CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 61 – 74
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Épistémologie et didactique du raisonnement en arithmétique

Epistemology and didactic of number theory proof and proving

Véronique **BATTIE**,
Univ Lyon, Université Claude Bernard Lyon1.

RESUMÉ

La part innovante de nos travaux en didactique des mathématiques a pour origine l'outil épistémologique développé spécifiquement pour le raisonnement et l'analyse de preuves en arithmétique. Sa mise à contribution pour nos analyses didactiques à la transition Secondaire-Supérieur et au-delà caractérise notre pratique de Recherche et éclaire la pratique enseignante à l'Université. Les pistes d'exploitation didactique sont diverses. Après avoir présenté en détail notre cadre épistémologique, nous abordons quelques-unes de ces pistes : les activités multipreuves de type generic proving, la mise en œuvre et l'analyse de raisonnements emblématiques tels le raisonnement par récurrence et le raisonnement par l'absurde ainsi que les tests de compréhension. À travers ces trois thématiques didactiques, nous tentons d'illustrer comment la démarche épistémologique prend en charge les spécificités du raisonnement en arithmétique et ainsi permet d'enrichir à la fois la conception d'activités, évaluations comprises, et l'analyse de productions d'étudiants.

Mots-clés: épistémologie du raisonnement en arithmétique, dimensions organisatrice et opératoire, transition Secondaire-Supérieur.

Correspondance:

veronique.battie@univ-lyon1.fr

ABSTRACT

The creativity of our didactic researches comes from the epistemological tool developed to analyse number theory proof and proving. Its contribution to study the Secondary-Tertiary transition and beyond specifies our research practice and helps the teaching practice at the University. There are many ways to explore the didactical potential of the epistemological approach. After a detailed presentation of the epistemological framework, we consider some of them : generic proving multiple proof tasks, understanding of induction and reductio ad absurdum in students' proof and proving practice and comprehension tests. From these didactical themes, we try to illustrate how the epistemological approach takes into account the specificities of number theory proof and proving and, by this way, offers deeper analysis for the design of didactical activities, assessments included, and to study students' proofs.

Keywords: epistemology of number theory proof and proving, organising and operative dimensions, Secondary-Tertiary transition.

Reçu dans 04/10/2023
Approuvé en 04/11/2023

INTRODUCTION

La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition des connaissances relatives au domaine spécifique de cette discipline ou des sciences voisines avec lesquelles elle interagit (GRECO, 1985). C'est ainsi que ce champ scientifique s'est développé et se développe à travers des travaux articulant analyses mathématique, historique et épistémologique et analyse didactique. Plus précisément, les besoins épistémologiques en didactique sont les besoins formulables en termes de connaissance des processus par lesquels les concepts mathématiques se forment et se développent, et plus généralement en termes de connaissance des caractéristiques de l'activité mathématique (ARTIGUE, 1989). Et c'est par la voie épistémologique ainsi définie que nous donnons un sens à la prise en charge des savoirs en jeu dans nos travaux de recherche en didactique des mathématiques.

L'ancrage épistémologique de nos travaux a pour origine la rencontre collaborative de Michèle Artigue et Michel Serfati dans l'encadrement de thèses : « in early 2000, I collaborated with Michel Serfati in the supervision of Veronique Battie's Ph.D. on the teaching of arithmetic (Battie, 2003) and Caroline Bardini Ph.D. on the relationship to algebraic symbolism (Bardini 2003). The resulting theses, defended before juries including historians and epistemologists of mathematics, attest to the fecundity of these interactions between didactics and epistemology. » (ARTIGUE, 2016, p.259). La part épistémologique de nos travaux a d'autant plus pris d'importance dans un contexte d'état de la Recherche où nous ne disposions d'aucune étude de cette nature centrée sur le raisonnement en arithmétique, objet central de notre problématique de thèse (BATTIE, 2003), l'arithmétique recouvrant la théorie des nombres élémentaire (GRIGORIEVA, 2010). Parmi les savoirs en jeu dans l'activité mathématique, le raisonnement retient tout particulièrement notre attention dans une perspective de prise en charge des « savoirs mathématiques transversaux, c'est-à-dire ceux qui correspondent à expérimenter, faire des conjectures, modéliser, définir, prouver, etc. » (GRENIER & PAYAN, 2006).

Dans une première partie, nous présenterons le cadre théorique de nature épistémologique que nous mobilisons dans nos recherches en didactique du raisonnement en arithmétique. Suite à cette présentation, nous tâcherons d'illustrer comment cet outil théorique est mis à contribution dans une perspective didactique.

UN OUTIL EPISTEMOLOGIQUE

Au sein du raisonnement en arithmétique, nous distinguons deux dimensions complémentaires, la *dimension organisatrice* et la *dimension opératoire, en* en appui sur l'étude de textes historiques (BATTIE, 2003). La première s'identifie au raisonnement global qui traduit la mise en acte d'une visée : elle organise et structure les différentes étapes du raisonnement. La *dimension opératoire* quant à elle est relative à tout ce qui relève des manipulations de calcul opérées sur les objets en jeu et qui permettent la mise en œuvre des différentes étapes du raisonnement global suivi (dimension organisatrice). Sous quelles formes identifie-t-on spécifiquement en arithmétique chacune de ces dimensions ?

