CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 135 – 158
ISSN 1983-7399

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Yves **MATHERON**,
Département IRES, Aix-Marseille Université.

La relativité institutionnelle des organisations mathématiques

The institutional relativity of mathematical organizations

RESUMÉ

Comment les mathématiques sont-elles organisées à chaque étape de leur transposition, didactique ou, plus généralement, institutionnelle ? Comment satisfont-elles les besoins associés aux tâches définitoires d'une institution donnée, quelle qu'elle soit ? Cet article montre, à partir d'un exemple, la nécessité de renoncer au point de vue selon lequel les objets mathématiques seraient intangibles, identiques à eux-mêmes, quels que soient les lieux, les époques et les institutions. Il montre, au contraire, la variabilité des organisations mathématiques concernant un même objet mathématique. Il s'agit du théorème qui, dans certains pays, porte le nom de Thalès. L'article s'intéresse, dans divers ouvrages, aux organisations mathématiques autour de ce qui peut être considéré comme le même théorème. Ces ouvrages révèlent l'assujettissement de leurs auteurs à diverses institutions, portant diverses questions. Ces institutions sont soit productrices de mathématiques, soit transpositives et noosphériennes, soit transpositives produisant des propositions d'enseignement. La méthodologie choisie est de type clinique. Les indices issus de l'observation sont confrontés aux cadres théoriques fournis par les mathématiques et la théorie anthropologique du didactique. Les ouvrages analysés vont des Éléments d'Euclide aux manuels « modernes », utilisant les notions d'espaces affines et vectoriels ainsi que des éléments d'algèbre linéaire.

Mots-clés : transposition, institution, relativité

Correspondance:

yves.matheron@free.fr

ABSTRACT

How is mathematics organized at each stage of its transposition, didactic or, more generally, institutional? How do they satisfy the needs associated with the defining tasks of a given institution, whatever it may be? This article shows, from an example, the necessity to give up the point of view according to which mathematical objects would be intangible, identical to themselves, regardless of places, times and institutions. It shows, on the contrary, the variability of mathematical organizations concerning the same mathematical object. It is the theorem which, in some countries, bears the name of Thales. The article is interested, in various works, in the mathematical organizations around what can be considered as the same theorem. These works reveal the subjection of their authors to various institutions, carrying various questions. They are either producers of mathematics, or transpositive and noospherical, or transpositive producing teaching proposals. The chosen methodology is of a clinical type. The evidence from observation is confronted with theoretical frameworks provided by mathematics and anthropological theory of the didactic. The works analyzed range from Euclid's Elements to "modern" textbooks, using the notions of affine and vector spaces and elements of linear algebra.

Keywords: transposition, institution, relativity

Reçu dans 08/10/2023
Approuvé en 08/11/2023

LA NOTION D'OEUVRE

La théorie anthropologique du didactique (TAD) fournit, comme toute théorie, un cadre pour la modélisation d'un système en vue de recueillir des connaissances sur celui-ci. Dans le cas de la TAD, ce système est constitué, au sein de la multitude des activités auxquelles s'adonnent les Hommes, du domaine de réalité qui relève *du* didactique. C'est-à-dire de l'ensemble des activités humaines qui portent l'intention de faire établir, évoluer, accroître, le rapport d'un individu ou d'une institution à une ou des œuvres, élaborées au fil du temps au sein des sociétés. Remarquons que l'intention peut évidemment être portée par et pour soi-même dans le cas de l'autodidaxie.

Par œuvre humaine on entend toute construction humaine, pérenne ou éphémère, banale ou d'importance, qui vise à répondre à une ou des questions portées par une ou des personnes, ou encore, ce qui est généralement le cas, par des institutions. Cette définition large de la notion d'œuvre dépasse le seul cadre de l'institution scolaire et déborde vers le champ de l'anthropologie.

À titre d'exemple, seront tout autant considérées comme des œuvres la réponse à la question de savoir pourquoi des objets tombent que la réponse fournie par un passant à un touriste égaré qui lui demande son chemin. La question de la chute des corps a reçu très tôt, d'Aristote, une réponse qui a durablement satisfait l'humanité. Elle a cédé la place à la théorie de la gravitation universelle avant que la théorie de la relativité générale fournisse à son tour une réponse qui la dépasse et l'englobe. Ainsi se construisent les réponses, scientifiquement fondées sur cet exemple, aux questions que se pose l'humanité.

Les mathématiques n'échappent pas au point de vue qui les considère comme des œuvres, élaborées au fil des millénaires par une multitude de personnes dont l'histoire a conservé quelques noms, en a oublié d'autres, et dont certaines sont toujours en construction. Ainsi en est-il de ce qu'on appelle communément une notion (nombre, vecteur, logarithme, etc.) ou de ce qu'on désigne du terme de domaine (calcul différentiel et intégral, topologie, théorie des nombres, etc.)

Une première série de questions peuvent être posées, depuis la TAD, à propos d'œuvres transposées. Lorsque dans le cas d'une transposition didactique, une instance donnée – programme, ministre, mathématicien, professeur, parent, etc. – déclare qu'une notion, en fait une partie d'une œuvre mathématique, est à étudier, c'est le plus souvent que, de son point de vue, elle répond à une question motivant ce choix. Cette question peut d'ailleurs être banale, portée par l'usage, la coutume ; une question non questionnée et oubliée en quelque sorte… Ce faisant, la réponse donnée est-elle seulement constituée d'une partie de l'œuvre telle quelle, ou bien d'une modification de l'œuvre afin que la réponse soit jugée plus adéquate à la question ? Y a-t-il alors, d'un point de vue extérieur, accord sur ce que recouvre cette notion, sur les organisations mathématiques identifiées comme propres à cette notion ? Comment ces réponses, en tant qu'œuvres ou parties d'œuvres, sont-elles organisées à chaque étape de leur transposition ? Et cela que cette transposition soit didactique ou institutionnelle, afin de satisfaire les besoins associés aux tâches définitoires d'une institution donnée, didactique ou professionnelle, nécessitant dans ce dernier cas l'usage de mathématiques ?

RELATIVITE DU SAVOIR SAVANT

Le savoir savant désigne ce qu'une ou des institutions, la société, considèrent comme tel. Poursuivant l'exemple de la chute des corps, l'Université qui l'enseignait au Moyen-Age considérait sans doute savante l'œuvre d'Aristote sur le mouvement naturel. Elle énonçait, entre autres, que les corps tombent à une vitesse proportionnelle à leur masse… On sait, depuis Galilée et Newton, que le savoir savant qui a pris pour nom *la physique*, a démontré fausse la proposition d'Aristote. Au-delà du caractère binaire vrai/faux qui peut lui être attaché, ce seul exemple suffirait à attester du caractère relatif, aussi bien dans ses dimensions temporelle, sociale, qu'épistémologique, de l'attribution de l'adjectif « savant » à une œuvre qu'une institution donnée, à un moment donné de son histoire, considère « bonne à savoir », et donc bonne à enseigner.

Dans ce sens, la notion de savoir *savant* « est une fonction, non une substance, et par rapport à quoi le didacticien doit expressément s'excentrer » (CHEVALLARD, 2007). Délaissant l'évocation de l'exemple venu de la physique et utilisé jusqu'ici, on se tourne désormais vers les mathématiques considérées « savantes ». Pour cela, il est nécessaire d'examiner leur fonction dans un cadre historique et institutionnel donné, ce qui permet de mettre en évidence le caractère relatif, et non pas absolu, des organisations mathématiques qu'elles contiennent. Deux œuvres, considérées « savantes » à leurs époques, serviront d'exemples. Ce choix permet ainsi de s'engager dans « l'excentration » à assigner à la notion de savoir savant, demandée aux didacticiens par Y. Chevallard.

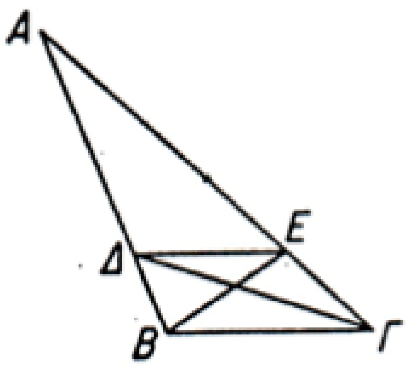
RELATIVITE DES MATHEMATIQUES SAVANTES: DEUX EXEMPLES

Les *Éléments d'Euclide* sont de nos jours considérés comme une œuvre exposant de manière rationnellement organisée les mathématiques savantes de leur époque. Ils furent utilisés comme ouvrage d'enseignement pendant des centaines d'années et jusqu'au XIX^{e} siècle. Ce qui signe, au passage, le caractère didactique des ouvrages considérés comme savants en mathématiques : ils sont porteurs de l'intention de faire connaître une partie du corpus mathématique, de son accroissement par l'apport de résultats nouveaux et d'organisations mathématiques jusqu'alors inédites. Il les expose, en principe depuis Euclide, de manière logique et linéaire.

