CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 1 18 – 134
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Usages de la théorie des champs conceptuels en didactique des mathematiques. l'exemple de la transitivité

Uses of the theory of conceptual fields in didactics of mathematics. The example of transitivity

Viviane **DURAND-GUERRIER**[1], Université de Montpellier, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, UM, CNRS.
Nicolas **SABY**[2], Université de Montpellier, Institut Montpelliérain Alexander Grothendieck, UM, CNRS.

RESUMÉ

Dans cet article, nous illustrons sur l'exemple de la transitivité les usages que nous faisons dans nos recherches de la théorie des champs conceptuels. Notre objectif est de mettre en lumière les questions épistémologiques soulevées par l'émergence de la notion d'ordre dans l'histoire, et certaines des questions didactiques associées. Il se dégage de cette étude le rôle central de la transitivité et l'importance de prendre en compte la relation de préordre, tant du point de vue épistémologique que du point de vue didactique. Après une rapide présentation de la théorie des champs conceptuels, nous présentons les principaux jalons de l'étude épistémologique. Nous montrons ensuite que la notion de transitivité est rencontrée dès l'école primaire et joue un rôle central dans le développement du schème du dénombrement, et que les apprentissages des propriétés des relations en début d'université trouvent leurs racines dans ces premiers apprentissages et permettent en retour de les éclairer, ceci illustrant la dialectique entre connaissance opératoire et connaissance prédicative. Les résultats de cette recherche exploratoire montrent la pertinence de poursuivre cette recherche en incluant l'enseignement secondaire (élèves de 11 à 18 ans).

Mots-clés: Théorie des champs conceptuels, Relation d'ordre et de préordre, Transitivité.

ABSTRACT

In this paper, we illustrate how we use the theory of conceptual fields in our research on the example of transitivity. Our aim is to highlight the interest of adopting a developmental point of view to study the epistemological and didactical questions linked to the emergence of a concept or a mathematical field. We illustrate this by studying the emergence of the notion of order in history, and by putting the results of the epistemological study in perspective with associated didactical issues. The central role of transitivity and the importance of considering the preorder relation, both from an epistemological and a didactical point of view, emerge from our study. After a quick presentation of the main concepts of the theory of conceptual fields that we use in this research, we present the main milestones of the epistemological study. We then show on the one hand that the notion of transitivity is encountered as early as primary school and plays a central role in the development of the enumeration scheme, and on the other hand that the properties of relations taught at the beginning of university find their roots in these first learnings and in return allow to enlighten them, this illustrating the dialectic between operative knowledge and predicative knowledge. The results of this exploratory research show the relevance of continuing this research by including secondary education (students aged 11 to 18).

Correspondance:

[1]viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr
[2]nicolas.saby@umontpellier.fr

Reçu dans 07/10/2023
Approuvé en 07/11/2023

INTRODUCTION

Dans nos recherches en didactique des mathématiques, nous nous plaçons dans la théorie des champs conceptuels lorsque nos questions de recherche concernent les aspects développementaux tout au long du curriculum d'un concept donné. En effet, le point de vue adopté par Vergnaud (1990) permet de penser l'évolution d'un concept à travers la relation dialectique entre connaissance opératoire et connaissances prédicative, concept-en-acte et concept mathématique, théorème-en-acte et théorème mathématique, ainsi qu'entre inférence-en-acte et déduction (VERGNAUD, 2007, p. 344-348). Cette évolution pouvant être regardée du point de vue de l'épistémologie et de l'histoire des sciences où on peut rechercher des sources de possibles transpositions, que du point de vue de la didactique (op.cit., p. 345).

Dans cet article, nous allons illustrer ceci à propos du concept de transitivité qui est au cœur de la relation de préordre. Nous présenterons tout d'abord sur un exemple les principaux éléments de la théorie des champs conceptuels que nous retenons pour notre étude. Nous conduirons ensuite une étude épistémologique sur l'émergence des concepts d'ordre et de préordre, en soulignant les questions que se sont posées les auteurs et les raisons pour lesquelles finalement le concept de préordre s'est révélé pertinent. Dans une troisième partie, nous mettrons en lumière les liens entre la transitivité rencontrée en acte à l'école primaire et la définition formelle de la transitivité proposée dans les cours de début d'université. Nous discuterons finalement les perspectives ouvertes par cette recherche exploratoire.

LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS

Selon Vergnaud (1990, p. 133) la théorie des champs conceptuels est une théorie cognitiviste qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour l'étude du développement et de l'apprentissage des connaissances complexes.

Il précise qu'elle intéresse la didactique, mais qu'elle n'est pas à elle seule une théorie didactique. Elle vise à fournir des éléments de compréhension des filiations et des ruptures entre connaissances (savoir-faire et savoirs exprimés).