Au titre de premier exemple, la *dimension organisatrice* prend formes à travers l'exploitation de la propriété de bon ordre de l'ensemble $\mathbb{N}$: raisonnement par récurrence, descente infinie, raisonnement par l'absurde et minimalité. Un deuxième pôle d'exemples est donné avec la visée de réduire la résolution d'un problème à l'étude d'un nombre fini de cas : la disjonction de cas qui exploite le concept de partition d'un ensemble et la recherche exhaustive où l'on teste une à une les solutions potentielles (avec préalablement ou non une phase de limitation de cette recherche). Un troisième pôle d'exemples appelé le jeu d'extension-réduction apparaît avec la visée d'établir une propriété pour tout élément d'un anneau factoriel : dans $\mathbb{Z}$ on montre que la propriété est multiplicative et qu'elle est vraie pour tout nombre premier. Pour la *dimension opératoire* nous identifions en arithmétique plusieurs pôles. Un premier pôle apparaît avec le choix de représentation des objets en jeu dans le raisonnement. Deux choix essentiels sont les suivants : la structuration autour des nombres premiers (en appui sur le théorème fondamental de l'arithmétique[1]) et les réseaux réguliers liés à l'ordre partiel divisibilité[2] (congruences). Un deuxième pôle opératoire renvoie à l'utilisation de théorèmes et de résultats admis au cours du raisonnement[3]. Les manipulations algébriques opérées dans le raisonnement définissent un troisième pôle opératoire en incluant l'utilisation des combinaisons linéaires d'entiers. Nous pointons un quatrième pôle avec l'ensemble des traitements relatifs à l'articulation entre l'ordre divisibilité[4] noté $|$ (anneau $\mathbb{Z}$) et l'ordre naturel noté $\leq$ (ensemble bien ordonné $\mathbb{N}$) ; nous préciserons cet exemple dans la suite de l'article.

Ces dimensions organisatrice et opératoire sont introduites avec l'idée qu'elles interagissent. Nous avons mis à jour trois principales voies d'interactions (BATTIE, 2003). Il est tout d'abord possible d'identifier de façon privilégiée une dimension organisatrice donnée à un certain pôle opératoire. Le jeu d'extension-réduction et la structuration autour des nombre premiers vont de pair. Une disjonction de cas ou une phase de limitation de recherche exhaustive est susceptible d'être définie en lien étroit avec l'articulation entre l'ordre divisibilité et l'ordre naturel ; par exemple, au sein d'une disjonction de cas définie à partir de l'ordre naturel, les propriétés « être pair » et « être impair » peuvent être chacune associée spécifiquement à un des cas (dans (BATTIE, 2003) nous avions illustré cela à partir du problème « Déterminer les entiers naturels m et n tels que $19^m - 2^n$ soit un carré »). Un deuxième type d'interactions

[1] Tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une unique décomposition en produit de nombres premiers.

[2] Soient a et b deux entiers. On dit que a divise b s'il existe un entier k tel que $b = k \times a$.

[3] On parlera d'encapsulation dans la suite du texte pour désigner ce pôle opératoire.

concerne l'apparition de sous-dimensions organisatrices dans la dimension opératoire : le raisonnement prend forme via l'imbrication de plusieurs dimensions organisatrices ; par exemple, une disjonction de cas peut apparaître dans le traitement opératoire d'un raisonnement par récurrence. Dans un sens de complexification inverse, en admettant un résultat prouvé dans le jeu opératoire (processus d'encapsulation) une ou plusieurs dimensions organisatrices sont susceptibles de disparaître dans le raisonnement ; un exemple détaillé est donné dans la suite. Un troisième type d'interactions se situe dans la façon dont les objets sur lesquels porte le travail opératoire influent sur la nature de la dimension organisatrice. Dans (BATTIE, 2003) nous avions montré sur un exemple historique emblématique que l'amorce d'une descente infinie dépend du type d'objets manipulés. On peut aussi mentionner qu'en spécifiant un objet on peut éviter de spécifier la dimension organisatrice. À titre d'exemple (BATTIE, 2007) un raisonnement par l'absurde centré sur l'objet fraction via son représentant irréductible pourra être spécifié en raisonnement par l'absurde et minimalité sans que l'objet fraction soit spécifié (via son représentant irréductible).

