CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 18 – 38
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Jean-Pierre **BOURGADE**[1]
UMR EFTS, Université de Toulouse (UT2J), France.
Gisele **CIRADE**[2]
UMR EFTS, Université de Toulouse (UT2J), France.
Clément **DURRINGER**[3]

Correspondance:

[1]jean-pierre.bourgade@univ-tlse2.fr
[2]gisele.cirade@univ-tlse2.fr
[3]clement.durringer@univ-tlse2.fr

Le « savoir » comme fonction

"Knowledge" as a function

RESUMÉ

Nous proposons de donner un aperçu de ce que la théorie anthropologique du didactique (TAD) permet de proposer concernant la théorisation du « savoir ». Parler du « savoir » comme d'une fonction permet d'en relativiser la nature : c'est toujours relativement à un contexte praxéologique ou didactique que l'on peut déterminer le niveau auquel un discours joue le rôle de « savoir ». Nous présentons ici quelques exemples d'analyses praxéologiques et didactiques, ainsi qu'une analyse d'un protocole expérimental tiré d'un manuel, dans le domaine des probabilités. Nous insistons également sur le risque d'une confusion entre *production* et *utilisation* du « savoir » : expression du déni du didactique, elle fait courir le risque de négliger certains gestes d'étude pourtant fondamentaux dans l'entreprise de théorisation mathématique.

Mots-clés: Théorie anthropologique du didactique (TAD), savoir, probabilités.

ABSTRACT

In this article, we propose to give an overview of the anthropological theory of the didactic (ATD), and more specifically of the theorisation of "knowledge" that this theory provides. Speaking of "knowledge" as a function allows us to relativise its nature: it is always in relation to a praxeological or didactic context that we can determine the level at which a discourse plays the role of "knowledge". We present here some examples of praxeological and didactic analyses, as well as an analysis of an experimental protocol from a textbook, in the field of probability. We also highlight the risk of confusion between the *production* and *use* of "knowledge": as an expression of the denial of the didactic, it carries the risk of neglecting certain gestures of study which are nevertheless fundamental in the undertaking of mathematical theorisation.

Keywords: Anthropological theory of the didactic (ATD), knowledge, probability.

Reçu dans 02/10/2023
Approuvé en 02/11/2023

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

INTRODUCTION

Selon le Trésor de la langue française informatisé (TLFi, voir CNRTL[1], 2012), on appelle *savoir* (substantif masculin) « [l']ensemble des connaissances d'une personne ou d'une collectivité *acquises* par l'étude, par l'observation, par l'apprentissage et/ou par l'expérience » (nous soulignons). Si le savoir s'acquiert, il se conserve également puisque *savoir* (verbe transitif), c'est « avoir *présent à l'esprit* un ensemble de connaissances rationnelles (concepts, idées, notions, images, représentations, affects), *acquises* par l'étude et par la réflexion, et constituant une synthèse ordonnée sur un objet de connaissance » (ibid., nous soulignons). Et, comme y insiste le TLFi (ibid.), savoir, c'est aussi « être en mesure de *pratiquer* une activité de façon suivie ; posséder la *science* et la *pratique* d'une science, un art, une technique » (nous soulignons).

Dans le langage courant, on le voit, le mot « savoir » peut aussi bien désigner le savoir *stricto sensu* associé à une pratique, que le complexe formé par la pratique et le savoir qui lui est associé. Dans cet article, nous parlerons essentiellement du savoir dans le premier sens, sachant que l'existence d'un savoir, en ce sens, découle du besoin de justifier, rendre intelligible, ou bien encore produire ou améliorer un savoir-faire, une pratique. C'est à ces fonctions que, dans les discours tenus sur les activités pratiquées, on reconnaît un élément de savoir pour ce qu'il est. Et nous considèrerons que, solidaire de la pratique qu'il fonde, explique et fait advenir, le savoir n'a d'existence comme savoir que dans sa relation dialectique à un savoir-faire : le théorème de Pythagore trouve son utilité dans le calcul de longueurs, le théorème des résidus permet de produire des techniques pour le calcul d'intégrales indéfinies, etc.

La théorie anthropologique du didactique (TAD) met en avant des complexes savoir-faire/savoir, les *praxéologies*, comme outils d'analyse – nous ferons en temps utile une rapide présentation de cette notion. Par exemple, lors de l'observation d'une activité en situation scolaire, le contenu enseigné peut être analysé comme une *praxéologie de savoir* (au sens large du terme), une praxéologie *mathématique* dans le cas que nous considérons ici, et l'activité du professeur pour en assurer l'étude et l'apprentissage, activité partiellement visible à travers les dispositifs mis en place et les gestes réalisés, peut également être analysée comme une praxéologie de direction d'étude, qui relève de ce qu'on appelle les *praxéologies didactiques*. Notons que, lors du processus d'étude, un même discours peut avoir des statuts divers : il peut jouer une fonction de justification d'un savoir-faire dans une praxéologie mathématique, ou bien, quitte à remplacer un verbe d'état par un verbe d'action, il peut participer de la description d'un savoir-faire. Le discours en soi n'a pas de statut praxéologique donné une fois pour toutes, c'est seulement l'analyse praxéologique et didactique qui permet de lui attribuer une fonction de savoir ou de savoir-faire. Il s'agit d'un point sur lequel nous incitons à la vigilance dans ce texte : si le savoir s'acquiert, il est parfois

[1] Centre national de ressources textuelles et lexicales.

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

délicat de faire la différence entre le processus d'acquisition – ou de production – d'un savoir, et ce savoir lui-même. Or la différence est, du point de vue didactique, fondamentale.

Dans ce qui suit, nous nous proposons d'analyser les conditions créées par l'enseignement des probabilités du cycle 4 au début du lycée en France (élèves de 12-16 ans) afin de mettre en évidence le fait qu'un énoncé comme la loi expérimentale des grands nombres peut jouer diverses fonctions dans l'étude des probabilités. L'étude d'un manuel donne à voir l'effet que peut produire le manque de clarification de ces diverses fonctions sur l'organisation de l'étude des probabilités.

UN *SAVOIR* RELATIF AUX PROBABILITES

Commençons par présenter succinctement lesdites conditions par le biais des programmes concernant ce secteur. Depuis la rentrée 2016, les probabilités sont introduites dès le début du cycle 4 (élèves de 12-15 ans)[2]. Le programme actuel de ce cycle (FRANCE, 2020), qui stipule que les élèves « abordent les notions d'incertitude et de hasard, afin de ne pas "subir" le hasard, mais de construire une citoyenneté critique et rationnelle », est présenté de façon synthétique dans le programme de la classe suivante (classe de seconde, élèves de 15-16 ans) :

> Au cycle 4, les élèves ont travaillé sur les notions élémentaires de probabilité : expérience aléatoire, issue, événement, probabilité. Ils ont construit leur intuition sur des situations concrètes fondées sur l'équiprobabilité, puis en simulant la répétition d'épreuves identiques et indépendantes pour observer la stabilisation des fréquences. Ils sont capables de calculer des probabilités dans des contextes faisant intervenir une ou deux épreuves. (FRANCE, 2019e, p. 13)

Une présentation du programme de la classe de seconde est ensuite proposée :

> En classe de seconde, on formalise la notion de loi (ou distribution) de probabilité dans le cas fini en s'appuyant sur le langage des ensembles et on précise les premiers éléments de calcul des probabilités. On insiste sur le fait qu'une loi de probabilité (par exemple une équiprobabilité) est une hypothèse du modèle choisi et ne se démontre pas. Le choix du modèle peut résulter d'hypothèses implicites d'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou dés équilibrés, tirage au hasard dans une population) qu'il est recommandable d'expliciter ; il peut aussi résulter d'une application d'une version vulgarisée de la loi des grands nombres, où un modèle est construit à partir de fréquences observées pour un phénomène réel (par exemple : lancer de punaise, sexe d'un enfant à la naissance). Dans tous les cas, on distingue nettement le modèle probabiliste abstrait et la situation réelle. (FRANCE, 2019e, p. 13)

Signalons pour conclure cette brève présentation que c'est à la rentrée 2008 que les probabilités ont été introduites au collège (élèves de 11-15 ans), et que leur enseignement était alors programmé la dernière année, en classe de troisième (élèves de 14-15 ans). Jusqu'alors, il

[2] En France, pour les élèves de 3 à 15 ans (école maternelle, école élémentaire et collège), l'enseignement est divisé en quatre cycles, chacun d'une durée de trois ans. Le cycle 4 concerne les élèves de collège âgés de 12 à 15 ans (soit les classes de cinquième, quatrième et troisième).

copyrigth©2023neuroMATH – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

fallait continuer ses études après le collège pour éventuellement aborder ce secteur, ainsi que le mentionne le programme de troisième en vigueur à la rentrée 2007 : « l'enseignement des statistiques fait au collège trouve au lycée, suivant les séries, plusieurs prolongements : la dispersion, avec l'introduction de l'écart-type, l'étude de séries statistiques à deux variables et l'introduction de probabilités à partir de la notion de fréquence » (FRANCE, 2004, p. 105).

