CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 94 – 117
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Construction de modeles en didactique des mathematiques: l'exemple de la tsd et des etudes semiotiques

Construction of models in didactics of mathematics: examples in tds and semiotics studies

Isabelle **BLOCH**[1],
Université de Bordeaux, Laboratoire Epistémologie et Didactiques des Disciplines.

Patrick **GIBEL**[2],
Université de Bordeaux, Laboratoire Epistémologie et Didactiques des Disciplines.

RESUMÉ

Ce texte questionne la construction des modèles utilisés en didactique des mathématiques, et leur usage dans plusieurs dimensions : l'organisation de l'enseignement d'un concept (la dimension épistémologique et la construction de situations valides), la gestion des classes et l'analyse des conceptions des élèves (la dimension sociale et l'analyse du travail des élèves et du professeur), les problèmes posés parfois par la conception des programmes (dimension institutionnelle), la difficulté de compréhension et d'appropriation des signes scientifiques (l'importance de la dimension sémiotique). Initialement, nous proposons de définir les modèles de didactique et leur construction, puis de questionner leur évolution suivant le contexte d'enseignement des concepts visés. Nous donnons des critères de recherches dans différents domaines du cadre didactique, et des normes pour l'élaboration de situations mathématiques. Pour la TSD et la sémiotique, notamment, nous interrogeons la pertinence épistémologique des modèles et leur efficacité pour conduire les élèves aux concepts visés ; ceci pose la question de ce qu'est un résultat en didactique et comment il peut être vérifié.

Mots-clés: théories, modèles, épistémologie, didactique des mathématiques, situation didactique, sémiotique.

Correspondance:

[1]Isabelle.Bloch@u-bordeaux.fr
[2]Patrick.Gibel@u-bordeaux.fr

ABSTRACT

In this text, we question the diverse models used within research in didactics of mathematics, and how they concern different dimensions: the organization of the teaching of a concept (epistemological dimension), the managing of a class and the study of students' conceptions (social dimension and analysis of students' and teacher's work), the conception of mathematics program (institutional dimension), and the difficulty of understanding and using scientific signs (semiotic dimension). In a first section we propose a definition of models in didactics and how they can be built; then we question the evolutions of these models, depending of the teaching context of aimed concepts. We propose principles of research in these different fields of the didactic frame, and also norms for the elaboration of experimental situations. For TDS specifically we examine the epistemological pertinence of models and their efficiency to organize situations that lead students to the aimed concepts; this questions the nature of what is a result in didactics, and how we can confirm it.

Keywords: theories, models, didactic of mathematics, didactical situation, epistemology, semiotic.

Reçu dans 06/10/2023
Approuvé en 06/11/2023

INTRODUCTION

Une spécificité française des recherches en didactique a été d'être conduites avec des mathématiciens et des enseignants qui interrogeaient les fondamentaux de leur discipline, en interaction avec des chercheurs issus du domaine de la psychologie (Vergnaud).

Les premières recherches de ce type menées par Guy Brousseau n'ont pu être réalisées qu'avec le soutien de André Lichnerowicz[1] puis, plus proche, de Lucienne Felix[2] et de Jean Colmez[3]. Elles ont conduit d'abord à la création des IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques).[4]

Les théories de didactique des mathématiques ont donc vu le jour dans les années 1970, et se sont développées à partir de deux catégories de questions : 1) Une base épistémologique forte, interrogeant la nature des concepts en jeu, leur sens scientifique, et les problèmes permettant d'y accéder ; 2) Une base sociale et institutionnelle, avec des questions sur la structure du système éducatif, la conception des programmes, les modes de conception et d'appropriation du sens des objets par les élèves.

Ces types de questions ont un point commun, c'est de se demander comment on choisit les outils de recherche et d'analyse, et comment on va en déduire ce qu'est un observable dans une situation d'enseignement ; cela requiert donc aussi de définir ce qu'est un résultat, et comment il va pouvoir être communiqué dans une publication scientifique. Ces questionnements ont conduit à développer des outils d'analyse construits dans les théories, et à tester ces modèles dans l'enseignement, soit dans l'environnement courant (les classes 'ordinaires'), soit dans des environnements spécifiques, comme le C.O.R.E.M[5], conçus pour y expérimenter des ingénieries élaborées par des équipes pluri-catégorielles : chercheurs, formateurs d'enseignants, enseignants. Les chercheurs et chercheuses impliqués sont d'abord, souvent, venus du terrain : professeurs au primaire ou secondaire. Puis le domaine s'est structuré dans le milieu universitaire.

Dans le secondaire, les théories de didactique des mathématiques se sont aussi construites à partir d'une contestation des programmes existants (l'enseignement sur la base des 'maths modernes' à l'époque), et de la nécessité ressentie d'élaborer des modèles rationnels de l'enseignement de cette matière scientifique. Un objectif principal de cet enseignement est que les élèves puissent comprendre les concepts mathématiques, et l'idée sous-jacente est que l'expression experte des règles et des concepts ne suffit pas à permettre leur maîtrise. Des dispositifs

[1] Membre de l'Académie des sciences, président de la SMF (Société Mathématique de France).

[2] Professeure agrégée de mathématiques, auteure de nombreux ouvrages didactiques et de manuels de mathématiques.

[3] Enseignant-chercheur bordelais à l'origine de l'IREM de Bordeaux et de l'IREM des Antilles.

[4] https://guy-brousseau.com/le-corem/le-crem-projet-de-lirem-de-bordeaux-et-du-futur-corem-1967/

[5] COREM, Centre d'Observation et de Recherches sur l'Enseignement des mathématiques

spécifiques doivent donc être mis en place ; ceci nécessite qu'ils soient conçus et analysés afin que leur efficacité puisse être argumentée, puis prouvée par leur réalisation. Nous développerons cet aspect dans la section suivante.

Notons que dans ce texte, nous expliquons comment les modèles de la TSD et de la sémiotique permettent de construire et d'analyser des situations, mais nous ne précisons pas la réalisation de ces situations, les échanges en classe et les compétences des enseignant.es : ce dernier point est détaillé par les auteur.es cité.es, notamment celles et ceux qui ont réalisé leur travail de recherche sur des situations dans un contexte donné (primaire, secondaire, ou supérieur).

1. QUESTIONS ESSENTIELLES SUR LA CONSTRUCTION DE MODELES EN DIDACTIQUE

Les modèles en didactique

Les modèles que l'on construit fonctionnent comme des outils pour répondre à des questions essentielles : comment analyse-t-on les difficultés inhérentes à l'enseignement et l'apprentissage d'un concept mathématique ? Qu'est-ce qu'une situation adaptée à l'enseignement de ce concept ? Quels sont les phénomènes didactiques ? Comment les observe-t-on et peut-on en rendre compte ?

Un modèle doit être prédictif, c'est-à-dire que, en fonction du problème posé, la théorie doit permettre d'anticiper (au moins en partie) les résultats relevés sur le terrain (productions des élèves, efficacité de la situation…), et de les interpréter. Il n'existe pas de méthodologie globale dans le champ de la didactique – ni surtout de méthode a priori sans étude préalable des questions fondamentales sur la façon de transmettre les concepts mathématiques et les savoirs associés.

La didactique a élaboré deux sortes de modèles : les modèles figurant dans la TSD (Théorie des Situations Didactiques), par exemple, analysent et théorisent les éléments fondamentaux (problèmes, situations) à construire pour l'enseignement d'un concept donné ; les théories sémiotiques étudient la complexité des signes en jeu et leur accès possible pour les élèves, en détaillant le niveau d'expertise de l'usage des signes par ces élèves, en fonction de la progression de la situation en classe. Cela interroge aussi le lien entre sens et signes, c'est-à-dire entre sémantique et syntaxique, et les conceptions des élèves : nous y reviendrons dans le paragraphe suivant.

D'autres modèles sont plutôt des outils descriptifs et explicatifs de l'existant en classe, des interactions professeur/élèves, des productions des élèves... et de la dimension institutionnelle des mathématiques suivant le niveau visé.

La posture de recherche impose aussi de vérifier les résultats, c'est-à-dire considérer la recherche de cohérence entre les cadres théoriques et la contingence (les effets de la réalisation dans une classe). Il faut donc prendre en compte la dimension de conceptualisation de la théorie : comment analyse-t-on la pertinence des outils théoriques par rapport aux expérimentations ? Jusqu'où cela va-t-il permettre de valider ou modifier cette théorie, en l'adaptant par rapport aux observations faites sur le terrain ? Ces questionnements permettent de faire évoluer les théories selon le problème, le contexte, et les nouveaux résultats obtenus. Ainsi un contrôle épistémologique pourra être effectué sur les théories construites, afin de valider leur pertinence et leur efficacité en mettant en évidence la stabilité des résultats obtenus dans des contextes similaires.

