**CEMeR**

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 39 – 60
ISSN 2358-4750



**ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE**

# Les savoirs et la théorie des situations

## *Knowlegde and theory of situations*

Claire **MARGOLINAS**[1],
Laboratoire ACTé, Université Clermont-Auvergne.
Annie **BESSOT**[2],
Université Grenoble-Alpes.

**Correspondance:**

[1]claire.margolinas@uca.fr
[2]annie.bessot@gmail.com

## RESUMÉ

La théorie des situations conçue par Guy Brousseau comporte en son sein une refondation des savoirs en vue de leur transmission. Dans cet article, nous introduisons la théorie des situations mathématiques (TSM), au cœur de la théorie des situations didactiques, comme une révolution épistémologique. La distinction fondamentale faite par la TSM entre deux modes d'existence différents de la « connaissance », à savoir connaissance en situation et savoir, nous conduit à nous intéresser au concept de situation fondamentale comme instrument central de la (re)fondation des savoirs. Nous illustrons la recherche d'une situation fondamentale d'une genèse possible des nombres générée par les valeurs de variables d'une telle situation. Les nombres et les opérations sur ces nombres qu'il est possible d'atteindre par cette genèse sont une conséquence de cette analyse épistémologique. Nous mettons en évidence, à chaque changement de la valeur d'une variable, les constituants des situations générées : milieu, définition-en-acte, enjeu, processus conduisant au savoir visé (institutionnalisation). En conclusion, nous revenons sur l'organisation des savoirs qui résulte de ce travail de recherche de situation fondamentale et nous esquissons quelques possibles conséquences didactiques.

**Mots-clés:** théorie des situations mathématiques, situation fondamentale, construction des nombres.

## ABSTRACT

The theory of situations conceived by Guy Brousseau includes a refoundation of knowledge with regard to its transmission. In this article, we introduce the theory of mathematical situations (TSM), at the heart of the theory of didactic situations, as an epistemological revolution. The fundamental distinction made by TSM between two different modes of existence of knowledge, situational knowledge and institutional knowledge, leads us to focus on the concept of fundamental situation as a central instrument for the (re)foundation of knowledge. We illustrate the search for a fundamental situation with a possible genesis of numbers generated by the values of the variables of such a situation. The numbers and the operations on these numbers that can be reached by this genesis are a consequence of this epistemological analysis. We highlight, at each change of the value of a variable, the constituents of the generated situations: milieu, definition-in-act, stake, process leading to the targeted knowledge (institutionalization). In conclusion, we return to the organization of knowledge resulting from this research of a fundamental situation and we outline some possible didactic consequences.

**Keywords:** theory of mathematical situations, fundamental situation, construction of numbers.

Reçu dans 03/10/2023
Approuvé en 03/11/2023

# INTRODUCTION

La théorie des situations a été fondée par Guy Brousseau dans les années 60, dans la perspective d'une (re)considération des savoirs et de leur diffusion en termes de situations (une compilation d'articles se trouve dans BROUSSEAU, 1998a). Dans le cadre de la théorie des situations (TS), les savoirs, leurs fondements, leurs articulations et leurs raisons d'être (CHEVALLARD, 2019), ne sont pas considérés tels que définis par des institutions mais doivent être questionnés dans le cadre de la didactique des mathématiques.

Cette perspective, qui considère la didactique des mathématiques comme étant basée sur une recherche fondamentale à part entière, est une des caractéristiques de travaux qui ont été d'abord initiés en France, notamment dans les deux cadres théoriques fondateurs : la théorie des situations et la théorie anthropologique du didactique (fondée par Yves Chevallard).

Dans ce texte, nous allons d'abord introduire la théorie des situations mathématiques (TSM, voir BROUSSEAU, 2005a) comme une révolution épistémologique. Nous présenterons ensuite une distinction essentielle de la TSM entre connaissance et savoir comme un premier outil du travail épistémologique. Les situations sont ensuite considérées comme une caractérisation et un moteur des connaissances. Ces réflexions nous conduisent à la notion de situation fondamentale comme instrument central de la (re)construction des savoirs. Enfin nous partageons avec le lecteur un cheminement toujours questionnable de la recherche d'une situation fondamentale concernant les nombres.

Nous conclurons en revenant à des considérations méthodologiques et didactiques attachées à l'ingénierie didactique.

# LA THEORIE DES SITUATIONS MATHEMATIQUES : UNE REVOLUTION EPISTEMOLOGIQUE

Dès les années 70, les principes de la recherche en didactique des mathématiques dans le cadre de la théorie des situations sont posés:

> Il s'agit de modéliser (et de critiquer) les situations utilisées pour introduire ou enseigner les notions mathématiques et d'en imaginer d'autres plus appropriées. En posant les problèmes de cette manière, à côté des arguments d'organisation logico-mathématique du savoir, il est possible de faire entrer dans l'analyse, voire dans le calcul, des arguments de type économique et ergonomique. (BROUSSEAU, 2000, p. 6)

Dans le même texte, qui retrace les conditions d'apparition de sa théorisation, Brousseau poursuit:

> Hypothèse de la situation fondamentale. La voie empirique consiste à essayer d'améliorer ces pratiques. Nous allons au contraire suivre l'autre voie, celle, qui partant d'une connaissance déterminée, cherche quels types de situations sont capables de la faire apparaître, de la faire utiliser, de la faire construire et de la faire apprendre. Pour des raisons heuristiques, nous supposons que

> chaque connaissance mathématique possède au moins une situation qui la caractérise et la différencie de toutes les autres.
>
> De plus, nous conjecturons que l'ensemble des situations qui caractérisent une même notion est structuré et qu'il peut être engendré à partir d'un petit nombre de situations dites fondamentales, par le jeu de variantes, de variables et de bornes sur ces variables.
>
> [...] il est important de retenir pour l'instant qu'une situation fondamentale n'est pas a priori une situation « idéale » pour l'enseignement, ni même une solution plus efficace. La valeur d'une situation à usage didactique s'apprécie en fonction d'un grand nombre d'autres paramètres externes tels que la possibilité effective de la mettre en œuvre dans un environnement psycho-socio-culturel déterminé (p. 8)

Brousseau distingue ici la théorie des situations mathématiques (TSM) à laquelle est associée le concept de situation fondamentale, théorisation qui se situe clairement du côté épistémologique de la didactique des mathématiques, de la théorie des situations didactiques en mathématiques (TSD) qui prend en compte les conditions concernant les situations d'enseignement.

Pour interroger la place des savoirs dans la théorie des situations, nous allons donc nous inscrire dans la théorie des situations mathématiques. Nous voulons d'abord insister sur l'originalité et l'importance de considérer la TSM à l'intérieur de la didactique des mathématiques. En effet, d'autres champs théoriques pourraient penser que la modélisation des savoirs et leur articulation relèveraient d'une discipline extérieure à la recherche en didactique, qui serait alors un champ d'application.