Des activités

Nous allons maintenant considérer trois activités (fictives) dans lesquelles des élèves sont engagés sous la direction d'un professeur et qui, selon nous, devraient pouvoir être observées dans l'enseignement secondaire en France. Si, en pratique, elles ne le sont pas – pour des raisons qui tiennent notamment à l'écologie de la profession –, ces activités nous paraissent néanmoins « réalistes » du fait d'une bonne adéquation avec les programmes scolaires actuels – tant du point de vue mathématique que du point de vue didactique. Nous avons rédigé ces comptes rendus fictifs avec l'intention de mettre à la disposition du lecteur un texte proposant un processus d'étude possiblement réalisable, dans l'idée de pouvoir dégager des fragments de discours et de mettre en évidence leur articulation avec les pratiques (fictivement) observées. L'objectif est de donner à voir les différentes fonctions qu'un même discours peut être conduit à assumer selon le contexte d'étude dans lequel il apparaît. À cet effet, contrairement aux deux dernières activités qui sont présentées de façon très succincte, nous avons choisi de proposer pour la première un compte rendu assez détaillé afin de mieux étayer notre propos : cette première activité est consacrée à la *genèse* de la praxéologie mathématique en cours d'implémentation et permet de mieux percevoir les éléments d'un savoir en cours d'élaboration, tandis que les deux autres, dédiées au travail des mathématiques produites, ne le permettent pas au même degré.

Nous utiliserons ensuite le *modèle praxéologique* et le *modèle des moments de l'étude* pour dégager quelques éléments d'analyse didactique nous permettant d'étayer notre propos.

Activité $\tilde{a}_1$: autour du lancer de deux dés

L'activité $\tilde{a}_1$ a lieu dans une classe de troisième (fin du cycle 4, élèves de 14-15 ans) constituée de 32 élèves. Lors d'une précédente activité, la question suivante avait été dégagée : « On lance 640 fois deux dés en notant à chaque fois la somme des deux nombres obtenus. Obtient-on 6 un plus grand nombre de fois que si on avait lancé un seul dé ? » La classe avait convenu d'effectuer une expérience et chaque élève devait, en travail hors classe, lancer 20 fois deux dés, noter le nombre de succès obtenus et déposer son résultat, le nombre de succès sur ses 20 lancers, dans une feuille de calcul en ligne dédiée. Au début de l'activité, le professeur présente, par vidéo-projection, les données produites par les élèves : 0, 3, 3, 3, 2, 4, 5, 4, 4, 3, 4, 0, 2, 2, 4, 1, 7, 5, 3, 2, 1, 2, 4, 0, 4, 4, 1, 4, 1, 4, 3, 2. Le résultat cherché est alors immédiat grâce au tableur : on a obtenu 91 succès sur les 640 lancers. Il reste maintenant à estimer le nombre de succès qu'on aurait eu avec un seul dé, et la classe s'accorde pour dire que, comme $640 \div 6 \approx 106{,}7$, on aurait eu à peu près 107 lancers. Elle conclut qu'on obtient 6 moins souvent avec deux dés qu'avec un seul.

La classe observe néanmoins que les

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

résultats pour chaque série de 20 lancers sont très différents. En effet, trois élèves n'obtiennent jamais de succès, dix ont obtenu 4 succès, un a obtenu 7 succès, etc. La classe s'interroge alors sur la validité du résultat obtenu pour les 640 lancers : qu'obtiendrait-on si on renouvelait l'expérience ? Le professeur signale qu'on pourrait simuler au lieu de recommencer l'expérience à nouveaux frais, et la classe s'engage alors dans une simulation sous sa direction. Les élèves se répartissent par binômes sur les postes informatiques disponibles et effectuent une simulation par poste, ce qui donne les résultats suivants : 81, 101, 85, 79, 89, 85, 86, 89, 87, 103, 90, 94, 97, 80, 94, 90. On observe qu'il est difficile de conclure, car le nombre de succès est variable : il est compris entre 79 et 103. Cela dit, certains élèves remarquent que l'amplitude des résultats obtenus est, toute proportion gardée, plus faible avec 640 lancers simulés 16 fois que dans l'expérience réalisée hors classe. En effet, l'amplitude de 0 à 7 sur 20 lancers représente 35 % de l'amplitude maximale (on peut obtenir le résultat 6 entre 0 et 20 fois *a priori*), alors que l'amplitude de 79 à 103 lancers représente seulement 4 % de l'amplitude maximale (on peut désormais obtenir le résultat 6 entre 0 et 640 fois *a priori*).

Le professeur s'appuie sur ce constat pour inviter les binômes à poursuivre la simulation en prenant des effectifs « plus importants », sans toutefois imposer le nombre de lancers à simuler. Certains élèves produisent une simulation de 3 507 lancers, d'autres une simulation de 8 323 lancers, etc. La classe met en commun les résultats obtenus, mais note qu'il est difficile de procéder à une comparaison du fait de la différence des nombres de lancers simulés. On décide alors de comparer les proportions de succès obtenus par les binômes. Par exemple, le binôme ayant simulé 8 323 lancers obtient 1 190 succès, soit une proportion de l'ordre de 14,3 % ; celui qui a simulé 3 507 lancers obtient 520 succès, soit une proportion de l'ordre de 14,8 %. Après quelques échanges, les binômes rajoutent une colonne permettant d'avoir les proportions de succès au fur et à mesure que le nombre de lancers simulés augmente. Pratiquement tous les binômes notent que, sur la fin, « ça a l'air de moins bouger » et même « de ne pas bouger beaucoup » suivant la façon dont on arrondit les pourcentages. Effectivement, en considérant collectivement les dernières données du binôme ayant simulé 8 323 lancers, la classe constate qu'à partir du 7630^{e} lancer, on obtient toujours une proportion cumulée de 14,3 %.

La classe convient alors que chaque binôme refait une simulation portant sur un nombre de lancers supérieur à 8 000 et ne dépassant pas trop 10 000. Chaque équipe peut alors constater que, sur la fin, les proportions sont sensiblement égales à 14 % ou (en moins grand nombre) à 13 %. On décide de garder 14 % comme valeur, et de l'utiliser pour estimer le nombre de succès quand on effectue 640 lancers : on obtient à peu près 90 succès (14 % de 640 donne 89,6). La classe note que la valeur obtenue est proche de celle obtenue lors de l'expérience menée par les élèves avec des dés, où la classe avait eu 91 succès sur 640 lancers. Après de nombreux échanges portant sur les différentes simulations réalisées par les binômes, la classe produit l'assertion suivante, tout en s'accordant sur le fait qu'elle devrait encore être testée : « Dans une expérience aléatoire à deux issues, succès et échec, lorsqu'on effectue un très grand nombre

neuroMATH

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

d’épreuves, les proportions cumulées de succès ont tendance à se stabiliser au fil du temps. »

Ultérieurement, la classe institutionnalisera le discours *D* suivant:

> *D* : « Quelquefois, on n’arrive pas à estimer facilement le nombre de réalisations d’un événement lorsqu’on effectue un certain nombre d’épreuves, et on est alors amené à effectuer une simulation. En effet, si on simule une expérience aléatoire et que l’on considère un événement *A*, on observe que les fréquences cumulées de *A* ont tendance à se stabiliser (le nombre de décimales qui ne se modifient plus augmente) lorsque le nombre de réalisations de l’expérience croît. Si on réalise plusieurs simulations pour la même expérience, on observe le même phénomène de stabilisation et les valeurs prises par les fréquences dans les diverses simulations sont proches les unes des autres. Cela permet de définir la probabilité de cet événement *A* comme une “bonne” valeur approchée de ces fréquences. On obtient alors une “bonne” valeur approchée du nombre de réalisations de l’événement en multipliant sa probabilité par le nombre d’expériences réalisées. Par ailleurs, le même constat entraîne que les fréquences sont aussi de “bonnes” valeurs approchées de la probabilité. La simulation permet ainsi de produire une valeur approchée de la probabilité, valeur que l’on peut alors utiliser dans les calculs (pour estimer le nombre de réalisations d’un événement, par exemple), à la place de la valeur exacte, si l’on n’est pas parvenu à la calculer. »

Activité $\tilde{a}_2$: autour du lancer de trois dés

L’activité $\tilde{a}_2$, qui a lieu dans une classe de seconde, s’organise à partir de la question suivante : « On lance trois dés (équilibrés), on calcule la somme des nombres obtenus et on regarde s’il s’agit d’un carré parfait ; on répète ce lancer 200 fois et on note le nombre de fois où l’on a obtenu un carré parfait. Que peut-on prévoir comme résultat ? »

La classe détermine tout d’abord la probabilité d’obtenir un carré parfait, en s’appuyant sur une simulation. Celle-ci est réalisée sur une feuille de calcul proposant 10 000 lancers, et la fréquence cumulée de l’événement « la somme est un carré parfait » est calculée pour chacun des lancers successifs. La classe considère alors la fréquence cumulée sur 10 000 lancers : 15,93 %, et décide de choisir 16 % comme valeur pour la probabilité avant de conclure que l’on devrait obtenir un carré parfait environ 32 fois sur 200 lancers, car 200 × 16 % = 32.

