CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 159 – 175
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

La dualité savoir-connaissance dans la théorie des espaces de travail mathématiques

The knowledge duality in the theory of mathematical working spaces

Alain **KUZNIAK**[1]
Université Paris Cité LDAR, F-75013 Paris, France.
Elizabeth Montoya **DELGADILLO**[2]
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chile.
Laurent **VIVIER**[3]
Université Paris Cité, Univ Paris Est Créteil, CY Cergy Paris Université, Univ. Lille, Univ Rouen, LDAR, F-75013 Paris, France.

Correspondance:

[1]alain.kuzniak@u-paris.fr
[2]elizabeth.montoya@pucv.cl
[3]laurent.vivier@u-paris.fr

RESUMÉ

Le point de départ de cet article est une distinction simple entre savoir et connaissance : une connaissance est spécifique d'un individu, comme un étudiant, alors qu'un savoir est dépersonnalisé, comme dans des programmes d'enseignement d'un système éducatif. Nous développons cette distinction entre savoir et connaissance à travers la théorie des Espaces de Travail Mathématique (ETM). Cette théorie a pour ambition de caractériser le travail mathématique attendu ou réalisé par un individu en prenant en compte des aspects épistémologique et cognitif ainsi que trois dimensions : sémiotique, instrumentale et discursive. Des exemples sont proposés en analyse, au Chili et en France. Dans un premier temps, on définit l'ETM personnel d'un individu en le reliant à la notion de connaissance. Puis, on définit l'ETM de référence d'un système éducatif en le reliant à la notion de savoir. Ces deux types d'ETM proposent ainsi un éclatement des notions de savoir et connaissance, tout en mettant en évidence la dualité du couple savoir-connaissance. Enfin, la notion d'ETM idoine relie les deux précédents afin de rendre fonctionnelle cette dualité.

Mots-clés: savoir et connaissance, travail mathématique, espace de travail mathématique.

ABSTRACT

This paper starts with a simple distinction between two French perspectives given on knowledge: The first is specifically linked to an individual, such as a student, whereas the second is depersonalized and associated with an educational system through a curriculum. We develop this distinction between both aspects through the theory of Mathematical Working Spaces (MWS). The objective of this theory is to define and characterize the mathematical work expected or performed by an individual. It takes into account the epistemological and cognitive aspects of mathematical work which are organized in different MWSs through three dimensions: semiotic, instrumental and discursive. First, we define the personal MWS associated with an individual and it is related to the first aspect of knowledge. Secondly, the reference MWS, associated with an educational system, is introduced and linked, by contrast, to the second aspect of knowledge. The personal and reference MWSs ensure both the dissociation and the duality of the knowledge through its two aspects. Finally, thanks to the idoine MWS which articulates and adjusts the two previous MWSs, we show how it is possible to make the duality of knowledge functional. Various examples in Chile and France, in particular using the exponential function, are given to highlight and illustrate the theoretical development.

Keywords: Knowledge, mathematical work, Mathematical Working Space.

Reçu dans 09/10/2023
Approuvé en 09/11/2023

INTRODUCTION

Nous nous intéressons à la distinction entre savoir et connaissance dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Du point de vue langagier, cette distinction est également usuellement exprimée en espagnol avec *saber* et *conocimiento*. En allemand, il y a trois termes *wissen* et *kennen*, pour rendre compte de savoir et connaissance et *erkennen* qui assure la relation dynamique entre les deux premiers. Mais cette distinction ne se retrouve pas en anglais, même si l'on peut utiliser les deux termes *knowledge* et *knowing* pour en rendre compte. Toutefois, l'idée de différencier les mathématiques d'une personne et les mathématiques comme discipline dépersonnalisée se retrouve chez Tall et Vinner (1981) avec les constructs de *concept definition* et *concept image* de Tall et Vinner (1981). De fait, l'intérêt de ces divisions conceptuelles n'a de sens que si l'exploration des tensions et des oppositions qui peuvent exister entre ces termes débouchent sur des créations intéressantes pour l'éducation mathématique.

La didactique des mathématiques distingue depuis longtemps savoir et connaissance. Cette différenciation n'est pas uniforme et différents points de vue existent avec la volonté de mettre en évidence une dualité.

La Théorie des Situations Didactiques (TSD) considère cette dualité comme un couple indissociable en interaction :

> Les connaissances sont les moyens transmissibles (par imitation, initiation, communication, etc.) mais non nécessairement explicitables, de contrôler une situation […]. La connaissance ou la reconnaissance n'est pas analysée mais exigée comme une performance relevant de la responsabilité de l'acteur.
>
> Le savoir est le produit culturel d'une institution qui a pour objet de repérer, d'analyser et d'organiser les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage sous forme de connaissance ou de savoir, et la production de nouveaux savoirs. Dans certaines situations (d'action de formulation ou de preuve) le même résultat peut être le fruit d'une connaissance de l'acteur ou le fruit d'un savoir ou les deux. (Brousseau & Centeno, 1991, p. 176)

Si le **savoir** existe dans une institution, c'est parce qu'il a été rencontré comme une connaissance en situation. Le processus de transformation qui légitime le savoir dans une institution est l'**institutionnalisation**. De même, le **savoir** peut se transformer en connaissance à travers de nouvelles situations.