Pour outiller l'analyse comparative de preuves d'un même résultat dans une perpective de généralisation (generic proving (LERON & ZASLAVSKY, 2013)), nous avons complété notre cadre théorique en introduisant le *pouvoir générique d'une preuve* en appui sur les travaux du philosophe M. Steiner (1978). Nous détaillons un exemple à partir d'un échantillon de preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. La perspective de généralisation est posée avec le résultat général suivant : Soit n un entier naturel. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\sqrt{n}$ soit rationnel est que n soit un carré d'entier. Nous donnons la parole à Steiner pour une première preuve (preuve 1) : « Consider the Pythagorean proof that the square root of 2 is not rational: if $a^2 = 2b^2$, with $\frac{a}{b}$ reduced to lowest terms, then a^2 and thus a itself have to be even; thus a^2must be a multiple of 4, and b^2 - and thus b - multiples of 2. Since therefore $a^2 = 2b^2$ implies that both a and b must be even, contradicting our (allowable) stipulation that $\frac{a}{b}$ be reduced to lowest terms, it can never be true, q.e.d. The key point here is the proposition that if a^2 is even so is a. This can be verified by squaring an arbitrary odd number $2q + 1$ showing that the result must be odd. » (STEINER, 1978, p.137). Une première étape d'analyse de cette preuve est de constater que nous sommes dans une situation problématique pour aller vers une généralisation de part le choix de prouver the « key point » avec pour dimension organisatrice un raisonnement par contraposée : « Indeed for each prime p, one can separately verify that if p divides a^2 it must divide a also, though the proofs become more and more complex […].» (STEINER, 1978, p.138). La dimension organisatrice des preuves se complexifie : on a une imbrication d'un raisonnement par l'absurde, d'un raisonnement par contraposée et d'une disjonction de cas, cette dernière avec un nombre croissant de cas à traiter (négation de « p divide a »). La situation est toute différente avec la preuve suivante (preuve 2) : « By using the Fundamental Theorem of Arithmetic - that each number has a unique prime power expansion - we can argue for the irrationality of the square root of two swiftly and decisively. For in the prime power expansion of a^2 the prime 2 will necessarily appear with an even exponent (double exponent it has in the expansion of a), while in $2b^2$ its exponent must needs be odd. So a^2 never equals $2b^2$ q.e.d. » (STEINER, 1978, p.138). A partir de cette preuve, on peut en effet aisément écrire une preuve de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ et aucune complexification des dimensions organisatrice et opératoire n'apparaît. Poursuivant la démarche de généralisation, « It's easy to see what happens, moreover, when 2 becomes 4 or any other square; the prime power expansion of 4, unlike that of 2, contains 2 raised to an even power, allowing $a^2 = 2b^2$. In the same way we get a general theorem: the square root of n is either an integer or irrational. » (STEINER, 1978, p.144). Pour aller plus loin dans l'analyse, nous construisons une troisième preuve (preuve 3) à partir de la preuve 1 avec pour seule différence l'étape opératoire relative à « the key point » : Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe a et b entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible. Montrons que a et b sont pairs : avec l'égalité précédente on a $a^2 = 2b^2$ donc a^2 est pair et on montre que a l'est aussi: 2 est premier et divise a^2 donc d'après le lemme d'Euclide[5] 2 divise a. Il existe donc un entier a' non nul tel que $a = 2a'$; d'où $2b^2 = 4(a')^2$ ou encore $b^2 = 2(a')^2$. Comme précédemment, on en conclut que b est pair. Ceci contredit le caractère irréductible de la fraction. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel. En utilisant le lemme d'Euclide, la complexification de la dimension organisatrice disparaît à la fois dans la preuve 3 (disparition du raisonnement par contraposée) et en allant vers une généralisation (non apparition d'une disjonction de cas). Ainsi, pour en revenir à la preuve 1, ce n'est pas tant le choix fait au niveau de la dimension organisatrice que l'absence du lemme d'Euclide du côté de la dimension opératoire qui explique le caractère problématique de la situation pour généraliser. Grâce au lien fort entre le lemme d'Euclide et le théorème fondamental de l'arithmétique (ce lemme et l'unicité de la décomposition en produit de nombres premiers sont équivalents), on peut associer les preuves 2 et 3 en termes de dimension opératoire : le choix de la structuration autour des nombres premiers caractérise ces deux preuves et explique l'aisance à généraliser. Sur cet exemple, Steiner introduit l'idée de *characterizing property*, s'identifiant ici à la structuration autour des nombres premiers, au sens où « from the proof it is evident that the result depends on the property » (STEINER, 1978, p.143) et utilise le qualificatif « generalizable proof » (STEINER, 1978, p.144) pour la preuve 2. En utilisant la structuration autour des nombres premiers sous la forme équivalente du théorème de Gauss[6], nous ne sommes pas surpris de construire une

[5] Soient b et c deux entiers. Si un nombre premier p divise le produit bc alors p divise b ou p divise c.

[6] Soient a, b et c trois entiers. Si a est premier avec b et a divise le produit bc alors a divise c.

nouvelle preuve (preuve 4) qui, de même que les preuves 2 et 3, se prête aisément à la généralisation : Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, il existe *a* et *b* entiers naturels non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$; on suppose de plus que la fraction est irréductible. Avec l'égalité précédente on a $a^2 = 2b^2$ donc b divise a^2 et par le théorème de Gauss *b* divise *a*. Les entiers a et b étant premiers entre eux $b = 1$ et on aboutit à une contradiction avec $a^2 = 2$. En conclusion, $\sqrt{2}$ est irrationnel. Ainsi, nous qualifions les preuves 2, 3 et 4 de preuves à haut pouvoir générique et la preuve 1 de preuve à faible pouvoir générique. Pour plus de détail à ce sujet, le lecteur pourra se reporter à (BATTIE, 2021).

Pour finir, nous revisitons ces preuves arithmétiques de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ du point de vue de la dimension opératoire quant à l'articulation entre l'ordre divisibilité et l'ordre naturel. Pour tous entiers *m* et *n*, nous avons les deux résultats suivants :

$$m \mid n \Longrightarrow m \mid n$$

$$m \mid n \text{ et } n \mid m \Leftrightarrow m = n \Leftrightarrow m \leq n \text{ et } n \leq m$$

Ainsi, porter son attention sur cette articulation amène à donner toute son importance au sens de lecture en termes de divisibilité des égalités. Une égalité $A = BC$ peut être lue en énonçant B divise A et C divise A (sens de lecture 1). Et, en inversant le sens de lecture (en termes de divisibilité) et avec une perte d'information, on lit A divise BC (sens de lecture 2). Les preuves 1 et 3 sont identiques du point de vue de la dimension opératoire sur cet aspect : l'égalité $a^2 = 2b^2$ est lue 2 divise a^2. On retrouve ce sens de lecture 1 dans la preuve 4 mais l'objet diviseur est *b* et non 2. En envisageant un sens de lecture 2, un ensemble de nouvelles preuves (notées preuve 5.*i*, $i \in \{1,2,3\}$) apparait avec pour point de départ a^2 divise $2b^2$. En spécifiant l'objet fraction via son représentant irréductible comme dans les preuves 1, 3 et 4 et en utilisant le théorème de Gauss, on obtient a^2 divise 2. A partir de là, on peut écrire au moins trois preuves suivant la façon dont on exploite l'articulation entre ordre naturel et divisibilité :

Fin preuve 5.1 : Et 2 divise a^2 (sens de lecture 1) donc $a^2 = 2$. Ce qui contredit la nature de *a*.