Activité $\tilde{a}_3$: autour d’un jeu

L’activité $\tilde{a}_3$ a lieu elle aussi dans une classe de seconde, et il s’agit de répondre à une question concernant un jeu : « On lance deux dés (équilibrés) et on calcule la somme des nombres obtenus. Si on n’obtient pas 6, on a perdu et on s’arrête. Si on obtient 6, on relance les deux dés, on calcule la somme des nombres obtenus et, pour gagner, il faut obtenir à nouveau 6. En jouant 200 fois à ce jeu, combien de fois (environ) va-t-on gagner ?»

Après avoir convenu que, dans un tel cas, on ne sait pas calculer la probabilité de succès, la classe se lance dans une simulation pour l’obtenir, en modélisant le jeu par la succession de deux lancers, sans condition d’arrêt – ce qui rend un certain nombre d’élèves assez dubitatifs. Sur les 18 binômes constitués, l’un d’entre eux obtient 5 succès sur 200 et les 17 autres 4 succès sur 200. Après discussion, la classe décide de faire une autre tentative pour déterminer le nombre de succès, en s’appuyant sur le calcul des

neuroMATH

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

probabilités pour obtenir une estimation de la fréquence d'apparition d'une somme égale à 6 quand on lance deux dés. Les élèves calculent la probabilité de cet événement avec un tableau à double entrée, et considèrent la valeur obtenue, 5/36, comme une bonne estimation de la fréquence. La classe conclut ensuite de la façon suivante : quand on effectue 200 parties, pour estimer le nombre de fois où l'on obtient une somme égale à 6 avec un lancer de deux dés, on calcule 200 × 5/36 ($=_c$ 27,7…), ce qui donne environ 28 parties qui permettent de poursuivre le jeu ; comme 28 × 5/36 $=_c$ 3,88…, on peut alors conclure que parmi ces 28 parties, on en a environ 4 de gagnantes. La classe note qu'on a obtenu le même résultat que précédemment.

Analyse praxéologique, analyse didactique

Il s'agit maintenant de déterminer en quoi consistent ces activités $\tilde{a}_i$. Dans chacun des cas, deux positions institutionnelles se dégagent : celle d'élève *e* de l'école *E* et celle de professeur π de l'école *E*. C'est sur la position d'élève, $\hat{e}$ = (*E*, *e*), que nous allons nous pencher et, cette activité étant *didactique* pour cette position[3], nous allons procéder à une *analyse didactique*. Pour cela, de l'arsenal modélisateur offert par la TAD, nous utiliserons essentiellement le *modèle praxéologique* et le *modèle des moments de l'étude*[4]. Le premier nous permettra d'analyser l'œuvre mathématique *enjeu de l'étude* et le second d'aborder l'analyse du *processus d'étude* dans lequel les élèves se sont engagés. Présentons brièvement ces deux modèles.

En TAD, on postule « que *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume […] le mot de *praxéologie* » (CHEVALLARD, 1999, p. 223). Pour modéliser une activité « régulièrement accomplie » par une certaine position institutionnelle[5] $\hat{\imath}$ = (*I*, *p*), la notion de *type de tâches*, *T*, est fondamentale : il s'agit de dégager *ce que fait* l'instance $\hat{\imath}$, à travers les diverses *tâches* « du même type » qu'elle accomplit. Se pose ensuite la question de savoir *comment fait* l'instance $\hat{\imath}$ pour accomplir ce type de tâches *T*, ce qui appelle une réponse sous la forme de la description d'une *technique* τ. L'analyse se poursuit avec la production d'un discours (*logos*) sur la technique (*techne*), discours que l'on nommera *technologie* θ, qui rend compte de la manière dont l'instance $\hat{\imath}$ *justifie* la technique mise en œuvre. Enfin, la justification de la technologie elle-même relève d'un autre discours, qui constitue en quelque sorte l'*horizon* de ladite praxéologie pour la position $\hat{\imath}$ – voire pour l'institution *I* –, discours que l'on appelle la *théorie* Θ, qui comporte

[3] Pour le professeur, il ne s'agit pas d'une activité didactique – sauf si celle-ci a lieu dans le cadre d'une formation professionnelle. On peut bien sûr analyser une telle activité en considérant la position de professeur, mais dans le cas où l'on estime qu'il s'agit d'une activité humaine *régulièrement accomplie de façon routinière*, on s'attachera seulement à dégager un *modèle praxéologique* de cette activité.

[4] Les deux articles d'Yves Chevallard (1999, 2007) cités ultérieurement dans cette section proposent une présentation assez développée du modèle praxéologique et du modèle des moments de l'étude.

[5] Dans la suite, nous utiliserons également le terme d'*instance*, que l'on peut définir ainsi : « in order to present a unitary view of persons *x* and institutional positions (*I*, *p*), I now introduce the noun *instance* in order to designate either a *person* or a *position* » (CHEVALLARD, 2020).

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

essentiellement des éléments *implicites*, *évanescents*, que l'on n'évoque que très rarement de façon explicite du fait qu'ils semblent aller de soi[6]. On a ainsi dégagé une praxéologie, $\wp = [T / \tau / \theta / \Theta]$, que l'on qualifiera de *ponctuelle* car elle est constituée autour d'un *unique* type de tâches. Notons que l'on peut distinguer la *praxis* (ou bloc pratico-technique), $\Pi = [T / \tau]$, couramment nommée *savoir-faire*, et le *logos* (ou bloc technologico-théorique), $\Lambda = [\theta / \Theta]$, ordinairement identifié comme un *savoir*, mais que ces deux « blocs » sont intimement articulés : le *logos* est toujours *logos* d'une *praxis*, tandis que la *praxis* ne peut se *comprendre* que par référence à un *logos*. L'analyse praxéologique s'appuiera sur ce modèle tout en ne s'y réduisant pas, les diverses praxéologies ponctuelles dégagées s'agrégeant généralement pour donner lieu à des praxéologies plus complexes – on qualifiera notamment de *locales*, *régionales* et *globales* celles qui sont constituées autour d'une même technologie, d'une même théorie ou de plusieurs théories, toujours relativement à une certaine instance *î*.

Un fois un modèle praxéologique de l'enjeu de l'étude dégagé, il s'agira d'analyser le didactique qui a permis son implémentation dans l'activité considérée, ce que nous ferons ici en utilisant essentiellement le *modèle des moments de l'étude*, car « en dépit de sa très grande complexité, on peut […] aborder la description et l'analyse d'une organisation didactique relative à l'organisation mathématique locale $O = [T_i / \tau_i / \theta / \Theta]_{1 \leq i \leq n}$ en examinant la manière dont elle prend en charge certaines *fonctions didactiques* clés, les différents *moments* de l'étude » (CHEVALLARD, 2007, p. 729). En voici une présentation synthétique:

> 1. le moment de l'identification d'un type de tâches $T \ni t$ et de la première rencontre avec T ;
> 2. le moment de *l'exploration* (plus ou moins poussée) du type de tâches T et de *l'émergence de la technique* τ ;
> 3. le moment *technologico-théorique*, qui voit la création du bloc $[\theta / \Theta]$ (ce moment est contemporain notamment du premier moment, lorsqu'il faut identifier T) ;
> 4. le moment *du travail* de l'organisation praxéologique $[T / \tau / \theta / \Theta]$ ainsi ébauchée, et en particulier *du travail de la technique*, où *l'on fait travailler* les éléments de l'organisation élaborée pour s'assurer qu'ils « résistent » (et, le cas échéant, pour les améliorer), et où, en même temps, on *travaille sa maîtrise* de l'organisation considérée, et en particulier de la technique τ ;
> 5. le moment *de l'institutionnalisation*, où l'on *met en forme* l'organisation praxéologique $[T / \tau / \theta / \Theta]$, en précisant chacun de ses composants, et en l'amalgamant le cas échéant à un complexe praxéologique existant ;
> 6. le moment *de l'évaluation*, où l'on évalue sa *maîtrise* de l'organisation praxéologique créée, mais aussi où l'on évalue *cette organisation praxéologique elle-même*. (CHEVALLARD, 2011, p. 7)