Au sein des *Éléments* se trouve la proposition 2 du livre VI qui énonce que : « La parallèle à l'un des côtés d'un triangle détermine sur les autres côtés des parties proportionnelles ; et si une sécante coupe les deux côtés d'un triangle en parties proportionnelles, cette sécante est parallèle au troisième côté du triangle ». En France et dans certains pays, depuis la fin du XIX^{e} siècle, cet énoncé porte le nom de théorème de Thalès ; sans doute en référence à l'histoire qui voudrait que Thalès ait mesuré, grâce à cette propriété, la hauteur de la pyramide de Khéops. Au-delà de l'anecdote historique, ce théorème revêt un rôle important suivant l'exposition choisie pour les mathématiques dans la mesure où il lie géométrie et numérique.

Dans les *Eléments*, l'organisation mathématique exposée dans les livres qui précèdent autorise l'établissement des deux principaux piliers sur lesquels la propriété du livre VI repose. Il s'agit de la méthode des aires, exposée dans le livre I, et de la théorie des proportions attribuée à Eudoxe, contenue dans le livre V.

Figure 1 – La figure accompagnant la proposition 2 du livre VI



Source : KAYAS (1978)

On démontre ainsi que les triangles BΔE et ΓΔE étant égaux, on a :

(BΔE) ÷ (AΔE) = (ΓΔE) ÷ (AΔE).

Mais comme (BΔE) ÷ (AΔE) = BΔ ÷ ΔA et (ΓΔE) ÷ (AΔE) = ΓE ÷ EA,

on a : BΔ ÷ ΔA = ΓE ÷ EA.

La réciproque se démontre en « remontant » les égalités précédentes pour aboutir à l'égalité d'aires des deux triangles de même base, BΔE et ΓΔE. Ce qui prouve que leurs sommets B et Γ sont sur une parallèle à la droite (ΔE).

La méthode des aires et la théorie des proportions contiennent un grand nombre de propositions parmi lesquelles on peut sommairement en retenir deux qui jouent un rôle crucial pour la démonstration qui précède : l'égalité des aires de triangles de même base à sommets sur des parallèles à la base et l'évitement du problème des irrationnels par le recours à des proportions reposant sur les grandeurs (aires et longueurs) et non pas sur des nombres associés à leurs mesures. Telle est, sommairement résumée car l'exposé exhaustif supposerait que l'on revienne sur une grande partie des cinq livres des *Éléments* qui précèdent, l'organisation mathématique qui permet de faire advenir le théorème du livre VI.

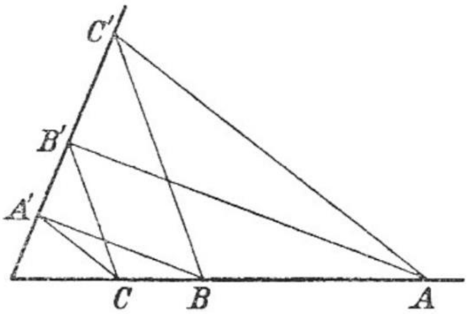
A deux millénaires de distance des *Éléments d'Euclide* paraît en 1899 l'ouvrage de David Hilbert sur la géométrie. Il est traduit en 1900 sous le titre *Les principes fondamentaux de la géométrie*, puis *Les fondements de la géométrie* pour la dizaine d'éditions qui suivront, intégrant annotations, variantes et compléments, dont certains rédigés par Hilbert lui-même.

En introduction, Hilbert énonce l'objet de son ouvrage : « Le présent travail est un nouvel essai de constituer, pour la géométrie, un système complet d'axiomes aussi simples que possible et d'en déduire les théorèmes les plus importants, de façon à mettre en évidence le rôle des divers groupes d'axiomes et la portée de chacun d'eux. » Au-delà de ce qui pourrait apparaître comme une modeste ambition il s'agit, rien moins, à partir de vingt axiomes répartis en cinq groupes, que de refonder de manière rigoureuse la géométrie telle qu'on l'a connue depuis Euclide.

Dans le chapitre III de cet ouvrage, consacré à la théorie des proportions, se trouve le théorème 42 que Hilbert qualifie de « théorème fondamental de la similitude ». Il énonce : « Si deux parallèles coupent sur les côtés d'un angle quelconque les segments *a*, *b* et *a'*, *b'*, la proportion $a : b = a' : b'$ est satisfaite. Réciproquement, si quatre segments *a*, *b*, *a'*, *b'* satisfont à la proportion ci-dessus et sont reportés sur les côtés d'un angle, les droites qui joignent les extrémités de *a* et de *b* à celles de *a'* et de *b'* sont parallèles. » On reconnaît là un énoncé du théorème de Thalès.

Pour établir le théorème, Hilbert s'appuie sur ce qu'il appelle « un cas particulier du théorème de Pascal sur les coniques », théorème désormais connu comme théorème de Pappus-Pascal dans sa version affine.

Figure 2 – La figure accompagnant le théorème de Pascal



Source : HILBERT (1899, éd. 1971)

Hilbert l'énonce ainsi : « Soient *A*, *B*, *C* et *A'*, *B'*, *C'*, deux groupes de trois points appartenant respectivement à deux droites concourantes et tous différents de l'intersection de ces droites ; si *CB'* est parallèle à *BC'* et *CA'* parallèle à *AC'*, *BA'* est parallèle à *AB'*. »

La démonstration du théorème de Pascal repose sur des résultats obtenus à partir de trois des huit axiomes d'appartenance portant sur droites et points, sur les quatre axiomes d'ordre qui, dit-il, « définissent le terme "entre" » et contiennent notamment l'axiome de Pasch, les cinq axiomes de congruence qui portent sur « l'égalité » des segments et des angles, et enfin sur l'axiome des parallèles (axiome d'Euclide). Hilbert utilise les congruences entre segments qu'il note αc comme on noterait le produit d'un angle, ou de son cosinus, et de l'hypoténuse dans un triangle rectangle. Les perpendiculaires issues du sommet *O* de l'angle aux segments [*B'C*] et [*C'B*] et aux segments [*CA'*] et [*BC'*] déterminent à leurs tours des triangles rectangles qui permettent d'établir la congruence de segments. Les propriétés de régularité, de commutativité, de transitivité, appliquées aux congruences permettent d'établir la congruence de [*BA'*] et de [*AB'*] et le fait qu'ils aient une perpendiculaire commune issue de *O* ; donc leur parallélisme.

Hilbert construit ensuite une structure algébrique que l'on reconnaît de nos jours comme étant un corps commutatif restreint aux positifs. Il indique que « le théorème de Pascal […] permet d'introduire, dans la géométrie, un calcul segmentaire pour lequel sont valables les règles de calcul avec les nombres réels. » L'addition est obtenue à partir de trois points alignés, *A*, *B* et *C* tels que *B* est situé entre *A* et *C* : $AC = AB + BC$. La multiplication est définie à partir du théorème de Pascal. Sur les côtés d'un angle droit sont portés les segments *a*, *b* et 1. Le segment obtenu sur un côté par intersection avec une parallèle est appelé *ab*. Le procédé s'inspire de celui mentionné par Descartes dans *La géométrie*.

Enfin, dans un paragraphe intitulé *Proportions et similitude*, après avoir mentionné que « le calcul segmentaire permet d'établir rigoureusement la théorie euclidienne des proportions et cela sans recours à l'axiome d'Archimède », Hilbert définit les notions de proportions des segments et de similitude des triangles. Il démontre que si deux triangles sont semblables alors leurs côtés homologues sont en proportion. La démonstration commence par l'étude du cas particulier du triangle rectangle. Le résultat est appliqué aux triangles rectangles obtenus en abaissant des perpendiculaires aux côtés d'un triangle quelconque, depuis le centre de son cercle inscrit.

L'énoncé du théorème 42, que nous identifions comme étant le théorème de Thalès (voir ci-dessus), est une conséquence de ce dernier théorème.

CONCLUSION TIREE DES DEUX EXEMPLES PRECEDENTS

Ces deux œuvres mathématiques majeures donnent à voir des organisations mathématiques différentes pour ce que nous continuons de considérer comme un même théorème, moyennant quelques variations dans son énoncé. Pour chacun de ces deux ouvrages la place manque ici qui exposerait en détail les chaînes constituées de divers types de tâches, techniques et éléments technologico-théoriques permettant d'aboutir au théorème de Thalès ; autrement dit, pour une entrée plus en détail dans l'organisation mathématique à partir de laquelle émerge le théorème.

Il faudrait pour cela citer l'ensemble des briques constitutives des techniques que sont les démonstrations et qui permettent d'obtenir de nouveaux éléments technologiques sous forme de théorèmes ; ces derniers servant à leur tour de briques pour de nouvelles techniques démonstratives aboutissant à de nouveaux éléments technologiques (théorèmes, définitions), et ainsi de suite, jusqu'à l'obtention du théorème.

On pourra objecter qu'il n'y a rien d'étonnant à observer des organisations mathématiques différentes : diverses raisons peuvent en effet être avancées. Par exemple la distance temporelle considérable entre les deux ouvrages : les connaissances mathématiques et le regard porté sur les mathématiques, leur épistémologie, se sont considérablement accrus et transformés en plus de deux millénaires. Ou encore que les finalités assignées à ces deux ouvrages, leurs fonctions, sont très différentes.