Brousseau et la plupart des chercheurs français en didactique des mathématiques considèrent la didactique des mathématiques comme une recherche scientifique fondamentale au sens donné par le Conseil international pour la science en 2004:

> However the demarcation between basic research and applied research is not at all clear cut. In reality they are inextricably inter-twined. Most scientific research, whether in the academic world or in industry, is a hybrid of new knowledge generation and subsequent exploitation. Major innovation is rarely possible without prior generation of new knowledge founded on basic research. Strong scientific disciplines and strong collaboration between them are necessary both for the generation of new knowledge and its application. / Cependant, la démarcation entre la recherche fondamentale et la recherche appliquée n'est pas du tout nette. En réalité, elles sont inextricablement liées. La plupart des recherches scientifiques, qu'elles soient menées dans le monde universitaire ou dans l'industrie, sont un hybride entre la production de nouvelles connaissances et leur exploitation ultérieure. Une innovation majeure est rarement possible sans une génération préalable de nouvelles connaissances fondées sur la recherche fondamentale. De solides disciplines scientifiques et une forte collaboration entre elles sont nécessaires tant pour la génération de nouvelles connaissances que pour leur application. (INTERNATIONAL_COUNCIL_FO

R_SCIENCE, 2004, p. 1)

Brousseau a organisé les interactions entre la recherche scientifique fondamentale, comme but de ses recherches, et la recherche appliquée, comme moyen de ces recherches:

> La compréhension théorique du fonctionnement des situations est le but [de la recherche] et non le moyen d'atteindre un objectif pratique. (Brousseau (1975) cité par PERRIN-GLORIAN, 1994, p. 101)

La TSM est basée sur un principe fondamental:

> à toute connaissance mathématique on peut faire correspondre une collection de situations que cette connaissance permet de résoudre (BROUSSEAU, 2005a, p. 220)

Il s'agit d'une révolution épistémologique : l'objectif de la TSM est de reconsidérer les connaissances mathématiques en termes de situations. Cette révolution va s'appuyer sur une distinction fondamentale, celle faite entre savoirs et connaissances.

## SAVOIRS ET CONNAISSANCES

L'une des idées centrales de la TSM est donc de distinguer deux modes d'existence de la « connaissance » (au sens générique de *knowledge*[1]).

- Une connaissance (*situational knowledge*) est ce qui réalise l'équilibre entre un sujet et un milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation.
- Un savoir (*institutional knowledge)* est une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution et qui est le plus souvent formalisé dans un texte (LAPARRA ; MARGOLINAS, 2010 ; MARGOLINAS, 2014).

Nous pouvons retenir dans un premier temps l'association connaissance et situation (*situational knowledge*), savoir et institution (*institutational knowledge*), qui « s'entend » bien dans notre traduction en anglais. Dans ce texte, pour distinguer « connaissance » au sens générique (*knowledge*) et « connaissance » au sens spécifique dans la « paire » connaissance/savoir, nous utiliserons parfois pour cette dernière l'expression « connaissance en situation » (*situational knowledge*), ce que ne fait pas Brousseau.

Pour mieux comprendre cette distinction, il est plus facile de l'expliquer d'abord dans une situation non mathématique. En effet, les mathématiques semblent à première vue tellement liés à des textes du savoir et non pas à des connaissances en situation qu'il nous paraît judicieux d'aborder dans un deuxième temps cette distinction dans le cadre des mathématiques.

Sur la photo (figure 1), les gens mangent, sont assis sur des chaises, ils ont l'air

[1] Nous avons introduit les termes : *knowledge* (générique), *situational knowledge* (connaissance en situation) et *institutional knowledge* (savoir institutionnel) dans une présentation en anglais de la théorie des situations, dont nous sommes les autrices, dans le cadre du projet AMOR https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/guy-brousseau-unit.

complètement à l'aise, même l'enfant le plus petit. Nous allons nous intéresser à la *position assise*.

Figure 1 – Image d'une famille américaine en position assise

Si ces personnes peuvent garder leur position assise pendant longtemps, c'est parce qu'elles ont développé des connaissances en situation, qu'elles ne peuvent le plus souvent pas expliciter. Il s'agit d'un phénomène plus général : la connaissance en situation n'est pas formulée.

Sur la photo (figure 2) avec une représentation d'une autre famille heureuse, les postures sont totalement différentes. Si la première famille américaine est invitée par la famille japonaise pour un repas traditionnel, elle ne sera pas du tout à l'aise assise dans ces postures.

Figure 2 – Image d'une famille japonaise en position assise

Dans la situation « être assis pour manger », les figures 1 et 2 nous révèlent des variables (hauteur de la table, hauteur et forme des sièges, notamment) qui sont associées à différentes connaissances en situation révélées par les postures corporelles.

Qu'appelons-nous alors « savoir », à propos de la *position assise* ? Il faut rechercher une (ou des) institution(s) qui considère(nt) la position assise comme un savoir de cette institution. Vous pensez peut-être qu'une telle institution n'existe pas. En effet, les connaissances pour agir sur la position assise en situation, bien qu'utiles, semblent naturelles voire invisibles.

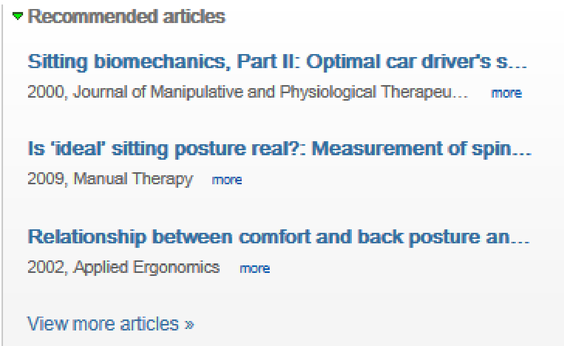
Or, dans la figure 3, nous constatons que la position assise est un savoir pour le domaine scientifique de la biomécanique. Le titre, « *Seating Biomechanics Part one Review of the Literature* », révèle qu'il existe une littérature sur la biomécanique de la position assise.

Figure 3 –La « position assise » comme savoir dans l'institution de la biomécanique


Source: Les auteures

Cette institution, au travers des « Articles recommandés » (figure 4), pose d'ailleurs la question de la « position assise idéale » qui devient donc une question théorique et non pas une question pratique qui se pose au sujet qui se sent mal à l'aise quand il est assis sur un certain type de siège.

Figure 4 – Articles recommandés par l'institution de la biomécanique pour le savoir « position assise »



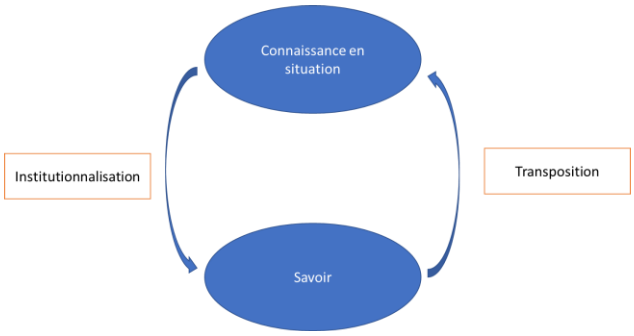

Source: Les auteures

La position assise est donc un savoir pour la biomécanique. Dans cette institution, des textes sont rédigés sur cette position.

Nous pouvons maintenant schématiser (figure 5) les deux modes d'existence de la connaissance. Certaines connaissances en situation peuvent être reconnues comme utiles par une institution et, pour cette raison, sont transformées en *savoir* au cours de ce que nous appelons le processus d'institutionnalisation (au sens épistémologique). Inversement, des savoirs explicites ne sont utiles en situation que dans la mesure où ils sont transformés en *connaissances en situation.*

La transposition que nous introduisons correspond au même mouvement que celui de la transposition didactique au sens de Chevallard (1991), qui s'intéresse à un autre aspect de la transposition, depuis le savoir produit dans l'institution mathématique (le savoir « savant ») au savoir enseigné. Cependant, la transposition définie dans le cadre de la TSM, entre savoir et connaissance, questionne non pas la dynamique de la transformation d'un savoir pour permettre son enseignement (la transposition *didactique*) mais une transformation qui s'opère dans un cadre épistémologique plus général, sans intention didactique. C'est pour cela que nous parlons de transposition et non pas de transposition didactique.