Les théories en didactique : fondement, construction et évolution

La base des théories didactiques est la recherche sur les savoirs, leur enseignement, leur apprentissage ; cela comprend donc, après la construction des situations d'enseignement, des analyses qualitatives de ces situations et des productions des élèves. Il y a un focus sur les thèmes mathématiques, leurs difficultés, les obstacles au sens de la TSD (obstacles d'origine épistémologique, ontogénétique ou didactique) ainsi que sur le processus d'apprentissage.

Cette démarche doit donc initier une analyse des concepts en jeu : enseigner par exemple la notion de limite de suite ou de fonction nécessite une étude du concept de limite, des outils sémiotiques utilisés pour le décrire, et des autres concepts impliqués : suites, fonctions, quel type de variable (entière, réelle, complexe) et comment on exprime les savoirs terminaux dans la norme d'écriture mathématique.

Ces « règles de la recherche » exigent donc qu'un modèle issu d'une théorie soit construit sur des normes applicables et identifiables pour un.e chercheur.e qui veut initier une nouvelle occurrence de situation pour une notion mathématique d'un programme scolaire. Dans le paragraphe suivant, nous expliciterons les normes de construction d'une situation dans la TSD, et celles de l'analyse sémiotique des raisonnements dans la réalisation de cette situation.

Evolution des théories

Un autre point important est que les théories doivent pouvoir être adaptées, par exemple au niveau d'enseignement. En considérant les théories françaises nées au 20ème siècle, on constate qu'elles ont eu parfois du mal à se transformer, et sont restées sur les fondements (et parfois les malentendus) de la première version… Ainsi la TSD – telle que décrite dans le contexte primaire – a entretenu, chez certains chercheurs, l'idée que les situations sont totalement adidactiques : le professeur donne la consigne et ensuite les élèves se débrouillent seuls pour déboucher sur le concept final. Notons que, même dans l'enseignement au primaire, cette conception des situations a été contestée et s'est révélée inadéquate, négligeant le rôle pourtant essentiel du professeur. La dévolution d'une situation ne suffit pas, il faut aussi une conduite adaptée (par l'enseignant.e) des recherches des élèves, une synthèse de ces recherches et une institutionnalisation obligée en termes mathématiques 'universels' – mais adaptés au niveau visé, évidemment. Des précisions sur le dispositif et ses aménagements nécessaires ont été explicités dans Bloch (1999).

L'enseignement des mathématiques doit avoir pour but de donner du sens aux concepts sans les réduire juste à des « formules d'usage » ; il faut donc aussi donner accès aux multiples représentations sémiotiques de ces objets, et traiter les obstacles connus d'accès aux concepts.

Les obstacles à la compréhension des concepts viennent notamment de la formalisation non déchiffrée par les étudiants, lesquels essaient de l'appliquer en aveugle car ils y voient une obligation du niveau d'enseignement, et parce qu'ils ne s'autorisent pas à interpréter le concept de façon plus autonome.

Des exemples sont donnés en algèbre par Dorier (1997), puis Sierpinska et al. (1999, p. 12), qui signale que :

L'obstacle du formalisme se manifeste chez les étudiants qui opèrent sur la forme des expressions, sans considérer ces expressions comme faisant référence à autre chose qu'à elles-mêmes. Un des symptômes en est la confusion entre différentes catégories d'objets mathématiques ; par exemple, les ensembles sont traités comme des éléments d'ensembles, les transformations comme des vecteurs, les relations comme des équations, les vecteurs comme des nombres, et ainsi de suite. L'obstacle du formalisme fait produire aux étudiants un discours qui a les apparences du discours utilisé par l'enseignant ou le manuel. Pour être efficaces en tant qu'étudiants, ceux-ci vont souvent développer des automatismes. Un de ces automatismes est de construire une matrice et de réduire à chaque fois qu'ils le peuvent, quelle que soit la question qui leur est demandée. (Traduction I. Bloch).

Ce phénomène de « formalisation automatique non comprise » doit être prévu, et donc contredit, par une analyse épistémologique indispensable du concept visé et de la situation prévue. A cette fin, la situation, ou en tous cas le projet d'enseignement, devra prévoir des problèmes qui articulent les registres sémiotiques. En effet les milieux des situations peuvent permettre de réunir différents types de signes du même concept (voir ci-dessous, §2) et donc d'avoir une approche non seulement syntaxique du concept mais aussi sémantique, ou, comme le dit Durand-Guerrier (2016), de réguler l'approche pragmatique, c'est-à-dire l'usage raisonné des signes du concept.

Nous signalons que la visée des situations construites dans la TSD est de permettre l'accès des élèves au sens du concept en jeu ; ce sens est étroitement lié à l'usage des signes, et, réciproquement, l'usage de ces signes par les élèves permettra d'évaluer leur degré de compréhension du concept. Le sens d'une connaissance est aussi rendu visible par les raisonnements, c'est pourquoi nous les analysons en interaction avec le modèle des milieux (voir paragraphe 3).

Les théories didactiques ont une composante épistémologique nécessaire, et s'intéressent aussi fortement à la composante sémiotique de la connaissance visée.

Ainsi dans le domaine de la didactique de l'Analyse, Fatma Belhaj Amor (2022) a étudié, dans le cadre de sa thèse, les difficultés rencontrées par les étudiants de première année de cycle préparatoire aux études d'ingénieurs lors de l'apprentissage du concept d'approximation locale d'une fonction (notion de développement limité d'ordre 1 ou plus). Son étude historique et épistémologique du concept d'approximation locale d'une fonction au voisinage d'un point lui a permis de déterminer les obstacles de nature épistémologique auxquels les étudiants sont susceptibles d'être confrontés lors de l'apprentissage de ce concept. Cette dimension épistémologique s'est avérée essentielle pour permettre à la chercheuse d'élaborer une ingénierie didactique en TSD, qui prenne en compte les difficultés inhérentes aux obstacles épistémologiques, afin de permettre aux étudiants d'accéder aux « raisons de savoir » (c'est-à-dire accéder à la validité des connaissances par leurs rapports logiques avec d'autres, autrement dit par des raisons internes au savoir) inhérentes au concept étudié. Notons que les expérimentations faites en licence de mathématiques par cette autrice dévoilent un usage des signes parfois incohérent par certains étudiants, au sujet d'un développement limité d'ordre 1 d'une fonction. Cet usage non conforme questionne aussi sur la compréhension de la notion de limite. Un étudiant dit par exemple : « Il n'y a qu'à multiplier ε par la limite l ».

Il est clair, et connu de tou.te.s, que les sciences (et notamment les mathématiques) demandent une expertise des signes formels et symboles variés : voir DUVAL (1993) ; SACKUR, ASSUDE, MAUREL, DROUHARD & PAQUELIER (2005) ; BLOCH & DENAPE (2021).

Les buts de l'évolution des théories sont donc les suivants :

- Ajouter des dimensions estimées manquantes à des théories existantes : par exemple, la TSD dans l'enseignement secondaire et supérieur, avec des situations adaptées ;
- Étudier l'adéquation des problèmes aux concepts, et utiliser des outils didactiques pour construire et expérimenter des situations, des ingénieries ;
- Se servir d'outils théoriques éprouvés pour étudier l'enseignement 'ordinaire', ou des organisations didactiques spécifiques : situations de recherche, accès à des ressources numériques, travail en groupes, apprentissage chez des élèves en difficulté… ;
- Etudier l'activité des élèves, le rôle du professeur, y compris dans des études qualitatives.

Nous allons illustrer ces points par une analyse de la TSD et de la dimension sémiotique des situations.