La **connaissance** est ce qui permet l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu lorsqu'il s'engage dans une situation (LAPARRA & MARGOLINAS, 2010). Margolinas (2014) précise :

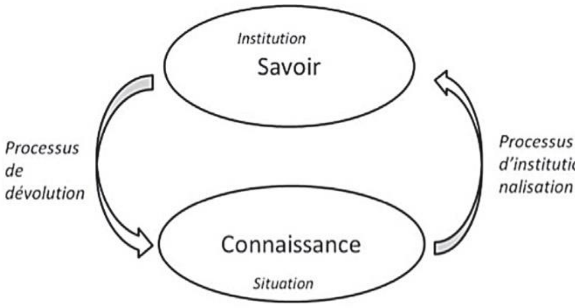
> Un savoir est une construction sociale et culturelle, qui vit dans une institution (Douglas, 2004) et qui est par nature un texte (ce qui ne veut pas dire qu'il soit toujours matériellement écrit). Le savoir est dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé, il est formulé, formalisé, validé et mémorisé. (MARGOLINAS, 2014, p.15)

Ainsi, dans la TSD[1], la **connaissance** est

1 Voir également l'article de Margolinas et Bessot (2023) de ce numéro spécial.

relative à une situation alors que le **savoir** est relatif à une institution (figure 1).

Figure 1 – Savoir et connaissance



Source : MARGOLINAS (2014, p.15)

Dans la théorie Anthropologique du Didactique, et plus précisément pour la transposition didactique, la notion importante est le savoir comme le précise Bosch et Chevallard (1999) :

Le savoir mathématique, en tant que forme particulière de connaissance, est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions. (BOSCH & CHEVALLARD 1999, p. 83)

Conne développe une posture particulière dans le cadre de la transposition didactique :

D'un côté, la situation est inductrice de connaissance ; d'un autre côté, la connaissance permet d'agir sur la situation. Le processus décrit est donc bouclé du moment où une connaissance induite transforme la situation, qui à son tour induit d'autres connaissances, qui à leur tour… Lorsque le sujet reconnait le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, *il sait*. « *Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation* » (CONNE, 1992, p. 234).

Il précise alors que « le *savoir est une connaissance qui contrôle une situation et ses transformations* » (CONNE, 1992, p. 240). Conne parle alors de transposition de savoir, lorsqu'un savoir passe d'une situation à une autre en conservant son caractère transformateur de la situation, et considère que « l'enseignement est une entreprise délibérée de transmission des savoirs » (CONNE, 1992, p. 243).

On retrouve, chez Conne comme en TSD, le rôle crucial de la situation pour les connaissances en centrant le propos sur le sujet, mettant ainsi en avant un point de vue cognitif.

Pour nous, le savoir réfère à une institution, ou une organisation d'enseignement, et la connaissance à un sujet, une personne. Cette distinction simple est efficace pour prendre en compte la dualité des mathématiques dans leur pratique ordinaire : un ensemble structuré d'axiomes, définitions, théorèmes, propriétés, etc. – qui a été élaboré par des mathématiciens puis dépersonnalisé – qui doit être appris et utilisé par des personnes. Ces deux aspects des mathématiques ne sont pas équivalents et le couple savoir/connaissance signale cette dissociation.

Dans la théorie des ETM, la distinction entre ces deux aspects des mathématiques est également prise en considération mais elle n'y est pas formulée en termes de savoir et de connaissance. La théorie des ETM a pour objectif d'identifier et d'analyser le travail mathématique, qu'il soit développé par une communauté scientifique, ou scolaire, ou effectué par un étudiant, éventuellement guidé par un enseignant. Dans la théorie des ETM, les aspects épistémologiques, garants d'une consistance mathématique du travail, sont pris en compte. Il en est de même des aspects cognitifs, pour tenir compte du fait que le travail est effectué par un sujet. Trois dimensions du travail, cruciales en mathématiques, sont considérées : sémiotique, instrumentale et discursive. La notion d'Espace de Travail Mathématique permet d'articuler ces trois dimensions avec les deux aspects (épistémologiques et cognitifs). Associée à d'autres outils, elle permet de distinguer le travail mathématique à un niveau institutionnel du travail mathématique effectué par une personne.

Si les savoirs et les connaissances sont bien pris en compte dans les ETM, la théorie se démarque d'autres approches dans le sens où la prise en compte du travail mathématique nécessite, en plus de la dissociation savoir/connaissance, un *éclatement* de ces deux notions qui se trouve réalisé dans la structuration spécifique des ETM.

La théorie des ETM se propose de développer les constructs théoriques et les outils méthodologiques permettant d'aborder trois questionnements didactiques relatif au travail mathématique en contexte scolaire ; sa description, sa caractérisation et son évolution. Dans cette contribution, nous ne présentons pas en détail tous les outils théoriques qui structurent la théorie des ETM (KUZNIAK et al. 2016 ; 2022), tout en donnant au lecteur, au fil du texte, les éléments nécessaires pour comprendre le propos. Nous avons choisi d'aborder notre sujet à partir de la question de l'activité mathématique d'un sujet (élève ou étudiant) en situation d'apprentissage. Cette activité est contrainte par un certain nombre de déterminants et cela nous conduit à introduire l'idée de travail mathématique pour rendre compte des nécessités et des attentes qui entourent cette activité. Après avoir précisé cette idée de travail mathématique et sa structuration dans les ETM, nous présenterons la notion d'ETM personnel qui prend en compte la notion de connaissance pour un sujet. Dans la section suivante, nous introduirons la délicate notion d'ETM de référence, qui place la question des savoirs du côté du système éducatif. Les ETM personnel et de référence permettent alors de préciser le couple savoir-connaissance.