Figure 5 – Institutionnalisation et transposition : transformations réciproques connaissance / savoir

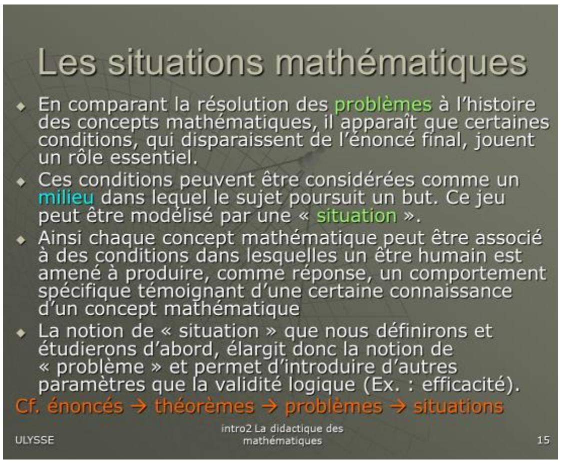



Source: Les auteures

## LES SITUATIONS COMME MODELES DES CONNAISSANCES

Le projet révolutionnaire et très ambitieux de la TSM consiste donc à modéliser les mathématiques comme des réponses *utiles* dans des situations, et donc comme des connaissances en situation (figure 6).

Figure 6 – Institutionnalisation et transposition : transformations réciproques connaissance / savoir




*Source: BROUSSEAU (2010a, p. 15)*

Afin d'illustrer le concept de connaissance, dans le cadre des mathématiques, nous allons maintenant présenter un exemple bien connu de situation mathématique très élémentaire, conçue et expérimentée par Brousseau et son équipe pour de très jeunes élèves (4 à 6 ans) (BRIAND ; LOUBET ; SALIN, 2004 ; BROUSSEAU, 2012 ; MARGOLINAS ; WOZNIAK, 2012).

Dans cette situation, les élèves ont à disposition une grande collection de « garages » (des cartons rectangulaires, chacun pouvant recevoir une seule voiture), la disponibilité de ces garages étant une variable de la situation. Chaque élève reçoit une petite collection de voitures (des images de voitures ou bien des petites voitures jouets). La tâche consiste à constituer une collection de garages permettant de poser exactement une voiture et une seule sur chaque garage.

Nous pouvons considérer que cette situation introduit une *définition en situation de la quantité* : deux collections ont la même quantité si l'on peut mettre leurs éléments en correspondance terme à terme.

Dans cette situation mathématique, une connaissance est *ce* qui permet d'obtenir l'enjeu visé : une et une seule voiture pour un garage. Ainsi, une connaissance (en situation) représente une adaptation réussie à cette situation particulière ou bien un équilibre en situation comme nous l'avons énoncé plus haut.

Le travail de transposition (savoir / connaissance) conduit à interroger les variables et les valeurs des variables de la situation qui vont rendre utiles ou inutiles certaines connaissances.

Par exemple, si nous considérons la variable « disponibilité de la collection des garages », cette variable peut prendre plusieurs valeurs, notamment :

- La collection des garages est proche (dans l'espace) de celle des voitures ;
- La collection des garages est éloignée (dans l'espace) de celle des voitures ;
- La collection des garages est éloignée (dans le temps) de celle des voitures ;
- La collection des garages est disponible pour un autre sujet que celui qui agit sur les voitures (communication à autrui).

Si nous considérons la première valeur : les deux collections sont proches l'une de l'autre, de nombreuses connaissances sont utiles (elles peuvent conduire à la réussite) dans cette situation. Par exemple, une connaissance utile dans cette situation est ce que nous pouvons appeler une « *connaissance spatiale* » : organiser spatialement les garages et les voitures dans une même disposition. Une autre connaissance utile dans cette situation est ce que nous pouvons appeler la « *connaissance du dénombrement par comptage* » : Il s'agit de prononcer la suite des mots-nombres dans l'ordre en énumérant les voitures (un, deux, trois, quatre, cinq, etc.) et de faire de même avec les garages jusqu'au même mot-nombre.

Si la valeur de la variable change, par exemple si elle prend la quatrième valeur (communication à autrui) et que la communication est orale, alors la connaissance spatiale est beaucoup moins utile que le dénombrement par comptage, car il sera difficile d'expliquer l'organisation spatiale, alors qu'il est très aisé de transmettre seulement le dernier mot-nombre prononcé.

L'utilité des connaissances change en fonction de la valeur de variables de la situation.

La notion de « situation » élargit donc la notion de « problème » et permet d'introduire d'autres paramètres que la validité logique (comme par exemple l'efficacité ou l'utilité).

Nous pouvons maintenant reformuler le principe fondamental de la TSM rencontré dans l'introduction en utilisant les termes de savoir et connaissance :

> Principe fondamental initial : à toute connaissance mathématique on peut faire correspondre une collection de situations que cette connaissance permet de résoudre.
>
> Reformulation : à chaque élément de *savoir* mathématique correspond un ensemble de situations qui peuvent être résolues en utilisant certains éléments de *connaissance*.

Il ne s'agit pas d'un changement superficiel. En fait, dans la première formulation, nous aurions pu considérer que la première occurrence du terme « connaissance » a la même signification que la seconde occurrence. Ce n'est pas le cas *a priori* et cela conduit à la question suivante.

> Comment s'assurer que les éléments de connaissance rencontrés en situation sont une transposition possible d'un savoir déterminé ?

Nous allons tenter de répondre à cette question dans le paragraphe suivant.

## SITUATION FONDAMENTALE

Nous allons nous centrer tout d'abord sur le processus de transposition, dont le point de départ dans l'approche TSM est le savoir. Questionner ce processus de transposition a pour but d'analyser quels éléments de connaissance (en situation) correspondent ou non à ce savoir. En effet, cette correspondance entre connaissance et savoir n'est jamais évidente.

Dans une situation donnée, une connaissance est déterminée par les interactions entre un sujet et un milieu, et non par un savoir qui n'apparaîtra qu'à la fin du processus d'institutionnalisation.

Comment s'assurer que la connaissance rencontrée en situation est une transposition *adéquate* d'un savoir déterminé ? Le concept de situation fondamentale est lié à cette question.

Afin de progresser vers l'idée de situation fondamentale, nous devons introduire la notion de « *signification* » d'un savoir mathématique.

Dans le paragraphe précédent, nous avons pris pour exemple des situations « voitures et garages ». Ces situations prises comme exemples représentent des instances d'une situation plus générale qui s'appuie sur la relation entre collections « avoir même quantité que » (ce qui mathématiquement peut se généraliser à tout ensemble, fini ou infini, et à une bijection entre des sous-ensembles). Le cardinal, qui représente une signification des nombres naturels, est un savoir qui peut être atteint à l'issue d'un processus d'institutionnalisation. Une autre façon d'exprimer cette idée est de dire que les connaissances rencontrées dans ces situations constituent une transposition adéquate du concept de cardinal (dans le cas d'ensembles finis et discrets).

S'agit-il de l'unique signification des nombres naturels ? Nous reviendrons sur cette question dans le paragraphe suivant concernant la recherche d'une situation fondamentale, cependant nous pouvons déjà répondre « non », puisque le nombre naturel peut s'envisager à la fois comme un cardinal (désignation de la classe d'équivalence de la relation « même quantité que ») et comme un ordinal (qui peut s'associer à une position dans une liste et non pas à une quantité).