C'est précisément ce dernier point qui fonde la différence entre les organisations mathématiques exposées dans ces ouvrages. Au-delà des variations historiques liées à l'évolution du corpus mathématique « savant », elles sont les résultats de choix guidés par les questions que se posent leurs auteurs à partir des institutions auxquelles ils appartiennent : quelles sont les attentes et les questions du lectorat, y compris celles dont il n'a même pas idée ? Que lui faire connaître au-delà de ce qu'il connaît déjà ?

Pour l'un, il s'agit de consigner en les organisant logiquement la majorité des mathématiques produites durant une période de l'Antiquité, essentiellement Grecque, et pour l'autre de refonder la géométrie euclidienne à partir d'une axiomatique complète, en comblant pour cela les « oublis » et non-dits des *Eléments*, repérés par les mathématiciens au cours du XIXe siècle.

RELATIVITE DES ORGANISATIONS MATHEMATIQUES DE REFERENCE : DEUX EXEMPLES

On pourra avancer que les mathématiciens ont toute liberté pour exposer un résultat tel qu'un théorème, pourvu que l'exposé mathématique obéisse aux normes et à la logique en vigueur dans une communauté mathématique donnée ; ce qui permettra son évaluation et son acceptabilité si elle le souhaite. C'est, pour ce qui concerne les organisations mathématiques, ce que montre encore l'exemple suivant portant sur deux ouvrages plus récents que ceux précédemment cités, datant des années 1960 et 1980, et destinés à la formation des professeurs de mathématiques.

Ces deux livres portent explicitement l'intention de fournir aux professeurs, au cours de leur formation – et sans doute l'espèrent leurs auteurs, pour servir d'appui aux contenus d'enseignement qu'ils dispenseront – un modèle d'organisation mathématique de référence pour la géométrie. Tous deux s'ouvrent sur quelques pages explicitant en effet les intentions des auteurs. Nous y poursuivons l'étude de l'exposé des organisations mathématiques autour du théorème de Thalès.

Le premier de ces ouvrages, celui de Gustave Choquet intitulé « L'enseignement de la géométrie », date de 1964.

Il s'ouvre par un « avertissement » à destination de son lectorat : « Ce livre a été écrit pour les professeurs de mathématiques de l'enseignement du second degré, pour ceux qui se préparent à l'être et pour tous ceux qui aiment la géométrie. Il pourra aussi être utilisé avec profit par les élèves de 15 à 18 ans sous la direction de leurs maîtres. » L'expression « nos enfants » remplace dans une des phrases qui suivent « les élèves de 15 à 18 ans ». G. Choquet écrit : « J'ai pensé que nos enfants avaient besoin d'un exposé de la géométrie qui parte, comme chez Euclide, de notions tirées du monde sensible, mais qui leur permette d'utiliser très vite les outils souples et féconds de l'algèbre » ; en fait, il s'agit de l'algèbre des structures. Parler d'enfant laisse percevoir l'ampleur du projet de G. Choquet, courant des petites classes aux élèves de la fin de l'enseignement secondaire.

La date de parution, 1964, correspond aux décennies 1950 et 1960 durant lesquelles est remis en cause l'enseignement « classique » des mathématiques. La réforme dite « des mathématiques modernes », depuis l'école primaire jusqu'à la fin des études secondaires, et à laquelle s'est ralliée la majorité des systèmes éducatifs des pays développés, est alors en cours d'élaboration en France. Elle entrera en application quelques années plus tard.

Dans l'optique de ce changement majeur, G. Choquet avait déclaré, lors d'une réunion de l'Association des Professeurs de

Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP) en 1956, que les professeurs de mathématiques « sont des gardiens de musée, qui montrent des objets poussiéreux dont la plupart n'ont pas d'intérêt ». Dans l'introduction de l'ouvrage, il plaide alors en contrepoint de ce qu'il dénonce : « Notre faveur doit aller à des méthodes qui reposent sur les notions fondamentales que vingt siècles de mathématiques ont fini par dégager : notion d'ensemble, relations d'ordre et d'équivalence, loi algébrique, espace vectoriel, symétrie, transformations. » G. Choquet apparaît à cette époque comme un noosphérien militant, pour qui l'organisation mathématique de référence, sur laquelle s'appuie une transposition didactique de la géométrie, doit reposer sur l'algèbre linéaire.

L'exposé de la géométrie débute par la donnée du plan Π affine. Deux axiomes dits « d'incidence » permettent d'établir un certain nombre de propriétés : la relation d'équivalence de parallélisme sur l'ensemble des droites de Π, la définition et les propriétés de la projection oblique.

Les deux axiomes « d'ordre » qui suivent définissent pour l'un, deux structures d'ordre sur une droite, tandis que l'autre établit « une relation entre les structures d'ordre sur diverses droites ». Etant donnés deux parallèles et deux segments dont les extrémités sont sur ces parallèles, toute parallèle passant par un point d'un segment rencontre un point de l'autre. Est alors définie la convexité d'une partie du plan et établie la partition du plan par une droite en deux demi-plans convexes.

Le chapitre II qui suit est intitulé « Axiomes de structure affine ». Il débute par la définition d'une distance comme application de $\Pi \times \Pi$ sur $\mathbb{R}_{+}$. Cet axiome permet d'établir un isomorphisme entre toute droite orientée munie d'une origine et $\mathbb{R}$, de définir l'abscisse d'un point, la relation de Chasles, la structure d'espace vectoriel de dimension 1 d'une droite pointée, c'est-à-dire munie d'une origine, de définir translation et dilation sur une droite pointée, milieu d'un couple de points, division harmonique, homographie et involution sur une droite complétée par un point à l'infini.

L'axiome qui suit concerne la « relation entre les structures affines des diverses droites ». Il est équivalent à la conservation des milieux par projection, permet de définir le parallélogramme à partir du milieu des diagonales ainsi que la symétrie centrale.

G. Choquet considère ensuite ce qu'il appelle le plan pointé (Π, O) isomorphe à l'ensemble des vecteurs libres de Π. Il en démontre la structure de groupe commutatif lorsqu'il est muni de l'addition définie sur Π « par $(x, y) \to x \mathrm{T} y$ où $x \mathrm{T} y$ est le seul point z de Π tel que (O, x, z, y) soit un parallélogramme. » Comme la restriction de T aux droites passant par O (cas du parallélogramme aplati) est notée additivement, +, il est aussi décidé de la noter + dans (Π, O).

Ayant établi la structure de groupe commutatif de ((Π, O), +), afin de démontrer sa structure d'espace vectoriel lorsqu'il est aussi muni d'une multiplication par un scalaire, apparaît alors, sous forme de lemme, le théorème de Thalès. Il permet d'établir la propriété de « pseudo-distributivité » qu'il nomme relation (1) : il s'agit de $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$. G. Choquet écrit alors, p.

41 : « Pour démontrer la relation (1) nous aurons besoin d'un lemme qui n'est autre que ce qu'on appelle (en France) le théorème de Thalès.

Lemme 18.1. Soit D une droite passant par O ; δ une direction distincte de celle de D, et soit φ la projection oblique sur D parallèlement à δ.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \Pi$, on a

(5)$\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$. »

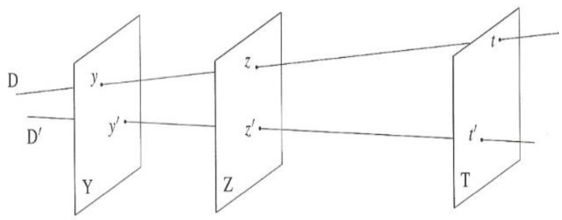
Le lemme est démontré sur les entiers, puis sur les rationnels en utilisant de manière classique $\frac{1}{n}x$. En introduction, Choquet avait considéré que le « calcul segmentaire permet de retrouver, mais bien péniblement, la structure de corps de l'ensemble des nombres à partir de la géométrie plane » ; une critique adressée au choix fait par Hilbert. Ayant donc décidé de s'en passer, ainsi que de l'axiome d'Archimède ou d'un autre axiome de continuité, Choquet étend la validité du lemme au cas où λ est irrationnel, « d'après une propriété du corps $\mathbb{R}$ que nous admettrons ici. »

En conclusion, c'est afin de définir le plan vectoriel, et notamment le premier des axiomes d'espace vectoriel portant sur la multiplication par un scalaire, qu'apparaît le théorème de Thalès dans l'ouvrage de G. Choquet. Il s'appuie sur la projection oblique d'une droite sur une autre selon une direction. Une fois encore, le théorème advient à partir d'un ensemble d'organisations mathématiques sur lesquelles il s'appuie. Elles diffèrent des organisations mathématiques « savantes » étudiées sur le même sujet dans les paragraphes de cet article qui précèdent.

Le deuxième des ouvrages étudiés, rédigé en 1988 par Claude Tisseron, s'intitule « Géométries affine, projective et euclidienne ». Il est lui aussi destiné à la formation des professeurs. Plus précisément, « aux étudiants du CAPES (Certificat d'Aptitude Professionnelle à l'Enseignement Secondaire) ou de l'agrégation – un concours de niveau supérieur –, ainsi qu'aux enseignants du secondaire qui s'intéressent à la géométrie » écrit son auteur. Il précise que « le cadre de cet ouvrage est celui de l'algèbre linéaire ». Le lecteur pourrait donc y trouver la même filiation que pour l'ouvrage de Gustave Choquet. Il s'en distingue cependant, comme on le verra dans les lignes qui suivent.