La dernière section relie les deux types d'ETM précédemment introduits et interroge la pertinence des systèmes éducatifs : comment faire pour qu'un individu apprenne les mathématiques souhaitées par une institution éducative ? Cette question peut se reformuler ainsi dans la théorie des ETM : comment l'ETM personnel d'un individu peut-il évoluer pour être en adéquation avec l'ETM de référence ? C'est toute la question de l'enseignement effectif par des enseignants qui doivent organiser et faire évoluer le travail mathématique de leurs étudiants en tenant compte des attentes et contraintes institutionnelles. La notion d'ETM idoine aborde cette question à partir de l'élaboration d'un ETM spécifique qui doit assurer le rapprochement entre l'ETM personnel, en le faisant évoluer, et l'ETM de référence. L'ETM idoine permet de rendre fonctionnel le couple savoir-connaissance en mettant en évidence leur dualité.

TRAVAIL MATHEMATIQUE

Prendre comme entrée le travail mathématique met l'accent sur l'activité humaine qui produit un certain *travail*. Ce dernier peut être considéré comme processus ou comme produit – effectif ou attendu – de ce processus. L'étude du travail suppose la considération de trois aspects relatifs à son développement :

- Des buts qui orientent et donnent un sens à l'ensemble des actions produites par le sujet.
- Des mises en œuvre qui dépendent de contraintes et passent par la reconnaissance et la maîtrise de procédures standards et régulées.
- Des produits ou des résultats qui doivent avoir une validité mathématique.

Il est alors important d'identifier les éléments qui entrent en jeu dans ce travail, en retenant la spécificité des mathématiques. Dans ce cadre, on s'intéresse aux éléments tangibles, ceux qui laissent des traces externes, des observables. Pour approfondir ces questions méthodologiques, nous renvoyons à Gómez-Chacón et Nechache (2022).

La visée de la théorie des ETM est de rendre compte du travail mathématique : que voit-on lorsqu'un sujet fait des mathématiques ou quand on ouvre un manuel ou un traité de mathématiques ?

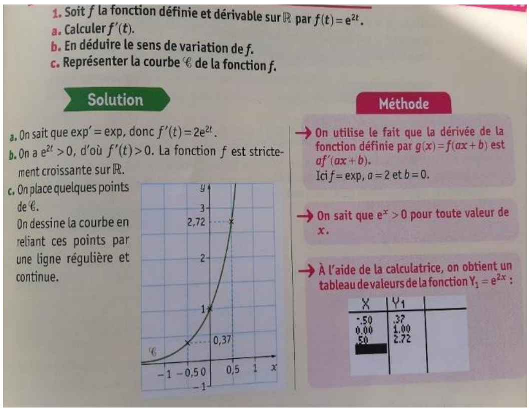
Les premiers éléments qui ressortent sont constitués des signes utilisés en mathématiques ainsi que des instruments comme le compas, l'équerre, la calculatrice, l'ordinateur, etc. Ces derniers, qui caractérisent d'ailleurs souvent cette discipline dans le monde extra-mathématique, sont des objets fabriqués par l'homme que l'on appelle artefacts. Mais si l'on adopte le point de vue du mathématicien, on découvre aussi des propriétés, des théorèmes, définitions, etc. qui sont maniés dans ce travail mathématique. On constate aussi que certains processus sont quasi-automatique ou routinier comme un calcul de la somme de deux entiers ou d'une dérivée.

L'extrait de manuel de la figure 2 propose un exercice corrigé type et montre le travail attendu actuellement au niveau de la classe de première (16-17 ans, Grade 11) en France dans l'option spécialité mathématiques. On y voit parfaitement bien les trois types d'éléments que nous venons de signaler :

- Les signes, avec par exemple « $f'(t)=2e^{2t}$ », « exp » ou encore « **R** », une courbe ou une table de valeurs ;
- Les artefacts, avec la calculatrice ;
- Les propriétés, notamment avec les encadrés de droite (dérivée d'une composition et signe de l'exponentielle), mais aussi dans la rédaction de la solution comme la dérivée de l'exponentielle (Solution de la question a).

Il est à noter que le calcul de la dérivée s'effectue en référence à la propriété de la dérivée d'une composée – premier encadré « Méthode » – et, à ce stade de l'enseignement, ne constitue pas encore un algorithme routinisé que l'on considère comme un artefact symbolique.

Figure 2 – Exercice corrigé.



1. Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = e^{2t}$.
a. Calculer $f'(t)$.
b. En déduire le sens de variation de f.
c. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.

Solution

a. On sait que $\exp' = \exp$, donc $f'(t) = 2e^{2t}$.
b. On a $e^{2t} > 0$, d'où $f'(t) > 0$. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
c. On place quelques points de $\mathscr{C}$.
On dessine la courbe en reliant ces points par une ligne régulière et continue.

Méthode

→ On utilise le fait que la dérivée de la fonction définie par $g(x) = f(ax + b)$ est $af'(ax + b)$.
Ici $f = \exp$, $a = 2$ et $b = 0$.

→ On sait que $e^x > 0$ pour toute valeur de x.