Le processus d'ingénierie de Brousseau part d'une *déconstruction* des savoirs qui consiste à rechercher toutes les *significations* possibles relatives à l'*utilité* des connaissances en situation. Ainsi désigner par un naturel une quantité (trois voitures) ou une position (la voiture rouge est en troisième position sur la file en partant de la droite) ne présente pas la même signification car les situations relatives à l'utilité de ces connaissances sont différentes.

Cependant, Brousseau prend très au sérieux la question suivante : comment contrôler d'un point de vue épistémologique la nécessité de considérer *certaines* significations comme différentes ?

> On peut envisager de multiplier les situations didactiques qui illustrent chacune un aspect différent […] mais cette stratégie didactique est douteuse : elle demande beaucoup de temps, elle donne une image trop riche et trop parcellaire et il se peut que jamais le sens d'ensemble ne soit transmis. Il est donc avantageux de disposer d'une situation fondamentale qui puisse générer ce champ. La fonction d'une situation fondamentale est de résumer ce sens global de façon à permettre ensuite de déployer le nombre et la diversité de ses occurrences suivant les nécessités et les possibilités de l'enseignement. (BROUSSEAU, 2005b, p. 174)

Comment contrôler d'un point de vue épistémologique la nécessité de considérer certaines significations comme différentes et pas d'autres ?

Nous avons besoin d'une méthode pour minimiser le nombre de significations nécessaires à la prise en compte d'un savoir institutionnel donné. C'est ici qu'intervient la recherche d'une situation fondamentale.

L'idée est de chercher une description très simple et générale d'une sorte de situation « coquille vide » qui générerait par un ensemble de variables les différentes situations correspondant à chaque signification d'un savoir donné. Lorsqu'il n'est pas possible de trouver une seule situation fondamentale parce que certaines significations sont épistémologiquement différentes, nous considérerons plus d'une situation fondamentale pour un savoir. Cette recherche d'un minimum de situations fondamentales conduira à une organisation fonctionnelle des savoirs.

Nous obtenons ainsi une nouvelle formulation du principe fondamental:

> pour chaque savoir mathématique, il existe une situation fondamentale qui engendre, par un ensemble de variables, différentes situations correspondant à différentes significations de ce savoir.

Nous avons hésité à écrire « une » situation fondamentale ou « une seule » situation fondamentale. En écrivant « une seule », nous aurions fait une hypothèse trop forte, en gardant à l'esprit que nous cherchons le moins de situations fondamentales possible, et si possible une seule... Nous allons maintenant développer un exemple de ce processus.

## À LA RECHERCHE D'UNE SITUATION FONDAMENTALE

Dans le cadre d'une recherche d'une situation fondamentale des nombres, nous débutons notre réflexion par la notion de nombre naturel pour différentes raisons : par cohérence avec l'axiomatique au sein des mathématiques, en convergence avec l'anthropologie et l'histoire humaine ainsi qu'avec le développement psychogénétique (BROUSSEAU, 2000, p. 6).

D'où la question :

> Y a-t-il une situation fondamentale des nombres naturels ?

Pour cela nous cherchons une situation qui puisse générer au moins les deux significations du nombre naturel, que sont celles de cardinal et d'ordinal. La question se transforme donc en deux questions, dont nous allons d'abord examiner la première :

> Y a-t-il une situation fondamentale de la signification « cardinale » des nombres naturels ?

En ce qui concerne la signification du nombre naturel comme cardinal, la recherche d'une situation fondamentale, qui est une transposition, a pour origine le savoir mathématique :

> Deux ensembles discrets ont le même cardinal s'il existe une bijection entre ces deux ensembles.

Cependant, le nombre naturel comme cardinal est le savoir que nous visons à l'issue du processus d'institutionnalisation. Cette situation fondamentale part d'une définition-en-acte de la relation « avoir même quantité que » (en paraphrasant le « théorème-en-acte » de VERGNAUD, 1990) qui a un sens en situation. La caractérisation mathématique du cardinal formulée ci-dessus nous conduit à préciser de façon générale le milieu et l'enjeu d'une situation fondamentale du nombre cardinal. Le milieu et l'enjeu de cette situation fondamentale sont les invariants de toutes les situations représentant des instanciations possibles de la situation fondamentale (par exemple la famille des situations « voiture-garage » est une instanciation). Le milieu de cette situation fondamentale est donc décrit de la façon la plus générale possible, en le caractérisant en termes mathématiques. Il s'agit d'un « milieu matériel », composante invariante de la structuration du milieu (au sens de BROUSSEAU, 1990 ; milieu M-3 dans la modélisation de MARGOLINAS, 1995). Le milieu d'une situation fondamentale doit pouvoir être instancié. C'est pourquoi nous introduisons dans la description des situations fondamentales, des termes relatifs aux objets du monde (MARGOLINAS, 2021).

Nous listons ci-après les constituants d'une situation fondamentale du nombre entier comme cardinal et des éléments du processus d'institutionnalisation.

- Milieu : deux ensembles discrets finis distincts (que nous nommons « *collections* »).
- Définition-en-acte : deux collections (collection 1 et collection 2) ont la même quantité s'il est possible de réaliser (effectivement) une correspondance terme à terme entre tous les objets de la collection 1 et tous les objets de la collection 2.
- Enjeu : étant donné une collection modèle (sous-collection de la collection 1), déterminer si une collection (sous-collection de la collection 2) est de même quantité que le modèle[2].
- Transformation des connaissances du point de vue de leur utilité en situation conduisant au savoir visé (processus d'institutionnalisation):
  - la grandeur « quantité » est considérée comme une connaissance utile dans des situations,
  - une suite orale de mots-nombres de même quantité qu'une collection est une connaissance utile dans des situations,
  - plusieurs collections de même quantité peuvent être associées à une même suite orale de mots-nombres,
  - comme ces suites de mots-nombres sont ordonnées, le dernier mot-nombre de la suite permet de désigner la quantité correspond à toutes ces collections.

En formalisant mathématiquement ce processus, le cardinal apparaît donc comme une classe d'équivalence de la relation « avoir même quantité que » appliquée à des collections. Au cours de ce processus, d'autres connaissances utiles sont rencontrées et notamment la désignation écrite du cardinal par un représentant symbolique d'une des collections (par exemple quatre traits).

Différentes situations sont générées à partir de cette situation fondamentale en donnant différentes valeurs à la variable localisation de l'une des deux collections (dans l'espace ou dans le temps). Cette suite de situations peut être

[2] « Déterminer » peut inclure la construction d'une collection de même quantité.

considérée également comme des variantes générales en TSM (action, formulation, validation).

Nous allons maintenant examiner la question:

> Y a-t-il une situation fondamentale de la signification « ordinale » des nombres naturels ?

Dans la recherche d'une situation fondamentale du nombre cardinal, nous avons considéré les ensembles finis discrets (collections) comme objets du milieu, pour envisager une signification ordinale, il faut nécessairement rajouter un ordre total à ces ensembles finis discrets. Nous allons donc chercher des catégories du monde physique qui peuvent nous permettre de construire des milieux pour cette situation fondamentale :

- Le temps est totalement ordonné, donc les événements temporels (désignation gestuelle, énonciation) sont ordonnés.
- L'espace et le plan ne peuvent pas être totalement ordonnés.
- La ligne peut être totalement ordonnée. Pour créer cet ordre total, il faut nécessairement une origine et un sens.