Fin preuve 5.2 : Ainsi $a^2 \leq 2$. Or 2 divise a^2 (sens de lecture 1) d'où $2 \leq a^2$. Finalement $a^2 = 2$. Contradiction.

Fin preuve 5.3 : Ainsi $a \in \{1,2\}$. Chacun des deux cas contredit respectivement la nature de *b* et *a*.

En termes d'interactions entre dimensions organisatrice et opératoire, une attention est portée sur la nature de la contradiction à laquelle on aboutit dans le cadre du raisonnement par l'absurde suivant les choix faits dans la dimension opératoire. On note en particulier que la condition nécessaire et suffisante « être un carré d'entier » apparaît dans les preuves 4 et 5.*i*. avec la spécificité opératoire d'utiliser le théorème de Gauss. En revenant sur l'amorce commune aux preuves 5.*i*, on note que l'utilisation du théorème de Gauss a lieu sous l'hypothèse que les entiers a^2 et b^2 sont premiers entre eux, déduite de l'hypothèse que les entiers *a* et *b* le sont en travaillant sur le représentant irréductible de la fraction $\frac{a}{b}$. De façon encapsulée ou non, intervient donc l'implication « si deux entiers sont premiers entre eux alors leurs carrés le sont aussi » qui peut être démontrée par contraposée pour la dimension organisatrice et avec le lemme d'Euclide pour l'élément-clef de la dimension opératoire. A l'exception de la preuve 1, au faible pouvoir générique, où le seul lien avec la propriété caractéristique se lit dans l'existence du représentant irréductible, toutes les preuves font intervenir la propriété caractéristique : la structuration autour des nombres premiers est explicite dans la preuve 2 via le travail opératoire sur la valuation 2adique et pour toutes les autres preuves (3, 4 et 5.*i*) cette propriété intervient via l'utilisation du théorème de Gauss et/ou du lemme d'Euclide (ce dernier pouvant être vu comme cas particulier du théorème de Gauss).

L'outil épistémologique que nous venons de présenter est à l'origine de la part innovante de nos travaux en didactique. Il permet d'analyser les preuves en arithmétique et le processus d'émergence de ces preuves dans le travail de mathématiciens (GARDES, 2013) et d'étudiants/élèves (BATTIE, 2003, 2007 ; GARDES, 2013) ce qui constitue une première voie majeure d'exploitation didactique. Dans la partie suivante, nous pointons d'autres mises à contribution de notre cadre épistémologique dans une perspective didactique à la transition enseignement secondaire-enseignement supérieur (GUEUDET & THOMAS, 2020) et au-delà.

EXPLOITATIONS DIDACTIQUES

À l'issue des dernières rencontres du réseau INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics), les responsables du groupe de travail centré notamment sur la preuve, et auquel nous participions, écrivent dans leur rapport : « Finally, we consider that introducing specific work on proof and proving in University teacher training would be valuable, to initiate a change in the way proof is taught in general at university: moving from proof made in front of students, to students' proof elaboration and analysis. » (DURAND-GUERRIER & TURGUT, 2022, p.242). Et pour nourrir ce passage vers des activités visant la production de preuves par les étudiants et une démarche d'analyse de ces preuves, l'analyse de preuves est incontournable. Ainsi, pour concevoir de telles activités, le chercheur et/ou l'enseignant a besoin d'être outillé et notre cadre épistémologique répond à ce besoin pour les preuves en arithmétique. En référence à la fois à (LERON & ZASLAVSKY, 2013) et (DREYFUS & al., 2012), nous dénommons *generic proving multiple proofs tasks* des activités où plusieurs preuves d'un même résultat mathématique sont fournies dans une perspective de généralisation de ce résultat. La conception de telles activités nécessite de sélectionner un échantillon de preuves (d'un même résultat) qui soit hétérogène en termes de pouvoir générique. Avec l'exemple présenté dans la première partie, un échantillon judicieux serait composé a minima de la preuve 1 et d'une preuve de l'ensemble des preuves restantes. Il s'agit en effet de proposer à la fois (au moins) une preuve qui se complexifie en envisageant $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ *etc.* et avec laquelle la généralisation est problématique et, en contraste, une preuve qui ne nécessite que des adaptations mineures pour être généralisée. Dans de telles situations où des preuves sont fournies par l'enseignant, les élèves/étudiants sont amenés à analyser et produire des preuves de façon dialectique, plus précisément dans un jeu d'allers-retours entre lecture-analyse des preuves fournies et production de preuves. Pour plus de détail, le lecteur pourra se reporter à (BATTIE, 2021).