→ À l'aide de la calculatrice, on obtient un tableau de valeurs de la fonction $Y_1 = e^{2x}$:

X	Y1
-.50	.37
0.00	1.00
.50	2.72

Source: TRANSMATH PREMIERE (2019, p. 145)

D'autres éléments pourraient être considérés, notamment liés aux contextes de réalisation du travail mathématique, comme les interactions ou les émotions (GOMEZ-CHACON & al., 2016). Sans les éliminer, la théorie des ETM se limite aux précédents qui sont organisés en trois composantes : le representamen pour les signes utilisés en mathématiques, le référentiel théorique pour les propriétés et définitions mathématiques, et les artefacts, qu'ils soient matériels, comme le compas ou la calculatrice, ou symboliques, comme l'algorithme de calcul des racines d'une équation quadratique (voir FLORES, GAONA, & RICHARD, 2022).

Dans une première approche, on pourrait dire que le référentiel théorique, avec les théorèmes et définitions, est constitué des savoirs et connaissances mathématiques. Néanmoins, il est à souligner le fait que d'autres savoirs ou connaissances, plus sémiotiques et instrumentales certes, sont à l'œuvre dans le travail mathématique et peuvent être considérés comme des savoirs, ou connaissances, mathématiques. On peut par exemple penser à la visualisation d'un système de deux équations à deux inconnues où l'on peut exprimer (facilement) une inconnue en fonction d'une autre pour se ramener, après substitution, à la résolution d'une équation à une inconnue.

Ainsi, dans la théorie des ETM, il y a une prise en compte de différents types de savoirs et connaissances, sans hiérarchie. Par ailleurs, la théorie des ETM s'intéresse explicitement au fonctionnement dans le travail mathématique de ces différents types de savoirs et connaissances. Elle privilégie l'étude de leur organisation et de leur usage dans l'effectuation du travail.

La première notion d'ETM a été introduite en géométrie avec la notion d'Espace de Travail Géométrique, ETG, par Houdement et Kuzniak (2006). Elle permet une approche du travail mathématique en considérant les liens entre les trois composantes que nous avons rappelées. La notion d'ETM a été ensuite complétée avec une extension à d'autres domaines mathématiques (KUZNIAK, 2011). Nous les abordons à la section suivante à travers l'ETM d'un individu.

ETM PERSONNEL ET CONNAISSANCES

Dans le cas du travail mathématique personnel, la tension qui existe entre l'activité du sujet et le travail qu'il est censé produire est au cœur de la dualité entre connaissance et savoir. Pour la décrire et la comprendre, la théorie des ETM insiste sur les deux aspects constitutifs du développement du travail d'un sujet : un plan épistémologique et un plan cognitif.

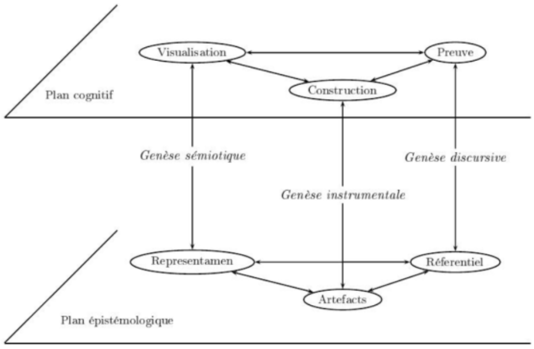
Avant de préciser ces deux plans, notons que l'ETM personnel d'un sujet peut témoigner d'éléments épistémologiques mal construits ou de processus cognitifs inadaptés. Par ailleurs, le travail mathématique d'un sujet n'est pas un donné déjà-là. Au contraire, il est le fruit d'un développement personnel encadré par l'institution scolaire. Le rôle des deux autres types d'ETM introduits dans la théorie (l'ETM de référence et l'ETM idoine, voir les sections suivantes) sera d'en assurer la régulation et la progression éventuelle.

Le plan épistémologique a été décrit à la section précédente avec le representamen, les artefacts et le référentiel théorique. Pour un individu, il s'agit de *connaissances* qu'il peut mettre en fonctionnement pour effectuer un certain travail. Toutefois, ces *connaissances* ne disent rien de la manière dont cet individu peut s'en servir, comment il les met en fonctionnement, comment il les combine. Il met alors en œuvre des processus cognitifs spécifiques que l'on peut également interpréter comme des connaissances.

Pour cela, et plus spécifiquement, chacune des trois composantes épistémologiques est associé à un processus cognitif. Les trois processus ainsi définis constituent un plan cognitif. Cet ensemble de relations et d'interactions entre les plans épistémologique et cognitif peut être visualisé par un diagramme (Figure 3) qui met en évidence trois dimensions, chacune avec une composante épistémologique et un processus cognitif :

- Dimension sémiotique : representamen-visualisation ;
- Dimension instrumentale : artefact-construction ;
- Dimension discursive : référentiel théorique-preuve.

Figure 3 – Diagramme des ETM.



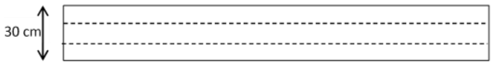
Source: KUZNIAK (2011, p. 20)

Chaque élément du diagramme précédent peut être interprété comme une connaissance pour un individu. C'est pourquoi nous avançons l'idée d'un *éclatement* de la notion de connaissance dans la théorie des ETM, avec une prise en compte de connaissances de natures différentes en jeu dans le travail mathématique : des connaissances d'ordre épistémologique, d'autres d'ordre cognitifs permettant la mise en fonctionnement des précédentes, mais aussi des connaissances sur les relations entre les différentes composantes de l'ETM, et notamment les relations binaires entre composante épistémologique et processus cognitif associé définissant trois *genèses* qui permettent des dynamiques d'apprentissage.