Dans cette situation fondamentale du nombre entier comme ordinal, nous pouvons donc lister ses constituants et des éléments du processus d'institutionnalisation.

- Milieu : deux ensembles discrets finis distincts munis d'un ordre total (que nous nommons « *listes* »[3]).
- Définition-en-acte : deux éléments appartenant chacun à deux listes distinctes ont la même position discrète [4] dans leurs listes respectives s'il est possible de faire correspondre ces deux éléments par une correspondance terme à terme ordonnée. Cette mise en correspondance débute par la correspondance des deux origines de chacune des listes, puis continue par celle des deux éléments « successeurs » des origines dans chacune des listes (ordre total), et se réitère jusqu'à la rencontre de l'un des deux éléments distingués[5] (voir exemple ci-dessous).
- Enjeu : étant donné une liste modèle et un élément distingué dans cette liste, déterminer si un élément distingué d'une autre liste est dans la même position discrète que celui de la liste modèle.
- Transformation des connaissances du point de vue de leur utilité en situation conduisant au savoir visé (processus d'institutionnalisation) :
    - la grandeur « position » est considérée comme une connaissance utile dans des situations,

[3] Le mot « suite » pourrait convenir mais il a une signification mathématique plus large.

[4] Nous introduisons le terme de « position discrète » pour la distinguer d'une position dans un espace cartésien (voir plus loin).

[5] Voir exemple ci-dessous.

- une liste orale de mots-nombres ordonnés est une connaissance utile dans des situations,
- la position de plusieurs éléments distingués dans des listes peut être associée à une même suite orale de mots-nombres,
- comme ces listes de mots-nombres sont ordonnées, chaque mot-nombre de la liste permet de désigner la position de chacun des éléments d'une liste.

Essayer de décrire une situation fondamentale en toute généralité n'est pas un exercice facile, nous allons maintenant donner quelques exemples.

Une instanciation dans le temps peut être un mot distingué dans deux chansons, par exemple dans « Au clair de la lune mon ami Pierrot » et dans « Une souris verte qui courait dans l'herbe » la syllabe correspondant au mot « mon » dans la première chanson et la syllabe correspondant au mot « qui » dans la seconde sont dans la même position dans la liste des syllabes prononcées. Un autre exemple dans le temps peut être de faire apparaître des images correspondant à deux listes, par exemple une liste de fleurs et une liste d'outils, si la première liste est (rose, lilas, pervenche, muguet, lys) et la seconde (marteau, vis, clou), alors les mots « pervenche » et « clou » sont dans la même position dans ces listes.

Une instanciation qui s'appuie sur la ligne peut être donnée par deux colliers formés d'un nœud qui sert d'origine, de perles « neutres » et d'une perle distinguée (d'une couleur nettement différente des neutres) (MARGOLINAS ; WOZNIAK, 2014, 2015 ; WOZNIAK ; MARGOLINAS, 2019).

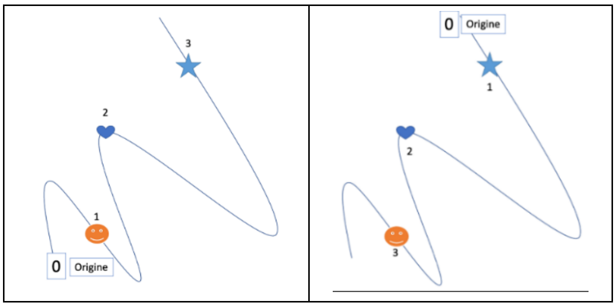
Quelques remarques sont importantes concernant la position discrète.

- La correspondance terme à terme avec une liste orale ou écrite des mots-nombres peut être établie avec les éléments de la liste, par exemple, dans la liste des mots « Au clair de la lune mon ami Pierrot » le mot « mon » est en 6$^{e}$ position,
- Cependant il est aussi possible d'attribuer un nombre à l'origine (zéro), dans le collier représenté dans la figure 8, le nœud peut recevoir le numéro zéro et la perle distinguée est en 5$^{e}$ position à partir de l'origine.

Ce que nous avons appelé la « position discrète » peut être illustré par la position d'une personne dans une file d'attente : être en 5$^{e}$ position dans la file d'attente ne signifie pas être à la même distance de la 4$^{e}$ personne dans la file et de la 6$^{e}$ personne dans la file, la position discrète ne réfère qu'à l'ordre et n'implique aucune mesure.

La correspondance entre nombre et position discrète est donc assurée quand il y a un repère (origine – parfois implicite, sens). Ce ne sont donc pas les éléments eux-mêmes qui sont associés à un nombre mais la position de ces éléments dans une liste ordonnée (Figure 7).

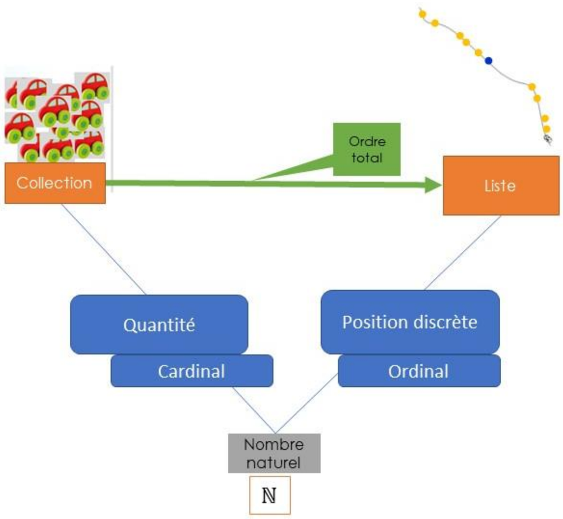
Figure 7 – Exemples de correspondance entre les positions de trois objets et la liste des nombres




*Source: Les auteures*

La figure 8 résume ce que nous avons introduit dans ce paragraphe jusqu'à présent (en orange, les invariants du milieu, en bleu les significations du savoir visé, en vert les valeurs de variables permettant le passage d'une variante de la situation fondamentale à l'autre et qui changent le milieu).

Figure 8 – Schéma résumant l'état de la recherche d'une situation fondamentale du nombre naturel

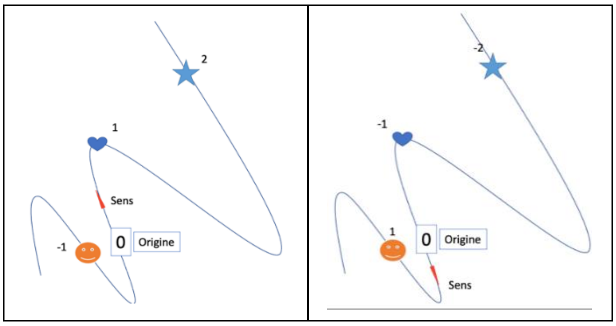



*Source: Les auteures*

Le passage d'une position à l'autre, en avançant (dans le sens du repère) ou bien en reculant (à l'inverse du sens du repère) permet de considérer une autre connaissance utile : en partant de la position 2 (le cœur sur la figure 7, case de gauche) et en avançant d'une position dans la liste, on se retrouve sur l'étoile (la position 3), ce qui pourrait conduire à une variante de la situation fondamentale et à envisager un prolongement du processus d'institutionnalisation (que nous ne décrirons pas dans ce texte).

Pour conclure cette présentation de la position discrète, nous pouvons remarquer que si l'origine n'est pas à une extrémité d'une demi-ligne, alors les nombres entiers négatifs sont une connaissance utile dans le milieu de cette situation fondamentale (figure 9).