Une première distinction concerne l'énoncé du théorème de Thalès. Celui-ci est désigné comme tel p. 56, dans un paragraphe intitulé « 6. 4. 2. Théorème de Thalès (environ 600 avant J. C.) », au sein du sixième chapitre de la première partie consacrée aux espaces affines. Contrairement à l'ouvrage de G. Choquet, il est accompagné d'une figure.

Figure 3 – La figure accompagnant le théorème de Thalès



Source : Tisseron (1988)

« Soient *Y*, *Z*, *T* trois hyperplans distincts et parallèles d'un espace affine *X*.

a) Pour toute droite *D* non parallèle à ces hyperplans, le scalaire $\overline{yz}/\overline{yt}$ où $y = Y \cap D$,

$z = Z \cap D$, $t = T \cap D$ ne dépend que de Y, Z, T. On le note $\overline{YZ} / \overline{YT}$.

b) Si $z' \in D$ vérifie $\overline{yz'} / \overline{yt} = \overline{YZ} / \overline{YT}$ alors $z' = z$. ».

Une fois posés la direction F commune aux hyperplans Y, Z, T, une droite D' non parallèle à Y coupant Y, Z, T en y', z', t' et p le projecteur de l'espace affine X sur D' de direction F, la démonstration s'appuie sur la propriété d'endomorphisme (Tisseron écrit « linéaire ») du projecteur vectoriel noté $\vec{p}$ associé au projecteur affine p.

Ainsi p. 57 : « On a y' ∈ D' et $\overrightarrow{y'y} \in$ F ; donc, d'après 6.2.2.a. [unicité du projeté d'un point de l'espace affine sur un sous-espace dirigé selon son supplémentaire], on a y' = p(y). De même, on a z' = p(z) et t' = p(t).

Posons $\lambda = \overline{yz} / \overline{yt}$

On a : $\overrightarrow{y'z'} = \vec{p}(\overrightarrow{yz}) = \lambda \vec{p}(\overrightarrow{yt}) = \lambda \overrightarrow{y't'}$.

Donc $\lambda = \overline{y'z'} / \overline{y't'}$ ».

La démonstration du b), que l'on peut voir comme la réciproque du théorème direct de Thalès, tient en une phrase : « résulte de la bijection $x \to \overline{yx} / \overline{yt}$ de D sur K (2.6.1) » : (2.6.1) avait en effet montré l'unicité de l'abscisse d'un point d'une droite munie du repère (a, b).

Comme indiqué dans l'usage des notations figurant en début d'ouvrage : « Sauf mention contraire, la lettre K désignera toujours un corps commutatif dont le zéro et l'unité sont noté (sic) 0 et 1. »

En prenant ℝ pour corps commutatif, point besoin alors d'admettre – et c'est une autre distinction –, comme l'avait fait G. Choquet, le passage du rapport rationnel au rapport irrationnel et en ne démontrant le théorème que sur les rationnels. En effet, les différentes transformations vectorielles utilisées sont posées comme endomorphismes $\vec{f}$ d'un espace vectoriel E sur un corps commutatif K. C'est-à-dire qu'a été posé dès l'origine, $\vec{u}$ étant un élément quelconque de E, que $\forall \lambda \in K$:

$$\vec{f}(\lambda \vec{u}) = \lambda \vec{f}(\vec{u}).$$

La notation $\overline{YZ} / \overline{YT}$ est justifiée par la construction d'une relation d'équivalence sur l'espace affine X. Etant donné $x \in X$, la classe de x est l'hyperplan engendré par x et la direction F ; autrement dit l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{xy}$ de F. Tisseron montre que les classes d'équivalence ne dépendent pas de leurs représentants et que le groupe quotient X / F est un espace affine de direction $\vec{X} / F$. Comme F est un hyperplan, alors $\vec{X} / F$ est une droite vectorielle et X / F une droite affine. Ayant établi un isomorphisme entre la droite affine D et X / F, et du fait qu'une projection conserve les mesures algébriques, notamment celles définies par les points y, t et z de D, on a : $\overline{yz} / \overline{yt} = \overline{YZ} / \overline{YT}$.

C'est une autre caractéristique du livre que de considérer connues du lecteur un certain nombre des organisations mathématiques antécédentes – par exemple, comme ci-dessus, relations et classes d'équivalence – utilisées comme briques pour l'organisation mathématique aboutissant à l'énoncé du théorème de Thalès.

Contrairement à l'ouvrage de G. Choquet, ne sont pas construits la droite et le plan vectoriels ; la notion d'espace vectoriel sur un corps commutatif est supposée connue, de même qu'une bonne partie d'un corpus portant sur l'algèbre linéaire. Le livre s'attache plutôt, dans cette première partie, à l'espace affine associé à un espace vectoriel, à ses propriétés et aux applications affines. C'est ainsi qu'ayant défini les projecteurs affines, les symétries et établi le théorème de Thalès, il se poursuit par le groupe des homothéties-translations, les théorèmes de Ceva et Ménélaüs, Desargues et Pappus, les dilations et transvections.

CONCLUSION TIREE DES DEUX EXEMPLES PRECEDENTS

Les deux ouvrages, à propos desquels ce qui précède constitue une rapide étude limitée à un seul objet, s'adressent sensiblement au même public : celui d'étudiants et de professeurs de mathématiques. Les organisations mathématiques exposées et qui conduisent au théorème de Thalès diffèrent sensiblement pour diverses raisons qui tiennent aux différences historiques concernant les lectorats auxquels ils s'adressent.

Dans le cas du livre de G. Choquet, il s'agit de montrer à un public habitué à enseigner des mathématiques considérées « poussiéreuses » de l'aveu même de l'auteur, en quoi l'algèbre, la théorie des ensembles, permettent de dépasser ce cadre désuet et d'établir un enseignement moderne de la géométrie en accord avec ce que sont devenues les mathématiques savantes. L'exposé, qui permet d'avancer pas à pas dans la reconstruction des propriétés des objets élémentaires de la géométrie – droites, plans – à l'aide d'une construction rigoureuse, fournit à son tour une organisation mathématique de référence sur laquelle peut s'appuyer une transposition didactique « moderne » de la géométrie.

Dans l'autre cas, sont supposées connues ces mathématiques « modernes », notamment les bases de l'algèbre linéaire. C'est ce qu'indique C. Tisseron dès l'introduction : « Ici, nous introduisons la notion d'espace affine à partir de la notion d'espace vectoriel », dans une connivence partagée avec le lecteur qui sait ce que signifient ces termes.

Un quart de siècle s'est en effet écoulé entre la parution des deux ouvrages, durant laquelle une réforme a vu l'inscription d'une organisation mathématique « moderne » de la géométrie dans les programmes de l'enseignement secondaire.

L'environnement technologico-théorique qui associe le théorème de Thalès à la projection en tant qu'endomorphisme a, en un quart de siècle, changé d'habitat. On suivra, pour désigner cette migration, une écologie institutionnelle des savoirs (CHEVALLARD, 1994) où le terme d'habitat désigne le lieu de résidence de l'organisme ; ici une organisation mathématique.

De la construction proposée par G. Choquet – parmi d'autres à cette époque –, développant des organisations mathématiques de référence à destination d'un public de professeurs de mathématiques qui les découvraient, son habitat a pu, durant la décennie qui a suivi, migrer vers l'école via l'enseignement nouveau dispensé par des professeurs nouvellement formés. Cet enseignement a, en retour, modifié les rapports des élèves de manière à associer le théorème à la projection.

Par exemple, suivant l'entrée commune « par les projections » choisie dans les ouvrages cités, la transposition didactique à destination du programme scolaire de 1971, situé temporellement entre les dates de publication de ces deux ouvrages, a transformé le théorème de Thalès en axiome : celui de la conservation de l'abscisse par projection d'une droite graduée sur une autre. Ceux qui connaissent les mathématiques de ce niveau n'ont plus alors de peine à établir la proximité entre cet axiome et les énoncés sensiblement différents du théorème de Thalès dans les ouvrages de Choquet et de Tisseron. La proximité entre savoir transposé et savoir de référence destiné aux professeurs, garantie par des mathématiciens, assure leur reconnaissance institutionnelle ainsi que leur validité interne aux mathématiques.

Les mêmes questions, portées par leurs auteurs, sont toujours en filigrane à l'origine des ouvrages et formatent les réponses qu'ils donnent. A quel public est-il destiné ? Quelles sont les organisations mathématiques disponibles et utilisables, c'est-à-dire auxquelles les destinataires ont établi un certain rapport à l'issue des curriculums qu'ils ont antérieurement et personnellement vécus (CHEVALLARD, 2021) ? Quelles connaissances mathématiques nouvelles souhaite-t-on faire ainsi transmettre ? Quel nouveau rapport installer chez le lecteur et dans quel but ? La réponse à ces questions induit, comme on le voit, des types d'organisations mathématiques différentes pour le même objet mathématique.