La théorie des ETM s'intéresse explicitement à l'organisation et à la gestion du fonctionnement dynamique de ces *connaissances* pour caractériser le travail mathématique nommé personnel lorsqu'il est effectué par un individu.

Intéressons-nous à l'étude de la tâche, nommée « la gouttière », qui a été proposée à différentes populations, et dont sont extraits les productions (figures 4a, 4b et 4c) de trois professeurs des écoles en formation initiale. Voici l'énoncé donné :

On dispose de plaques rectangulaires en métal de largeur 30 cm et de grande longueur. On replie perpendiculairement les bords de chaque côté pour fabriquer une gouttière (selon les pointillés sur la figure ci-dessous). Pour des raisons évidentes, les deux rebords latéraux de la gouttière ont la même dimension.



Trouver comment replier la plaque pour obtenir une gouttière qui a un débit maximum.

Figure 4a – production de E1

possible. On étudie la fonction :

S(x) = x × (30 − 2x)

= 30x − 2x²

x →
30-2x →
x →

il s'agit d'un polynome du second degré dt la parabole est tournée vers le bas (coeff dominant négatif)

En dérivant cette fonction et en résolvant S(x) = 0, on obtient donc le maximum.

→ car changement signe dérivée ⇒ inversion pente.

$S'(x) = 30 - 4x$

$S'(x) = 0 \rightarrow 30 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{30}{4} = 7{,}5$

Donc on replit les côtés pour avoir $x = 7{,}5$ cm.

En figure 4a, on voit un travail dans un ETM des fonctions, ou du *calculus*, avec les signes usuels (x, $S(x)$, $S'(x)$), des éléments du référentiel théorique (fonction, polynôme du second degré, parabole, théorème d'optimisation) ainsi que l'artefact symbolique de la dérivation des polynômes (c'est un calcul routinisé, non problématique, pour E1) ainsi que celui de l'optimisation d'une fonction (parfois appelé « critère de la dérivée seconde »). Il en est de même de la résolution d'une équation du premier degré ou du calcul 30/4=7,5. On identifie donc des connaissances d'ordre sémiotique, dans différents registres (des fonctions, algébrique, fractionnaire, décimal), d'ordre théorique et d'ordre instrumental avec les artefacts symboliques utilisés.

Figure 4b – Production professeur E2

On va chercher le debit maximal de la gouttière

Dmax = L × ℓ × h

Dmax = (30 − 2x) × 10 × x.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Dmax	280	520	720	880	1000	1080	1120	1120	1080	1000	880	720

x	13	14	15
Dmax	520	280	0.

On remarque que le debit maximal est atteint pour un rebord compris entre 7 et 8 cm.

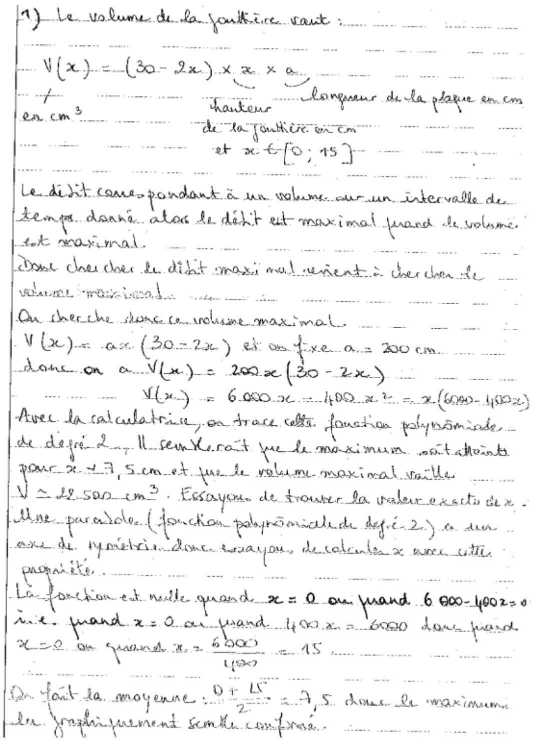
x	7	7,1	7,2	7,3	7,4	7,5	7,6	7,7	7,8	7,9	8
Dmax	1120	1121,8	1123,2	1124,2	1124,8	1125	1124,8	1124,2	1123,2	1121,8	1120

Pour avoir un debit maximal, les bords doivent mesurer 7,5 cm chacun.

En revanche, en figure 4b, on voit un tout autre travail menant à la même solution. Il y a une expression algébrique sans qu'il soit explicitement fait mention de fonction même si l'on voit une table de valeurs (l'expression « Dmax » utilisée par E2 désigne-t-il une fonction, une grandeur, une variable ou une inconnue ?). Les signes sont différents, notamment la double table de valeurs, le référentiel théorique mobilisé également, essentiellement numérique. Du point de vue instrumental, on peut également penser que la calculatrice est utilisée pour effectuer les calculs, contrairement à l'étudiant de la figure 4a. On identifie encore des connaissances d'ordre sémiotique et instrumental, quoique différentes de E1. En revanche, contrairement à E1, il n'y a pas de connaissance d'ordre théorique sur les fonctions.