Figure 9 – Effet de la variation de l'origine sur la désignation des positions d'objets d'une liste par des nombres entiers (positifs ou négatifs)




*Source: Les auteures*

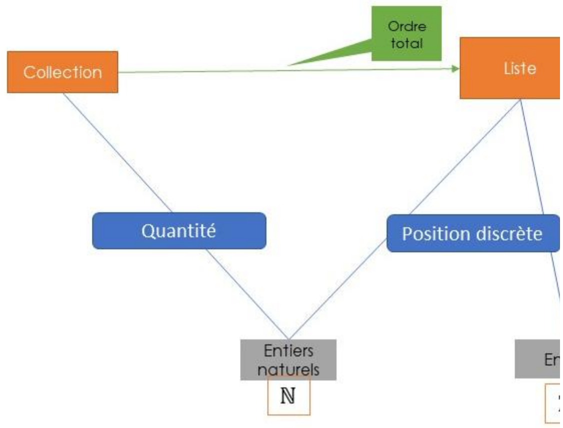
La figure 10 complète la figure 8 et permet d'envisager une institutionnalisation possible et non explorée vers les *entiers relatifs comme position discrète* en jouant sur les valeurs de la variable « position de l'origine » comme dans la figure 9. De plus, si nous considérons les déplacements d'une position à l'autre, comme nous venons de le faire, nous pourrions envisager une institutionnalisation possible de (ℤ, +). Nous ne prolongerons pas la réflexion concernant les entiers relatifs dans la suite de cet article.

En résumé (figure 10) nous pouvons considérer la situation que nous venons de décrire comme une variante d'une situation fondamentale plus générale dans laquelle deux ensembles sont comparés par une bijection :

Dans le cas de la signification cardinale d'un nombre entier positif, il s'agit d'ensembles finis discrets (que nous avons appelé des collections)

Dans le cas de la signification ordinale du nombre entier, il s'agit d'ensembles finis discrets munis d'un ordre total (que nous avons appelé des listes).

Figure 10 – Schéma résumant l'état de la recherche d'une situation fondamentale du nombre entier




*Source: Les auteures*

Nous allons maintenant examiner brièvement la question :

> Y a-t-il une situation fondamentale de la signification « mesure » des nombres naturels ?

Sans rentrer dans les détails, contrairement à ce que nous avons fait pour les significations précédentes, nous allons considérer le nombre entier comme une connaissance utile pour la mesure, contexte dans lequel il ne s'agit que de nombres entiers naturels. Remarquons que cette signification était déjà implicitement à l'œuvre pour le cardinal : un jeton, deux jetons, trois jetons, consiste à compter des unités de jetons, dans cette phrase le mot « unité » prend à la fois un sens d'unité de dénombrement et d'unité de mesure (le jeton).

Introduire une mesure sur une ligne a des conséquences sur les propriétés de cet espace : alors que nous avions considéré précédemment une ligne quelconque, introduire une unité de mesure et un ordre revient à introduire un vecteur unité[6] (c'est-à-dire un sens et une unité de longueur), sur une droite munie d'une origine. Nous pouvons nommer l'objet ainsi construit « *droite numérique discrète* ».

Sur la droite numérique discrète munie d'une unité U (norme du vecteur unité), les deux significations du nombre entier déjà rencontrées sont utiles :

Pour mesurer un segment : « un segment de longueur 3U », 3 a une signification cardinale

Pour repérer une abscisse : « un point d'abscisse 3 », 3 a une signification ordinale

Sur une droite numérique discrète, seuls les points distingués (au sens de représentés par une marque, désignés par une abscisse ou par une lettre) sont considérés. La droite numérique discrète n'est pas dense (entre deux points

[6] Nous ne traiterons pas ici une autre solution qui est le cercle et le repère circulaire.

distingués il n'y a pas toujours un point distingué de la droite numérique discrète). Les segments qui relient les points distingués sont d'une longueur égale ou supérieure à l'unité. Nous sommes encore loin de la droite réelle et de la construction de $\mathbb{R}$. On peut se représenter cette construction en se référant au collier de perles : le fil du collier n'a pas de signification dans la position des perles.

La mise en relation entre les deux significations, cardinale et ordinale, dans le milieu de la droite numérique discrète, est aussi une connaissance utile :

Si un segment [OB] où O est l'origine du repère mesure 3U, alors le point B a l'abscisse 3 dans ce repère.

Si un point B a pour abscisse 3 alors le segment [OB] a pour longueur 3U.

La caractérisation rapide d'une situation fondamentale du nombre entier comme mesure discrète est alors :

Milieu : objets modélisables par des segments (bâton, dessin rectiligne, etc.) que nous appellerons « objet-segment » ; abscisses de points sur la droite numérique discrète et longueur d'objet-segment ayant pour extrémités deux de ces abscisses.

Définition-en-acte : deux objets-segments [AB] et [CD] ont la même longueur si en faisant coïncider A avec C, il est possible de faire coïncider aussi B et D.

Enjeu : étant donné un objet-segment modèle, déterminer si un autre objet-segment a la même longueur que le modèle.

Transformation des connaissances du point de vue de leur utilité en situation conduisant au savoir visé (processus d'institutionnalisation) :

la grandeur « mesure de longueur » est considérée comme une connaissance utile dans des situations,

la position est associée à la longueur d'un segment ayant l'origine pour extrémité,

une mesure est obtenue par la donnée des abscisses des extrémités d'un segment,

l'abscisse d'une extrémité d'un segment est obtenue par l'abscisse de l'autre extrémité et la mesure discrète du segment,

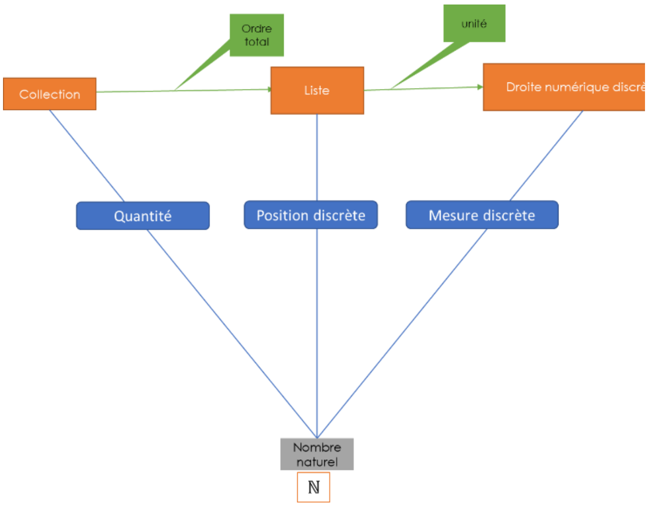
les significations quantité et position du nombre entier sont unifiées.

Nous pouvons donc enrichir l'avancée de notre travail concernant une situation fondamentale du nombre en ajoutant la bijection entre les longueurs de segment :

Dans le cas de la signification « mesure » d'un nombre entier positif, il s'agit d'ensembles finis discrets munis d'un ordre total et d'une mesure (que nous avons appelé droite numérique discrète).

La figure 11 complète la figure 10 en prenant en compte la signification du nombre entier comme mesure discrète.

Figure 11 – Schéma résumant l'état de la recherche d'une situation fondamentale du nombre naturel avec l'ajout de la signification meure discrète[6]




*Source: Les auteures*

Nous poursuivons notre recherche en considérant le début de l'ingénierie didactique emblématique du travail de Guy et Nadine Brousseau (BROUSSEAU ; BROUSSEAU, 1987 ; BROUSSEAU ; BROUSSEAU ; WARFIELD, 2014) concernant les nombres rationnels, comme un prolongement de notre dernière situation fondamentale. En effet, le rationnel-mesure est introduit comme une mesure de longueur dans le milieu de la mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier (BROUSSEAU, 1980, 1981).