2. PRINCIPES DES SITUATIONS DIDACTIQUES ET EVOLUTIONS DE LA THEORIE

La théorie des situations didactiques et ses évolutions

La TSD a conduit une réflexion sur la nature des objets mathématiques (cf. BLOCH, 2015 ; 2018) et la façon dont la conception et la manipulation de ces objets évoluent dans la résolution des situations (BLOCH & GIBEL, 2022). Ainsi la résolution d'une situation adidactique conduit à un milieu d'expérience qui induit des connaissances et un premier usage de signes plus ou moins 'mathématiques' ; l'analyse didactique vise ensuite à étudier des savoirs inhérents à la situation d'apprentissage, puis un savoir pragmatique sur le problème en jeu avec des signes mathématiques et de nouveaux savoirs. Lors de la synthèse de la situation, en général conduite par l'enseignant, on aboutit à un savoir plus formel, puis à une approche des concepts, ce que Jean-Toussaint Desanti (1968) nomme 'idéalités mathématiques'. Notons que ce sont ces objets (idéalités) mathématiques qui sont à l'origine de la construction du problème de la situation.

Pour construire une situation, le chercheur doit se poser la question de la nature du savoir visé, et des moyens d'atteinte de ce savoir. La TSD considère le savoir mathématique dans son ontologie (cf. BLOCH, 2015) mais se fixe comme but de construire d'abord une forme pragmatique de ce savoir, sans exigence de formalisme. Dit autrement, la situation construite doit d'abord conduire les élèves à un usage 'matérialiste' des outils de ce savoir, en se posant des questions, en calculant pour résoudre le problème posé ; il s'agit donc d'expériences adaptées aux questions posées. Comme l'indiquent Brousseau et Gibel :

La situation est une partie seulement du contexte, ou de l'environnement de l'action de l'élève ou du professeur et elle comprend, mais pas seulement, une sorte de question à laquelle le raisonnement de l'élève est une réponse. Elle n'est réduite ni à l'action du sujet, ni à la connaissance qui la motive mais elle les met en relation rationnelle. Une situation peut expliquer pourquoi un raisonnement faux a été produit par d'autres causes qu'une erreur ou une insuffisance du sujet. (BROUSSEAU & GIBEL, 2005)

Puis, la situation conduira les élèves à expliquer (avec l'aide du professeur) comment ce savoir va pouvoir être énoncé avec des signes mathématiques d'abord plus ou moins aux normes c'est-à-dire sans que l'exigence liée au formalisme ne soit prépondérante, et comment il va pouvoir être réutilisé dans tous les contextes adéquats, une fois qu'il aura été institutionnalisé par l'enseignant.e avec les symboles usuels.

Construire une situation nécessite un travail important afin de sélectionner ou adapter aux spécificités de la classe un problème qui réfère bien au savoir visé, qui soit accessible aux élèves et leur permette de faire des calculs, des expériences et des hypothèses, et finalement de comprendre le savoir et son usage.

Les actions, en œuvre dans la situation, vont permettre aux élèves d'accéder au sens ; signalons que les raisonnements, ce n'est pas un secret, jouent un rôle essentiel dans la fonction des mathématiques ; en conséquence la prise en compte, en didactique, des raisonnements et de leur construction est indispensable.

En 1996, Marc Legrand a exposé de façon très claire et détaillée la problématique des situations fondamentales et leur application en classe. Il a notamment explicité les difficultés pouvant survenir – y compris chez le professeur – quant à la différenciation entre savoir mathématique et savoir institutionnel du programme scolaire ; il a aussi analysé ce que devrait être le déroulement d'une situation, afin que son objectif soit compatible avec ces attentes institutionnelles :

Disposer d'une théorie qui permette de mieux saisir quel est le travail effectif de l'élève, quel sens il attribue au savoir, imaginer des dispositifs qui amènent les élèves à avoir une activité mathématique sinon semblable, tout au moins compatible au niveau du sens avec celle du mathématicien, telles sont les préoccupations essentielles de la théorie des situations, préoccupations que l'on retrouve dans une bonne part des recherches en didactique des mathématiques. (LEGRAND, 1996, p. 240).

Ainsi par exemple, la notion de limite est bien la notion mathématique abstraite qui conduit à la construction de situations comme celle du flocon de von Koch (BLOCH &

GIBEL, 2011) et le problème du flocon permet aux élèves de se poser les ‘bonnes’ questions mathématiques et de calculer afin de découvrir les limites du périmètre et de l’aire, et de réaliser in fine qu’une figure peut avoir un périmètre infini mais une aire finie.

La suite du cours sera sous la responsabilité du professeur pour arriver à une définition formelle de la notion de limite.

Remarquons que la notion de milieu est ainsi essentielle dans le modèle de la TSD, car c’est la progression dans les milieux successifs qui représente la construction et la finalisation des savoirs de la situation, conduite dans un contexte d’enseignement et d’apprentissage d’un concept.

Cette progression a été explicitée par un tableau des milieux successifs dans la réalisation d’une situation (cf. BLOCH, 2002-1). Ainsi qu’il est dit dans ce texte : « le but est de classer les éléments théoriques ‘milieux’ de la théorie des situations suivant leur nature (du côté du savoir, du côté de l’expérimentation ou du côté de la contingence) et suivant leur fonctionnalité. »
Pour créer un milieu adéquat, il faut donc définir de façon précise le savoir mathématique en jeu ; ce savoir est bien une idéalité, même, bien sûr, s’il s’agit d’un savoir ‘élémentaire’ comme le nombre ou un triangle… Il faut ensuite relier ce savoir à un problème adapté au niveau visé, ce qui permettra de construire le milieu expérimental a priori (voir ci-dessous) ; puis il faudra expérimenter cette situation, et tenir compte des réalisations des élèves, des interactions avec le professeur, et identifier le savoir final déclaré aux élèves.
Dans l’article sur l’étude des fonctions (BLOCH, 2002-2), l’autrice précise la nature du passage du milieu objectif-expérimental (représentations graphiques) au milieu du savoir ; les procédures des élèves et leurs actions sur les graphiques sont décrites ; la transformation de ces actions pour que les élèves puissent arriver à des énoncés *mathématiques* sur les fonctions est aussi explicitée dans ce texte.
Pour faire une synthèse de cette procédure, le modèle de milieu comprend donc le milieu épistémologique théorique (MiT) (analyse mathématique du savoir visé), le milieu expérimental a priori (MiA : construction du problème jugé pertinent pour ce savoir), et le milieu de la contingence, lequel anticipe les réponses et productions possibles des élèves, la conduite de la situation par l’enseignant.e, et les possibilités d’aboutir à une forme pertinente du savoir pour son apprentissage.
Ainsi, lors de la réalisation de la situation, les élèves sont confrontés d’abord au milieu de la contingence (énoncé d’un problème), puis ils expérimentent les moyens qu’ils connaissent ou qui leur ont été donnés ; leurs actions les conduisent à parfois passer d’un niveau à l’autre. Ainsi la porosité des niveaux de milieux est fréquente et normale, car les élèves font des essais puis ils ont recours à une formalisation plus ou moins avancée, suivant leurs connaissances antérieures ; ces passages de niveaux de milieux (voir tableau 2) permettent au didacticien d’avoir accès à leurs connaissances et à leur progression dans la situation.

Tableau 1 – Les milieux théoriques

MODELE DE MILIEU EPISTEMOLOGIQUE THEORIQUE

Situation Fondamentale

Savoirs culturels

et traduction en milieux

Sujet épistémique

MODELE DE MILIEU EXPERIMENTAL A PRIORI

Prévoir les scénarios

Envisager les valeurs

possibles des variables didactiques

Sujet générique

CONTINGENCE

Jouer les scénarios à un niveau donné

Valeurs des VD fixées

Sujet à niveau spécifié, Sujet réel

Source: BLOCH (1999)

Ce schéma signifie qu'une situation fondamentale d'un concept mathématique devra nécessairement être adaptée dans un contexte scolaire, à un niveau donné, et que cette adaptation dans un environnement didactique devra conduire à un choix de valeurs des variables didactiques, choix ajusté au niveau scolaire visé, et à une mise en œuvre des scénarios de déroulement du problème. Ceci se concrétise dans le Tableau 2, qui est un modèle du déroulement de la situation à un niveau donné.

Un point important de ce modèle est que l'on a au départ trois étapes de construction :

- 1) Une situation-problème fondamentale d'un savoir, qui engendre le champ mathématique ciblé, qui est aussi générique des connaissances visées et qui utilise des connaissances antérieures des élèves pour la dimension de recherche du problème posé adapté de la situation fondamentale ;

Ainsi qu'il est dit dans (BLOCH, 2002-1) : « Ce milieu (MiT) peut donc être considéré comme une famille de questions finalisées (c'est-à-dire de jeux organisés, ou organisables), de milieux "matériels", de variables… qui tous réfèrent au même savoir mathématique, supposé mis en jeu dans une situation adidactique. »

- 2) Le modèle de milieu expérimental a priori est celui où le jeu (le problème à résoudre) a été prévu, les variables adéquates ont été définies (type de fonction ou de figure géométrique, valeurs des variables fixées…)

Ce tableau (inspiré du travail de G. Brousseau) détaille donc les étapes de réalisation de la situation, en signalant les positions du professeur et des élèves – par exemple les élèves cherchant et agissant dans le milieu M-2, le professeur dévoluant le problème (au mieux pour les élèves) dans ce même niveau de milieu, et sa fonction devenant plus directive dans le niveau supérieur.