La production de la figure 4c est intéressante car, outre qu'elle propose un travail différent, elle permet de bien montrer la circulation du travail dans l'ETM. On parle de circulation pour mettre en évidence la dynamique du travail mathématique en précisant l'activation des éléments du diagramme. En particulier, on utilise [Sem], [Ins] et [Dis] pour préciser l'activation principale d'une dimension, et [Sem-Dis], [Sem-Ins] et [Ins-Dis] lorsque deux dimensions sont activées de manière indissociable. Ces notations rendent compte de l'utilisation de connaissances d'ordre sémiotique, discursive et instrumental.

Figure 4c – Production professeur E3



1) Le volume de la gouttière vaut :

$V(x) = (30-2x) \times x \times a$

en cm^3 — hauteur de la gouttière en cm et $x \in [0 ; 15]$ — longueur de la plaque en cm

Le débit correspondant à un volume sur un intervalle de temps donné alors le débit est maximal quand le volume est maximal.

Donc chercher le débit maximal revient à chercher le volume maximal.

On cherche donc ce volume maximal.

$V(x) = ax(30-2x)$ et on fixe $a = 200$ cm

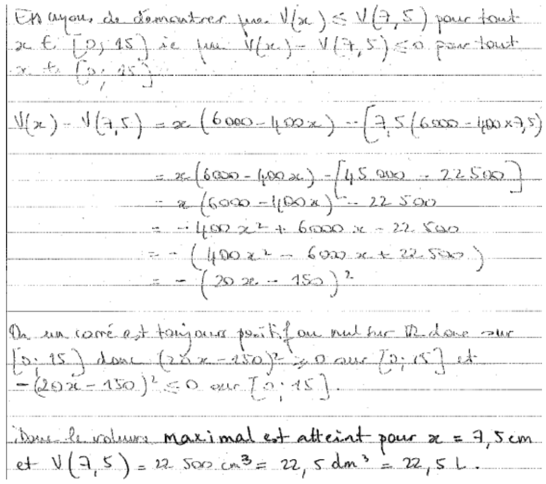
donc on a $V(x) = 200x(30-2x)$

$V(x) = 6\,000x - 400x^2 = x(6000-400x)$

Avec la calculatrice, on trace cette fonction polynômiale de degré 2. Il semblerait que le maximum soit atteint pour $x \approx 7,5$ cm et que le volume maximal vaille $V \simeq 22\,500$ cm^3. Essayons de trouver la valeur exacte de x. Une parabole (fonction polynômiale de degré 2) a un axe de symétrie donc essayons de calculer x avec cette propriété.

La fonction est nulle quand $x = 0$ ou quand $6\,000 - 400x = 0$ i.e. quand $x = 0$ ou quand $400x = 6000$ donc quand $x = 0$ ou quand $x = \frac{6\,000}{400} = 15$

On fait la moyenne : $\frac{0+15}{2} = 7,5$ donc le maximum [illegible] graphiquement semble confirmé.



Essayons de démontrer que $V(x) \leq V(7,5)$ pour tout $x \in [0 ; 15]$ i.e que $V(x) - V(7,5) \leq 0$ pour tout $x \in [0 ; 15]$

$$V(x) - V(7,5) = x(6000-400x) - [7,5(6000-400 \times 7,5)]$$
$$= x(6000-400x) - [45\,000 - 22\,500]$$
$$= x(6000-400x) - 22\,500$$
$$= -400x^2 + 6000x - 22\,500$$
$$= -(400x^2 - 6000x + 22\,500)$$
$$= -(20x - 150)^2$$

Or un carré est toujours positif ou nul sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0 ; 15]$ donc $(20x-150)^2 \geq 0$ sur $[0 ; 15]$ et $-(20x-150)^2 \leq 0$ sur $[0 ; 15]$.

Donc le volume maximal est atteint pour $x = 7,5$ cm et $V(7,5) = 22\,500$ cm^3 $= 22,5$ dm^3 $= 22,5$ L.

Après la première expression de la fonction V(x), E3 effectue des traitements algébriques menant à des expressions différentes de V(x) [Sem]. Puis, la calculatrice est utilisée pour construire la courbe de V [Ins], qui est explicitement reconnue comme une fonction polynomiale de degré 2 (référentiel théorique). Les nouveaux signes sont visualisés [Sem] pour produire une réponse [sem-Ins] qui est considérée comme une conjecture [Dis]. Cette conjecture est justifiée deux fois [Dis]. D'abord avec la propriété de symétrie des fonctions quadratiques [Dis]. Dans un second temps, il y a l'expression variationnelle de l'optimum [sem-dis] suivi d'un traitement de l'expression V(x)–V(7,5) [Sem] menant à la factorisation en un carré. Ce dernier étant positif [Dis], la conclusion suit.

Ainsi, selon le sujet qui effectue le travail, une même tâche peut conduire à des travaux personnels très différents avec la mise en œuvre de connaissances différentes, que ce soit de natures différentes ou non, que la théorie des ETM permet d'identifier et d'organiser.

La prise en compte des différents types de connaissances, ce que nous avons appelé l'éclatement dans l'ETM de la notion de connaissance, permet de mieux caractériser le travail effectué.

On pourrait dire que le travail de la figure 4a est le travail attendu pour ce type de tâches en fin de lycée en France et en première année universitaire au Chili. On aborde à la section suivante le point de vue des systèmes éducatifs.

Pour plus de précisions sur l'ETM personnel et d'autres productions du problème de « la gouttière », Le lecteur pourra consulter (MENARES & VIVIER, 2022 ; MONTOYA DELGADILLO, VIOLA & VIVIER, 2017).