CONNAISSANCE OPERATOIRE VERSUS CONNAISSANCE PREDICATIVE

Selon Vergnaud, si on s'intéresse à l'apprentissage d'un concept, il ne faut pas le réduire à sa définition. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant. Nous ajouterons que ceci vaut aussi pour le développement des concepts dans l'histoire. On peut penser aux nombres réels qui ont été utilisés en acte par les mathématiciens bien avant d'être définis formellement au milieu du 19ème siècle. Pour Vergnaud, il est nécessaire d'accorder une place centrale aux formes que prend la connaissance dans l'action du sujet. La connaissance rationnelle est opératoire ou n'est pas. Pour autant, le langage et le symbolisme jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation :

> « Concepts et théorèmes explicites ne forment que la partie visible de l'iceberg de la conceptualisation : sans la partie cachée formée par les invariants opératoires, cette partie visible ne serait rien. Réciproquement on ne sait parler des invariants opératoires intégrés dans les schèmes qu'à l'aide des catégories de la connaissance explicite : propositions, fonctions propositionnelles, objets - arguments. » (VERGNAUD, 1990, p. 145)

Ceci conduit Vergnaud à modéliser un concept comme « un triplet composé de trois sous-ensembles : C = (S, I, S)

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence)

I : l'ensemble des invariants sur lesquels reposent l'opérationnalité des schèmes (le signifié)

S : l'ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement. » (op. cit. p. 146)

Il précise que pour étudier le développement et le fonctionnement d'un concept, au cours de l'apprentissage ou lors de son utilisation, il faut nécessairement considérer ces trois plans à la fois. Il n'y a pas en général de bijection entre signifiants et signifiés, ni entre invariants et situations. On ne peut donc réduire le signifié ni aux signifiants, ni aux situations.

INVARIANTS OPERATOIRES

Pour Vergnaud, le concept de schème est essentiel ; il s'agit d'une totalité dynamique organisatrice de l'action du sujet pour une classe de situations donnée. Un schème est composé de règles d'action et d'anticipation, d'invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) et d'inférences-en-acte indispensables à la mise en œuvre du schème Un exemple classique est le schème du dénombrement d'une petite collection : coordination des mouvements des yeux et des gestes du doigt et de la main par rapport à la position des objets, énoncé coordonné de la suite numérique, cardinalisation de l'ensemble dénombré par un soulignement tonique *ou* par répétition du dernier mot-nombre prononcé.

Dans cet exemple, on voit apparaître le concept-en-acte de cardinal, qui n'est évidemment pas défini à ce niveau du curriculum, mais qui le sera plus tard, a minima en début d'université, notamment lorsque l'on s'intéressera aux ensembles infinis. Les concepts-en-acte sont modélisés par des prédicats (des propriétés ou des relations). Le concept-en-acte de cardinal rencontré à l'école primaire est modélisé par une relation binaire entre un nombre et une collection ; c'est la relation « être le cardinal de » qui est satisfaite par certains couples (nombre entier, collection finie), et non satisfaite par d'autres.

Un théorème-en-acte est modélisé par une proposition, autrement dit un énoncé qui est susceptible d'avoir une valeur de vérité. Dans la plupart des cas ce sont des énoncés généraux qui contiennent une quantification universelle implicite (VERGNAUD, 1990, p.142).

Dans le schème du dénombrement, on identifie un théorème-en-acte et l'inférence-en -acte (modus ponens) associée :

Théorème-en-acte : (quelle que soit la collection finie considérée) si chaque objet a été pointé une fois et une seule, le dernier mot-nombre énoncé permet de répondre à la question « combien ?»

Contrôle de l'action pour s'assurer que la prémisse est vérifiée : chaque objet a été pointé une fois et une seule.

Conclusion : le dernier mot-nombre énoncé est la réponse à la question « combien ? »

Vergnaud précise que l'automatisation est l'une des manifestations les plus visibles du caractère invariant de l'organisation de l'action, ce qui n'exclut pas un contrôle conscient. Notamment, la mise en œuvre correcte d'une inférence-en-acte associée à un théorème-en-acte nécessite comme on l'a vu le contrôle que la prémisse est bien vérifiée.

Les théorèmes-en-acte sont des invariants opératoires identifiés par un observateur (chercheur ou enseignant) ; ce sont des énoncés généraux qui sont le plus souvent vrais sur un domaine suffisamment large pour que leur utilisation permette à l'action d'être opératoire. Lorsqu'un théorème-en-acte est utilisé en dehors de son domaine de validité, cela peut conduire à une conclusion erronée, ou à une action inadaptée. Éprouver la limite de validité de l'énoncé peut se faire en classe par la rencontre provoquée avec une interprétation (un contexte, un domaine de réalité) dans laquelle l'utilisation de ce théorème-en-acte est mis en défaut, en particulier parce qu'il fait émerger une contradiction entre les résultats qu'il permet de prévoir et les résultats que l'on peut trouver expérimentalement. Pour Vergnaud, un schème est lui-même un universel associé à une classe de situations. Il permet de générer des suites d'actions et de prises d'information en fonction des situations.

Il existe aussi des invariants de types arguments; ce sont des objets qui permettent de saturer les propriétés ou les relations: objets matériels; nombres; collections finies; fonctions; ensembles etc… Vergnaud insiste sur l'importance pour la didactique des distinctions entre concepts-en-acte, théorèmes-en-acte et arguments; en effet la transformation des concepts - outils en concepts - objets est un processus décisif dans la conceptualisation du réel. Cette transformation signifie entre autres choses que les propriétés ou les relations peuvent devenir arguments. La nominalisation est une opération linguistique essentielle dans cette transformation (VERGNAUD, 1990, p. 145). À l'université, on établira par exemple que la relation « avoir le même cardinal que » est une relation d'équivalence : dans cette phrase, l'expression entre guillemets est un argument qui sature la propriété « être une relation d'équivalence ».