Dans une situation de formulation où il faut distinguer des feuilles de papier par leur épaisseur, il s'agit de communiquer une mesure (l'épaisseur d'une feuille de papier) qui n'est pas mesurable avec les outils disponibles, cette épaisseur étant inférieure à l'unité de longueur la plus petite qu'il est possible d'utiliser dans la situation (le millimètre).

La connaissance utile dans cette situation consiste à associer deux nombres : la mesure entière en millimètre d'un bloc constitué de la superposition d'un certain nombre de feuilles *identiques* (par exemple « 3 millimètres pour 16 feuilles » ou bien « 6 millimètres pour 32 feuilles » ou bien « 3 millimètres pour 25 feuilles »). Dans le milieu des feuilles de papier, la comparaison de ces couples (3 mm, 16), (6 mm, 32), (3 mm, 25), (6 mm, 16) est possible :

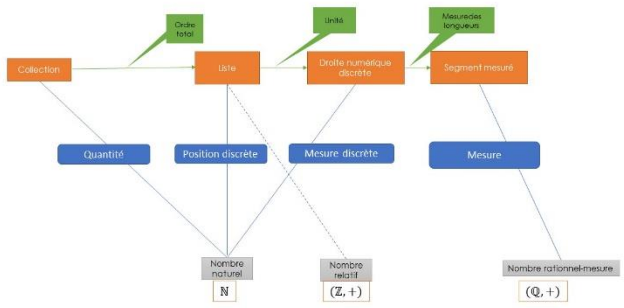
3 mm pour 16 feuilles c'est la même épaisseur que 6 mm pour 32 feuilles : en prenant le double de feuilles, on double la mesure ;

3 mm pour 16 feuilles ce n'est pas la même épaisseur que 3 mm pour 25 feuilles puisqu'on a la même épaisseur du paquet mais pas avec le même nombre de feuilles ;

3 mm pour 16 feuilles ce n'est pas la même épaisseur que 6 mm pour 16 feuilles puisqu'on a deux paquets avec le même nombre de feuilles mais pas la même épaisseur.

Nous considérons qu'il y a une continuité entre les différentes situations fondamentales que nous avons décrites ou bien évoquées, ce qui nous amène à reconsidérer les savoirs visés. En effet, notre analyse considère que les situations fondamentales concernant les nombres entiers positifs (les naturels), avec leur signification de quantité et de position discrète, puis la situation fondamentale de la droite numérique discrète et enfin du segment mesuré par co-mensuration (rationnels-mesure), pourraient sans doute être considérées comme des situations générées à partir d'une situation fondamentale plus générale qui consisterait à associer par une bijection des sous-ensembles déterminés par les variables: ordre total, unité, mesure de longueur(figure 12).

Figure 12 – Schéma résumant l'enchainement des situations fondamentales dans l'état de notre recherche




*Source: Les auteures*

La figure 12 est illustrative de cette continuité, mais aussi de la limitation d'une situation fondamentale qui est définie d'abord par des entiers. Cette limitation est au cœur de l'analyse épistémologique de Brousseau (1981, p. 49) concernant les nombres rationnels. Brousseau considère que le passage entre les rationnels-mesures (couple d'entiers) et les nombres rationnels « abstraits » nécessite une nouvelle situation fondamentale, qui s'appuie sur la connaissance préalable des rationnels-mesure, et dont le milieu est celui des agrandissements (applications linéaires rationnelles). C'est seulement dans un tel milieu que la multiplication de deux rationnels acquière une signification et que le corps des rationnels est alors construit.

Remarquons que la rupture considérée par Brousseau pour envisager la multiplication comme une opération interne (dans $\mathbb{Q}$) est également présente en ce qui concerne la position dans $\mathbb{Z}$ :il est possible d'envisager des déplacements positifs et négatifs à partir de positions positives et négatives, mais cela ne conduit qu'à $(\mathbb{Z}, +)$ car la multiplication de deux entiers négatifs ne peut pas s'envisager dans un tel milieu, et demanderait une autre situation fondamentale tout à fait différente, sans doute de nature algébrique (RUIZ-MUNZÓN et al., 2012 ; RUIZ-MUNZÓN ; BOSCH ; GASCÒN, 2020 ; SCHUBRING, 1986).

## CONCLUSION

Dans ce texte, pour montrer l'importance des savoirs dans la théorie des situations, nous avons développé le cœur épistémologique de cette théorie : la théorie des situations mathématiques. En conclusion, nous allons maintenant faire le lien entre la théorie des situations mathématiques et la théorie des situations didactiques en mathématiques en considérant la place de l'ingénierie didactique pour la recherche (ARTIGUE, 1988, 2011 ; BROUSSEAU ; BROUSSEAU, 2006 ; MARGOLINAS et al., 2011 ; SCHNEIDER, 2011).

La nécessité d'une ingénierie relève d'un point de vue phénoménotechnique dans lequel toute science est un mélange de théorie et d'observation. L'ingénierie est en effet conçue comme une « *phénoménotechnique* » au sens du philosophe français des sciences Gaston Bachelard:

> Aucun phénomène ne se produit naturellement, [...] aucun phénomène n'est donné. Il doit être constitué et ses caractéristiques doivent donc être lues indirectement avec une conscience constante de l'interprétation instrumentale et théorique, sans jamais diviser l'esprit en une pensée expérimentale pure et une théorie pure. (BACHELARD, 1949, p. 111)

À propos de l'ingénierie phénoménotechnique, BESSOT (2011) souligne que:

> Les phénomènes pris en compte, loin d'être donnés naturellement à l'observateur, sont produits et observés artificiellement. La théorie des situations produit des outils théoriques spécifiques en relation dialectique avec l'ingénierie didactique [...]. (BESSOT, 2011, p. 32)

Pour cela, il est nécessaire de produire et d'observer des situations spécifiques qui n'existent pas dans le système d'enseignement ordinaire : c'est le projet de l'ingénierie didactique pour la recherche.

L'observation des pratiques de classe en milieu expérimental a été extrêmement importante dans l'élaboration de la théorie de Brousseau. Dans ce but, Brousseau a créé le Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques *COREM*. Il appelle parfois le COREM son « didactron » (en référence au synchrotron de Genève). Le COREM a impliqué toute une école (École Jules Michelet) pendant vingt-cinq ans. Nous citons ici les notes sur l'observation des pratiques en classe qui ont été données dans le cadre de la recherche du groupe d'étude thématique sur les pratiques en classe à l'ICME[7] 11 au Mexique:

> To insure the best scientific value of the results of observations, one must be able to insure the authenticity of the facts observed. […] We had to satisfy many constraints like general principles of scientific observation, rules of educational institutions, methods of observation, quality and the stability of the functioning of the school… which necessitate theoretical elaboration and experiments. (BROUSSEAU, 2008, p. 1–2)

D'une certaine manière, la question centrale qui rend nécessaire l'ingénierie didactique est celle que pose BROUSSEAU (2010b, p. 2): « Pourquoi enseigner des situations si l'enjeu est d'acquérir des savoirs ? » En effet, la théorie des situations repose sur l'hypothèse qu'il est possible d'enseigner des savoirs avec leurs significations, et donc sur des connaissances dans des situations produites par une transposition contrôlée:

> Cette représentation du fonctionnement des connaissances dans les décisions, suivant leur validité et leur utilité dans des circonstances précises est l'instrument fondamental de la [Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques] comme épistémologie expérimentale. (BROUSSEAU, 1998b, p. 3)

L'ingénierie didactique est alors indispensable pour montrer qu'il est possible d'enseigner des savoirs avec leurs significations, même pour des savoirs réputés comme difficiles, comme les rationnels à l'école élémentaire. Il s'agit alors d'une sorte de « théorème d'existence », dans des conditions expérimentales particulières, mais avec des élèves « ordinaires » d'une école publique « ordinaire », comme le fut l'école Michelet.

