de référence (CHEVALLARD, 2013, 2017). Ce modèle est le fruit d'une enquête épistémologique au sens anthropologique, qui va donc recueillir des praxéologies autour de l'objet de savoir ou des objets de savoir concernés par le phénomène étudié dans les institutions où cet objet ou ces objets vivent, mais aussi constituer des praxéologies qui pourraient exister. En d'autres termes, il inclut théoriquement l'ensemble de l'équipement praxéologique dont le chercheur a besoin notamment pour analyser, « penser », les praxéologies présentes dans le didactique qu'il étudie. Voici par exemple ce que notait Y. Chevallard dans sa conférence au quatrième congrès sur la TAD, en considérant un didacticien, ξ_γ, devant réaliser des analyses didactiques à propos de trois systèmes didactiques notés $S(X_1 ; y_1 ; \wp_1)$, $S(X_2 ; y_2 ; \wp_2)$, $S(X_3 ; y_3 ; \wp_3)$:

> Un grand problème à étudier est alors le suivant : que doit savoir ξ_γ, non seulement des équipements praxéologiques des X_i et y_i ($1 \leq i \leq 3$), mais aussi des enjeux didactiques $\wp_1$, $\wp_2$, $\wp_3$? La réponse tient, pour cette dernière question, dans une expression : ce qu'il doit savoir doit pouvoir lui servir de modèle praxéologique de référence (MPR) dans les analyses didactiques à conduire. Mais que doit contenir ce MPR ? La question n'a jamais de réponse sûre, définitive. Ce qui est certain, c'est que, quelle que soit son histoire passée, ξ_γ doit enquêter à nouveaux frais sur $\wp_1$, $\wp_2$, $\wp_3$ et sur les conditions de tous niveaux qui les (sur)déterminent. (CHEVALLARD, 2017, p. 51)

On le voit, la notion de MPR est plus large que ce qu'en donne à voir la plupart des traces écrites que l'on en trouve dans les articles : ces traces écrites contiennent principalement les

7. Un savoir peut également être produit dans le cadre du fonctionnement d'un système didactique.

éléments du MPR que le chercheur juge pertinents pour justifier les analyses qu'il présente et il est parfois restreint à une praxéologie mathématique susceptible d'être enseignée qui sert de milieu à l'analyse de ce qui existe. Ajoutons que des modèles praxéologiques de référence existent pour d'autres positions institutionnelles, comme celle du professeur par exemple : un MPR pour la position de professeur inclut ce qui est utile au professeur pour penser et réaliser son enseignement.

Tels qu'ils sont définis théoriquement, les modèles praxéologiques de référence contiennent donc notamment, mais pas seulement, les ingrédients épistémologiques nécessaires à l'activité de la position institutionnelle considérée relativement au projet poursuivi – épistémologie qui, nous l'avons souligné dans la première partie de cet article, n'est pas réduite à l'épistémologie au sens classique du terme.

Dans la constitution d'un MPR, l'écologie des savoirs, qui est sous-jacente dans beaucoup des développements précédents, est importante, les neuf dialectiques de l'enquête identifiées par Y. Chevallard le sont aussi. Parmi celles-ci, nous insisterons sur la dialectique des médias et des milieux, qui nous paraît cruciale pour qu'un MPR évite le recopiage culturel et qu'une « enquête à nouveaux frais » existe réellement. Le travail de thèse de Sineae Kim (2015) développe des ingrédients importants à propos de cette dialectique, dont nous reprenons ici en les commentant certains des ingrédients liés à l'épistémologie et à la constitution d'un MPR.

Supposons qu'une question *Q* soit à l'étude par une position institutionnelle *p*, et que cette position institutionnelle *p* enquête pour constituer un MPR adapté à l'étude de *Q*. La position *p* va chercher des réponses ou des fragments de réponses à *Q* ou à des questions secondaires issues de l'étude de *Q* auprès de médias – un média étant n'importe quel émetteur d'un message. Un média est alors un milieu pour *Q* si les messages qu'émet ce média à propos de *Q* n'ont aucune autre intention que celle d'énoncer une vérité : il n'a par exemple aucune intention d'influencer les décisions ou les croyances du récepteur du message. Il est important de noter que la notion de milieu est relative à la question étudiée, *Q* : tel média qui est un milieu pour une question *Q* ne le sera pas pour une autre question *Q'* pour laquelle le message fourni a pour intention d'influencer le récepteur. La dialectique des médias et des milieux consiste alors à considérer toute assertion émise par un média comme une conjecture, qu'il faut prouver en la mettant à l'épreuve de milieux pour la question étudiée à laquelle elle apporte un fragment de réponse. Cela insiste ainsi sur la relativité du savoir, en liant la recherche de milieux à la question de la preuve d'une assertion (la dialectique des médias et des milieux était anciennement nommée dialectique de la conjecture et de la preuve). On notera qu'un seul milieu ne saurait valider une assertion.

L'inscription dans un MPR d'un savoir ou d'un élément de savoir est donc produite par la mise en œuvre d'une dialectique des médias et des milieux, vigoureuse, qui fait de cette dialectique et de la recherche de milieux appropriés un des fondements du travail du chercheur en didactique comme de toute position constituant un MPR. En d'autres termes, la dialectique des médias et des milieux et la recherche de milieux sont au cœur de la fabrication du savoir – et donc de l'épistémologie au sens étendu que lui donne la TAD.