EN GUISE DE CONCLUSION

Dans le texte de 2007 (p. 349), Gérard Vergnaud insiste sur la nécessité d'analyser et de décrire dans le langage de la sciences les inférences utilisées dans l'action, ceci afin d'éviter d'installer une rupture entre les connaissances opératoires et les connaissances prédicatives. En conclusion de l'article de 1990, il rappelle que la théorie des champs conceptuels repose sur un principe d'élaboration pragmatique des connaissances et il insiste sur la nécessité de mettre en scène dans des situations didactiques significatives les concepts qu'on veut enseigner et sur la nécessité pour cela d'analyser les tâches cognitives rencontrées par le sujet. De telles situations peuvent notamment être développées suivant le modèle de la théorie des situations didactiques dans l'articulation et les va-et-vient entre situations d'action, situations de formulation et situations de validation (BROUSSEAU, 1998).

LA NOTION D'ORDRE EN MATHEMATIQUES

Au tout début des apprentissages, ordonner, c'est comparer. Ainsi, on le retrouve dans les formes langagières autour des grandeurs ou des positions dans l'espace.

- Plus versus Moins
- Grand versus Petit Lourd versus Léger
- Dessus versus Dessous
- À la même place que
- Avant versus Après

Certaines de ces formes ont des acceptions dans le langage courant qui induisent des interprétations ou mésinterprétations en mathématiques. On pense ici, au sens de plus et moins ou encore au plus et au moins, comme dans les expressions « J'ai plus de trois chapeaux » ou « J'ai au moins trois chapeaux ». Cette prédominance de la comparaison se retrouve dans l'usage de l'ordre en mathématiques au sujet des grandeurs et au sujets des nombres entiers naturels qui sont associés via le concept de cardinal à la grandeur « taille d'une collection discrète finie » (DURAND-GUERRIER, 2019).

APPROCHE EPISTEMOLOGIQUE

L'étude que nous proposons dans cette section s'articule autour de trois moments, l'un concerne les questions de logique des relations avec la question de la transitivité dans les inférences, l'autre porte sur les questions de fondements logique de la notion de nombre et le dernier sur les fondements logiques des relations d'ordre et de préordre.

La difficile construction théorique autour des relations et les choix faits sur les définitions de leurs propriétés est un des éléments de cette étude. Du point de vue du monde réel, la question de la mesure des grandeurs a occupé les débats et pendant longtemps les mathématiques ont été considérées comme la science de la mesure, mais les questions de fondements « Qu'est-ce qu'un nombre ?», « Qu'est-ce qu'une mesure ou une grandeur ?» n'ont pas émergé spontanément. Ces questions théoriques de grandeurs et de mesure sont régulièrement réactivées suivant le domaine d'applications des notions qui les ont fait apparaître.

On cherche à montrer ici comment ce cheminement amène à poser la question de l'ordre dans un champ plus vaste et pourquoi la propriété de transitivité constitue le point saillant des relations d'ordre et de préordre.

Du point de vue de la sémiotique, une étude historique sur la symbolique indique que l'usage d'un signe particulier pour désigner une comparaison de grandeur entre deux objets ou deux nombres est relativement récente, tout au moins pour son usage sur les nombres. On trouve ainsi dans Cajori (1999) que l'usage des symboles $\prec$ et $>$ apparaît pour la première fois dans Artis analyticae praxis de Thomas Harriot (1631). Quant aux symboles $\leq$ et $\geq$ on les rencontre un peu plus tardivement dans De sectionibus conicis (p.70) de John Wallis (1655).

On attribue à De Morgan (1851) dans la suite de ses travaux sur les syllogismes, l'émergence du concept de relations et le développement de la logique des relations. Il est probablement le premier à utiliser le terme de transitivité et tous ses dérivés dans son traitement des inférences logiques. Ce travail sera poursuivi par Peirce et Schröder, mais nous ne développons pas davantage ces aspects purement logiques.

Le deuxième moment de notre étude concerne le développement de la structure d'ordre en lien avec la mesure des grandeurs. Cette question de grandeur et de mesure, qui continue à vivre dans les développements récents dans le champ social, se rencontre dans les fondements logiques de la question de la quantité tels qu'ils ont été abordés par Russell. Nous défendons ici la thèse que les questions de la quantité et de la mesure sont fondamentalement liées aux questions de grandeurs et ainsi à l'émergence de la logique des relations et de leurs propriétés, dont celle de transitivité qui est au cœur de cet article. Ainsi, il n'est pas étonnant de retrouver un ensemble de travaux autour de ce problème des relations transitives dans le cadre de la construction des nombres. Charles Peirce (1881), dans On the logic of numbers, cherche à montrer que les propriétés des nombres découlent d'un petit nombre de propriétés qui sont celles d'un ensemble ordonné dont il énonce les propriétés maintenant usuelles de

• la transitivité : « une relation comme *amoureux de tout ce qui est aimé par* est une relation transitive » ;

• la réflexivité : « que chaque chose dans le système est q d'elle-même » ;

• l'antisymétrie : « rien n'est à la fois q et q' d'une chose, sauf elle-même ».

On retrouve aussi cette problématique chez Peano et son école, ainsi que chez Russell (1897) dans On the relation of numbers and quantities. Probablement que le processus d'arithmétisation de l'analyse a permis de poser la notion du nombre hors du concept de mesure et de grandeur et a, de la sorte, réinterrogé ces questions de mesure des grandeurs. On trouve aussi chez Russell (1901) dans L'idée d'ordre et la position absolue dans l'espace et le temps, prémices de travaux en psychologie cognitive, un lien tout à fait pertinent, avec le langage de la géométrie et les constructions langagières autour des termes dessus/dessous, devant/derrière ou encore de la relation entre, relation *ternaire* cette fois.