Etudiant le processus de circulation des œuvres, mathématiques ou autres dans la société, la TAD est, dès le début de son élaboration, une théorie intégrant la dimension relativiste attachée aux œuvres. Les mathématiques portent la marque des institutions au sein desquelles elles naissent et dont les auteurs, qui en sont les sujets, apparaissent comme des vecteurs. Puis, lorsqu'elles s'en détachent, elles deviennent ce qu'en font les processus de transpositions institutionnelles et leurs agents. C'est ce qu' indique la postface à la deuxième édition de *La transposition didactique* (CHEVALLARD, 1991) où sont identifiés quatre grands types d' institutions dans lesquelles est « manipulé » le savoir : les institutions de production, d'utilisation, d'enseignement et de transposition. Cette relativité se retrouve dans les choix fluctuants des parties d'œuvres socialement désignées comme étant à enseigner, et donc dans leur transposition didactique, ou encore dans les objets résultant de la circulation des œuvres elles-mêmes. Il s'agit d'organisations didactiques, de savoirs enseignés, de rapports et de positions, qui conduisent à la relativité des points de vue portés sur ces objets par des institutions ou des personnes. Dans le cas des personnes, cette relativité est propre aux positions institutionnelles, c'est-à-dire à leurs fonctions, à ce qu'elles font avec le savoir, à ce qui leur est assigné depuis la place qu'elles occupent au sein des institutions.

C'est, poursuivant l'étude de la transposition didactique du théorème de Thalès que l'on a dû forcément limiter à quelques ouvrages, ce que montre l'analyse de sa place dans deux manuels à destination des élèves du second degré, en évoquant en arrière-plan un troisième, au sein d'un cursus où ils sont âgés de 13 à 15 ans.

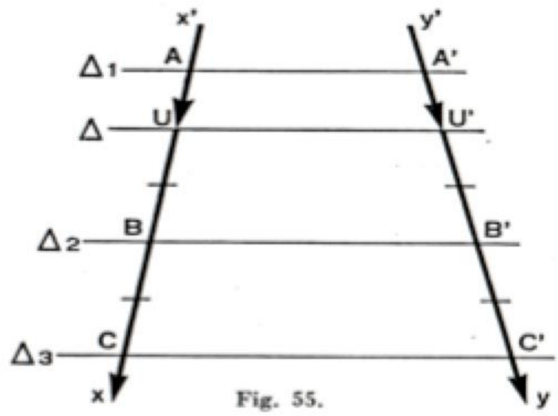
RELATIVITE DES ORGANISATIONS MATHEMATIQUES ISSUES DE TRANSPOSITIONS DIDACTIQUES: DEUX EXEMPLES

Le premier des manuels étudiés est celui de M. Monge et M. Guichan, édité en 1966 et intitulé Mathématiques 3e.

Lorsqu'on prend connaissance de la table des matières de ce manuel destiné à des élèves de 14 à 15 ans, ce théorème apparaît dans le chapitre II, intitulé *Le théorème de Thalès. Application au trapèze et au triangle*, de la deuxième partie consacrée à la géométrie plane. On pourrait alors penser que ce chapitre soit le seul concernant ce théorème parmi les neuf de géométrie plane ; il n'en est rien. L'analyse montre en effet qu'il interagit avec nombre des organisations mathématiques qui le précèdent ou le suivent dans l'ordre d'exposition du cours de géométrie. On se limitera à ce seul domaine, bien qu'il aurait sans doute fallu, parlant du théorème de Thalès, s'intéresser aussi au chapitre *Rapports et proportions* de la première partie, relative à l'algèbre.

L'énoncé du théorème est précédé de sa démonstration dans le cas rationnel, accompagnée d'une figure ; le cas irrationnel est admis. Il est rédigé de la manière suivante : « Si trois droites parallèles coupent deux droites, la première aux points *A*, *B*, *C*, la deuxième aux points *A'*, *B'*, *C'*, les vecteurs colinéaires ainsi déterminés vérifient l'égalité : $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'C'}}$ ».

Figure 4 – La figure accompagnant le théorème de Thalès



Source : MONGE & GUINCHAN (1966)

Sa démonstration dans le cas rationnel repose sur le théorème dit « des parallèles équidistantes » : des parallèles déterminant des segments égaux sur une sécante, déterminent des segments égaux sur toute autre sécante. Ce dernier résultat a été établi dans la classe du niveau précédent, un an auparavant, comme le montre la figure ci-dessous.

Figure 5 – La figure accompagnant le théorème des parallèles équidistantes

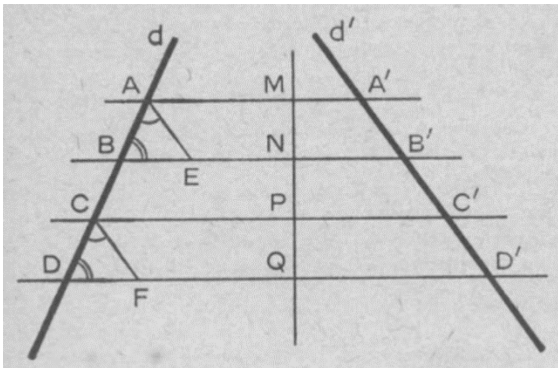


FIG. 71.

Source : MONGE & GUINCHAN (1965)

La démonstration, classique, repose sur le tracé de segments parallèles à la deuxième sécante à partir des points d'intersection de la première avec les parallèles. On obtient ainsi des parallélogrammes ; d'où l'égalité des segments déterminés sur la deuxième sécante. Auparavant ont été enseignés l'égalité des angles déterminés par une sécante avec deux parallèles, les cas d'égalité des triangles, les propriétés du parallélogramme, ingrédients technologiques nécessairement sollicités pour la démonstration.

Revenant à l'organisation mathématique autour du théorème de Thalès dans la classe où il est énoncé, théorème qui s'accompagne de la démonstration de sa réciproque, on peut relever que son énoncé utilise la notation ancienne du rapport de vecteurs. Le manuel a pris soin de préciser qu'une telle écriture n'est valide que pour des vecteurs colinéaires. Un chapitre précédant porte effectivement sur la colinéarité associée à la mesure algébrique ; cette dernière trouvant une application dans l'étude des points qui divisent un segment dans un rapport donné. De l'énoncé du théorème de Thalès découle son application au triangle et au trapèze, comme l'indique le titre du chapitre, mais aussi les propriétés des bissectrices intérieures et extérieures au triangle. Le chapitre se clôt par une partie consacrée à des travaux pratiques qui engagent les élèves dans la division d'un segment en segments de longueurs proportionnelles, la construction d'une quatrième proportionnelle, des calculs de longueurs. Ils sont suivis d'exercices et problèmes classiques utilisant les théorèmes direct et réciproque et proposant l'établissement du théorème de Ceva.

Après son énoncé et sa démonstration, le théorème de Thalès organise tout un pan du programme qui suit.

Ainsi en est-il du chapitre sur les triangles semblables. Il est amené par un chapitre de transition sur « les divisions semblables sur deux droites parallèles », en fait sur les triangles dits « homothétiques par le sommet », qui évoque les trois situations engageant le théorème de Thalès dans un triangle, selon les positions des parallèles par rapport à la base. L'homothétie débouche naturellement sur la notion de triangles semblables et sur les trois cas de similitude.

Le chapitre suivant est consacré aux *Relations métriques dans le triangle rectangle*. Celles-ci sont démontrées à l'aide de la similitude des triangles rectangles de côté la hauteur issue du sommet de l'angle droit avec ce triangle. Vient ensuite un chapitre intitulé *Notions de trigonométrie*. La similitude des triangles rectangles obtenus par projection orthogonale des côtés d'un angle sur l'autre permet d'y établir l'invariance des rapports définissant cosinus, sinus et tangente de l'angle. La similitude des triangles permet encore d'établir la puissance d'un point par rapport à un cercle dans le chapitre VII de géométrie. Enfin, revenant à la première partie de l'ouvrage intitulée *Algèbre*, le théorème de Thalès permet d'établir dans le chapitre *La fonction linéaire :* $x \to y = ax$, que la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite et que toute droite passant par l'origine, distincte des axes, est la représentation graphique d'une telle fonction.

L'analyse écologique du théorème de Thalès dans ce manuel, permet d'établir la fonction qui est la sienne relativement aux diverses organisations mathématiques qu'il irrigue ; soit ce que l'on nomme sa niche. Une analyse en termes de types d'organisations mathématiques éclaire la manière dont est organisée sa niche.

Pour cela, il faut ici rappeler quels sont les divers types d'organisations mathématiques en suivant les notations traditionnellement en usage en TAD : T désigne un type de tâches, τ la technique permettant d'accomplir T, θ l'élément technologique permettant de justifier, comprendre et produire la technique τ, Θ l'élément théorique qui joue auprès de la technologie θ le même rôle que θ auprès de τ. On obtient ainsi les notations des divers types d'organisations mathématiques.

Une organisation ponctuelle est relative à un seul type de tâches et se note $(T, \tau, \theta, \Theta)$.