ETM DE REFERENCE ET SAVOIRS

Un système éducatif est caractérisé par une intention d'enseigner, par exemple les mathématiques, à des étudiants (qui doivent apprendre en développant leur ETM personnel). On peut se référer aux programmes d'enseignement et y voir des *savoirs* à enseigner, comme par exemple des savoirs sur l'exponentielle et le logarithme au lycée, spécialité mathématique, en France. L'on peut aussi voir dans les programmes la volonté d'enseigner des savoir-faire.

La théorie des ETM ne reprend pas cette distinction commune entre savoir et savoir-faire. Elle propose une structuration des *savoirs* à enseigner dans un certain système éducatif en reprenant le diagramme de la figure 3. Cet ETM dont des éléments constitutifs apparaissent dans les programmes d'enseignement d'un système éducatif est appelé ETM de référence. Il est principalement défini et développé par les institutions et les organisations responsables de l'enseignement des mathématiques en relation avec la communauté mathématique. Son identification précise suppose une recherche spécifique sur différentes sources – historique, épistémologique, didactique, etc. – dont on n'a souvent que des traces partielles-(MONTOYA DELGADILLO & REYES AVENDAÑO, 2022). Avec l'ETM de référence, on se situe plutôt du côté des savoirs, puisque l'on s'intéresse en priorité à un système éducatif – si un individu est considéré, il s'agit d'un individu épistémique et non plus d'un individu particulier.

Pour les mêmes raisons et de la même manière que pour la notion de *connaissance* dans les ETM personnels (voir section précédente), la notion de *savoir* se retrouve éclatée dans la théorie des ETM.

Dans le cadre de la théorie des ETM, les notions d'ETM personnel et de référence permettent une caractérisation et une analyse du travail mathématique en termes de connaissance et de savoir. Même si, et il faut le souligner, ce n'est pas son projet initial. Ces deux types d'ETM rendent compte de la distinction entre savoir et connaissance, entre système éducatif et étudiants.

Donnons des exemples d'ETM de référence en nous limitant aux programmes d'enseignement du lycée sur l'exponentielle et le logarithme en France [2], dans les filières

2 Au Chili, le lycée comporte quatre années, 14-18 ans : deux classes générales, 1° et 2° Medio, et deux classes avec deux spécialités, Humanités et Sciences, 3° et 4° Medio. En France, le lycée général comporte trois années, de 15 à 18 ans : la

scientifiques, depuis 2002, et au Chili.

En France en 2002, en terminale scientifique (grade 12, 17-18 ans), l'exponentielle est introduite par les équations différentielles $f'=kf$ avec $k=1$, éventuellement motivée par l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)f(y)$ (propriété de morphisme). Il est précisé : « On construira avec la méthode d'Euler introduite en première des représentations graphiques approchées de f dans le cas où $k = 1$; on comparera divers tracés obtenus avec des pas de plus en plus petits » (BO n°4 2001, p. 66). Puis, pour le logarithme : « Le mode d'introduction du logarithme n'est pas imposé » avec trois propositions : réciproque de l'exponentielle, par l'équation fonctionnelle $f(xy)=f(x)+f(y)$ ou par intégration de la fonction inverse.

En 2011, « La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur **R** telle que : $f' = f$ et $f(0) =1$ » (BO spécial N°8, 2011, annexe p. 6), sans mention de la méthode d'Euler. Pour la fonction logarithme, seules deux introductions sont proposées, réciproque de l'exponentielle ou par l'équation fonctionnelle.

Actuellement, en France en classe de première (grade 11, 16-17 ans), la fonction exp est définie de la même manière, mais la méthode d'Euler revient : « Exemple d'algorithme – Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $(1+1/n)^n$. » (BO spécial n°1, 2019, spécialité mathématique 1$^{\text{ère}}$, p. 10). La fonction logarithme apparaît en terminale, spécialité (BO spécial n°8, 2019, spécialité mathématique terminale, p. 13) : « La fonction logarithme népérien est introduite comme fonction réciproque de la fonction exponentielle étudiée en classe de première ».

Il serait long de discuter des différences entre les ETM de référence, proposés par le système éducatif français en à peine 20 ans. Cela nécessiterait des analyses et un développement qui dépasserait le propos de cet article. On peut tout de même souligner quelques points saillants des ETM de référence :

- L'enseignement actuel sur deux ans de l'exponentielle et du logarithme avec une introduction sur deux niveaux de classe différents de ces deux fonctions entraîne une structuration différente de l'ETM de référence avec un travail mathématique différent, surtout en classe de première où l'exponentielle n'a pas (encore) de réciproque. Cette lacune du référentiel théorique bloque toute une partie du travail qui nécessite la recherche d'antécédent (hormis 1 et e).
- L'appui, ou non, sur la méthode d'Euler, change les fondements de l'ETM de référence. En effet, la méthode d'Euler est la clé du théorème de Cauchy-Lipschitz qui permet de définir une suite de fonction – que l'on peut visualiser au lycée – qui converge vers une solution d'une équation différentielle – ici la fonction exponentielle. Cette méthode permet ainsi d'argumenter sur l'existence et l'unicité de la solution de

seconde qui est une classe générale et deux classes, première et terminale, avec une spécialisation. Nous ne rentrons pas dans les détails de la réforme des spécialités de 2018.

$f' = f$ avec $f(0) = 1$, tout en visualisant certaines propriétés. Cela pourrait permettre une construction des connaissances par les élèves des savoirs de l'ETM de référence.