Le troisième moment de notre étude nous amène à nous arrêter sur un texte que l'on peut considérer comme fondateur sur la question d'ordre. Russell (1897) pose explicitement la question de l'ordre dans The Principles of mathematics:

> Qu'est-ce qu'un ordre ? Ceci est une question difficile et sur laquelle, autant que je sache, rien du tout n'a été écrit. Tous les auteurs que j'ai rencontrés se contentent d'exhiber la genèse d'un ordre ; et puisque la plupart d'entre eux donnent seulement une des six méthodes énumérées dans le chapitre XXIV, il est facile pour eux de confondre la genèse d'un ordre avec sa nature. (op. cit., Traduction libre des auteurs.)

Dans ce texte, Russell définit une relation d'ordre comme une relation transitive et asymétrique. Un ensemble d'auteurs ont ensuite discuté de ces constructions théoriques. On retiendra particulièrement les travaux d'Edward Huntington, que ce soit sur une formalisation de la géométrie « sans points » dans laquelle la relation *entre* est primordiale ou dans le champ de la topologie.

Ainsi, Huntington (1905) dans The continuum as a type of order: an exposition of the modern theory définit explicitement l'ordre comme ordre strict.

Le point de vue théorique sur la structure d'ordre évolue ainsi en fonction de l'approfondissement des questions de fondements et de racines des mathématiques dans ce courant logistique. On signalera aussi que Schröder dans son travail en théorie des ensembles sur la question du bon ordre revient sur cette question de ce qu'est un ordre et une structure d'ordre. Ainsi lors du congrès international de philosophie en 1901, Sur une extension de l'idée d'ordre, il remet la transitivité au cœur du problème de l'ordre et on peut y voir une première définition de la relation de préodre avec sa notion de gradation (SCHRÖDER, 1901). Cette discussion est à rapprocher du point de vue de Russell (1901) dans L'idée d'ordre et la position absolue dans l'espace dans ce même congrès de 1901, où il discute des objets qui ont une position et ceux qui sont des positions. On interprétera cela en termes d'un passage au quotient sur une relation de préordre qui permet de construire une mesure de grandeurs. Il apparaît ainsi que le questionnement premier à la fin du XIX-ième siècle et début du XX-ème sur la question « Qu'est-ce qu'un ordre ? » portait principalement sur la question de la transitivité. Les autres propriétés de l'ordre sont des réponses à des problèmes de constructions théoriques.

LA RELATION D'ORDRE AUJOURD'HUI

On doit probablement à Bourbaki d'avoir fixé les propriétés des relations d'ordre. Ainsi, on définit maintenant classiquement : Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation d'ordre si elle vérifie les trois propriétés suivantes:

- Réflexivité : Pour tout x dans X, xOx ;
- Antisymétrie : Pour tous x,y dans X, si

(xOy et yOx), alors x=y ;

• Transitivité : Pour tous x,y,z dans X, si (xOy et yOz), alors xOz.

Comme le montre l'étude épistémologique, cette stabilisation a été assez lente et le choix a probablement été guidé par l'usage de l'ordre en analyse ou comme on le présentera ensuite par la notion de préordre qui va englober l'ordre et l'équivalence. On peut aussi envisager que ce choix vient d'une commodité théorique qui évite d'avoir à distinguer à chaque fois le cas x différent de y, du cas x = y.

Le premier choix était de distinguer entre ordre et ordre strict:

Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation d'ordre strict si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

- Asymétrie : Pour tous x, y dans X, si xOy, alors non yO x ;
- Transitivité : Pour tous x, y, z dans X, si (xOy et yOz), alors xOz.

Mais on peut aussi donner comme définition de l'ordre strict:

Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation d'ordre strict si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- Irréflexivité : Pour tous x dans X, non xOx ;
- Transitivité : Pour tous x,y,z dans X, si (xOy et yOz), alors xOz.

LA RELATION DE PREORDRE

Une relation binaire O sur un ensemble X est une relation de préordre si elle vérifie les deux propriétés suivantes:

- Réflexivité : Pour tout x dans X,xOx ;
- Transitivité : Pour tous x,y,z dans X, si (xOy et yOz), alors xOz.

Dans l'idée de ne pas effacer les objets, les relations de comparaisons dans les domaines d'applications ou dans le monde réel montre presque toujours une relation de préordre avant une relation d'ordre. C'est le choix que fait Tarski (1995, p. 155-159) lorsqu'il définit les lois de l'ordre pour les nombres. Il définit l'ordre strict et dans les axiomes qu'il choisit, la relation est irréflexive et il essaye de capturer notre notion intuitive d'ordre.

En général, on ne peut pas se débarrasser des objets équivalents. Dans le cadre des grandeurs, on pense ici aux objets de même longueur, ceux de même masse, ... La relation d'ordre nécessitera un passage au quotient par la composante symétrique de la relation de préordre ou par la composante asymétrique qui elle sera une relation d'ordre stricte.

La composante symétrique $\sim$ d'une relation de préordre $\succcurlyeq$ est la sous-relation définie par

$(X\sim Y)$ si et seulement si $(X\succcurlyeq Y)$ et $(Y\succcurlyeq X)$

La composante asymétrique $\succ$ d'une relation de préordre $\succcurlyeq$ est la sous-relation définie par

$(X\succ Y)$ si et seulement si $(X\succcurlyeq Y)$ et (non $(Y\succcurlyeq X)$)

LA TRANSITIVITE A L'ECOLE PRIMAIRE ET A L'UNIVERSITE

Comme le souligne Gérard Vergnaud

> Une épistémologie des mathématiques qui voudrait évacuer les grandeurs et s'en tenir aux nombres et cependant théoriser sur les apprentissages élémentaires, est une impasse (Vergnaud, 2007, p. 347).