Remarquons qu'un concept peut conduire à des situations « emboitées » car la progression du savoir ne pourra se limiter à une situation ; ainsi la situation « Graphiques et chemins » (BLOCH, 2002-2) permet d'initier à la notion générale de fonction de variable réelle, mais elle devra être complétée par l'analyse de fonctions à connaitre, comme les fonctions carré, inverse… De même, la notion de limite ne se limite pas à la situation du flocon. La construction d'un concept, et l'élaboration d'une conception ne se limitent pas à la confrontation des étudiants à une situation (à dimension) adidactique : cela nécessite de les confronter à plusieurs problèmes de nature différente, mais que le concept permet de résoudre. Les situations permettent ainsi l'accès aux différents registres de représentation associés au concept visé.

Ce type de milieu expérimental (Tableau 2) permet d'anticiper, de prévoir des réactions des élèves ; de recueillir des observables, de les analyser ; il permet aussi d'analyser les connaissances mises en jeu dans la situation, les jeux possibles des élèves, et les interventions prévues de l'enseignant.e.

- 3) La réalisation de la situation dans un contexte donné – la contingence – permet de s'interroger sur la pertinence de la situation : la contingence est-elle une "réalisation" (fortement ou faiblement équivalente) de la situation théorique ? Comment s'assure-t-on que les composantes visées du savoir ont été sauvegardées ?

Cette question est importante pour savoir si l'observation de la réalisation de la situation peut, ou non, faire évoluer le modèle théorique. Dit autrement, la discussion de la consistance théorique est a priori du ressort du modèle épistémologique, et celui-ci doit être réinterrogé a posteriori au vu des résultats expérimentaux.

Tableau 2 – Les niveaux de milieux dans une situation d'enseignement

M1 Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet
M0 Milieu apprentissage : institutionnalisation	E0 : Elève	P0 : Prof. Ens.	S0 : situation didactique
M-1 Milieu de référence : formulation & validation	E-1 E-apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage
M-2 Milieu objectif : action	E-2 : E-agissant	P-2 : P dévolueur observant	S-2 : situation de référence
M-3 Milieu matériel	E-3 : E-objectif		S-3 : situation objective

Source: BLOCH (1999)

Evolutions du modèle théorique de la TSD

Ce modèle a été d'abord conçu dans le contexte de l'enseignement primaire. Les critères de construction des situations sont stables, mais des modifications ont dû être apportées dans les principes de mise en œuvre : en effet, si une situation fondamentale et un milieu théorique ont une origine *mathématique* à tout niveau, la réalisation sur le terrain ne prendra pas la même forme. Au primaire, on pourra organiser de nombreuses séances, et ne pas forcément conclure sur une formulation symbolique forte ; alors qu'au secondaire et au supérieur, le temps sera plus compté suivant le programme, et on organisera une institutionnalisation des savoirs conforme à ce programme et à la dimension théorique du concept visé.

Notons que cette institutionnalisation comporte nécessairement une dimension sémiotique forte et en adéquation avec les registres de représentation mathématiques adaptés : les signes des mathématiques sont ‘universels’ et doivent être, au final, incorporés dans leur enseignement.

De même, la vérification de l’acquisition des savoirs par les élèves sera basée sur une symbolique mathématique experte, et sur l’usage des raisonnements par ces élèves : c’est grâce à leurs raisonnements que l’on pourra conclure sur un ‘bon’ fonctionnement de la situation, c’est-à-dire au fait que cette situation amène bien à la prise en compte du savoir visé.

Ceci amène à analyser la dimension sémiotique du travail en mathématiques, et donc son rôle dans l’analyse des raisonnements des étudiants, comme nous l’avons décrit dans BLOCH & GIBEL (2011).

3. LA DIMENSION SEMIOTIQUE ET L’ETUDE DES RAISONNEMENTS

Pourquoi étudier les raisonnements ?

Une situation à dimension adidactique comprend une ou plusieurs phases de recherche du problème, ces étapes pouvant être organisées par des recherches en groupes de trois ou quatre élèves ; et donc, la réalisation d’une telle situation confronte nécessairement l’enseignant.e à des raisonnements produits par ces élèves. Ces raisonnements s’accompagnent de productions d’écritures (plus ou moins mathématiques), et de déclarations orales sur les solutions du problème. Etudier ces raisonnements est donc nécessaire, et efficace pour savoir si les élèves sont parvenus à un résultat viable et conforme. L’accès à ces arguments permet aussi à l’enseignant.e et aux chercheurs de déceler les modes de pensée des élèves, et leur compréhension plus ou moins aboutie des concepts visés.

Les raisonnements sont de nature orale ou écrite, mais dans les deux cas ils utilisent des signes, et l’analyse de ces signes fait partie de l’évaluation de la situation, à savoir, estimer si elle fonctionne correctement, relativement à ses objectifs. Ainsi lorsque des élèves restent sur des formulations très vagues, on peut penser qu’ils n’ont pas abouti à une compréhension de l’objectif visé ; s’ils essayent d’adopter un mode de réflexion qui leur semble assez mathématique, c’est qu’ils se veulent conformes à la nature des mathématiques visées, et sont convaincus d’avoir une solution.

Nous avons donc construit une analyse des raisonnements qui permet d’avoir un retour fiable sur l’efficacité et la pertinence d’une situation, et de la façon dont les élèves la comprennent. Cette analyse des raisonnements comprend une étude – nécessaire – des signes ; cette étude a été conduite d’après les théories de C.S Peirce, ce que nous exposons ci-dessous.

La sémiotique nécessaire pour l’étude des raisonnements en didactique des mathématiques

La recherche en didactique s’est toujours intéressée au rôle et à l’usage des signes dans l’enseignement des mathématiques : la théorie des champs conceptuels (G. Vergnaud) a identifié, comme R. Duval (1993), les registres de représentation ; la théorie anthropologique (Y. Chevallard) a défini les ostensifs dans les procédures d'enseignement d'un concept. En 2005, un modèle consistant des signes (et de leur évolution dans les dispositifs d'apprentissage) a commencé à être construit en utilisant les travaux de C.S. Peirce en sémiotique (BLOCH, 2005). Ce travail s'est poursuivi avec des analyses dans le contexte de l'enseignement secondaire et supérieur (BLOCH & GIBEL, 2011).

Les didacticiens ne peuvent pas étudier l'enseignement des mathématiques sans prendre en compte les signes, qui sont très nombreux et de natures différentes déjà dans les mathématiques pures ; de plus les acteurs (élèves et professeur), sont amenés, suivant le niveau visé, à créer des signes provisoires qui peuvent être moins formels, des dessins, des calculs approximatifs, etc. il en résulte que les études sémiotiques se révèlent indispensables en didactique des mathématiques. Notons aussi que la complexité des signes est présente aussi bien évidemment en sciences physiques, et que cela a des liens avec les concepts mathématiques : dans l'article de BLOCH & DENAPE (2021) nous signalons par exemple le fait qu'une équation comme PV = nRT ne met pas en évidence, par la seule écriture, que P et V, la pression et le volume, sont des fonctions de la température.

Un point important des analyses sémiotiques dans les situations mises en œuvre est de constater que les dimensions sémantiques et syntaxiques se renforcent : ainsi, dans l'étude du flocon de von Koch (BLOCH & GIBEL, 2011,p.31), on veut montrer que l'aire du flocon a une limite finie et donc que $(4/9)^n$ a pour limite zéro ; on écrit donc que $(4/9)^n < 10^{-p}$ ce qui, avec un logarithme décimal, donne $n.\log(4/9) < -p$. On en déduit que $n > -p/\log(4/9)$, et un élève demande : Pourquoi a-t-on changé le sens de l'inégalité ?