Dans notre analyse, nous nous en tiendrons essentiellement au *repérage* des différents moments de l'étude réalisés lors de ces activités en laissant de côté l'analyse de leur *réalisation*, ce qui bien sûr n'épuise en rien le travail

[6] La notion de *théorie* prend donc en TAD un sens très spécifique, qui diffère sensiblement du sens usuel. En revanche, l'utilisation usuelle du mot *théorie* correspond à un usage métonymique du mot *théorie* au sens de la TAD.

neuroMATH

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

d'analyse que permet ce modèle mais nous suffira à dégager les éléments essentiels à notre propos. Reprenons maintenant chacune des trois activités en commençant par une analyse de la praxéologie en cours d'implémentation.

Analyse praxéologique de l'enjeu de l'étude

Les trois activités visent à permettre à $\hat{e}$ d'intégrer dans son équipement praxéologique[7] une même praxéologie mathématique constituée autour du type de tâches T_{nb} consistant à déterminer le nombre N de fois qu'un événement A donné se réalise lors de la répétition d'une même expérience aléatoire. La technique fera apparaître un sous-type de tâches[8], T_p : déterminer la probabilité d'un événement A. Nous verrons que ces deux praxéologies ponctuelles relèvent du même *logos*.

Commençons par la praxéologie $\wp_p = [T_p / \tau_p / \theta / \Theta]$. La *technique* pourra trouver avantage à être décomposée en deux techniques amalgamées : la technique *fréquentiste* (basée sur la détermination de fréquences) et la technique *probabiliste* (fondée sur un calcul de probabilités). La technique *fréquentiste* va alors consister à effectuer une *simulation*[9] de l'expérience, en simulant un « très grand nombre d'épreuves » (par exemple : environ 10 000), puis à choisir comme probabilité la dernière fréquence cumulée obtenue, en l'arrondissant à un « petit nombre de décimales » (par exemple : 2). La technique *probabiliste* consiste à déterminer *a priori* la probabilité des événements élémentaires, par exemple avec des hypothèses (souvent implicites) d'équiprobabilité, et à calculer la probabilité de l'événement considéré. Dans l'activité $\tilde{a}_1$, on utilise la technique fréquentiste pour le lancer de deux dés ; dans l'activité $\tilde{a}_2$, c'est aussi la technique fréquentiste que l'on utilise ; dans l'activité $\tilde{a}_3$, la technique fréquentiste permet de déterminer la probabilité de succès et la technique probabiliste de calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 avec un lancer de deux dés.

Passons maintenant au *logos*. Le discours technologique permettant de justifier, produire, rendre intelligible la technique fréquentiste est résumé dans le discours D introduit plus haut, qui met en évidence les éléments technologiques suivants : on peut définir la probabilité d'un événement car on constate que les fréquences se stabilisent ; les fréquences sont alors de bonnes approximations de la probabilité et la probabilité une bonne approximation des fréquences. On notera que l'énoncé qu'on pourrait extraire du discours pour mettre en évidence la stabilisation des fréquences ne serait pas un théorème mais aurait le statut d'axiome dans la théorie[10] probabiliste disponible (la *loi expérimentale des*

[7] L'*équipement praxéologique* d'une instance est l'ensemble des praxéologies dont dispose cette instance (voir CHEVALLARD 2007, p. 716).

[8] Au sens défini par Michèle Artaud : on dit que T est un sous-type de tâches de T' pour une certaine instance si, selon cette instance, T entre dans l'accomplissement de la technique relative à T'.

[9] On notera que *simuler* un système, c'est *expérimenter sur un modèle* de ce système.

[10] On utilise ici, exceptionnellement, le mot « théorie » dans un sens plus usuel : il ne s'agit pas de référer à la quatrième composante des praxéologies (la *théorie* Θ), mais bien, par métonymie, d'évoquer une organisation praxéologique régionale, relative aux probabilités.

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

grands nombres, voir CHEVALLARD & WOZNIAK, 2011) : on a pu établir sa robustesse expérimentalement sans pouvoir le déduire ni le contredire dans la théorie jusqu'alors disponible. Le discours D laisse aussi entrevoir des éléments théoriques[11] : si on effectuait un nombre encore plus grand d'épreuves, ce serait la même chose – il y aurait toujours stabilisation, et cela autour de la valeur déjà dégagée ; on obtiendrait des résultats analogues si l'on considérait un autre événement, ou bien encore dans le cas d'une autre expérience aléatoire ; quand on sait calculer une probabilité avec la technique probabiliste, on obtient la même chose qu'avec la technique fréquentiste.

La technique probabiliste, quant à elle, est justifiée par des éléments technologico-théoriques qui *découlent* du discours D, sans s'y réduire : ainsi, les règles de calcul avec les probabilités (le principe d'additivité notamment : la probabilité d'une union disjointe d'événements est la somme de leurs probabilités, etc.) sont des règles qui valent pour les fréquences et sont maintenues à titre d'axiomes pour les probabilités. La théorie (au sens de la TAD) comporte alors l'élément suivant : un objet mathématique construit comme modèle d'un autre objet mathématique conserve certaines propriétés structurelles de l'objet modélisé (principe de permanence). On notera qu'il ne s'agit pas d'un élément de la théorie *mathématique* des probabilités (au sens usuel du terme *théorie*), mais bien d'un élément de la théorie en tant que composante Θ de la praxéologie $\wp_p$, qui vient justifier, rendre intelligible, produire la technologie : le principe de permanence vient ainsi, par exemple, *expliquer le choix* qui est fait de poser comme propriété définitoire de la probabilité son additivité.

Passons maintenant à l'analyse de la praxéologie $\wp_{nb} = [T_{nb} / \tau_{nb} / \theta / \Theta]$. La *technique* τ_{nb} consiste à calculer la probabilité de l'événement A et à multiplier cette probabilité par le nombre n d'épreuves répétées : on calcule $N = n \times \mathrm{P}(A)$, et on dit que le nombre cherché est un entier proche du résultat N. Du point de vue du *logos*, on retrouve les discours évoqués ci-dessus, ainsi que les suivants : « Pour calculer N, on doit multiplier n par une estimation de la fréquence de réalisation de l'événement A sur n lancers ; on choisit comme multiplicateur la probabilité d'obtenir A, car cette dernière est une bonne approximation des fréquences » (discours technologique) ; « Même si on calcule N en se plaçant dans le cas où n n'est pas très grand, la probabilité, choisie à l'aide d'une simulation d'un très grand nombre d'épreuves, permettra d'obtenir une estimation de N » (discours théorique).

Une autre technique pourrait être implémentée pour obtenir le nombre N, sans faire appel à la probabilité de l'événement A mais en partant de la réalisation d'une série de 200 lancers. Si la *réalisation unique* de l'expérience elle-même ou sa *simulation une seule fois* ne donnent *a priori* pas la meilleure approximation du nombre de succès pour les réalisations *en général* de cette même expérience (ici, l'échantillon d'effectif 200 n'est pas suffisant), en revanche, si chaque élève produit une simulation de 200 lancers, pour une classe

[11] Cette fois, le mot « théorique » est à prendre au sens de la TAD.

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

de 32 élèves on obtient un échantillon de 6 400 lancers qui permet de donner une valeur de N assez proche de celle que l'on peut obtenir avec la technique précédente. En effet, l'associativité du calcul de fréquence et du calcul de moyenne fait que la moyenne du nombre de succès obtenus dans les 32 simulations de 200 lancers est égale au produit par 200 de la fréquence de succès obtenue pour une série de 6 400 lancers. On notera que la technique précédente, avec une première étape consistant à déterminer la probabilité de l'événement A, permet ensuite de fournir très simplement le résultat pour un nombre n quelconque d'épreuves répétées.

Analyse didactique

Si les trois activités permettent l'implémentation d'une même praxéologie pour l'instance $\hat{e}$ (la position d'élève), du point de vue didactique la première se distingue des deux autres en ce qu'elle va permettre la *genèse* de cette praxéologie, à savoir, s'agissant des moments de l'étude, essentiellement la réalisation des moments de première rencontre avec le type de tâches, de l'émergence de la technique et de la construction de l'environnement technologico-théorique. Dans la suite, nous nous en tiendrons à l'analyse didactique de la praxéologie $\wp_p$.