Comme nous l'avons montré dans l'étude épistémologique, ceci conduit à considérer des préordres, plutôt que des ordres. Dans l'exemple que nous présentons ci-dessous, la grandeur que nous considérons est la taille des collections discrètes finies.

COMPARAISON DE LA TAILLE DES COLLECTIONS FINIES ET CONCEPT-EN-ACTE DE TRANSITIVITE

La comparaison des grandeurs met en jeu la transitivité dès qu'on veut comparer plus de deux grandeurs. En accord avec Brousseau (2002), nous considérons que la première grandeur rencontrée par les élèves à l'école primaire est celle de la taille des collections discrètes finies. Ce contexte permet aux élèves de rencontrer en acte le concept de transitivité.

Vers le concept-en-acte de taille d'une collection finie.

La première étape pour la construction du nombre à l'école maternelle consiste à mettre en place un protocole de comparaison de petites collections discrètes par la mise en correspondance terme à terme, en particulier dans le cadre d'activités fonctionnelles.

Prenons un exemple. Avant de commencer une activité de peinture, on a besoin de savoir s'il y a assez de pinceaux pour tous les élèves de la classe. On a deux collections discrètes finies : les élèves de la classe, collection C1 et les pinceaux disponibles, collection C2. Concrètement, il s'agit de distribuer les pinceaux aux enfants.

Trois cas sont possibles :

1er cas – chaque élément de C1 correspond exactement à un élément de C2 et réciproquement. Les deux collections ont la même taille. Il y a autant de pinceaux que d'enfants / Il y a autant d'enfants que de pinceaux.

2ème cas – il existe au moins un élément de C1 qui n'a pas de correspondant dans C2. La taille de C1 est supérieure à la taille de C2. Il y a plus d'enfants que de pinceaux / il y a moins de pinceaux que d'enfants.

3ème cas – il existe au moins un élément de C2 qui n'a pas de correspondant dans C1. La taille de C2 est supérieure à la taille de C1. Il y a plus de pinceaux que d'enfants / il y a moins d'enfants que de pinceaux.

D'une manière générale, étant donnée deux collections discrètes finies, C1 et C2, exactement trois cas peuvent se présenter.

- C1 a autant d'éléments que C2 / C2 a autant d'éléments que C1
- C1 a plus d'éléments que C2.
- C2 a plus d'éléments que C1.

La répétition d'activités de ce type à l'école primaire permet de définir en acte (au sens de Vergnaud) une relation binaire sur l'univers des collections discrètes finies : « avoir autant ou plus d'éléments que » (respect. « avoir autant ou moins d'éléments que ».

Étant donné deux collections discrètes finies, un et un seul des trois cas se produit.

On peut toujours comparer deux collections finies par la mise en correspondance terme à terme.

L'expérience répétée de ce protocole avec des collections mettant en jeu des objets variés permet de définir un invariant opératoire de type concept-en- acte (au sens de Vergnaud) : la grandeur « taille » pour les collections discrètes finies.

Une première rencontre avec la transitivité à l'école

Dans les activités fonctionnelles, on est très vite amené à comparer plus de deux collections. Reprenons l'exemple précédent et introduisons la collection finie des pots de peintures disponibles dans la classe, collection C3.

Dans cette situation, nous pouvons considérer quatre cas. Nous présentons d'abord les trois premiers, avant de nous intéresser au 4ème cas.

1er cas – Il y a autant de pinceaux que d'enfants ; et il y a autant de pots de peinture que de pinceaux.

Conséquence - Il y a autant de pots de peinture que d'enfants.

2ème cas - il y a autant de pinceaux que d'enfants et il y a plus (resp. moins) de pots de peintures que de pinceaux.

Conséquence – il y a plus (resp. moins) de pots de peinture que d'enfants.

3ème cas – Il y plus (resp. moins) d'enfants que de pinceaux, et il y a autant ou plus (resp. moins) de pinceaux que de pots de peinture.

Conséquence - il y a plus (resp. moins) d'enfants que de pots de peinture.

Pour chacun de ces trois cas, l'expérience répétée permet de construire des invariants opératoires de type théorème-en-acte (au sens de Vergnaud)

T1 - Si C1 a autant d'éléments que C2 et C2 a autant d'éléments que C3, alors C1 a autant d'élément que C3.

T2 - Si C1 a autant ou plus d'éléments que C2 et C2 a autant ou plus d'éléments que C3, alors C1 a autant ou plus d'éléments que C3.

T3 - Si C1 a autant ou moins d'éléments que C2 et C2 a autant ou moins d'éléments que C3, alors C1 a autant ou plus d'éléments que C3.

Ceci traduit le fait que ces trois relations binaires sont transitives, ce qui permet de comparer la taille de C1 et C3 sans mettre en œuvre la méthode de comparaison terme à terme entre les deux collections. La collection C2 joue le rôle de terme moyen et disparaît dans la conclusion. On peut voir ici une analogie avec le syllogisme universel de la première figure d'Aristote, « Si A est affirmé de tout B et si B est affirmé de tout C, alors A est affirmé de tout C », qui exprime que la relation logique d'antécédent à conséquent est une relation transitive, ceci permettant les preuves par chaines d'implication.