Deux réponses sont données par des élèves : 1) Parce qu'on veut que n grandisse, vu qu'il tend vers l'infini (réponse sémantique), et, 2) Parce que log (4/9) est négatif (réponse syntaxique). Ces deux réponses, de nature différente, permettent d'améliorer la compréhension du calcul (voir l'analyse complète de ces réponses dans BLOCH, 2000 et BLOCH & GIBEL, 2011).

Les approches sémiotiques permettent aussi à l'enseignant.e et aux chercheur.es d'analyser les problèmes de conception des formules mathématiques, ainsi que le montre Durand-Guerrier dans « Négation et quantification dans la classe de mathématiques » (2016). L'autrice détaille ainsi la difficulté d'interprétation des énoncés mathématiques en français ou dans une autre langue, et le fait que beaucoup d'étudiants ne réussissent pas à énoncer leur négation, ou ne comprennent pas leur quantification. Ainsi la phrase « tous les nombres entiers sont pairs » aurait (majoritairement chez les étudiants testés !) pour négation : « tous les nombres entiers sont impairs » car les étudiants n'ont pas compris que la négation de 'tous' pourrait être 'il existe au moins un'.

Durand-Guerrier insiste aussi sur les liens entre sémantique, syntaxique et pragmatique, cette dernière composante décrivant la façon dont les usagers font fonctionner les signes et les marques des concepts. Une analyse suivant ces dimensions permet donc d'avoir accès aux conceptions des étudiants, ce qui est très instructif ; cela permet aussi de mesurer les problèmes posés par les modifications des programmes, notamment au secondaire où, depuis la fin du XX$^{\text{ème}}$ siècle, les formulations symboliques avaient en grande partie disparu.

Les théories sémiotiques sont connues et utilisées en didactique, et, comme nous le disions dans l'article de BLOCH & GIBEL (2011, p. 194) :

Les travaux de didactique ont mis l'accent sur différentes caractéristiques des preuves et du raisonnement. (…) Pour ne donner que quelques exemples de termes fréquemment rencontrés dans les publications sur le raisonnement et la preuve, on peut citer : conjecture, explication, argumentation, signification, justification, généralisation ; rationalité, évidence, certitude ; formulation, résolution, validation, vérification, décision ; inférence, déduction, abduction ; langage, sémiotique, théorèmes, preuves empiriques, preuves formelles, preuves syntaxiques, sémantiques…

La théorie de C.S Peirce nous a paru très pertinente pour étudier les raisonnements produits lors des recherches de solutions des problèmes posés dans les situations à dimension adidactique, c'est-à-dire les situations comportant une dimension de recherche de la part des élèves. Nous avons estimé que les trois catégories de signes proposés par Peirce correspondaient de façon correcte aux niveaux de milieux et de raisonnements. C.S. Peirce est un philosophe pragmatiste étatsunien de la fin du 19$^{\text{ème}}$ siècle. Ce philosophe ne dissocie pas pensée et signe, et propose une interprétation dynamique du lien entre un signe et un objet, ce qui peut permettre de penser les changements de statut des symboles et des énoncés, en particulier dans un processus d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, où les élèves sont amenés à faire évoluer leur compréhension du problème et de ses solutions.

Rappelons que les trois catégories de signes définies par Peirce sont les icônes, les indices et les symboles-arguments. Pour une définition de ces classes de signes, on pourra se reporter à BLOCH & GIBEL (2011). Citons ce texte p. 197 :

Signe et sens sont des processus, ainsi que le montre Peirce (1978, 1995) ; et, ainsi que l'explicite Tiercelin (1993), dans la pragmatique peircienne, on ne peut distinguer signe et pensée.

La sémiotique de Peirce conduit à montrer la corrélation entre la nature des signes utilisés et le niveau de pensée formelle atteint. Ce lien a été notamment signalé par J.T. Desanti (1969).

Cette classification permet d'identifier le niveau de raisonnement atteint par les élèves lors de la résolution du problème de la situation : l'usage des signes, et leur nature, renseigne sur le niveau de connaissance atteint par les élèves. Cela permet aussi d'identifier leur faculté de compréhension de la situation objective (niveaux de milieu $M_{-2} – M_{-1}$). Ainsi dans la situation du flocon de von Koch (cf. BLOCH & GIBEL, 2011) il faut comprendre que « n grandit » lorsque l'on dit chercher une limite où n tend vers plus l'infini.

Ces analyses du fonctionnement des situations nous ont conduits à intégrer, au modèle des milieux des situations, une dimension des raisonnements et à les représenter par un tableau prenant en compte le tableau des milieux d'une situation (à dimension) adidactique.

4.GENESE ET EVOLUTION DU MODELE D'ANALYSE DES RAISONNEMENTS

Présentation du modèle d'analyse des raisonnements

Nous allons à présent expliciter les éléments qui structurent le modèle d'analyse des raisonnements en regard des niveaux de milieux. Compte–tenu des analyses didactiques effectuées, au cours des précédentes sections, nous avons été amenés à privilégier trois axes qui orientent et structurent notre analyse des raisonnements dans chacune des situations décrites précédemment. Ces axes réfèrent à des niveaux de modélisation différents des raisonnements en jeu dans le déroulement de la situation : modélisation globale relative aux niveaux de milieux, et modélisation locale au niveau des arguments produits dans le travail et les échanges en classe, ainsi qu'au niveau des signes émergents de ce travail.

Le premier axe est lié au milieu de la situation : dans une situation comportant une dimension adidactique, les élèves donnent à voir des raisonnements qui dépendent fortement du niveau de milieu où ils se situent.

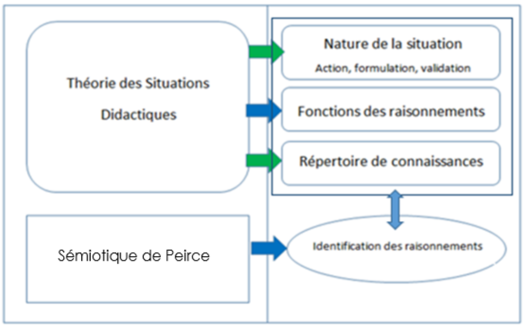
Le deuxième axe est l'analyse des fonctions du raisonnement, pointée ci-dessus comme nécessaire. Nous nous attacherons à montrer comment les fonctions du raisonnement sont liées à des niveaux de milieux et comment ces fonctions *manifestent* aussi ces niveaux de milieux, de sorte qu'ils peuvent servir (au chercheurs, chercheuses ou professeurs) au repérage de la position des élèves dans chacun de ces niveaux.

Le troisième axe est celui des signes et des représentations observables. Ces observables se donnent à voir dans des formes différentes qui affectent le déroulement de la situation. La nature des signes et le statut logique du raisonnement sont à prendre en compte pour l'efficacité, l'idonéité aux attendus et le rôle dans la situation. L'analyse des signes est réalisée au regard du répertoire mobilisé par l'auteur du raisonnement. Il s'agit de prendre pour objet d'étude l'usage du répertoire didactique et de son niveau d'actualisation. Ainsi nous pourrons analyser *a priori* les connaissances et les savoirs, valides ou erronées, susceptibles d'être produits et déterminer ceux que l'enseignant pourra institutionnaliser, en regard de chacun des niveaux de milieu.

Ces trois axes apparaissent nécessaires et complémentaires pour effectuer une analyse très précise des différentes formes de raisonnements qui sont susceptibles d'être produits en regard de leur(s) fonction(s) et des conditions de leur production par les élèves (et/ou par l'enseignant au niveau M0). Ils constituent les dimensions de notre modèle d'analyse des raisonnements.

Le schéma présenté ci-dessous permet d'illustrer les principaux axes qui structurent notre modèle d'analyse des raisonnements en lien avec les théories mobilisées : la théorie des situations didactiques et la sémiotique de C.S.Peirce.

Figure 1- Schéma du modèle d'analyse des raisonnements



Source : GIBEL (2018, p.49)

Ce modèle nous permettra de caractériser précisément les formes et les fonctions des raisonnements qui sont susceptibles d'être produits, en situation, par les élèves et l'enseignant, ainsi ce modèle a une fonction prédictive. Nous effectuerons ensuite grâce à cet outil une analyse *a posteriori* très précise des raisonnements produits, en les analysant en regard de chacune des dimensions qui structurent le modèle.

Nous avons décrit dans un tableau synthétique le modèle multidimensionnel pour l'analyse des raisonnements (Bloch & Gibel 2011, p. 207). Ce nouveau modèle permet de prévoir et d'analyser le niveau de compréhension du concept visé, atteint par les étudiants au cours de la progression de la situation. Il permet donc aussi au professeur d'adapter ses interactions avec ses étudiants. Ceci suppose que le professeur ait été formé à l'analyse de signes.