Un même élément technologique θ peut engendrer, justifier et rendre compréhensibles plusieurs techniques associées à des types de tâches. C'est par exemple le cas d'un chapitre bâti autour d'un théorème. L'organisation mathématique est alors une organisation mathématique locale notée $(T_i\,;\,\tau_i\,;\,\theta\,;\,\Theta)$.

Un pas de plus autour de plusieurs éléments technologiques engendrés par le même élément théorique, et on obtient une organisation mathématique régionale, notée $(T_{ij}\,;\,\tau_{ij}\,;\,\theta_j\,;\,\Theta)$.

Enfin, un domaine, tel par exemple celui de la géométrie, correspond à une organisation mathématique globale et se note $(T_{ijk}\,;\,\tau_{ijk}\,;\,\theta_{jk}\,;\,\Theta_k)$.

L'organisation mathématique qui apparaît à l'analyse de ce manuel et concernant le théorème de Thalès Θ relève du type des organisations mathématiques régionales. Le théorème de Thalès joue le rôle d'élément théorique Θ qui engendre à son tour des éléments technologiques θ_j sous la forme de théorèmes organisant des chapitres. Le schéma suivant correspond à une analyse plus complète de ce manuel, et donne une idée de cette organisation :

Figure 6 – Schéma d'une organisation mathématique régionale autour du théorème de Thalès

$$\Theta \Rightarrow \theta_1 \Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{matrix} q_2 \Rightarrow q_3 \Rightarrow q_4 \\ q_2 \Rightarrow q_5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow q_6 \\ \\ q_2 \Rightarrow q_7 \\ q_2 \Rightarrow q_8 \end{cases}$$

$$\Theta \Rightarrow \theta' \Rightarrow \theta_9 \Rightarrow \theta_{10}$$

avec Θ : « théorème de Thalès », θ_1 : « triangles homothétiques par le sommet », θ_2 : « triangles semblables », θ_3 : « $AB^2 = BC.BH$ dans ABC rectangle en A », θ_4 : « théorème de Pythagore», θ_5 : « rapports trigonométriques d'un angle aigu », θ_6 :

« $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ », θ_7 : « puissance d'un point par rapport à un cercle », θ_8 : « rapports des aires de deux triangles semblables », θ' : « points homologues sur deux sécantes », θ_9 : « $y = ax$ est une droite », θ_{10} : « $y = ax + b$ est une droite »

Source : MATHERON (2000)

Les flèches d'implication indiquent une linéarité dans l'organisation de l'exposition du savoir qui, à son tour, induit une temporalité ; soit ce que l'on nomme une chronogenèse.

Le deuxième manuel est paru en 1978 dans la collection A. Mauguin et s'intitule lui-aussi Mathématiques 3e. Entre les éditions du manuel précédent et du manuel de 1978 étudié ici, le premier associé au programme de 1964 et le second à celui de 1978, la réforme des mathématiques modernes a donné naissance au programme de 1971 au sein duquel, on l'a dit, le théorème de Thalès apparaît comme un axiome.

On fera grâce au lecteur de la définition moquée de la droite euclidienne, considérée comme ensemble muni d'une famille de bijections sur ℝ, et sur laquelle l'axiome de Thalès s'appuie. L'axiome de Thalès est l'un des deux axiomes qui permettent de définir ce que le programme appelle « un plan réel » ; le premier des axiomes porte sur « la droite réelle ».

Un manuel en usage durant la réforme de 1971, de la collection de M. Queysanne et A. Revuz, énonce ainsi ce qu'il appelle l'axiome de Thalès en classe de 4e (élèves de 13 à 14 ans).

« Pour trois droites quelconques Δ, Δ' et Δ'' de ce plan telles que la troisième ait une direction distincte de celles des deux premières, si p désigne la projection sur Δ' parallèlement à Δ''.

Pour toute graduation g de Δ, (A, B) étant le repère de cette graduation :

L'abscisse dans la graduation g d'un point quelconque de Δ, est égale à l'abscisse de sa projection p(M) dans la graduation g' de repère (p(A), p(B)). »

Ce manuel explicite la définition : « L'axiome de Thalès se traduit par : pour tout point M de la droite Δ : $g'(p(\mathrm{M})) = g(\mathrm{M})$. »

A partir de 1978, un nouveau programme « de contre-réforme » entre en application en classe de 3e (élèves de 14 à 15 ans) dans lequel se retrouve le théorème désormais dénommé « propriété de Thalès ». Le manuel étudié, qui est publié en 1978, continue de l'appeler « théorème ».

Dans ce manuel, le théorème est énoncé sous la forme suivante :

« Soit une direction d et deux droites graduées D et D' n'appartenant pas à d. Quatre points A, B, M et N de la droite D se projettent en A', B', M' et N' sur la droite D', selon d.

Si le quotient de $\overline{\mathrm{MN}}$ par $\overline{\mathrm{AB}}$ est égal au réel k, alors le quotient de $\overline{\mathrm{M'N'}}$ par $\overline{\mathrm{A'B'}}$ est aussi égal à k.

Cela se traduit,

Soit par : si $\overline{\mathrm{MN}} = k\,\overline{\mathrm{AB}}$ alors $\overline{\mathrm{M'N'}} = k\,\overline{\mathrm{A'B'}}$.

Soit par $\dfrac{\overline{\mathrm{MN}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{M'N'}}}{\overline{\mathrm{A'B'}}}$ [le quotient des mesures algébriques de deux bipoints quelconques de D est égal au quotient des mesures algébriques de leurs projections sur D'] »

L'énoncé est accompagné d'une figure représentant les deux droites D et D', leur point d'intersection non représenté, les points sur D et D', la direction d et les droites (AA'), (BB'), (MM') et (NN') de directions d.

A la lecture de l'énoncé du théorème, on peut relever que subsistent de nombreuses traces du vocabulaire propre à la réforme des mathématiques modernes, associées à la formulation qui était celle du théorème avant cette réforme. Ainsi les termes de « direction », antérieurement définie comme classe d'équivalence de droites parallèles, de « bipoints » et de « projection » rappellent-ils le vocabulaire moderne. Ceux de « mesure algébrique » de même que l'écriture de rapports égaux rappellent, de leur côté, l'énoncé ancien, antérieur à la réforme des mathématiques modernes.

L'écriture $\overline{\mathrm{MN}} = k\ \overline{\mathrm{AB}}$ prépare, quant à elle, la notation vectorielle $\overrightarrow{\mathrm{MN}} = k\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ du chapitre suivant, consacré au produit d'un vecteur par un réel.

Sous cette forme, l'énoncé joue alors un rôle de transition entre d'une part l'ancien relativement éloigné, mais dont on peut considérer que perdure le souvenir dans le milieu enseignant – celui d'avant la réforme des mathématiques modernes – ; d'autre part avec l'ancien proche – celui de la réforme – ; et enfin avec l'avenir immédiat. Ce dernier se réalise dès les chapitres suivants ; tout d'abord, comme on l'a dit, dans le chapitre consacré au produit d'un vecteur par un réel. Il s'ouvre, une fois posée la définition donnée à partir de la mesure algébrique, sur la détermination du vecteur $\vec{W} = -\frac{7}{3}.\vec{U}$ qui équivaut à la construction du point M d'une droite (AB) tel que $\vec{W}$ a pour « représentant le bipoint (A, M) » et $\vec{U}$ a pour « représentant le bipoint (A, B) », comme l'écrit l'énoncé. La construction repose sur l'application du théorème de Thalès. Suit, dans ce chapitre, l'énoncé des axiomes du plan vectoriel, tandis que le chapitre qui lui succède est consacré au calcul vectoriel. On arrête en ce point l'analyse de l'organisation mathématique nourrie par le théorème de Thalès, dans laquelle on rencontre encore, en autres, la définition du cosinus, les relations métriques dans le triangle rectangle, etc.

CONCLUSION TIREE DES DEUX EXEMPLES PRECEDENTS

L'examen de ces deux manuels, évidemment destinés aux élèves du fait de leur fonction, permet d'envisager quel était, du point de vue de leurs auteurs, les *topos*, les places, envisagés pour les élèves et le professeur ; autrement dit la topogenèse potentiellement créée. Cela bien que nous ne disposions évidemment pas d'une observation *in situ*, à plusieurs décennies de distance, du déroulement effectif d'un cours de mathématiques s'appuyant sur ces ouvrages.

Le premier manuel, daté de 1966, se situe clairement dans le cadre classique de l'ostension assumée (BERTHELOT & SALIN, 1992). La place du professeur, son rôle, consiste à montrer le savoir : il enseigne, c'est-à-dire qu'il « signale, désigne » le savoir à étudier selon l'étymologie latine qui renvoie à *insignare*, *insignire***,** faire signe. Le professeur parle, lit, écrit le texte du savoir en s'assurant que les élèves qu'il interroge de temps en temps le notent, suivent le déroulement de l'exposé et commencent à établir un rapport personnel au savoir qu'il peut évaluer dans le courant de son action en classe ; ce qui lui permet de réguler la manière dont il parle et montre ce qu'il enseigne. Le *topos* du professeur contient, évidemment, l'engagement dans de nombreuses autres tâches spécifiques du métier, dont certaines relèvent aussi du rapport aux mathématiques : choisir les exercices à donner aux élèves, préparer et corriger des devoirs et évaluer les élèves, etc. Mais nous nous limitons ici à ce qui peut être seulement déduit de l'analyse des manuels.