Considérons tout d'abord l'activité $\tilde{a}_1$. Le type de tâches T_p consiste, ainsi que nous l'avons vu, à déterminer la probabilité d'un événement, et l'on considère ici la tâche t_1 relative à l'obtention d'une somme égale à 6 lors d'un lancer de deux dés. On peut dégager un épisode du *moment de première rencontre avec* T_p lorsque la classe décide de « garder 14 % comme valeur, et de l'utiliser pour estimer le nombre de succès quand on effectue 640 lancers » ; en effet, pour estimer ce nombre de succès, il est indispensable pour la classe de faire intervenir les proportions calculées, mais celles-ci n'ont pas toutes la même valeur et cela entraine le besoin de déterminer un nombre qui soit une bonne approximation de ces proportions – ce nombre est la probabilité. La technique τ_p, dans sa déclinaison fréquentiste, s'appuie sur la simulation d'un très grand nombre d'épreuves ; l'*émergence de la technique*, qui commence avec l'expérimentation menée en début d'activité, se poursuit avec les simulations réalisées, à la fois sur les effectifs et sur les proportions, et s'achève, provisoirement peut-être, sur le choix de « garder 14 % comme valeur ». Le *logos*, quant à lui, est résumé par l'assertion produite par la classe à la fin de l'activité et qui porte sur la stabilisation des proportions cumulées au fil du temps ; le *moment technologico-théorique* est en interrelation étroite avec le moment d'émergence de la technique, et se réalise en différents épisodes, aussi bien lors du travail sur les effectifs, quand certains élèves constatent que « l'amplitude des résultats obtenus est […] plus faible » lorsque l'expérience est répétée un grand nombre de fois, que lors du travail sur les proportions, quand « les binômes notent que, sur la fin, “ça a l'air de moins bouger” » et que « chaque équipe peut alors constater que […] les proportions sont sensiblement égales à 14 % ou (en moins grand nombre) à 13 % ». Comme on le voit, c'est en étant engagée dans un processus *dialectique d'expérimentation et de théorisation* (KIM, 2015), que la classe va à la fois faire émerger une technique et la justifier. La genèse praxéologique est déjà bien engagée, même si elle va se poursuivre en troisième et, plus tard, en seconde.

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

Passons à l'activité $\tilde{a}_2$, toujours en se centrant sur la praxéologie $\wp_p$, en commençant par rappeler une partie du bref compte rendu que nous avons proposé :

> La classe détermine tout d'abord la probabilité d'obtenir un carré parfait, en s'appuyant sur une simulation. Celle-ci est réalisée sur une feuille de calcul proposant 10 000 lancers, et la fréquence cumulée de l'événement « la somme est un carré parfait » est calculée pour chacun des lancers successifs. La classe considère alors la fréquence cumulée sur 10 000 lancers : 15,93 %, et décide de choisir 16 % comme valeur pour la probabilité […].

On peut observer la *mise en œuvre* de la technique τ_p dans sa déclinaison fréquentiste, relativement à la tâche t_2 qui consiste à déterminer la probabilité d'obtenir un carré parfait en effectuant la somme des résultats obtenus suite au lancer de deux dés : la genèse praxéologique de $\wp_p$ a déjà eu lieu antérieurement, notamment lors de l'activité $\tilde{a}_1$. Il s'agit ici essentiellement du *moment du travail* de l'organisation praxéologique, plus précisément *de sa technique*.

Passons maintenant à l'activité $\tilde{a}_3$, dans laquelle il s'agit d'estimer le nombre de parties gagnantes lors d'un jeu reproduit 200 fois. On peut observer la *mise en œuvre* de la technique τ_p, à la fois dans sa déclinaison *fréquentiste*, pour obtenir la probabilité de succès (tâche t_{3a}), et dans sa déclinaison *probabiliste*, quand on calcule la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 en lançant deux dés (tâche t_{3b}). Comme précédemment, il s'agit essentiellement du *moment du travail* de l'organisation praxéologique $\wp_p$, plus particulièrement de la *technique*. Mais reprenons la dernière partie, où il s'agit de déterminer, directement et par le calcul, le nombre de succès. Le compte rendu indique : « Les élèves calculent la probabilité de cet événement avec un tableau à double entrée, et considèrent la valeur obtenue, 5/36, comme une bonne estimation de la fréquence. » Ici, c'est aussi *l'environnement technologico-théorique* que l'on travaille : alors que, dans l'activité $\tilde{a}_2$ et au début de l'activité $\tilde{a}_3$, les fréquences, quand elles se stabilisent, fournissent une bonne approximation de la probabilité, ici, c'est la probabilité qui est vue comme une bonne estimation de la fréquence que l'on cherche.

Remarques concernant le *logos*

Alors que dans la première activité le discours D rend compte d'un savoir *produit* par ladite activité, dans les deux autres, il exprime un savoir que l'on peut considérer comme *connu*, et dont on sait qu'il permet de justifier la technique mise en œuvre, cela grâce à une expérimentation à laquelle on pourrait faire *référence*, mais qui n'est pas réalisée dans le cadre de l'activité considérée : il ne faut pas confondre la simulation d'un grand nombre de lancers qui, dans les activités $\tilde{a}_2$ et $\tilde{a}_3$, relève de la mise en œuvre de la technique, avec la réalisation d'une expérimentation systématique, portant sur différents systèmes (le dé, la pièce, etc.) et s'appuyant sur des expérimentations et des simulations, qui permet de produire le discours D. Remarquons par ailleurs que si, dans l'activité $\tilde{a}_1$, la probabilité (le nombre « choisi ») est une bonne approximation des fréquences cumulées, ensuite le point de vue est différent : les fréquences observées dans la mise en œuvre de la technique sont prises comme de bonnes approximations de la probabilité dont le statut épistémique n'est plus considéré comme problématique – on sait qu'elle existe, même si

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

on ne connaît pas (encore) sa valeur –, alors qu'il l'est dans l'activité $\tilde{a}_1$, où la classe est conduite à formuler un postulat qui garantit en quelque sorte que la probabilité d'un événement existe et est bien définie. Notons aussi que, dans la deuxième partie de l'activité $\tilde{a}_3$, c'est la probabilité qui est vue comme une bonne approximation de la fréquence que l'on cherche. Ce que l'on *sait* à propos de la probabilité varie selon le contexte didactique, et le même discours *D* peut ainsi jouer des fonctions diverses dans des contextes différents – au sein d'une même institution et pour une même position dans cette institution. L'attribution d'une *signification* à ce discours est en quelque sorte tributaire d'une analyse praxéologique et didactique : les fonctions qu'un discours joue en tel ou tel contexte nourrissent sa signification dans ce contexte.

De façon générale, si le *savoir* est savoir d'un savoir-faire, *logos* d'une *praxis*, il est aussi savoir *établi* ou savoir *en émergence*. La production d'un *logos* est une *fonction de l'étude*, comme c'est le cas de la production d'une *praxis* : ces fonctions ne sont pas des fonctions pérennes du *logos* ou de la *praxis*. La difficulté à distinguer ces deux aspects, *savoir établi* et *émergence du savoir*, se redouble du fait que la réalisation de ces fonctions didactiques, qui relèvent d'une fonction plus générale de *production praxéologique*, peut nécessiter la mise en branle d'un savoir ou d'un savoir-faire qui peut s'identifier partiellement au savoir ou au savoir-faire en cours de production. Il faut donc éviter de prendre un discours pour ses fonctions : hors contexte fonctionnel, on ne peut, sans ambiguïté, attribuer d'usage à un discours. En outre, les fonctions que l'on considère ici sont soit praxéologiques (*technologico-théoriques* pour le « savoir » comme savoir d'un savoir-faire), soit didactiques (de *production de l'environnement technologico-théorique* dans le cas du « savoir » comme savoir d'un savoir-faire *à produire*). Les premières fonctions relèvent de *l'analyse praxéologique*, les secondes de l'analyse du processus d'étude visant à mettre en place l'entité praxéologique considérée, c'est-à-dire de *l'analyse didactique*. L'une des expressions du déni [12] du didactique consiste précisément à prendre les unes pour les autres, et à croire que « dire c'est faire » et que pour *produire* du *logos*, il suffit de le *dire*.