La première ligne du tableau explicite les fonctions du raisonnement ; la deuxième montre le niveau d'utilisation des symboles, et la troisième le niveau d'actualisation du répertoire. Notons que Lalaude-Labayle (2019) a signalé que les types de raisonnement de la première colonne (milieu heuristique) étaient inductifs ou abductifs ; dans la deuxième colonne (milieu de référence) les raisonnements sont inductifs ou déductifs ; et dans la troisième colonne, ils sont déductifs, ce qui montre le niveau d'achèvement de la situation et de ses solutions.

Tableau 3 – Modèle des milieux et raisonnements dans la réalisation d'une situation

Milieu M-2	Milieu M-1	Milieu M0
R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du P éventuellement)
R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou plus génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
R3.1 SYNT/SEM - Utilisation	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au	R3.3 SYNT - Formalisatio

ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	n des preuves - Introduction d'ostensifs organisés - Intégration des signes théoriques

Source: BLOCH (1999)

Ce modèle, qui associe situations et usage des signes, est un outil efficace pour analyser les effets d'une situation mise en œuvre en classe de mathématiques, car il détaille la nature des productions des élèves et leur niveau de formalisation. Ce faisant, il permet d'établir le degré de réalisation de l'objectif de la situation.

Ceci met de nouveau en lumière l'interrogation fondamentale sur l'élaboration et l'évolution des situations : A quelles questions doit-on confronter les élèves pour qu'ils aient accès au(x) concept(s) visé(s), et pas seulement à des productions calculatoires qui ne leur donneraient pas de vision claire d'une notion mathématique, c'est-à-dire de sa nature, de son 'utilité' dans la théorie concernée, et de ses (multiples) aspects ?

Les principales fonctions du modèle

1. La fonction prédictive du modèle

Comme le souligne Gibel (2022), le modèle a été construit de façon à mettre en lumière, à partir de l'analyse *a priori* de la situation réalisée dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques, les différentes formes et les différentes fonctions des raisonnements susceptibles d'apparaitre dans la relation didactique, en lien avec les différents niveaux de milieux correspondants. Ces derniers sont déterminés par la réalisation d'une analyse ascendante [6] détaillée, élaborée de façon à rendre visible les différentes situations emboîtées associées aux différents sujets confrontés aux milieux correspondants.

On en déduit que l'analyse *a priori* détaillée de la séquence et l'analyse des niveaux de milieux constituent des points d'appuis essentiels pour envisager plus précisément les formes et les fonctions des raisonnements que les élèves sont susceptibles de produire. En effet, pour pouvoir interpréter les différents observables, en lien avec chacune des situations, le chercheur doit avoir préalablement envisagé précisément les formes de raisonnements. De plus l'observateur, en s'appuyant sur une analyse fine des niveaux de milieu, est en mesure de repérer dans la production des raisonnements des élèves un changement de niveau de milieux, notamment le retour à une confrontation à la situation objective ou bien le passage de la situation didactique à la situation d'apprentissage. C'est ce que nous signalions par la porosité des milieux. Il nous apparaît essentiel de repérer le raisonnement en lien avec sa fonction, le rôle qu'il joue étant étroitement lié à la situation dans laquelle il a été produit. C'est en ce sens que nous pouvons dire que le modèle d'analyse des raisonnements a, pour le chercheur, une fonction prédictive.

Nous explicitons, selon le niveau de milieu (cf. Tableau 3) où se situent les élèves, les

[6] des niveaux de milieux

différentes fonctions que recouvrent les raisonnements :

- au niveau heuristique M_{-2} (correspondant au milieu objectif), les fonctions sont assimilables à des calculs exploratoires, des conjectures, des initiatives, des dessins,…
- au niveau M_{-1}, (milieu de référence), les fonctions des raisonnements peuvent être des déclarations de formules, des propriétés, et des début de justification locale ;
- au niveau M_0, dans une situation à dimension adidactique, la synthèse et l'institutionnalisation ne sont pas l'exclusivité du professeur, car celui-ci s'appuie fortement sur les productions des élèves. A ce niveau les principales fonctions sont : prouver, voire démontrer de façon symbolique, la validité d'un énoncé.

La dialectique signes/milieux est relativement prévisible : au niveau M_{-2} sont associées plutôt des productions de type heuristique, et au niveau M_{-1} des formules, des assertions générales, des conjectures parfois déjà formalisées ; et au niveau M_0 les signes sont majoritairement des symboles ou arguments formels spécifiques. On remarque, dans la réalisation des situations, que ce milieu M_0 est donc celui de la formalisation et qu'il conduit à une 'normalisation' des signes mathématiques. Le professeur peut, dans ce contexte, signaler aussi aux élèves la nature internationale des signes mathématiques : tous les mathématiciens, de tous les pays, se comprennent car ils utilisent les mêmes signes pour les mêmes concepts…

Dans l'hypothèse où le chercheur souhaite communiquer l'ingénierie à un enseignant afin que ce dernier fasse vivre la séquence à ses élèves, le modèle permet de mettre en évidence les différentes formes de raisonnements valides ou erronés que les élèves pourraient produire, lors de chacune des phases. Cette connaissance des formes de raisonnements apparaît alors comme un élément particulièrement utile à l'enseignant pour effectuer une gestion didactique pertinente des différentes phases.

2. La fonction explicative du modèle

Nous avons élaboré ce modèle afin d'analyser les observables qui traduisent la mise en œuvre effective des raisonnements des élèves et des étudiants, ainsi que leur(s) fonction(s) lors de chacune des phases de la séquence. Pour chacune des phases du déroulement de la séquence étudiée, nous voulons, grâce au modèle, identifier les situations correspondantes et ainsi déterminer le(s) rôle(s) que joue le raisonnement dans la situation correspondante. Pour des exemples, le lecteur pourra se référer aux nombreux travaux didactiques précédemment cités.

Nous allons à présent définir, en référence aux travaux de Gibel (2022), les axes privilégiés lors de l'analyse *a posteriori.*

Le modèle permet de déterminer si les enjeux didactiques de chacune des phases de la séquence sont en adéquation avec le projet de l'enseignant, mais également de préciser, en situation de validation, la nature et le rôle des arguments (raisonnements argumentatifs) produits par un ou plusieurs élèves ainsi que leurs effets sur le déroulement de la séquence notamment du point de vue de la conviction des élèves.

Du point de vue de l'identification des connaissances et des savoirs, le modèle offre la possibilité de déterminer, le plus fidèlement possible, les connaissances et les savoirs, valides ou erronés, que les élèves ont mobilisé afin de produire leur raisonnement par confrontation aux différents milieux. Il nous semble important de déterminer l'évolution du répertoire didactique de la classe, au fil la séquence, en repérant les savoirs pour lesquels l'enseignant a choisi d'enclencher un processus d'institutionnalisation.

De plus la fonction explicative du modèle est déterminante car ce dernier permet de percevoir, plus précisément de donner à voir les écarts existant entre le projet de séquence initial et la réalité du déroulement et ce de différents points de vue ayant une même visée : comprendre les raisons pour lesquelles certaines phases n'ont pas produit les effets attendus du point de vue des apprentissages et du point de vue des comportements et les raisons pour lesquelles les phases, plus précisément la confrontation des élèves aux situations emboîtées, a permis (ou non) de favoriser la pratique du raisonnement et d'enrichir le répertoire didactique de la classe en permettant aux élèves d'accéder aux véritables « raisons de savoir ».

Usages et évolutions du modèle d'analyse des raisonnements

Notons aussi que l'évolution des théories didactiques conduit à des recherches différenciées, non seulement en fonction du niveau visé mais aussi sur certains éléments fondamentaux de la connaissance. Ainsi Sylvie Blanquart-Henry (2020) a étudié les raisonnements des élèves de cycle 3 lors de séquences d'apprentissage en géométrie, et les adaptations et compétences nécessaires chez les professeurs pour gérer la complexité du processus, entre « le Processus de Transfert et Généralisation et le Processus de Contextualisation, Décontextualisation, Re-contextualisation ».