De ce point de vue, le rôle des élèves est défini à partir des exercices et problèmes de fin de chapitre. Rechercher et rédiger les réponses pour certains d'entre eux désignés par le professeur, constitue l'une des tâches principales des élèves.

Avec la réforme des mathématiques modernes, est aussi entrée dans les classes la nécessité, proclamée par d'influents noosphériens, de faire davantage participer les élèves à la vie mathématique, notamment à partir de moments d'activités, de manipulations. Ainsi, une circulaire du ministère de l'Education Nationale datée du 22 novembre 1971 reprend-elle à son compte le point de vue d'un éminent mathématicien, Maurice Fréchet, afin de justifier le recours au caractère expérimental conduisant à la modélisation du monde physique à l'aide d'une axiomatique. La circulaire mentionne ainsi : « Il serait essentiel, comme l'écrivait M. Maurice Fréchet […]

- "de faire vérifier expérimentalement sur un ou deux exemples que les relations rigoureuses entre certains éléments de la théorie ne sont pas vérifiées rigoureusement par les objets concrets correspondants"
- "de constater cependant qu'elles le sont approximativement" »

Ce qui se traduit, dans un manuel de la classe de 4e (élèves de 13 à 14 ans), par la description de ce que verraient les élèves s'ils venaient à manipuler des objets du monde physique : que par deux points ne peut passer qu'une règle sauf à la tordre, qu'en faisant coulisser une équerre le long d'une règle, on obtient des parallèles, etc. Les auteurs du manuel de 1971 peuvent alors se permettre d'écrire, suivant la circulaire citée : « nous venons de constater expérimentalement un certain nombre de propriété du "*plan physique*" […] »

Suivant cette direction, dans ce manuel, le chapitre sur « l'axiome de Thalès » débute par une activité au sein de laquelle les élèves ont à constater, à partir d'une figure préalablement dessinée, que des points d'abscisses entières se projettent sur une deuxième droite en des points de même abscisse lorsqu'on prend pour repère sur la seconde le projeté de celui de la première.

A partir de la contre-réforme qui succède, l'idée d'élargir le *topos* des élèves au-delà de leurs tâches d'entraînement dans des exercices et problèmes, fait son chemin. Elle passe par ce que Berthelot & Salin (1992) ont désigné du terme « d'ostension déguisée ». Le professeur continue à montrer aux élèves le savoir mais tout en déguisant cette ostension par des questions auxquelles les élèves répondent. Elles sont le plus souvent insignifiantes, de faible qualité épistémologique, indiquant les réponses attendues, mais font vivre en classe l'illusion que les élèves sont auteurs du savoir.

C'est le cas du manuel de 1978 où le chapitre sur le « Théorème de Thalès » s'ouvre par une « étude préparatoire » qui aboutit à l'écriture du théorème sous la forme si $\overline{MN} = k\ \overline{AB}$ alors $\overline{M'N'} = k\ \overline{A'B'}$. Assez significativement du ctype d'enseignement basé sur l'ostension déguisée, qui n'en est qu'à ses débuts et que ne maîtrisent pas encore bien les auteurs de manuels, cette « étude préparatoire » contient à la fois les questions auxquelles devraient répondre les élèves, mais aussi leurs réponses. Elles consistent à constater le théorème dans les cas où $k = 3$ et $k = \frac{5}{3}$. Ce qui signe la difficulté des auteurs de manuels à concevoir d'authentiques activités de recherche, contenant une dimension adidactique, et dans lesquelles engager les élèves ; difficulté récurrente qu'on peut continuer d'observer dans les manuels actuels. Elles nécessiteraient, au minimum, d'avoir analysé les rapports antérieurs des élèves à certains objets, à partir de leur curriculum effectivement vécu, afin qu'ils puissent disposer d'un milieu permettant l'attaque de questions. Autrement dit, l'analyse des manuels met en évidence une absence de culture théorique en didactique chez leurs auteurs, dont on peut continuellement mesurer les conséquences à travers leurs propositions d'enseignement que ces manuels promeuvent.

UN POINT METHODOLOGIQUE

Les analyses qui précèdent reposent sur divers documents : programmes, circulaires, écrits et déclarations de certains mathématiciens, ouvrages, manuels. La recherche documentaire qui a tout d'abord été menée, a permis de constituer une base de matériaux empiriques à partir desquels l'analyse a pu être conduite. Une fois réalisée une recherche documentaire orientée dans le but d'y trouver diverses formulations du théorème de Thalès, la méthodologie s'est attachée à l'observation des différents types d'organisations mathématiques autour du théorème. Pour aller plus avant, il a alors fallu choisir un méthodologie de type clinique. En didactique, et contrairement à la clinique telle qu'elle a pu se développer dans d'autres champs où l'étude est celle du sujet en tant que personne singulière, on souhaite étudier en premier lieu les institutions (LEUTENEGGER, 2009). Dans cet article, il s'agit d'une clinique portant sur des parties d'institutions au sein desquelles « vit » un certain savoir. Que la clinique s'intéresse aux personnes ou aux institutions, elle s'attache au recueil, non exhaustif par nature, de traces ou symptômes. Faute de pouvoir s'engager dans l'observation *in vivo*, il s'agissait pour cet article du recueil de documents jugés *a priori* susceptibles d'éclairer la question étudiée ; ce que soulignent Luvezute Kripka, Scheller, Lara Bonotto (2015). Les traces à rechercher se trouvent dans les documents choisis, dont le nombre est forcément limité, mais considérés comme représentatifs : qu'ils soient savants, ayant joué un rôle transpositif majeur à partir d' organisations mathématiques de référence, ou de manuels scolaires fortement connectés à un programme. Dans un second temps les traces recueillies depuis l'observation des ouvrages choisis deviennent des indices du phénomène que l'on souhaite observer.

Pour cet article, ce phénomène concerne la relativité institutionnelle du savoir. C'est un phénomène général dont on ne montre ici qu'un exemple à partir d'un cas particulier. Les indices recueillis, issus de traces qui ne peuvent être exhaustives – par exemple, on ne sait pas comment les professeurs ont pu utiliser les manuels, comment ils ont poursuivi la transposition didactique, quels choix d'exercices et de problèmes ils ont pu faire – sont examinés, afin d'aboutir à des résultats, à la lumière des cadres théoriques choisis. Dans ce cas, les cadres sont constitués à la fois des mathématiques, de la connaissance historique du contexte dans lequel des mathématiques ont pu émerger, et de la théorie anthropologique du didactique (TAD). Certaines des notions que la TAD a développées en tant qu'outils sont utilisées lorsque rendues nécessaires au fur et à mesure de l'avancée dans l'analyse.

Les contenus qui précèdent montrent, à travers divers ouvrages, sept formulations différentes de ce que certains lecteurs identifieront comme étant toujours relatives au même objet mathématique. L'exposition a volontairement suivi un ordre chronologique ; non pas pour s'attacher à une progression du simple au complexe : les ouvrages de Hilbert ou de Choquet sont là pour le démentir. Il s'agit plutôt d'inscrire ces formulations différentes dans les mouvements de l'histoire des mathématiques et de la transposition d'objets, afin d'établir ce que peuvent dire ces ouvrages des questions qui traversèrent des institutions, et dont on peut retrouver des traces à l'analyse clinique.

Pour une personne, reconnaître un même objet – le théorème de Thalès – sous ces diverses formulations, présuppose l'établissement préalable d'un rapport personnel à des organisations mathématiques du domaine de la géométrie à partir du curriculum qu'elle a personnellement vécu (CHEVALLARD, 2021). Cela est notamment vrai pour les exposés de Hilbert, Choquet et Tisseron qui font appel à des organisations mathématiques référant aux géométries affine, pour certaines vectorielle et s'inscrivant dans l'algèbre linéaire, situées de nos jours à la charnière entre enseignements secondaire et supérieur.

Pour cette même personne rapportant ces diverses formulations à celle, classique, du théorème dans les *Eléments d'Euclide* – un triangle et l'égalité de rapports de longueurs pour des segments sur deux côtés coupés par une parallèle à la base –, la reconnaissance de l'objet nécessite aussi une mise à distance subjective, voire une dénégation, des transpositions institutionnelles.