LE DENI DU DIDACTIQUE ET LA CONFUSION DES FONCTIONS DU SAVOIR

Le *déni du didactique* est une contrainte forte qui trouve son origine au niveau de la société, voire de la civilisation, dans l'échelle des niveaux de codétermination didactique. Il consiste notamment, pour une instance donnée (position ou personne), en la confusion entre gestes *praxéologiques* (ici, mathématiques) et gestes *didactiques*, en *déniant* toute spécificité aux gestes d'étude proprement dits. Il s'exprime également dans le fait, pour une instance, de ne pas reconnaître l'existence de certains gestes, ou de ne pas leur reconnaître un caractère

[12] Dans ce texte, nous considérerons le « déni » comme l'« action de dénier, de refuser de reconnaître la vérité ou la valeur d'une chose » (CNTRL, 2012).

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

didactique. Le fait que le savoir s'acquière au prix d'un travail spécifique est largement remis en question sous la contrainte du déni du didactique puisque l'utilité et la nécessité de l'étude à des fins de genèse des savoirs et savoir-faire y sont *déniés*. Une des expressions du déni du didactique, de ce point de vue, se manifeste dans la confusion entre la genèse d'une praxéologie et son utilisation. C'est ce phénomène que l'on cherche maintenant à mettre en évidence par l'exploitation d'une activité présentée dans un manuel scolaire.

L'expérimentation et la théorisation dans les manuels : un exemple

Les manuels constituent un matériau, parmi d'autres, pour servir à l'enseignement des mathématiques. La plupart des enseignants les utilisent comme ressources pour choisir des exercices et des problèmes, mais certains les utilisent également pour concevoir des « activités » ou des notes de synthèses qui s'inscriront sur les cahiers des élèves. Nous faisons le choix d'étudier ici un manuel, en essayant de décrire, à côté des composantes praxéologiques présentées (WIJAYANTI & WINSLØW, 2017), les indices d'organisations possibles de leur étude : il s'agit de dégager non seulement l'environnement technologico-théorique relatif aux probabilités, mais aussi les pistes fournies pour la réalisation en classe du *moment technologico-théorique*, en l'occurrence la présentation dans un manuel d'une « activité » basée sur un *protocole expérimental*. Nous allons donc essayer de repérer dans le manuel lui-même, outre les mathématiques étudiées, des indices à propos de gestes didactiques dont il pourrait suggérer la réalisation.

Le support d'activité et quelques éléments de contexte

Le chapitre 9, intitulé « Probabilités », du manuel de troisième [13] élaboré sous la coordination de Perrine Godebin (2021) propose tout d'abord, dans la rubrique « Déjà vu », le classement d'évènements du moins probable au plus probable et le calcul de probabilités dans le cas d'un modèle équiprobable. Viennent ensuite deux « activités » : la première a pour objectif de « découvrir les expériences aléatoires à deux épreuves » et introduit un tableau à double entrée, et la deuxième, intitulée « Une histoire de punaise », a pour objectif affiché de « faire le lien entre fréquence et probabilité ». C'est à cette deuxième activité (figure 1) que nous allons nous intéresser.

Le programme de cycle 4 de 2020, les attendus de fin d'année ainsi que les repères de progression associés à ce programme dans le cadre de la loi « pour l'école de la confiance » de 2019, ne prévoient pas une étude de la stabilisation des fréquences avant la classe de troisième (FRANCE, 2019a, 2019b, 2019c, 2019d, 2020) et ce manuel, publié en 2021, se doit donc de prendre en charge l'étude de ce phénomène et de son lien à la notion de probabilité. Les auteurs introduisent leur support d'activité de la façon suivante:

> Lorsque l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on sait d'avance que l'on a une chance sur deux d'obtenir pile et une chance sur deux d'obtenir face. Mais dans certaines

[13] https://www.lelivrescolaire.fr/manuels/mathematiques-3eme-2021.

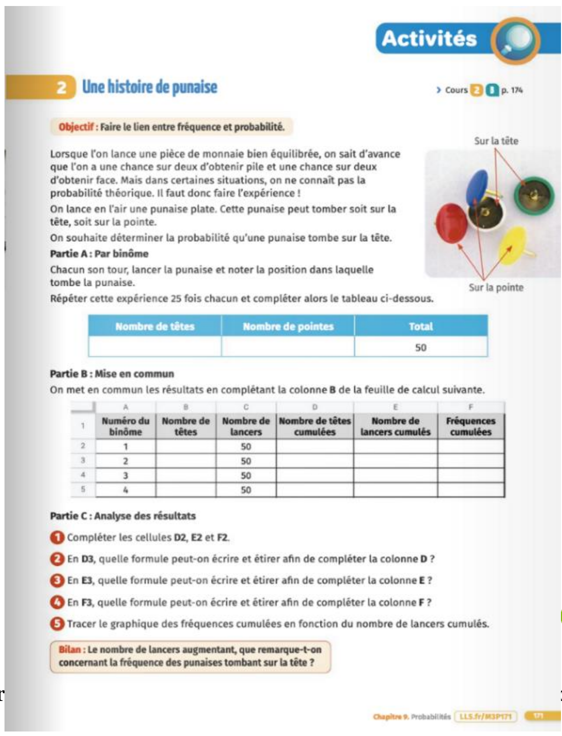
copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

situations, on ne connaît pas la probabilité théorique. Il faut donc [*sic*] faire l'expérience ! ». (GODEBIN, 2021, p. 171)

L'expérience proposée est celle d'un lancer de punaise, expérience pour laquelle on propose deux issues : *tomber sur la pointe* et *tomber sur la tête* de la punaise. L'objectif est précisé à nouveau : « on souhaite déterminer la probabilité qu'une punaise tombe sur la tête. »

Le *protocole expérimental* proposé est le suivant : dans un premier temps, « par binôme », les élèves lancent la punaise 50 fois et notent le nombre de têtes et le nombre de pointes obtenus. Une « mise en commun » est ensuite réalisée, qui donne lieu à la production d'une feuille de tableur et au calcul d'effectifs et de fréquences cumulés pour l'ensemble des lancers de la classe. Enfin, l'« analyse des résultats » conduit à « tracer le graphique des fréquences cumulées en fonction du nombre de lancers cumulés ». Le « bilan » de l'activité prend la forme d'une question : « Le nombre de lancers augmentant, que remarque-t-on concernant la fréquence des punaises tombant sur la tête ? »

Dans la suite du chapitre, la rubrique « Cours » propose tout d'abord une section « A. Probabilité d'un événement » qui commence par un bloc de deux « définitions » :



Activités

2 Une histoire de punaise

> Cours 2 1 p. 174

Objectif : Faire le lien entre fréquence et probabilité.

Lorsque l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on sait d'avance que l'on a une chance sur deux d'obtenir pile et une chance sur deux d'obtenir face. Mais dans certaines situations, on ne connaît pas la probabilité théorique. Il faut donc faire l'expérience !

On lance en l'air une punaise plate. Cette punaise peut tomber soit sur la tête, soit sur la pointe.

On souhaite déterminer la probabilité qu'une punaise tombe sur la tête.

Partie A : Par binôme

Chacun son tour, lancer la punaise et noter la position dans laquelle tombe la punaise.

Répéter cette expérience 25 fois chacun et compléter alors le tableau ci-dessous.

Nombre de têtes	Nombre de pointes	Total
		50

Partie B : Mise en commun

On met en commun les résultats en complétant la colonne **B** de la feuille de calcul suivante.

	A	B	C	D	E	F
1	Numéro du binôme	Nombre de têtes	Nombre de lancers	Nombre de têtes cumulées	Nombre de lancers cumulés	Fréquences cumulées
2	1		50			
3	2		50			
4	3		50			
5	4		50			

Partie C : Analyse des résultats

1. Compléter les cellules **D2**, **E2** et **F2**.
2. En **D3**, quelle formule peut-on écrire et étirer afin de compléter la colonne **D** ?
3. En **E3**, quelle formule peut-on écrire et étirer afin de compléter la colonne **E** ?
4. En **F3**, quelle formule peut-on écrire et étirer afin de compléter la colonne **F** ?
5. Tracer le graphique des fréquences cumulées en fonction du nombre de lancers cumulés.

Bilan : Le nombre de lancers augmentant, que remarque-t-on concernant la fréquence des punaises tombant sur la tête ?

Chapitre 9. Probabilités LLS.fr/M3P171 171

Figure 1 : « Une histoire de punaise » (GODEBIN, 2021, p. 171).

Lors d'une expérience aléatoire, on peut associer, à chacune des issues de l'univers, un nombre appelé probabilité.