Un autre type d'activités est construit en proposant aux élèves/étudiants une lecture critique de preuves éventuellement erronées. En s'intéressant à l'une des dimensions organisatrices emblématiques de l'arithmétique, nous empruntons l'exemple suivant à (GARDES & *al.*, 2016) tel qu'il est formulé auprès des élèves/étudiants:

« Un élève a proposé la preuve ci-dessous de « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geqslant (n+1)^2$ ». Voilà ce qu'il écrit : Soit $Q(n)$ la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $2^n \geqslant (n+1)^2$. La propriété est vraie au rang 0 car $2^0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$. Supposons qu'elle soit vraie au rang k et montrons qu'elle est vraie au rang $k+1$: $2^{k+1} = 2 \times 2^k \geqslant 2(k+1)^2$ car par hypothèse de récurrence $2^k \geqslant (k+1)^2$, or $2(k+1)^2 = 2k^2 + 4k + 2 \geqslant k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$ dès que $k \geqslant 2$. Donc la propriété est alors vraie au rang k+1. La propriété est héréditaire. Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, elle est vraie pour tout n. »

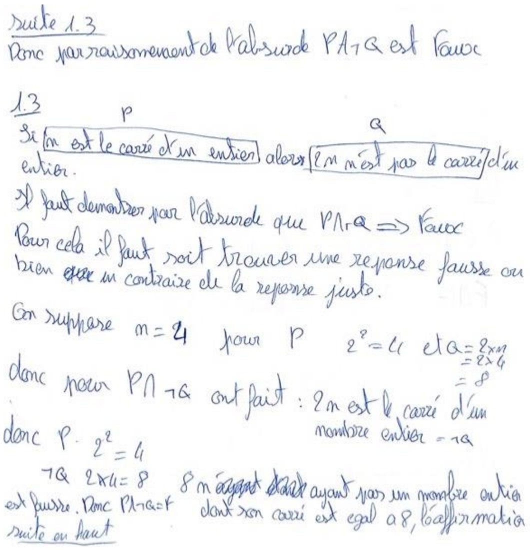
1. Un de ses camarades lui fait remarquer que $Q(2)$ est fausse. Comment expliquez-vous cette contradiction ?
2. Un deuxième camarade lui fait aussi remarquer que $Q(7)$ est vraie. Que peut-on en déduire ? »

Loin des tâches relatives au raisonnement par récurrence proposées à la transition Secondaire-Supérieur, ce type d'activités permet d'évaluer la compréhension par les élèves/étudiants de cette dimension organisatrice, tout particulièrement quant au lien entre hérédité et initialisation (GARDES & *al.*, 2016), et en termes d'interactions entre dimensions organisatrice et opératoire. Nous l'avons utilisé l'année universitaire 2022-2023 dans le cadre de Travaux Dirigés et d'un examen auprès de nos étudiants en 3ème année de Licence de mathématiques (parcours mathématiques pour l'enseignement) ainsi qu'auprès d'étudiants en première année de Licence mathématiques-informatique (parcours aménagé sur deux années). Pour ces derniers, on retrouve les difficultés mises à jour dans (GARDES & *al.*, 2016) en fin d'enseignement Secondaire et nous pouvons en revisiter certaines. En particulier, lorsque les étudiants concluent à la question 2. « Qu'elle [la propriété] ne marche que pour les nombres premiers »[7], « $Q(n)$ est vrai seulement pour les

[7] Entre guillemets nous reproduisons à l'identique les réponses des étudiants (fautes d'orthographe comprises) et entre

nombres impairs » ou encore « On peut en déduire que cette hérédité marche que pour les nombre impaire » uniquement à partir des valeurs de vérité respectives de $Q(2)$ et $Q(7)$, nous interprétons leurs réponses en termes d'empirisme naïf[8] qui parasite l'appropriation de la dimension organisatrice en jeu. De plus, par influence de la culture d'enseignement de l'arithmétique, on observe la suprématie des propriétés « être premier », « être impair/pair » sur la propriété « être un entier naturel » dans l'attention des étudiants. Il nous semble essentiel de souligner l'absence d'une claire conscience chez les élèves/étudiants de la spécificité des nombres concernés par le principe de récurrence. Pour en revenir au phénomène relatif à l'empirisme naïf, nous l'observons pour d'autres dimensions organisatrices tel le raisonnement par l'absurde. Face à la consigne « En suivant un raisonnement par l'absurde, démontrer le résultat suivant : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier », cette production d'étudiant en 1ère année de Licence 2022-2023 en témoigne (figure 1) :

Figure 1 – Empirisme naïf, premier exemple


suite 1.3
Donc par raisonnement de l'absurde $P \wedge \neg Q$ est faux

1.3 P Q
Si $\boxed{\text{n est le carré d'un entier}}$ alors $\boxed{\text{2n n'est pas le carré d'un}}$ entier.
Il faut demontrer par l'absurde que $P \wedge \neg Q \Rightarrow$ faux
Pour cela il faut soit trouver une reponse fausse ou bien ~~que~~ un contraire de la reponse juste.
On suppose $n = 4$ pour P $2^2 = 4$ et $\neg Q = 2 \times 4 = 8$
donc pour $P \wedge \neg Q$ ont fait : 2n est le carré d'un nombre entier $= \neg Q$
donc P. $2^2 = 4$
$\neg Q$ $2 \times 4 = 8$ 8 n'~~ayant~~ ayant pas un nombre entier dont son carré est egal a 8, l'affirmation est fausse. Donc $P \wedge \neg Q = F$
suite en haut

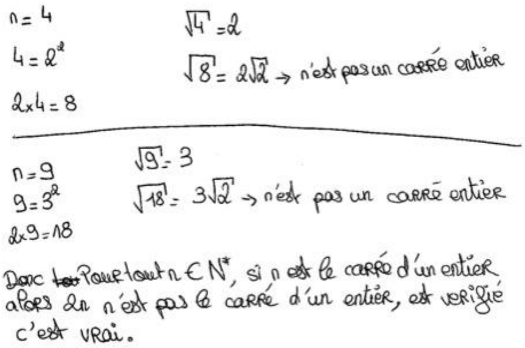
Source: L'auteure

Il s'agit bien d'empirisme naïf au sein de la dimension opératoire dans la mise en oeuvre de la dimension organisatrice qui guide prioritairement l'étudiant dans l'élaboration de sa preuve (BATTIE, à paraître). Ce qui est différent d'un travail exclusivement guidé par empirisme naïf comme le fait un autre étudiant de 1ère année ci-dessous :

Figure 2 – Empirisme naïf, deuxième exemple

crochets nous ajoutons au besoin notre commentaire pour une meilleure compréhension de ces réponses.