Marc Lalaude-Labayle (2019) a travaillé sur l'enseignement de l'algèbre au niveau supérieur, ce qui induit aussi une étude approfondie des signes employés et vise une issue sur des formalisations mathématiques standard qui n'ont rien d'évident à l'entrée dans le supérieur. A l'aide du modèle, il a produit une analyse détaillée des raisonnements des étudiants de classes préparatoires confrontés à des situations d'interrogations orales (plus communément appelées » khôlles »). L'utilisation du modèle sur les raisonnements produits par les étudiants lors des khôlles, par confrontation à des milieux riches et stabilisés, révèle que les fonctions des raisonnements observés sont en adéquation avec le projet initial de l'enseignant. De plus, Marc Lalaude-Labayle met en évidence, par des analyses didactiques approfondies, le fait que le modèle permet d'identifier précisément les difficultés auxquelles les étudiants sont confrontés, tant du point de vue de leur nature que de leur origine. Sa recherche montre aussi que les raisonnements produits par les étudiants en situation d'action ou de formulation sont ensuite utilisés en situation de preuve.

Dans le domaine de l'Analyse, la chercheuse Inen Akrouti (2021) parle d'un saut conceptuel nécessaire pour maîtriser la notion d'intégrale, ce saut conceptuel « privilégiant la logique, la quantification et le traitement des inégalités ». Là encore, les questions des raisonnements et de l'usage des signes sont essentielles et doivent être intégrées dans les situations proposées et dans la gestion du professeur.

Dans cette perspective, Inen Akrouti (2022) a conduit son étude, réalisée en Tunisie, sur la modélisation d'un phénomène physique en tant qu'approche spécifique adéquate pour l'enseignement et l'apprentissage du concept d'intégrale au niveau universitaire. La situation du barreau, initialement élaborée par Marc Legrand et exploitée dans cette recherche, privilégie des allers-retours entre le concret et l'abstrait, entre l'intuition et la formalisation. Les étudiants doivent déterminer la valeur de la force d'attraction exercée par un barreau de longueur finie sur une masse ponctuelle située dans son prolongement à une distance donnée. L'étude de l'activité de l'étudiant est modélisée dans le cadre de la TSD en identifiant précisément les situations d'action, de formulation et de validation de la séquence. L'autrice effectue une analyse a priori détaillée au cours de laquelle elle définit précisément les différents niveaux de milieux, explicitant pour chacun d'eux la nature et la fonction des raisonnements que les étudiants sont susceptibles de produire. Pour ce faire, elle utilise le modèle de Bloch et Gibel (2011) qu'elle enrichit en associant au raisonnement le niveau de rationalité correspondant. L'activité de l'étudiant au cours de la séquence est étudiée très finement par l'analyse des différentes formes de raisonnements élaborés en situation. Au cours de la situation de validation, la chercheuse effectue une analyse précise des interactions langagières entre étudiants, visant à étudier la capacité des étudiants à valider ou à invalider les conceptions erronées de certains par la production d'arguments adéquats.

La situation du barreau est très clairement destinée à mettre en œuvre une réflexion, et ensuite des conclusions, sur le fait qu'un calcul d'intégrale n'est pas un calcul algébrique où l'on cherche une valeur y à partir d'une valeur x, par exemple ; mais il s'agit de ce qu'on appelle un calcul *infinitésimal*, ce qui nécessite de décomposer la valeur cherchée au départ (par exemple en divisant le barreau en n segments égaux), puis de faire une « somme infinie », et de trouver les outils pour calculer ce genre de somme. La recherche de I. Akrouti explicite de façon claire comment le professeur va aboutir à guider les étudiants vers ce résultat, et son explicitation dans le milieu M_0.

Toutes ces réflexions posent enfin la question essentielle de la vérification des résultats obtenus dans la mise en œuvre des dispositifs d'enseignement : en clair, comment utilise-t-on un modèle ? qu'est-ce qu'un résultat en didactique des mathématiques ? Comment le valide-t-on ? ceci fait l'objet de notre dernier paragraphe.

Une question fondamentale est donc la façon dont on va utiliser un modèle de didactique pour faire une recherche, et en déduire un résultat qui sera valide et communicable, qui fera partie des savoirs 'officiels' du domaine de la didactique, et qui sera un acquis de cette discipline. Une situation validée comme ayant permis d'avoir accès au savoir visé, expérimentée à plusieurs reprises dans différents contextes, devient une situation de référence à laquelle ont accès les chercheur.e.s et les enseignant.e.s.

Ceci renvoie à une première question :

Qu'est-ce qu'un résultat en didactique des mathématiques ?

Cette question est posée comme titre de l'article de S. Johsua (1996). L'auteur déclare qu'il faut d'abord « un repérage, une délimitation et une définition des phénomènes didactiques », puis une maîtrise des conditions d'apparition de ces phénomènes.

La TSD est un modèle qui *construit* ces conditions d'apparition des productions des élèves et des interventions du professeur : en définissant le milieu adapté à l'apprentissage d'un concept, elle donne un cadre – le plus pertinent possible au vu du niveau concerné – pour obtenir les résultats mathématiques visés.

Les paramètres des situations

Un paramètre essentiel des situations est leur reproductibilité, car celle-ci prouve leur pertinence et leur efficacité. L'auteur pointe ce qu'il appelle le « saut épistémologique » dans le développement de la TSD par Brousseau & Centeno (1991), travail qui montre la logique du temps et de l'articulation des situations sur un même concept ; ainsi Brousseau a construit une suite de situations sur les nombres rationnels en fin de primaire, et ces différentes séances s'articulent pour aboutir au savoir final.

Un deuxième paramètre très important est la stabilité des résultats d'une situation, car cette stabilité prouve l'efficacité du dispositif.

Les bases de la méthodologie en didactique

Il faut nécessairement qu'une méthode de recherche d'un savoir en didactique soit basée sur un contexte défini, un cadre théorique (tel celui de la TSD), et des données empiriques de productions des réponses par les élèves : c'est ce que fait la TSD, et son évolution dans le contexte de l'enseignement secondaire et supérieur, avec ajout de critères sémiotiques, offre un cadre satisfaisant pour analyser les productions des étudiants et vérifier s'ils ont bien acquis les savoirs visés.

Ce que pointe aussi Johsua, c'est que si un résultat résiste aux différents contextes, alors il va renforcer le paradigme qui l'a construit. Ainsi les travaux sur les limites (BLOCH, 2002-1 ; BLOCH & GIBEL, 2011 ; GIBEL & BLOCH, 2022), sur l'intégrale (AKROUTI, 2021), sur l'algèbre (LALAUDE-LABAYLE, 2019), sur l'enseignement du calculus (GHEDAMSI & LECORRE, 2019) ont utilisé le cadre de la TSD et les outils sémiotiques pour valider les situations et leurs effets sur les connaissances des étudiants. En consultant ces travaux, on trouve des exemples détaillés des réalisations des situations, ce qui inclut une analyse des connaissances des étudiants et de l'achèvement de l'enseignement du savoir visé.

CONCLUSION

En conclusion, nous pouvons dire que les résultats des recherches conduites par les didacticiens et utilisant le modèle d'analyse des raisonnements contribuent à établir la consistance et la robustesse du modèle TSD/sémiotique : il permet de construire des situations à des niveaux différents (primaire, secondaire, supérieur), et dans des domaines mathématiques variés. Les domaines investis depuis l'existence de ce modèle ont été le numérique, la géométrie, l'analyse, l'algèbre… donc les principaux axes de connaissance en mathématiques.

Les utilisations du modèle par les

chercheurs mettent en évidence sa potentialité du point de vue de ses fonctions : il a à la fois une dimension prédictive et une dimension explicative. Ainsi il joue un rôle important dans l'élaboration d'une ingénierie didactique et il permet également de déterminer les effets de cette dernière sur l'appropriation du concept, par l'étude des phénomènes observés lors de sa mise en œuvre.

Le modèle permet aussi de mesurer les conceptions et les connaissances des élèves, leur évolution et leur accès au savoir. De nombreuses publications ont porté sur ce point depuis quarante ans.

Le modèle offre la possibilité de construire une autre organisation du savoir, organisation qui ne consiste pas seulement à utiliser des formules que les élèves doivent apprendre par cœur sans forcément avoir accès aux concepts concernés.

Par la mise en œuvre des ingénieries élaborées en TSD, le sens des formules est construit dans le dispositif des milieux, et en lien fort avec les concepts en jeu. Ce dispositif autorise aussi les élèves à faire des allers-retours, comme nous le disions, entre les niveaux de milieux, c'est-à-dire à utiliser des signes plus ou moins symboliques, à formuler des désignations sémantiques. Au final, leur compréhension des concepts s'en trouve fortement améliorée.