La probabilité d'un événement A, notée P(A), est égale à la somme des probabilités des issues qui le réalisent. (Ibid., p. 174)

La section qui suit, intitulée « B. Stabilisation des fréquences », est composée d'une « propriété » et d'un « exemple »:

Propriété. Lorsque l'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche d'une fréquence « limite » qui est la probabilité de cette issue. (Ibid., p. 174)

Exemple. Si on lance un dé cubique non truqué un très grand nombre de fois, la fréquence d'apparition des valeurs paires se rapproche de 0,5.

On retrouve ensuite la « Stabilisation des fréquences », à la fin de la rubrique « Automatismes », avec les deux énoncés que nous reproduisons ci-après:

37. Sur les ordinateurs du CDI d'un collège, on peut choisir entre deux moteurs de recherche : Youpi et Hourra. Le tableau suivant donne les moteurs de recherche utilisés par les 992 premiers élèves lors de la semaine de la rentrée.

Moteur Youpi	789
Moteur Hourra	203

La probabilité pour qu'un élève pris au hasard dans ce CDI choisisse le moteur Youpi est-elle proche de 0,4 de 0,6 ou de 0,8 ?

[Calcul mental] 38. On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 3560 fois. Combien de fois, environ, devrait-on obtenir pile ? (Ibid., p. 179)

Enjeux liés à la théorisation

La remarque introductive du support d'activité, mentionnant que, dans certains cas, il faut expérimenter pour déterminer la probabilité d'un événement, est doublement problématique :

– pour quelle raison *n'*est-il *pas* nécessaire d'expérimenter dans des cas comme le lancer d'une pièce équilibrée ? Et n'est-ce *vraiment* pas nécessaire ?

– en quoi « expérimenter » permet-il de *déterminer* la probabilité d'un événement ?

Le premier aspect est déjà largement documenté chez Chevallard et Wozniak (2011). Le deuxième est essentiel au bon fonctionnement de l'activité comme dispositif didactique : si l'on veut déterminer la probabilité d'un événement à partir d'expérimentations, il faut établir, auparavant ou chemin faisant, un lien entre la probabilité (notion théorique qui existe dans le *modèle*) et les observations qui portent sur le *système* modélisé. Il y a à ce niveau plusieurs points à préciser.

La loi *expérimentale* des grands nombres[14] (CHEVALLARD & WOZNIAK, 2011), soit *l'observation* de la stabilisation progressive des fréquences cumulées d'un événement dans la réalisation d'une expérience répétée un grand nombre de fois, conduit à l'idée d'une convergence (au sens naïf, non mathématisé, du terme) des fréquences vers « une » valeur qui « est » la probabilité de l'événement.

La détermination de *cette* valeur est impossible expérimentalement, il y a toujours un choix à opérer : pourquoi préférer 0,5 à 0,499 pour la probabilité de faire pile ? 1/6 à 0,16 pour la probabilité de faire 3 avec un dé équilibré ? Ce choix peut s'étayer sur des arguments de simplicité ou de symétrie, arguments « rationnels » (LÉVY, 1970) que les données expérimentales (la proximité des valeurs des fréquences des différentes issues) viennent en retour renforcer.

Un *protocole expérimental* dont l'objectif serait de « faire le lien entre fréquence et probabilité » doit favoriser la prise en charge d'une discussion sur ce que le *modèle* (la *probabilité*) doit conserver du *système* (les *fréquences*), et sur les conditions et contraintes à poser sur l'entreprise de modélisation.

Topos et (im)possibilités de théorisation

Prenons par la fin : « Le nombre de lancers augmentant, que remarque-t-on concernant la fréquence des punaises tombant sur la tête ? » Le *topos* laissé aux élèves est ici très large puisqu'une question aussi ouverte appelle en droit une infinité de réponses possibles : « c'est un nombre entre 0 et 1 », « il y a souvent plus de deux chiffres après la virgule », « la fréquence est parfois, mais rarement, proche de 0,9 », « à partir d'un certain moment, le premier chiffre après la virgule est toujours le même », « ça

[14] Loi expérimentale, dont la loi forte des grands nombres est une théorisation mathématique fondée sur des axiomes qui sont choisis conformément à la loi expérimentale.

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

bouge tout le temps », « ça bouge de moins en moins », etc. Le graphique, dont le tracé est demandé à la fin de la partie C (voir figure 1), crée des conditions pour la sélection des réponses pertinentes (celles qui indiquent une stabilisation des fréquences), réduisant par là même le *topos* des élèves. La question séminale (« quelle est la probabilité qu'une punaise tombe sur la tête ? ») n'est pas reprise pour orienter l'étude.

D'ailleurs, cette question n'offre pas de prise à l'expérimentation tant que le lien entre probabilité et fréquence n'est pas opéré au moins minimalement, par exemple en indiquant une raison d'être de la probabilité comme *moyen de produire une technique* pour déterminer le *nombre de réalisations* d'un événement lors de la reproduction multiple d'une expérience aléatoire (GNEDENKO & KHINTCHINE, 1964, p. 9-10 ; CHEVALLARD & WOZNIAK, 2011). Le protocole ne pose pas la question de la détermination du *nombre de réalisations* de l'événement « la punaise tombe sur la tête », mais bien de sa *probabilité*. Ne sachant les *fonctions*[15] que l'on souhaite faire endosser à la notion de probabilité, comment en produire une définition satisfaisante ? On observe peut-être ici une réduction du savoir à une notion (celle de probabilité) détachée de ses fonctions technologico-théoriques. Isolat « théorique », cette notion mène une existence qu'il suffit de *montrer* pour la faire apprendre, sans qu'il soit besoin de *l'étudier*.

Dans l'énoncé de l'activité, la seule précision sur la nature de l'objet « probabilité » semble se réduire à une pseudo-définition de la probabilité comme proportion de chances : « lorsque l'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on sait d'avance que *l'on a une chance sur deux d'obtenir pile* […] mais dans certains cas on ne connaît pas la probabilité théorique[16] » (nous soulignons). L'intérêt de la probabilité serait ainsi de quantifier la proportion de « chances » de succès lorsqu'une expérience est réalisée. La question du type de connaissance que représente précisément, dans le cas d'un lancer *unique*, le fait de savoir que « l'on a une chance sur deux d'obtenir pile », n'est pas abordée et les raisons de multiplier des expérimentations en très grand nombre, comme y invite le protocole, ne sont dès lors pas claires. Ou plutôt, l'étude de ces raisons est rejetée hors du *topos* des élèves, voire même hors de la classe : c'est le professeur, ou le concepteur de l'activité, qui affirme l'adéquation du protocole expérimental à l'objectif annoncé, et qui réduit par là-même l'étendue du travail de production de *logos* qui pourrait résulter de l'analyse de la question posée et de la recherche d'un protocole expérimental adapté pour y répondre. Dans le cadre d'une dialectique de l'expérimentation et de la déduction (KIM, 2015), le travail de

[15] En particulier ses fonctions gnosiques : rien n'est dit sur la ou les *praxis* que cet élément de *logos* est censé justifier, rendre intelligible, produire.

[16] La précision apportée par l'adjectif « théorique » dans l'expression « probabilité théorique » ouvre la possibilité de parler d'une « probabilité expérimentale », ou d'une probabilité « tout court » dont on voit mal ce qui pourrait la distinguer de la probabilité « théorique ». Il y a probablement dans l'esprit des auteurs l'idée que la probabilité expérimentale serait "la valeur limite" de la suite des fréquences cumulées. Or, c'est précisément cet objet qui est hautement « théorique ».

neuroMATH

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

production d'un protocole expérimental et celui de la production d'une mathématisation avancent conjointement, se nourrissant l'un l'autre. C'est parce que l'on sait (un peu) ce que l'on cherche que l'on peut dessiner les contours du protocole d'expérimentation, et c'est parce que l'on dispose d'un cadre rationnel d'expérimentation que se dégage la signification de ce que l'on cherche.

Nous pouvons désormais reprendre l'analyse du « bilan » et observer que le protocole expérimental proposé ne permet pas de répondre de façon pertinente à la question posée (qui est trop ouverte) ni à la question séminale (quelle est la probabilité que la punaise tombe sur la tête ?) parce que

– la notion de probabilité est insuffisamment caractérisée par les fonctions praxéologiques qu'elle permettrait de remplir (justifier, produire, rendre intelligible la *praxis* relative au type de tâches « estimer un *nombre* de succès » lors de répétitions *multiples*) ;

– la convergence (au sens naïf) des fréquences est prise comme une raison de postuler une probabilité unique, plutôt que comme la manifestation du besoin d'*approcher* ces fréquences par une valeur unique ; il y a inversion entre système et modèle : c'est le système qui fournit des approximations du modèle – ce qui devient vrai dans d'autres états du modèle, comme l'a montré l'analyse praxéologique de l'activité $\tilde{a}_3$, mais est incorrect lors de la première *construction* d'une mathématisation de la variabilité statistique ;

– par conséquent, la question de la détermination de la valeur de la probabilité est pressentie comme la détermination de la valeur « limite » d'une suite de fréquences et non comme portant sur la recherche de critères rationnels pour poser, conventionnellement, la valeur de cette probabilité de sorte qu'elle constitue cependant une bonne approximation des fréquences observées.