Remarque – la formulation explicite de ces théorèmes-en-acte n'est pas un enjeu d'apprentissage à l'école primaire.

Il reste maintenant à examiner le 4ème cas

4ème cas – Il y plus d'enfants que de pinceaux et il y a plus de pots de peinture que de pinceaux. Dans ce cas, on ne peut pas conclure à partir des résultats des deux comparaisons réalisées. Pour reprendre l'analogie avec la théorie du syllogisme d'Aristote, ceci correspond au syllogisme universel de la deuxième figure qui n'est pas concluant.

Pour savoir ce qu'il en est, on peut mettre en œuvre la méthode de correspondance terme à terme entre C1 et C3 ou comparer les écarts.

LA RELATION D'ORDRE EN DEBUT D'UNIVERSITE

Dans cette section, nous donnons les définitions classiques d'une relation d'ordre que nous illustrons dans le cas de la comparaison de taille des collections discrètes finies. Comme c'est le cas dans de nombreuses universités françaises, les définitions retenues ici[1] sont très proches de celles proposées par Bourbaki.

Définition 1 (relation binaire) : Soit E un ensemble. Une relation binaire R sur E est un sous-ensemble de E×E[2] . On note x R y pour signifier que (x, y) ∈ E×E.

Comparer la taille des collections discrètes

Les éléments de E sont les collections discrètes finies (E est potentiellement infini)

« avoir autant d'éléments que », « avoir autant ou plus d'éléments que » sont des relations binaires.

On peut les modéliser en considérant les couples de collections discrètes qui vérifient la relation.

Dans la pratique : si on a un petit ensemble fini de collections discrètes finies, on peut fabriquer explicitement les couples qui satisfont la relation (et ceux qui ne la satisfont pas).

Définition 2 (réflexivité d'une relation binaire)

On dit qu'une relation binaire R est réflexive quand pour tout élément x de E, x est en relation avec lui-même.

Exemple : une collection discrète a la même taille qu'elle-même.

Remarque - D'un point de vue pragmatique, cela n'a pas grand sens ; en effet, pour faire une correspondance terme à terme, on a besoin de deux collections ; on peut considérer alors une copie de la première collection, mais il s'agit alors d'une autre collection, identique à la première. On peut faire l'hypothèse que aucun invariant opératoire correspondant à cette propriété ne va apparaître à l'école primaire via la méthode de correspondance terme à terme.

Définition 3 (antisymétrie d'une relation binaire)

On dit qu'une relation binaire est antisymétrique quand pour tout couple (x, y)

---

1 Les définitions données ici sont empruntés à Nicaud : http://igm.univ-mlv.fr/~nicaud/poly/L2_1.pdf..

2 E×E est l'ensemble des couples d'éléments de E, appelé *Produit cartésien*.

d'éléments de E, si x R y et y R x, alors x = y.

La relation « avoir autant ou plus d'éléments que » n'est pas antisymétrique.

En effet, de C1 a autant ou plus d'éléments que C2 et de C2 a autant ou plus d'élément que C1, on déduit que C1 a autant d'élément que C2 (et réciproquement). C1 et C2 peuvent être deux collections d'objets différentes. On obtient un couple de collections satisfaisant la relation d'équivalence « avoir la même taille que ». Il s'agit donc d'une relation de préordre.

La relation binaire d'inclusion entre ensembles est antisymétrique. C'est une relation d'ordre. Ceci justifie la méthode de preuve par double inclusion : deux sous-ensembles d'un ensemble donné mutuellement inclus l'un dans l'autre ont exactement les mêmes éléments. Cette définition prédicative dans ce cas-là est opératoire. Ce n'est pas le cas par exemple si on travaille avec des graphes. Dans ce cas, il vaut mieux choisir comme définition prédicative celle qui affirme que si x est en relation avec y et que y est différent de x, alors y n'est pas en relation avec x.

Définition 4 (transitivité d'une relation binaire)

On dit qu'une relation binaire R est transitive quand pour tout triplet (x, y, z) d'éléments de E, si x R y et y R z, alors x R z.

Cette définition est la forme prédicative (au sens de Vergnaud) des théorèmes-en-acte que nous avons identifiés comme invariants opératoires susceptibles d'émerger à l'école primaire :

T1 - Si C1 a autant d'éléments que C2 et C2 a autant d'éléments que C3, alors C1 a autant d'éléments que C3.

T2 - Si C1 a autant ou plus d'éléments que C2 et C2 a autant ou plus d'éléments que C3, alors C1 a autant ou plus d'éléments que C3.

T1 (resp. T2) est un théorème-en-acte qui correspond au théorème mathématique : la relation « avoir autant d'éléments que » (resp. « avoir autant ou plus d'éléments que ») est transitive.

TRANSIVITE ET SCHEME DU DENOMBREMENT

Nous revenons ici à l'école primaire pour mettre en lien la transitivité avec la mise en place du schème du dénombrement. La transitivité de la relation « avoir autant d'éléments ou plus d'éléments que » permet d'utiliser une collection intermédiaire lorsque la mise en œuvre concrète de la correspondance terme à terme n'est pas possible (par exemple, objets indéplaçables dans deux pièces différentes).

On se donne

- une collection C d'objets neutres (par exemples des jetons) de taille suffisante pour qu'on puisse toujours réaliser une mise en correspondance terme à terme avec les collections discrètes finies en jeu dans l'activité.
- C1 et C2 deux collections pour lesquelles on ne peut pas mettre en œuvre la correspondance terme à terme.