[8] Dans la typologie des preuves de N.Balacheff, l'empirisme naïf « consiste à tirer de l'observation d'un petit nombre de cas la certitude de la vérité d'une assertion » (Balacheff, 1988, p.19).



$n=4$ $\sqrt{4}=2$
$4=2^2$ $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ → n'est pas un carré entier
$2\times4=8$

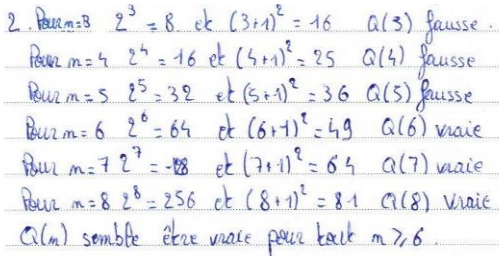
$n=9$ $\sqrt{9}=3$
$9=3^2$ $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ → n'est pas un carré entier
$2\times9=18$

Donc ~~tou~~ Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, si n est le carré d'un entier alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier, est vérifié c'est vrai.

Source: L'auteure

Revenons au raisonnement par récurrence en s'intéressant aux productions en 3ème année de Licence. Il n'est plus question d'empirisme naïf mais l'appropriation du principe de récurrence reste problématique, jusqu'à être méconnu de certains étudiants qui l'ont pourtant rencontré maintes fois dans leur scolarité :

Figure 3 – Principe de récurrence



2. Pour $n=3$ $2^3=8$ et $(3+1)^2=16$ $Q(3)$ fausse.
Pour $n=4$ $2^4=16$ et $(4+1)^2=25$ $Q(4)$ fausse
Pour $n=5$ $2^5=32$ et $(5+1)^2=36$ $Q(5)$ fausse
Pour $n=6$ $2^6=64$ et $(6+1)^2=49$ $Q(6)$ vraie
Pour $n=7$ $2^7=128$ et $(7+1)^2=64$ $Q(7)$ vraie
Pour $n=8$ $2^8=256$ et $(8+1)^2=81$ $Q(8)$ vraie
$Q(n)$ semble être vraie pour tout $n\geqslant 6$.

Source: L'auteure

Ce ne sont que 10 étudiants sur 36 qui ont répondu correctement aux deux questions posées. Il nous semble cohérent avec l'objectif de cet article de s'arrêter sur les réponses (reproduites pour une meilleure lisibilité) de ces trois étudiants à la question 1 :

Étudiant 1 : « Cette contradiction peut s'expliquer par l'étape de l'hérédité effectuée par l'élève. L'élève conclut que $2^{k+1} \geqslant (k+2)^2$ dès que $k \geqslant 2$. Or, ceci est faux pour $k = 2$. L'élève se trompe sur la valeur minimale de k sur cette hérédité. » L'étudiant extrait un élément de la dimension opératoire (manipulations algébriques sur des inégalités) et l'interprète hors de la (sous-)dimension organisatrice (raisonnement direct par implication) au sein de laquelle il prend sens.

Étudiant 2 : « $Q(2)$ est fausse car en prenant $k=1$ et en regardant au rang $k+1$, $2(k+1)^2 = 2\times 4 = 8$ et $8 < 9$ ». Au lieu d'étudier la valeur de vérité de $Q(2)$ en substituant 2 à n dans l'inégalité qui définit la propriété, l'étudiant extrait un élément de la dimension opératoire $2(k+1)^2 =\ldots\geqslant\ldots= (k+2)^2$ propre à l'étape de l'hérédité et teste l'inégalité en jeu pour $k=1$ dénaturant la propriété étudiée et occultant la dimension organisatrice (raisonnement direct par implication) au sein de laquelle cette inégalité émerge. On retrouve ce phénomène avec la réponse de l'étudiant 3.

Étudiant 3 : « Le camarade fait remarquer que $Q(2)$ est fausse, c'est-à-dire que la propriété est fausse lorsque $n=2$. Or lorsque $n=2$, $k=1$ (car $n=k+1$) dans la démonstration. Or $2k^2+4k+2$ n'est pas supérieur à k^2+4k+4 pour $k=1$ ($8 \leqslant 9$). »

Ces réponses révèlent que des étudiants en 3ème année de Licence de mathématiques n'ont pas conscience que la dimension organisatrice de la preuve de l'hérédité est un raisonnement direct associé à une implication. De plus, leurs réponses illustrent comment cela se traduit dans leur raisonnement. En référence aux pratiques mathématiques expertes, on met à jour les difficultés des étudiants quant au raisonnement et à la preuve en termes de non-maitrise des interactions entre dimensions organisatrice et opératoire, en particulier avec l'absence de conscience de l'assujettissement de la dimension opératoire à la dimension organisatrice.