Cet agencement des situations donne aussi aux élèves des créneaux de recherche, pour se poser des questions, et travailler en groupe, ce qui favorise très souvent les échanges fructueux entre eux. Ce type de travail peut aussi inclure des modes de calculs différents (graphiques, numériques, usage des calculatrices pour répondre à des questions…) et donne aux élèves davantage d'autonomie.

Certes, ce fonctionnement a un coût de mise en œuvre : le professeur doit avoir mesuré que le temps investi pour chercher le problème posé dans la situation sera aussi un temps bénéfique pour comprendre le concept, et donc favorisera l'étape de l'institutionnalisation. Il faut revoir le temps des séances, et prévoir l'étape dédiée au professeur et à sa synthèse de la situation. Il ne s'agit pas d'organiser en classe d'abord un temps pour des situations, puis de refaire le même enseignement du concept de façon classique… La situation permet d'arriver au savoir et il est donc possible d'utiliser ensuite ce savoir dans d'autres problèmes.

Pour un concept donné, ces situations visent à faciliter l'articulation entre le sémantique et le syntaxique et ainsi permettent une compréhension plus approfondie du concept, facilitant son réinvestissement dans d'autres problèmes relevant d'autres contextes.

La construction d'une séquence offrant aux élèves la possibilité de pratiquer le raisonnement en percevant ses différentes fonctions leur confère des connaissances plus stables et plus assurées et qui permettent d'en percevoir réellement la portée.

Le professeur doit donc avoir une capacité, au minimum, à repérer les moments correspondant aux niveaux de milieux atteints par les élèves ; il doit aussi posséder une certaine expertise sur les signes mis en jeu et pouvoir analyser les enjeux sémiotiques à chaque étape, ainsi que ceux de la synthèse finale. Il doit bien sûr être capable d'identifier le savoir lorsqu'il est mis en œuvre dans les conditions particulières établies dans la situation et qui requièrent son usage, et de préciser (ou de compléter au besoin) les signes mathématiques nécessaires et les usages du savoir dans d'autres contextes du même domaine (numération, algèbre, analyse, géométrie…).

Ceci pose bien sûr la question de la formation des enseignants, du primaire… au supérieur !

REFERENCES

AKROUTI, I. L'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université. **Thèse**, Université Virtuelle de Tunis, 2021.

AKROUTI, I. La situation du barreau : une alternative possible pour l'enseignement de l'intégrale à l'entrée à l'université. **Revue québécoise de didactique des mathématiques**, numéro thématique 1, 2022.

BELHAJ AMOR, F. Enseignement et apprentissage des approximations locales des fonctions au début de l'université : Cas des classes préparatoires aux études d'ingénieurs en Tunisie. **Thèse** en co-tutelle Université de Pau et des pays de l'Adour, Université virtuelle de Tunis, 2022.

BLANQUART-HENRY, S. Raisonnements géométriques d'élèves de cycle 3, duos de situations, rôle de l'enseignant. **Thèse**, Université de Paris, 2020.

BLOCH, I. L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en Première scientifique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 135-193, 1999.

BLOCH, I. Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations. Em: Dorier, J.-L. (Ed.). **Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 125-139, 2002-1.

BLOCH, I. Un milieu graphique pour l'enseignement de la notion de fonction au lycée, **Petit x,** v. 58, p. 25-46, 2002-2.

BLOCH, I. Didactique des mathématiques et théories sémiotiques : Vers une analyse des processus de production et d'interprétation des signes mathématiques dans les situations d'apprentissage, Conférence **SFIDA**, Université de Turin, 2005. Disponible sur Researchgate.

BLOCH, I. Concepts, objets, symboles, enseignement des mathématiques : Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique. **Petit x**, v.97, p. 71-79. hal-02525717, 2015.

BLOCH, I. Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. **Petit x**, v.106, p. 65-77, 2018. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/

BLOCH, I. & DENAPE, J. La nature des signes en mathématiques et en physique : problèmes d'interprétation dans l'enseignement des sciences. Publication du groupe de recherche sur la pragmatique cognitive - interfaces avec l'enseignement des sciences et des mathématiques, in **Linguagem e Ensino de Ciências e Matemática: Perspectivas de Interfaces**, Université Sud du Brésil, 2021. https://educapes.capes.gov.br/handle/capes/642805

BLOCH, I. & GIBEL, P. Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. **Recherches en Didactique des**

Mathématiques, v. 31-2, p. 191-227. La Pensée Sauvage. hal-02525901, 2011.

BLOCH, I. & GIBEL, P. Situations de recherche pour l'accès aux concepts mathématiques à l'entrée à l'université. **Revue EpiDEMES**, Épijournal de Didactique et Epistémologie des Mathématiques pour l'Enseignement Supérieur. Numéro spécial, 2022. https://doi.org/10.46298/epidemes-9886

BROUSSEAU, G. & CENTENO, J. Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 11-2/3, p. 167-210. La Pensée Sauvage, 1991.

BROUSSEAU, G. & GIBEL, P. Didactical Handling of Students' Reasoning Processes in Problem Solving Situations. **Educational Studies in Mathematics**, 59(3), p. 13-58, 2005.

DESANTI, J.T. **Les idéalités mathématiques**. Paris : Seuil, 1968.

DORIER J.L. **L'enseignement de l'algèbre linéaire en question**. Ouvrage de Recherches en didactique des mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1997.

DURAND-GUERRIER, V. Négation et quantification dans la classe de mathématiques. In Négation et référence, 5, **ÉPURE** Éditions et Presses universitaires de Reims, p. 269-288, 2016.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993, Strasbourg.

GHEDAMSI, I. & LECORRE, T. Towards an interplay between TDS and ATD in a Design-Based Research project at the entrance to the university. **Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**, Utrecht, Netherlands. 2019, hal-02422633.

GIBEL, P. Elaboration et usages d'un modèle multidimensionnel d'analyse des raisonnements en classe de mathématiques. (Note de synthèse de l'Habilitation à Diriger les Recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2018. Disponible sur : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01919188

GIBEL, P. Rôle de l'analyse sémiotique dans l'étude didactique des raisonnements en classe de mathématiques. Dans **Langage et enseignement des sciences et des mathématiques : perspectives d'interfaces**, (p. 179-197) éditeurs Fábio José Rauen, Marleide Coan Cardoso, Bazilicio Manoel de Andrade Filho, et al. – Formiga (MG): Editora Real Conhecer, 2021. https://editora.realconhecer.com.br/2021/10/linguagem-e-ensino-de-ciencias-e.html

GIBEL, P. & BLOCH, I. Situations de recherche pour faciliter l'accès aux concepts mathémati-ques à l'entrée a l'université. **Espace mathématique francophone**, Cotonou, 2022.

JOHSUA, S. Qu'est-ce qu'un « résultat » en didactique des mathématiques ? **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 16-2, p. 197-220. La Pensée Sauvage, 1996.

LALAUDE-LABAYLE, M. Un regard épistémologique sur l'évolution historique des notions de preuve et d'axiomatique. **Petit x**, v. 110/111, p. 5-26, 2019.

LEGRAND, M. La problématique des situations fondamentales. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 16-2, p.

221-279. La Pensée Sauvage, 1996.

PEIRCE, C.S. **Le raisonnement et la logique des choses**. Paris, Editions du Cerf, 1995.

PEIRCE, C. S. **Écrits sur le signe.** Traduction et commentaires de Deledalle, G. Paris : Seuil, 1978.

RADFORD, L. Epistemology as a research category in mathematics teaching and learning. In B. Hodgson, A. Kuzniak, & J.-B. Lagrange (Eds.), **The didactics of mathematics: Approaches and issues** (p. 31-41), Springer 2016.

SACKUR C., ASSUDE T., MAUREL M., DROUHARD J.P., PAQUELIER Y. L'expérience de la nécessité épistémique. **Recherches en Didactique des Mathématiques** 25/1, p. 57–90, La Pensée Sauvage, 2005.

SIERPINSKA, A., DREYFUS, T. & HILLEL, J. J. Hillel J. Evaluation of a Teaching Design in Linear Algebra: the Case of Linear Transformations. **Recherches en didactiques des mathématiques**. 19(1), p. 7-40, 1999.

TIERCELIN, C. **La pensée signe. Études sur C.S. Peirce**. Nîmes : Jacqueline Chambon, 1993.