On fabrique une sous - collection de C

ayant la même taille que C1. On change de pièce et on compare ensuite cette sous-collection à C2. La transitivité de la relation permet de conclure.

Pour aller vers le schème du dénombrement, on remplace cette collection C d'objets neutres par la suite orale ordonnée des nombres entiers naturels (la comptine numérique). Cette suite est théoriquement non bornée, on peut donc avoir des sous-suites de taille aussi grande que l'on veut. Autrement dit, contrairement à ce qui se passe avec une collection donnée de jetons neutres, la taille des collections que l'on peut considérer n'est pas limitée a priori.

On voit apparaître de nouveaux invariants opératoires. Étant donné deux collections C1 et C2 :

Si le dernier mot nombre énoncé est le même pour les deux collections, elles ont la même taille.

Si le dernier mot nombre énoncé pour C2 est avant le dernier mot nombre énoncé pour C1 dans la comptine numérique, alors C2 a moins d'éléments que C1 (C1 a plus d'éléments que C2).

Si le dernier mot nombre énoncé pour C2 est après le dernier mot nombre énoncé pour C1 dans la comptine numérique, alors C2 a plus d'éléments que C1 (C1 a moins d'éléments que C2)

La taille d'une petite collection finie peut être repérée par le dernier mot nombre énoncé.

En effet, étant donné une collection discrète fini, le dernier mot nombre énoncé dans la mise en correspondance avec une sous-suite de la comptine numérique commençant à 1 caractérise la taille de cette collection et permet de répondre à la question : combien y a-t-il d'éléments dans cette collection ? (Concept-en-acte de cardinal).

Le passage d'un préordre à l'ordre associé sur l'ensemble quotient permet d'éclairer un peu différemment le schème du dénombrement : On peut interpréter le choix des sections commençantes de N comme collections de référence pour comparer la taille des collections comme le fait de choisir un représentant type pour les classes d'équivalence de la relation « avoir autant d'éléments que ».

On peut à partir de là définir une fonction de l'ensemble ordonné des classes d'équivalence (l'ensemble quotient) ainsi définies dans l'ensemble des entiers naturels qui à une classe d'équivalence donnée associe le maximum de la section commençante de N qui la représente. Ceci fournit par composition une fonction qui à une collection discrète finie associe le maximum du représentant de la classe à laquelle elle appartient. Le cardinal d'une collection discrète finie donnée est l'image de cette collection par cette fonction.

COMPARER LA TAILLE DES ENSEMBLES INFINIS

Nous retournons maintenant à l'université et nous nous intéressons à la comparaison de la taille des ensembles infinis.

Les objets sont les ensembles, finis ou infinis. La relation binaire considérée, notée

R est définie par :

A R B si et seulement s'il existe une injection de A dans B.

Cette relation est réflexive : étant donné un ensemble A, on définit l'application Identité de A dans A. Cette application est injective.

Cette relation est transitive :

Étant donné trois ensembles A, B et C et deux applications injectives f de A dans B et g de B dans C, l'application composée gof est une application injective de A dans C.

Elle n'est pas antisymétrique. De A R B et B R A, on déduit que A et B sont équipotents. Ils ne sont pas nécessairement égaux.

La relation R est un préordre.

Pour les ensembles finis, cette relation est identique à la relation « avoir autant d'éléments ou moins d'éléments que ». Dans ce cas, on a un protocole pour construire une injection. On peut lui associer la relation d'ordre sur les cardinaux finis.

Pour les ensembles infinis, ceci va permettre de définir les deux relations binaires ci-dessous :

« Avoir le même cardinal que »

« Avoir un cardinal supérieur strictement à »

Deux ensembles A et B ont le même cardinal si et seulement s'il existe une bijection de A sur B.

Le cardinal de A est supérieur strictement au cardinal de B si et seulement s'il n'existe pas d'injection de A dans B.

Exemple 1 : il existe une injection de N dans N x N et il existe une injection (une énumération) de N x N dans N. D'après le théorème de Cantor-Bernstein[3], ceci permet d'affirmer qu'il existe une bijection de N dans N x N.

Par définition, un ensemble dénombrable est un ensemble E tel qu'il existe une bijection de E dans N (il suffit de montrer qu'il existe une injection de N dans E et une injection de E dans N).

Exemple 2 : il n'existe pas de bijection (d'énumération) de l'ensemble R des nombres réels dans N.

Le cardinal de R est supérieur strictement au cardinal de N.

Plus généralement, d'après le théorème de Cantor, il n'existe pas d'injection de l'ensemble des parties d'un ensemble dans cet ensemble. On peut donc définir une suite ordonnée de cardinaux infinis.

CONCLUSION

Les analyses que nous avons présentées montrent qu'une première rencontre en acte avec la transitivité se fait dès les premiers apprentissages à l'école primaire ; elle est constitutive de la construction du nombre par le biais de la mise en place du schème du dénombrement. Le travail fait en amont de la mise en place du schème du dénombrement permet de ne pas réduire les relations de

3 Théorème de Cantor-Bernstein : Soit A et B deux ensembles non vides. S'il existe une injection f de A dans B et une injection g de B dans A, alors il existe une bijection de A sur B.

comparaison aux ensembles de nombres. Ceci est essentiel pour la suite du curriculum.