Nous soutenons enfin que le processus de recherche de situations fondamentales permet aussi une analyse du point de vue épistémologique de situations « ordinaires », telles qu'elles se déroulent dans des classes ou bien telles qu'elles sont proposées dans la documentation à la disposition des enseignants.

En effet, ce processus peut fournir des références pour caractériser la structure et la cohérence de ces situations « ordinaires » vis-à-vis du savoir visé, la complétude ou l'incomplétude de l'institutionnalisation (épistémologique) vis-à-vis de l'utilité du savoir (sur le long ou le court terme de l'enseignement), et par là peut permettre l'étude de la présence ou de l'absence de significations cruciales du savoir enseigné.

## REFERENCES

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281–308, 1988.

ARTIGUE, M. L'ingénierie didactique: un essai de synthèse. Em: MARGOLINAS, C. et al. (Eds.). **En amont et en aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, p. 225–237, 2011.

BACHELARD, G. **Le rationalisme appliqué**. Paris: P.U.F., 1949. v. 1975.

BESSOT, A. L'ingénierie didactique au coeur de la théorie des situations. Em: MARGOLINAS, C. et al. (Eds.). **En amont et en aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, p. 29–56, 2011.

BRIAND, J.; LOUBET, M.; SALIN, M.-H. **Apprentissages mathématiques en maternelle**. Paris: Hatier, 2004.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 309–336, 1990.

BROUSSEAU, G. Problèmes de didactique des décimaux : première partie. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 1, n. 1, p. 11–59, 1980.

BROUSSEAU, G. Problèmes de didactique des décimaux : deuxième partie. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 1, p. 37–127, 1981.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, 1998a.

BROUSSEAU, G. **Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques**. Disponível em: <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf>.

BROUSSEAU, G. Education et Didactique des mathématiques. Version française de l'auteur. **Educaciòn matemàtica**, v. 12, n. 1, p. 5–39, 2000.

BROUSSEAU, G. Recherches en éducation mathématique. **APMEP**, v. 457, p. 213–224, 2005a.

BROUSSEAU, G. Situations fondamentales et processus génétiques de la statistique. Em: MERCIER, A.; MARGOLINAS, C. (Eds.). **Balises pour la Didactique des Mathématiques**. Grenoble: La pensée sauvage, p. 165–19, 2005b.

BROUSSEAU, G. **Notes on the observation of classroom practices**. Proceedings of the Eleventh International Congress on Mathematical Education. **Anais**...: ICMI 11. Monterrey (Mexico): 2008. Disponível em: <blog.espe-bretagne.fr/visa/wp-content/uploads/brousseau_2009_3.pdf>

BROUSSEAU, G. **De l'art d'enseigner les mathématiques à la didactique et à l'étude**

**des situations**. Diaporama: cours 2010, 2010a. Disponível em: http://guy-brousseau.com/category/3le-cours-2010/

BROUSSEAU, G. **Les situations mathématiques : propriétés et composantes**. Diaporama: cours 2010, 2010b. Disponível em: http://guy-brousseau.com/cours-2010-les-situations-mathematiques-proprietes-et-composantes

BROUSSEAU, G. Des dispositifs Piagétiens... aux situations didactiques. **Éducation et didactique**, v. 6, n. 2, p. 103–129, 2012.

BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N. **Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire**. Bordeaux: IREM, 1987.

BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N. L'ingénierie didactique en mathématiques. Séminaire du DAEST. 2006.

BROUSSEAU, G.; BROUSSEAU, N.; WARFIELD, G. **Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experiment**. Dordrecht Heidelberg New-York London: Springer, 2014.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Des programmes, oui. Mais pour quoi faire? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 39, n. 1, p. 97–115, 2019.

INTERNATIONAL_COUNCIL_FOR_SCIENCE. **The value of basic scientific research**. Disponível em: <http://www.icsu.org/publications/icsu-position-statements/value-scientific-research/549_DD_FILE_Basic_Sciences_12-04.pdf>. Acesso em: 11 nov. 2014.

LAPARRA, M.; MARGOLINAS, C. Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement. **Pratiques**, v. 145–146, n. Didactique du français (1), p. 141–160, 2010.

MARGOLINAS, C. La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse *a posteriori* des situations. Em: MARGOLINAS, C. (Ed.). **Les débats de didactique des mathématiques**. Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 89–102, 1995.

MARGOLINAS, C. et al. **En amont et en aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, 2011.

MARGOLINAS, C. Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques? **Revue Française de Pédagogie**, v. 188, p. 13–22, 2014.

MARGOLINAS, C. Construire des points de vue d'élèves: des défis théoriques et méthodologiques pour la recherche en didactique des mathématiques. Em: CHAACHOUA, H. et al. (Eds.). **Nouvelles perspectives en didactique: le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeur et mesure**. Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 19–48, 2021.

MARGOLINAS, C.; WOZNIAK, F. **Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique**. (publication chez academia prévue 2024) ed. Bruxelles: De Boeck, 2012.

MARGOLINAS, C.; WOZNIAK, F. Early construction of number as position with young children: a teaching experiment. **ZDM - The International Journal of Mathematics Education**, v. 46, n. 1, p. 29–44, 2014.

MARGOLINAS, C.; WOZNIAK, F. Le nombre comme mémoire de la position : un révélateur des besoins praxélogiques des professeurs. Em: **XVII° Ecole d'été de didactique des mathématiques.** [s.l: s.n.], 2013.

PERRIN-GLORIAN, M.-J. Théorie des situations didactiques: naissance, développements, perspectives. Em: ARTIGUE, M. et al. (Eds.). **Vingt ans de didactique des mathématiques en France**. Grenoble: La pensée sauvage, p. 97–147, 1994.

RUIZ-MUNZÓN, N. et al. Autour de l'algèbre: les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. Em: COULANGE, L. et al. (Eds.). **Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives.** Recherches en didactique des mathématiques (numéro spécial) ed. [s.l: s.n.]. p. 81–101, 2012.

RUIZ-MUNZÓN, N.; BOSCH, M.; GASCÒN, J. Un modèle épistémologique de référence pour la recherche sur l'algèbre élémentaire. **Nouveaux Cahiers de la Recherche en Education**, v. 22, n. 1, p. 123–144, 2020.

SCHNEIDER, M. Ingénieries didactiques et situations fondamentales. Quel niveau praxéologique? Em: MARGOLINAS, C. et al. (Eds.). **En amont et en aval des ingénieries didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, p. 175–206, 2011.

SCHUBRING, G. Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. **Petit x**, v. 12, p. 5–32, 1986.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 2.3, p. 133–170, 1990.

WOZNIAK, F.; MARGOLINAS, C. Introduction of ordinal numbers at the beginning of the French curriculum: a study of professional teaching problems. Em: CHEVALLARD, Y. et al. (Eds.). **Advances in the Anthropological Theory of the Didactic**. Birkhäuser, p. 113-124, 2022.