Pour clore cette partie centrée sur l'exploitation didactique de notre outil épistémologique, nous abordons les tests de compréhension de preuves par les élèves/étudiants. La conception de tels tests nécessite elle aussi d'analyser des preuves. Conradie et Frith (2000) présentent un test pour la preuve suivante de l'irrationalité de $\sqrt{20}$: « Suppose there are integers *m* and *n* such that $\sqrt{20} = \frac{m}{n}$. Without loss of generality we may assume that *m* and *n* have no factors in common. Now $m^2 = 20n^2$. Hence 5 is a factor of m^2, and so 5 must be a factor of *m*. We can therefore write $m = 5k$, for some integer *k*. Then $25k^2 = m^2 = 20n^2$, or $5k^2 = 4n^2$. Hence 5 is a factor of n^2, and hence of n. But then 5 is a factor of *m* and *n*, contradicting our assumption. » (CONRADIE & FRITH, 2000, p.227). En termes de dimensions organisatrice et opératoire, cette preuve est à rapprocher des preuves 1 et 3 avec une différence essentielle du côté de la dimension opératoire : the « key point » (5 is a factor of m^2, and so 5 must be a factor of *m)* est admis ; de même l'étape opératoire supplémentaire « $5k^2 = 4n^2$. Hence 5 is a factor of n^2 » est encapsulée. Le test de compréhension est composé des questions suivantes :

« What method of proof is used here ?

How is $\sqrt{20}$ defined ?

When is a real number irrational ?

Why may we assume that *m* and *n* have no factors in common ?

Given that 5 is a factor of m^2 how does it follow that 5 is a factor of *m* ?

Why does $5k^2 = 4n^2$ imply that 5 is a factor of n^2 ?

Which assumption is contradicted, and how does the theorem follow from this ?

The equation $m^2 = 20n^2$ also implies that 2 is a factor of m^2. Could we have used this to prove the theorem ? » (CONRADIE & FRITH, 2000, p.227).

Les questions (a)(d)(e)(f)(g)(h) sont amalgamées en termes de dimension organisatrice ((a),(g)), dimension opératoire ((e)(f)) et de leurs interactions ((d)(h)), la question (b) quant à elle est ambiguë et la question (c) ne nous semble pas pertinente ; nous y reviendrons. Conradie J. et Frith J. précisent que (a) et (g) viseraient à sonder la compréhension de « the structure of the proof » (CONRADIE & FRITH, 2000, p.331) qui s'identifie ici au raisonnement par l'absurde et qui correspond donc sur cet exemple à notre analyse en termes de dimension organisatrice. Les questions (d), (e) et (f) évalueraient la compréhension de « specific steps in a proof » (Conradie et Frith, 2000, p.331) : (d) est ainsi mise sur le même plan que (e) et (f) alors que de notre point de vue (d) est constitutive des interactions entre dimensions organisatrice et opératoire contrairement à (e) et (f). La question (h) concerne pour les auteurs « the more subtile aspects of the proof » (CONRADIE & FRITH, 2000, p.331) ce qui est très flou. Les questions (b) et (c) ont pour objectif annoncé d'évaluer la compréhension par les étudiants de « concepts used in the proof » (CONRADIE & FRITH, 2000, p.331). Comme nous l'annoncions, la question (b) est selon nous ambiguë : suite à la question (a), il serait légitime de penser que la définition renvoie à la mise en œuvre du raisonnement par l'absurde ($\sqrt{20}$ défini en tant que nombre rationnel) mais la question peut aussi être interprétée, comme les concepteurs l'attendent, en tant que définition intrinsèque (nombre réel positif dont le carré vaut 20) qui va permettre de rendre disponible les outils de l'arithmétique grâce au traitement opératoire initial « élever au carré ». Cette ambiguïté apparaît d'autant plus que chacune de ces interprétations renvoie à une dimension différente (dimension organisatrice pour la première et dimension opératoire pour la seconde). Enfin, pour la question (c), contre l'avis de Conradie et Frith, la preuve arithmétique proposée ne présuppose pas une compréhension (ni même une construction préalable) du concept de nombre réel (DURAND-GUERRIER, 2019). En effet, le problème de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est étudié au sein de l'arithmétique en étant traduit en termes de problème de résolution dans $\mathbb{Z}$ de l'équation $a^2 = 2b^2$ qui ne nécessite pas de disposer des nombres réels (HARDY & WRIGHT, 2007). Dans le prolongement de l'analyse en termes de pouvoir générique que nous avons détaillée dans la première partie de l'article, il nous semble évident que ce test serait enrichi avec un ensemble de questions centrées sur cette problématique. Cette piste est exploitée dans le « multidimensional model for assessing proof comprehension in undergraduate mathematics » proposé par Méjia-Ramos J.-P. et *al.* (2012) notamment avec l'item « transfering the general ideas or methods to another context ». Nous identifions néanmoins une limite majeure dans ce modèle : il suppose que les « general ideas » et « high-level ideas » de la preuve soient connues du concepteur du test de compréhension. Or, ce que recouvrent ces « idées-clefs » n'est pas défini et le modèle ne propose pas de méthodologie pour les mettre à jour. Notre outil épistémologique peut contribuer à pallier à cette limite du modèle, ce que T. Trouvé (2022) a exploré dans son mémoire de master en adoptant un double regard pour analyser des preuves arithmétiques : « Celui-ci consiste à identifier les idées constitutives de la preuve en termes de dimensions organisatrice et opératoire, puis d'articuler logiquement les différentes prémisses et conclusions en se référant à la déduction naturelle. » (TROUVE, 2022, p.63).