Le travail sur les grandeurs en amont de la mesure joue un rôle analogue pour les grandeurs continues (longueur, aire, capacité, volume) (BROUSSEAU, 2002).

Entre la maternelle et l'université les élèves rencontrent de nombreuses relations de préordre et d'ordre pour des objets de nature variées sans que celles-ci soient le plus souvent explicitées, si bien que les occasions de travailler les relations d'ordre et de préordre comme outil dans l'enseignement secondaire ne sont pas exploitées. On peut mentionner l'exemple de la définition des fonctions numériques croissantes qui met en jeu explicitement le concept d'ensemble ordonné comme couple entre un ensemble et une relation d'ordre ; dans la plupart des cas, l'ordre sur les ensembles de départ et d'arrivée n'est pas mentionné ; il reste à un niveau implicite. En outre, dès que l'on dispose de la caractérisation par le signe de la fonction dérivée, la question de l'ordre disparait. On peut aussi mentionner la définition des suites croissantes sous la forme

« Une suite numérique u est croissante si et seulement si pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$ ».

En général, le fait que cette propriété permet de prouver que la fonction associée à la suite est croissante au sens habituel pour les fonctions n'est pas traité. Or ceci met en jeu d'une part le fait que pour l'ordre standard, tout entier naturel à un successeur (il s'agit d'un ordre discret) et d'autre part la transitivité de la relation d'ordre.

Ceci ne favorise pas l'articulation entre connaissances opératoires et connaissances prédicatives qui vont être prédominantes à l'université, où les relations d'ordre et de préordre vont être étudiées pour elles-mêmes comme objet. Ce premier travail exploratoire montre que la transitivité est au cœur des relations de préordre et d'ordre. Il met en outre en évidence la nécessité de prendre en considération les relations de préordre dès lors que l'on veut comparer des collections d'objets autres que des sous-ensembles de nombres. Les relations de préordre jouent en cela un rôle important au sein du champ conceptuel de la transitivité, avec les concepts de grandeurs et de mesure, de relations d'ordre et d'équivalence, de correspondance biunivoque et de relation d'équipotence, de cardinal, d'inférence déductive, …).

Nous faisons l'hypothèse que bien qu'il y ait de nombreux objets dans l'enseignement secondaire permettant de conduire un travail opératoire sur l'ordre préparant les définitions prédicatives qui seront introduites à l'université, celui-ci n'est pas identifié dans les curriculums français, et par suite n'est pas conduit dans les classes.

Une étude écologique (ARTAUD, 1998) que nous envisageons devrait permettre d'identifier des niches et des habitats permettant de travailler en classe la relation de préordre et la transitivité, afin de pouvoir proposer des activités permettant de travailler la transitivité et les relations de préordre au collège au collège et au lycée.

R E F E R E N C E S

ARTAUD, M. Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. **Actes de la neuvième école d'été de didactique des mathématiques**. ARDM et IUFM de Caen, p. 101-139, 1998.

Brousseau, G. **La théorie des situations didactiques**. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998.

BROUSSEAU G. Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. Em: Dorier, J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.), **Actes de la XIe École d'Eté de Didactique des Mathématiques, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001**. Grenoble: La pensée sauvage, p. 331-348, 2002.

CAJORI, F. A History of Mathematics. **American Mathematical Soc**., v. 303, 1999.

DE MORGAN, A. On the Symbols of Logic, the Theory of the Syllogism, and in Particular of the Copula, and the Application of the Theory of Probabilities to Some Questions of Evidence. **Transactions of the Cambridge Philosophical Society,** v. 9, p.79, 1851.

DURAND-GUERRIER, V. Penser et organiser les relations entre abstrait et concret dans l'apprentissage des mathématiques de la maternelle à l'université – J. Pilet Julia & C. Vendeira (Eds.) **Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM**, IREM de Paris, p. 370-382, 2019.

HARRIOT, T. **Artis Analyticae Praxis**. Apud Robertum Barker, typographum regium, 1631.

HUNTINGTON, E. V. The Continuum as a Type of Order: An Exposition of the Modern Theory. **The Annals of Mathematics**, v. 6, n. 4, p. 151–84, 1905.

Martin, O. Mathématiques et sciences sociales au XXème siècle. **Revue d'Histoire des Sciences Humaines**, v. 6, p. 3-13, 2002.

PEIRCE, C. S. On the Logic of Number. **American Journal of Mathematics,** v. 4, n. 1, p. 85–95, 1881.

RUSSELL, B. L'idée d'ordre et La Position Absolue Dans L'espace et Le Temps. ***Bibliothèque Du Congrès International de Philosophie***, v.3, p. 241–77, 1901.

RUSSELL, B. On the Relations of Number and Quantity. **Mind,** v. 6, n. 23, p. 326–41, 1897.

RUSSELL, B. **Principles of Mathematics**, v. 1, University of Michigan Library, 1897.

SCHRÖDER, E. Sur Une Extension de L'idée d'ordre. **Bibliothèque Du Congrès International de Philosophie**, v. 3, p. 235–40, 1901.

TARSKI, A. **Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences**. Dover publication, New-York, 1995.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en didactique des mathématiques**, v.10, n. 2(3), p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Réponse de Gérard Vergnaud – M. Merri (Ed) **Activité humaine et conceptualisation. Questions à Gérard Vergnaud.** Presses Universitaire du Midi, Toulouse, p. 341-357, 2007.

WALLIS, J., **De Sectionibus Conicis Nova Methodo Expositis Tractatus**, 1655.