CONCLUSION

La théorie anthropologique du didactique prend ainsi en compte « le savoir » en en faisant un concept de la théorie : il s'agit du *logos* d'une praxéologie. En le définissant ainsi, non seulement on obtient une manière fonctionnelle d'appréhender le « savoir savant » comme le *logos* de la praxéologie savante globale, mais encore cela permet de penser la relativité du savoir présent dans les institutions qui diffèrent de l'institution savante.

En effet, d'un côté, les processus de transposition institutionnelle qui définissent le savoir présent dans ces institutions modifient les praxéologies pour les adapter à l'écologie et à l'économie des institutions, créant ainsi un *logos* qui n'est pas le *logos* savant, même si des ingrédients de ce dernier peuvent s'y inscrire. D'un autre côté, un processus de transposition institutionnelle vient répondre à des besoins épistémologiques dont la définition dépend généralement d'une instance qui juge qu'il y a un « manque de savoir » dans l'institution – deux instances pouvant être en désaccord sur ce verdict de manque.

La satisfaction de ces besoins épistémologiques, relatifs là-encore, passent généralement par l'identification et la satisfaction de besoins praxéologiques, relatifs à l'enjeu de l'étude mais aussi en matière d'étude ou de direction d'étude : en effet, les praxéologies didactiques conditionnent voire contraignent l'existence des savoirs dans les institutions didactiques comme dans d'autres institutions.

Le travail épistémologique que nécessitent ces processus de transposition institutionnelle comme celui qu'implique l'étude d'une question aboutit à la constitution d'un modèle praxéologique de référence : à cet égard, la mise en œuvre obstinée d'une dialectique des médias et des milieux vigoureuse permet de se déprendre des conditions et des contraintes de la vie des savoirs dans les institutions de la société, notamment lorsque l'on fait agir la TAD comme milieu (voir ARTAUD & CIRADE, 2021).

La théorie anthropologique du didactique donne ainsi les moyens pour que le savoir en jeu dans un système soit considéré comme « un construit » au lieu d'être pris comme « un donné » et soit interrogé : c'est une des ruptures épistémologiques fondamentales effectuées par la TAD.

REFERENCES

ALFIERI, C. **Diriger l'étude dans le cadre du paradigme du questionnement du monde : une étude de cas sur l'optimisation des grandeurs.** Mémoire de master – Université d'Aix-Marseille, Marseille, 2019.

ARNAUD, D. et al. **Maths Tle, spécialité.** Paris : Magnard, 2020. https://manuel.sesamath.net/...

ARTAUD, M. **La mathématisation en économie comme problème didactique : une étude exploratoire.** Thèse (doctorat de mathématique) - Université d'Aix-Marseille II, Marseille, 1993.

ARTAUD, M. L'antimathématisme comme symptôme. In **Actes du séminaire didactique et technologies cognitives en mathématiques**, p. 85-117. Grenoble, France, 1994.

ARTAUD, M. Praxeologies to be taught and praxeologies for teaching: A delicate frontier. In M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García & J. Monaghan (Éds.). **Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education**, p. 33-40. Londres : Routledge, 2020.

ARTAUD, M. Des grandeurs et de leur mesure : besoins praxéologiques de la position de professeur et leur satisfaction. In H. Chaachoua et al. (Éds), **Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure – XXe école d'été de didactique des mathématiques Vol. 1**, p. 197-226. Grenoble, France : La pensée sauvage, 2021.

ARTAUD, M. ; CIRADE, G. La TAD comme milieu pour l'étude de l'activité des institutions didactiques. **Caminhos da educação matemática em revista (online)**, 11(1), p. 388-411, 2021. https://aplicacoes.ifs.edu.br/...

ARTAUD, M. CIRADE, G. & JULLIEN, M. Intégration des PER dans l'équipement praxéologique des professeurs. In M. Bosch et al (Éds). **Un panorama de la TAD**, p. 769-794. Barcelone, Espagne : CRM, 2011. http://www.crm.cat/....

BENHADI, S., EL KAINE, S. & FÉLIX, D. **Comment dynamiser l'enseignement des mathématiques ? Le cas des fonctions en classe de seconde**. Mémoire professionnel. Université de Provence (IUFM), Marseille, 2009.

BOSCH, M. ; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en didactique des mathématiques**, 19(1), 77-124, 1999. https://revue-rdm.com/...

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné**. 2e éd. Grenoble, France : La pensée sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Familière et problématique, la figure du professeur. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 17, n. 3, p. 17-54, 1997. http://yves.chevallard.free.fr/...

CHEVALLARD, Y. **Journal du séminaire TAD/IDD 2010-2011. Séance 4 du 11 mars 2011**. 2011. http://yves.chevallard.free.fr/...

CHEVALLARD, Y. **Journal du séminaire TAD/IDD 2012-2013. Séance 7 du 12 juillet 2013**. 2013. http://yves.chevallard.free.fr/...

CHEVALLARD, Y. La TAD et son devenir : rappels, reprises, avancées. In G. Cirade et al. (Éds), **Évolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société**, p. 27-65, 2017. https://citad4.sciencesconf.org

CENTRE NATIONAL DE RESSOURCES TEXTUELLES ET LEXICALES (CNRTL). Besoin. In **Le trésor de la langue française informatisé**, 2012. https://www.cnrtl.fr/...

KIM, S. **Les besoins mathématiques des Non-Mathématiciens quel destin institutionnel et social ? Études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques.** Thèse (doctorat de sciences de l'éducation) – Université d'Aix-Marseille, Marseille, 2015. http://www.atd-tad.org/...

SAMUELSON, P. A. **Foundations of**

Economic Analysis. Havard University, 1947.