REMARQUES CONCLUSIVES

Parmi la multitude des travaux didactiques sur le raisonnement et la preuve ((HANNA & KNIPPING, 2020), Lettre de la Preuve, http://www.lettredelapreuve.org/) c'est la structuration des preuves de U. Leron (1983) qui résonne avec notre distinction entre dimensions organisatrice et opératoire dans le cas uniquement de preuve à un seul niveau en termes de dimension organisatrice (c'est-à-dire sans imbrication de plusieurs dimensions organisatrices au sein de la preuve). Selon nous, sa structuration est avant tout une organisation hiérarchique des sous-résultats mathématiques nécessaires à la preuve du résultat principal indépendamment de la spécificité des domaines mathématiques étudiés. Pour ce que nous en savons, cette structuration ne permet pas d'accéder à ce que donne à voir notre outil, à savoir la nature du travail mathématique en jeu spécifiquement dans chacune des deux dimensions (organisatrice et opératoire) et, de façon essentielle, les interactions qui ont lieu entre elles. En d'autres termes, comme nous l'avons détaillé dans les exemples présentés, particulièrement dans la première partie, nos analyses mettent à jour les savoirs propres à l'arithmétique et la façon dont ils interagissent au sein du raisonnement.

REFERENCES

ARTIGUE, M. Epistémologie et didactique. **Cahiers de l'IREM de Paris, v.** 3, 1989. https://hal.science/hal-02138030/document

ARTIGUE, M. Epilogue, a didactic adventure. In **The didactics of mathematics: approaches and issues**. HODGSON B., KUZNIAK, A. et LAGRANGE, J.-B. (Eds), Springer, 2016.

BALACHEFF, N. Processus de preuves et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics, v.** 18, n.2, p.147-176, 1988.

BARDINI, C. 2003. **Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique. 2003.** Thèse (doctorat en didactique des mathématiques) - Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 2003. https://theses.hal.science/tel-00011697

BATTIE, V. **Spécificités et potentialités de l'arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique.** 2003. Thèse (doctorat en didactique des mathématiques) - Université Paris 7 - Denis Diderot, Paris, 2003. https://theses.hal.science/tel-00141080

BATTIE, V. Exploitation d'un outil épistémologique pour l'analyse des raisonnements d'élèves confrontés à la résolution de problèmes arithmétiques. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 27, n.1, 2007.

BATTIE, V. Pouvoir générique d'une preuve. **Actes du XXVII$^{\text{ème}}$ colloque CORFEM,** Strasbourg, 2021. https://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/actes_v_3.pdf

BATTIE, V. Le raisonnement par l'absurde à l'entrée à l'Université. In **Actes de l'Espace Mathématique Francophone 2022**, Cotonou, à paraître.

CONRADIE, J. & FRITH, J. Comprehension tests in mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 42, n.3, p.225-235, 2000.

DREYFUS, T., NARDI, E. & LEIKIN, R. Cognitive development of proof. In **Proof and proving in mathematics education: the 19th ICMI Study.** Hanna, G. & de Villiers, M. (Eds), New York : Springer, 2012. https://link.springer.com/book/10.1007/978-94-007-2129-6

DURAND-GUERRIER, V. Travailler avec les preuves pour favoriser l'appropriation des concepts mathématiques. In **Actes du XXVIe Colloque CORFEM**. Strasbourg, 2019.

DURAND-GUERRIER, V & TURGUT, M. TWG3: Teaching and learning of linear and abstract algebra, logic, reasoning and proof. In **INDRUM2022 Proceedings**, TRIGUEROS, M., BARQUERO B., HOCHMUTH R. et PETERS J. (Eds), Hannover, 2022. https://indrum2022.sciencesconf.org/data/Proceedings_Indrum2022.pdf

GARDES, D., GARDES, M.-L. & GRENIER, D. Etat des connaissances des élèves de Terminale S sur le raisonnement par récurrence. **Petit x**, v.100, p.67-98, 2016. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-100-petit-x/

GARDES, M.-L. **Etude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres**. 2013. Thèse (doctorat en didactique des mathématiques) - Université Claude Bernard Lyon 1, Lyon, 2013. https://theses.hal.science/tel-00948332

GRECO. **Didactique et acquisition des connaissances scientifiques : rapport d'activité du GRECO**. VERGNAUD, G., BROUSSEAU, G. & HULIN, M. (Eds). Paris : CNRS, 1985.

GRENIER, D., PAYAN C. Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux. In **Actes de l'Espace Mathématique Francophone 2006**, Sherbrooke, 2006.

GRIGORIEVA, E. **Methods of solving number theory problems**. Birkhäuser, 2018.

GUEUDET, G. & THOMAS, M. Secondary-Tertiary transition in Mathematics Education. In **Encyclopedia of Mathematics Education**. LERNAM, S. (Eds), Springer, 2020.

HANNA, G. & KNIPPING, C. Proof in mathematics education, 1980-2020: An Overview. **Journal of Educational Research in Mathematics**, Special Issue, 001-013, 2020.

HARDY, G.-H. & WRIGHT, E.-M. Introduction à la théorie des nombres. Vuibert, 2007.

LERON, U. Structuring mathematical proofs. **The American Mathematical Monthly**, v. 90, n.3, p.174-184, 1983.

LERON, U. & ZASLAVSKY, O. Generic proving : Reflections on scope and method. **For the learning of Mathematics,** v.15, n.3, p.277-289, 2013.

MEJIA-RAMOS, J.-P., FULLER, E., WEBER, K., RHOADS, K., & SAMKOFF,, A. An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 79, n.1, p.3-18, 2012.

STEINER, M. Mathematical explanation. **Philosophical Studies**, v. 34, p.135–151, 1978.

TROUVÉ, T. **Apports des preuves génériques pour sonder la compréhension d'une preuve formelle à la transition secondaire supérieur**. 2022. Mémoire de recherche (master 2, Didactique des Sciences Expérimentales et des Mathématiques) - Université Claude Bernard Lyon 1 -Lyon, 2022. https://dumas.ccsd.cnrs.fr/dumas-04071091