La deuxième difficulté que nous mentionnons nous semble être une expression du déni du didactique : en postulant l'existence d'une probabilité « limite » des fréquences, les auteurs du manuel n'évoquent même pas l'idée qu'il conviendrait d'*étudier* le système pour choisir la valeur la plus pertinente pour cette probabilité. La valeur semble découler, dans leur esprit, de l'*observation* du système, et non de son étude : il s'agirait d'une probabilité « expérimentale », à distinguer d'une probabilité « théorique » (voir supra, note 16). Il y a pourtant des gestes didactiques qu'il conviendrait de réaliser pour justifier le choix de la valeur de la probabilité. L'observation des fréquences, de leur proximité les unes des autres, le fait que la somme des fréquences soit égale à 1 peut ainsi conduire à postuler que la probabilité de chaque face du dé va être 1/6. Le geste d'étude consiste à considérer que les probabilités *se comportent comme des fréquences*, ce qui constitue un élément *théorique*, et à en tirer des conséquences : somme égale à 1, proximité des fréquences qui devient un postulat d'égalité pour les probabilités, etc. On notera d'ailleurs que le choix de la punaise comme système limite les possibilités d'étude, ou alors les rend très difficiles du fait de la complexité géométrique et physique du système.

DISCUSSION

Le « savoir » n'est pas savoir de manière absolue, mais relativement à un contexte

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

praxéologique dans lequel il peut jouer ou ne pas jouer un rôle technologico-théorique. Il l'est aussi relativement à un contexte *didactique* dans lequel il peut être savoir déjà-là, ou au contraire savoir en voie d'élaboration. La confusion entre ces divers niveaux, expression du déni du didactique, est encore accentuée dans le cas des probabilités par les difficultés que pose la compréhension fine des différences entre expérimentation et théorisation en mathématiques. Ainsi, le même *geste* (lancer un objet un grand nombre de fois) peut être un geste *didactique* visant à l'élaboration d'une compréhension d'un système (lancer un dé pour observer la stabilisation des fréquences et théoriser ensuite la notion de probabilité) ou bien un geste *praxéologique* œuvrant à la réalisation d'une technique déjà bien installée (lancer un dé que l'on sait pipé pour déterminer une valeur approchée de la probabilité de tomber sur « 1 » : on s'appuie dans ce cas sur l'existence préalable d'une théorie des probabilités). La confusion entre ces deux types de gestes, qui relèvent tous deux du champ de l'expérimentation, est le produit d'une réduction du didactique au praxéologique, ou encore du refus de *voir* le didactique pour ce qu'il est. Elle trouve à s'illustrer dans la façon dont doit être conçue la probabilité : comme valeur approchée des fréquences pendant le moment technologico-théorique, comme valeur théorique dont les fréquences sont des valeurs approchées lorsqu'on met en œuvre la *praxis* fondée sur ce *logos*, par exemple, pour déterminer la probabilité d'un événement associé à un système inédit pour l'utilisateur.

La « définition » de la probabilité qui est proposée dans le manuel (GODEBIN, 2021, p. 174) que nous avons étudié, « lors d'une expérience aléatoire, on peut associer, à chacune des issues de l'univers, un nombre appelé probabilité », ainsi qu'une propriété qui indique que « lorsque l'on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence d'apparition d'une issue se rapproche d'une fréquence “limite” qui est la probabilité de cette issue », reproduisent la co-présence d'une théorisation formelle et d'une approche empiriste qu'il faudrait travailler *conjointement* et non comme illustration l'une de l'autre. L'activité censée faire le « lien » entre fréquence et probabilité se fonde sur ce lien lui-même, et la « définition » purement formelle, et quelque peu indigente de la probabilité (il s'agit d'un « nombre » que l'« on peut associer », sans qu'il soit dit comment, à une issue) ne permet pas d'opérer des déductions mathématiques pertinentes. Le protocole expérimental n'est pas utilisé pour réaliser une dialectique de l'expérimentation et de la déduction qui conduirait à passer de la manifestation phénoménale de la stabilisation des fréquences observées à la postulation d'une *loi expérimentale des grands nombres*.

L'expérimentation se voit réduite, comme si l'observation suffisait. Le fait que la probabilité soit une approximation des fréquences et que, comme telle, il faille *choisir* sa valeur, n'est pas compris et les auteurs ne mentionnent la question de l'approximation que lorsqu'elle intervient dans la production de techniques de recherche des probabilités – une fois la théorisation acquise, pour ainsi dire. Ce cas simple fournit une illustration importante du fait que la conception et la mise en place de l'expérimentation pour *produire* les

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

mathématiques à étudier ne sont pas correctement maîtrisées par la profession. C'est tout un travail qu'il conviendrait de mener sur les techniques dialectiques de la mathématisation (KIM, 2015) et en particulier sur la dialectique de l'expérimentation et de la déduction, faute de quoi, par une réduction du didactique au praxéologique, c'est l'expérimentation pour *utiliser* le savoir qui vient prendre lieu et place de l'expérimentation pour le *produire*.

REFERENCES

CENTRE NATIONAL DE RESSOURCES TEXTUELLES ET LEXICALES. https://www.cnrtl.fr/definition/, 2012.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 19(2), p. 221-266, 1999. https://revue-rdm.com/...

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higeras, A. Estepa et F. Javier García (Éds), **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológico de lo didáctico**, p. 705-746. Jaén, Espagne : Universidad de Jaén, 2007. http://yves.chevallard.free.fr/...

CHEVALLARD, Y. Séance 4 du 11 mars 2011. In **Journal du Séminaire TAD/IDD 2010-2011**, 2011. http://yves.chevallard.free.fr/...

CHEVALLARD, Y. Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic. **Educação Matemática pesquisa**, v. 22(4), p. 13-53, 2020. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p013-053

CHEVALLARD, Y. ; WOZNIAK, F. Un cas d'infrastructure manquante : statistique et probabilités en classe de troisième. In M. Bosch et al. (Éds), **Un panorama de la TAD**, p. 831-853. Barcelone, Espagne : CRM, 2011.

FRANCE. Ministère de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche. **Enseigner au collège. Mathématiques. Programmes et accompagnement**. Paris : CNDP, 2004.

FRANCE. Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. **Attendus de fin d'année en 5e en mathématiques**. Paris : Éduscol, 2019a. https://eduscol.education.fr/...

FRANCE. Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. **Attendus de fin d'année en 4e en mathématiques**. Paris : Éduscol, 2019b. https://eduscol.education.fr/...

FRANCE. Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. **Attendus de fin d'année en 3e en mathématiques**. Paris : Éduscol, 2019c. https://eduscol.education.fr/...

FRANCE. Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. **Repères annuels de progression au cycle 4 en mathématiques**. Paris : Éduscol, 2019d. https://eduscol.education.fr/...

FRANCE. Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. **Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique**. Paris : Éduscol, 2019e. https://eduscol.education.fr/...

FRANCE. Ministère de l'éducation nationale et de la jeunesse. **Programme du cycle 4 en vigueur à la rentrée 2020**. Paris : Éduscol, 2020. https://eduscol.education.fr/...

GNEDENKO, B. V. ; KHINTCHINE, A. Ia.

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS

Introduction à la théorie des probabilités. Paris : Dunod, 1964.

GODEBIN, P. **Manuel collaboratif. Maths 3e**. Lyon, France : Lelivrescolaire, 2021.

KIM, S. **Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : quel destin institutionnel et social ? : études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques**. Thèse de doctorat. Aix-Marseille Université, France, 2015.

LÉVY, P. **Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien. Souvenirs mathématiques. Considérations philosophiques**. Paris : Albert Blanchard, 1970.

WIJAYANTI, D.; WINSLØW, C. Mathematical practice in textbooks analysis: Praxeological reference models, the case of proportion. **REDIMAT**, v. 6(3), p. 307-330, 2017. https://doi.org/10.17583/redimat.2017.2078

copyrigth©2023**neuroMATH** – Grupo de Pesquisa em Desenvolvimento Neurocognitivo da Aprendizagem Matemática/CNPq – IFS