Les formulations différentes du théorème de Thalès, propres aux ouvrages étudiés dans cet article, s'insèrent dans un ensemble d'organisations mathématiques elles-aussi différentes car sollicitées pour construire des réponses aux questions portées par leurs auteurs. Plus précisément, ces questions ont été partagées, et donc légitimées, par les institutions dont certains de leurs rédacteurs ont été parfois des membres éminents : on ne s'autorise que rarement de soi-même, ne serait-ce que pour pouvoir être édité…

CONCLUSION GENERALE

Les formulations différentes du théorème s'inscrivent dans l'aboutissement des organisations mathématiques qui les précèdent et de celles à venir, dont le théorème contribuera à la production. D'où, par exemple, la construction antécédente d'un demi corps commutatif à partir du calcul segmentaire dans *Les fondements de la géométrie* de Hilbert. De même, chez cet auteur, de l'affirmation selon laquelle le théorème est « le théorème fondamental de la similitude » ; de son utilisation pour les équations de droites ; de l'appui sur le calcul segmentaire et « le théorème de Pascal » pour la théorie des aires. A ce propos Hilbert écrit : « cette construction de la théorie des aires me paraît une des plus remarquables applications du théorème de Pascal à la géométrie élémentaire. »

On l'a dit, la question traitée par Hilbert est celle d'une reconstruction de la géométrie d'Euclide obéissant à un système d'axiomes complets. Elle est portée par tout un courant de mathématiciens dans lequel se trouve Pasch dès 1882, dont les résultats sont utilisés par Hilbert lui-même en 1899. Au moment où Hilbert rédige ses *Fondements*, le problème du manque de rigueur des organisations mathématiques contenues dans les *Eléments d'Euclide* pose ainsi question aux membres de ce qu'on peut désigner du terme « d'institution des mathématiciens du XIXe siècle ». Ce manque nécessite une reprise. De telles questions s'inscrivent alors dans un mouvement plus vaste, qui touche aux fondements des mathématiques elles-mêmes : *Arithmetices principia : nova methodo exposita*, ouvrage dans lequel se trouve une axiomatisation de l'arithmétique, a été publié par Peano en 1889, dix années avant les *Fondements de la géométrie*.

L'ouvrage de Choquet s'inscrit quant à lui dans le mouvement qui porte et institue la réforme de l'enseignement des mathématiques à venir : celle des « mathématiques modernes ». On connaît l'un des mots d'ordre ironiquement lancé en 1969 par Jean Dieudonné, du groupe Bourbaki : « A bas Euclide ! A bas le triangle ! » Pour ce mouvement, la théorie des ensembles et l'algèbre linéaire constituent l'infrastructure à partir de laquelle la géométrie doit être enseignée, puisqu'il en est ainsi au sein des mathématiques savantes.

A ce titre, bouleversant l'organisation ancienne de l'enseignement de la géométrie telle qu'on peut la trouver dans le manuel de Monge et Guinchan de 1966, l'ouvrage de G. Choquet se définit comme organisation mathématique globale *de référence* pour le domaine de la géométrie.

Une organisation de référence trouve place, dans la chaîne de la transposition didactique, entre savoir savant – dans ce cas celui qui considère les géométries euclidienne, vectorielle, projective, comme résultant naturellement de l'action d'un groupe sur un ensemble – et savoir désigné comme étant à enseigner, par exemple comme celui qu'on peut trouver dans l'écriture d'un programme. Choquet se situe dans deux institutions : à la fois comme mathématicien et noosphérien.

- Comme mathématicien lorsqu'il écrit : « Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace), est de le définir comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, à deux (ou trois) dimensions, muni d'un produit scalaire […] C'est aussi la définition qui se prête le mieux à des généralisations fécondes (espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, espaces de Hilbert, etc.) »

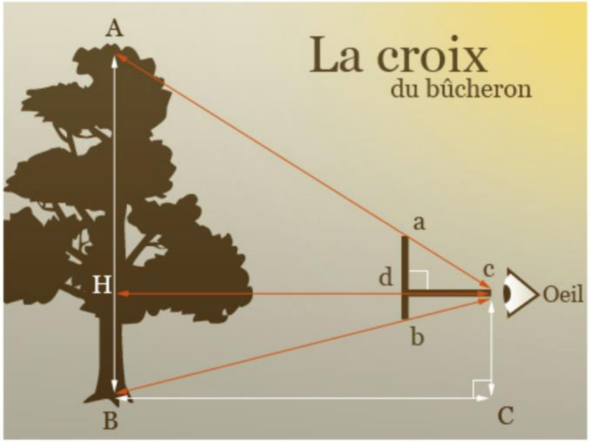
- Comme noosphérien lorsqu'il énonce : « Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation […] »

Organisations mathématiques de référence et organisations mathématiques à enseigner résultent toutes deux de transpositions institutionnelles, didactiques sur les exemples issus des ouvrages étudiés. Dans un premier temps, pour construire une organisation de référence, la chaîne transpositive va du savoir savant vers un savoir intermédiaire. Dans un second temps, depuis ce savoir intermédiaire au sein duquel certains éléments serviront de référence pour une noosphère travaillant à une transposition, la chaîne continue vers des propositions d'organisations mathématiques à enseigner. Le manuel de Queysanne et Revuz, datant de 1971 et de la réforme des mathématiques modernes, s'inscrit, lors d'un troisième temps, dans la suite du processus de transposition didactique. Il intègre, comme on l'a vu, un certain nombre des contraintes exposées dans l'ouvrage de Choquet : par exemple, « partir de l'observation » à travers des expériences que le manuel décrit lui-même.

Jusqu'à présent, l'exemple concernant le théorème de Thalès voulait montrer la relativité institutionnelle des organisations mathématiques dans lesquelles il est pris à l'issue de processus de transpositions essentiellement didactiques. Mais comme on sait, ce théorème a connu, au cours de l'histoire, des applications utiles à la mesure de distances inaccessibles.

L'un des objets permettant ces mesures est, ce que l'on appelle en France, « la croix du bûcheron ». Il s'agit d'un outil rudimentaire constitué de deux barres de bois d'égales longueurs disposées à angle droit. Lorsqu'une personne debout, tenant horizontalement une barre, aligne d'une part le sommet de l'arbre qu'il vise avec l'extrémité supérieure de la barre verticale et, d'autre part, le pied de l'arbre avec l'extrémité inférieure de la barre verticale, alors la hauteur de l'arbre est égale à la distance qui sépare cette personne du pied de l'arbre. La démonstration de ce résultat nécessite d'appliquer successivement deux fois le théorème de Thalès dans l'épure modélisant la situation ; ce que demandent de prouver, à titre d'exercice, certains manuels scolaires.

Figure 7 – Schéma représentant l'estimation de la hauteur d'un arbre à l'aide de la croix du bûcheron



Source : Association A.R.B.R.E.S.

Délaissant temporairement l'aspect didactique de la situation évoquée, il s'est agi de transposer, depuis le savoir mathématique vers une institution utilisatrice de mathématiques – qu'on appellera « l'institution des bûcherons » –, via une institution intermédiaire dédiée à la production d'objets comme la croix du bûcheron, une organisation mathématique dont certains traits sont cristallisés dans l'objet même. Cela afin de répondre à une question revêtant une importance institutionnelle certaine : comment estimer la hauteur d'un arbre avant de l'abattre ?

REFERENCES

BERTHELOT, R. ; SALIN, M.–H. **L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire**. 1992. 1 v. 529 p. thèse - Université de Bordeaux I, Bordeaux, 1992.

BIANCAMARIA, P. ; DEHAME, E. ; KERAMBI, G. **Mathématique, série rouge, 4e**. collection Queysanne-Revuz, Fernand Nathan : Paris, 1971.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. 2e éd. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1991.

CHEVALLARD, Y. Les processus de transposition didactique, **La transposition didactique à l'épreuve**, G. Arsac, Y. Chevallard, J.-L. Martinand, A. Tiberghien (Éds), Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 135-180, 1994.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. **Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico,** In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éds.), Jaén : Universidad de Jaén, p. 705-746, 2007.

CHEVALLARD, Y. La question curriculaire à la lumière de la TAD : défigement praxéologique et questionnement du monde. **Nouvelles perspectives en didactique : le point de vue de l'élève, questions curriculaires, grandeurs et mesure,** In Chaachoua & al. (Eds), Grenoble : La Pensée sauvage éditions, p. 93-111, 2021.

CHOQUET, G. **L'enseignement de la géométrie**. Paris : Hermann, 1964.

FAUVERGUE, P. ; JEANMOT, J. ; RIEU, R. **Mathématiques 3e.** Collection A. Mauguin, Paris : Istra, Editions Casteilla, 1978.

HILBERT, D. **Les fondements de la géométrie**. Paris : Dunod, 1971.

KAYAS, G-J. **Euclide. Les éléments.** volumes 1 et 2, Paris : éditions du CNRS, 1978.

LEUTENEGGER, F. Le temps d'instruire : approche clinique et expérimentale du didactique ordinaire. Berne : Peter Lang, 2009.

LUVEZUTE KRIPKA, R-M. ; SCHELLER, M. ; LARA BONOTTO, D. Pesquisa Documental : considerações sobre conceitos e características na Pesquisa Qualitativa, **Investigação Qualitativa em Educação**, v. 2, Porto Editora, Portugal, p. 243-247, 2015.

MATHERON, Y. Analyser les praxéologies. Quelques exemples d'organisations mathématiques, **Petit *x***, v. 54, Grenoble : IREM de Grenoble, p. 51-78, 2000.

MONGE, M. ; GUINCHAN, M. **Mathématiques 3e**. Paris : Librairie Belin, 1966.

TISSERON, C. **Géométries affine, projective et euclidienne**. Paris : Hermann, 1988.