- La méthode d'Euler n'est par ailleurs pas facile à mettre en œuvre. Si elle permet d'installer des fondements pour les savoirs de l'ETM de référence, c'est au prix d'un travail instrumental exigeant en appui sur une double approximation qu'on ne retrouve pas dans l'ETM de référence (la première en considérant la tangente au lieu de la courbe, et la deuxième en supposant qu'on est encore, après un pas de la méthode, sur la même courbe).
- Il semble que les ETM de référence favorise largement l'introduction de l'exponentielle, puis du logarithme. C'est un choix fort qui ne semble pas justifié dans l'ETM de référence (d'autres choix ont été fait dans les programmes plus anciens).
- La possibilité de choisir, ou non, la manière d'introduire ces fonctions a des conséquences sur le travail mathématique proposé aux étudiants par les enseignants – c'est l'objet de la section suivante. En particulier, il n'est pas équivalent de partir d'une équation différentielle ou d'une intégrale ou par une équation fonctionnelle. En effet, la question de la régularité des fonctions se pose, ou non, selon le mode d'introduction et peut mener, ou non, à des questions relevant de la triade discret-dense-continu (Durand-Guerrier, Montoya Delgadillo et Vivier, 2019).

Au Chili (MINEDUC, 2020), les fonctions exponentielle et logarithme sont introduites au 3º Medio (équivalent de la $1^{ère}$ en France, grade 11, 16-17 ans) dans un contexte de modélisation. D'abord l'exponentielle, en appui sur l'équation fonctionnelle, puis le logarithme comme fonction réciproque, le même ordre qu'en France donc. Il est à noter que la dérivation au Chili, est introduite au 4º Medio (grade 12, 17-18 ans) ce qui marque une différence importante avec le précédent ETM de référence du lycée où la dérivation était hors programme. Toutefois, même avec cette nouvelle notion, l'introduction des fonctions exponentielles et logarithmiques, reste la même, sans référence à la dérivation. Le choix de partir d'un contexte de modélisation laisse penser à une volonté d'ancrer l'exponentielle dans la vie quotidienne. Mais on retrouve le point aveugle du passage des valeurs rationnelles aux valeurs réelles – sans doute un implicite fort des ETM de référence.

L'on voit ainsi, entre ces deux pays, des ETM de référence aussi très différents. Toutefois, dans les deux pays, l'on note que les travaux qui suivent les introductions sont essentiellement des calculs (résolutions d'équations au Chili, calculs de dérivées et études de fonctions en France).

ETM IDOINE : ENTRE SAVOIRS ET CONNAISSANCES

L'ETM de référence précise ce que devrait être, idéalement, l'ETM personnel d'un étudiant à l'issue de l'enseignement. Mais il ne dit rien sur les moyens, la manière de construire et de faire évoluer les ETM personnels, c'est-à-dire d'enseigner de manière effective afin de provoquer les apprentissages chez les étudiants. C'est bien entendu le rôle des enseignants. Ceux-ci prennent en compte les savoirs à enseigner, théorisés dans l'ETM de référence, et les connaissances des étudiants, théorisées par les ETM personnels des étudiants, pour construire leurs enseignements. Ils proposent un certain travail mathématique aux étudiants permettant, idéalement, l'évolution progressive des ETM personnels vers l'ETM de référence. L'ETM qui se met ainsi en place progressivement est alors qualifié d'ETM idoine. Le terme d'idoine a été utilisé par Gonseth (1945-1952) qui a développé le concept d'idoneité. Dans ce cas, ce terme ne renvoie pas à l'idée d'excellence ou de modèle à suivre. Il signifie simplement que l'ETM idoine vise à s'adapter autant que possible aux différentes contraintes liées au système d'enseignement dans son ensemble.

Le travail mathématique préparé et proposé par les enseignants constitue également un ETM qui est structuré de la même manière que les précédents (figure 3). Il est nommé ETM idoine. Il est dit potentiel, avant la classe, et effectif une fois réalisé en classe, avec toutes les adaptations effectuées par l'enseignant.

D'une certaine manière, le rôle de l'ETM idoine est de convertir les savoirs en connaissances. A travers des tâches à effectuer, relatives aux savoirs à enseigner, l'ETM idoine propose un certain travail mathématique aux étudiants qui, si l'ETM idoine est bien façonné, leur permet de développer les connaissances visées. L'ETM idoine est central dans la théorie. Il doit permettre de créer la dynamique entre savoir et connaissance et rendre fonctionnelle la dualité entre ces deux aspects fondamentaux des mathématiques.

Dans (DEROUET & al., 2016) est présenté l'ETM idoine d'un enseignant dans la période des programmes de 2011 en France, dans deux classes de terminale, scientifique (TS) et économique et sociale (TES).

En Terminale Scientifique (voir ci-dessus, BO spécial n°8, 2011), l'enseignant commence en proposant aux élèves le problème historique de la sous-tangente afin d'arriver à l'équation différentielle. Il propose alors aux élèves la méthode d'Euler, qui n'est plus au programme, pour trouver une approximation de l'exponentielle avec un programme informatique. On voit ici, dans la réalisation de l'ETM idoine, la tension entre les savoirs à enseigner, ETM de référence, et les connaissances visées par l'enseignant, ETM personnels des élèves, avec les libertés prises par l'enseignant. On peut plus particulièrement relever l'utilisation de la méthode d'Euler, hors programme, qui est sans doute facilitée par les fluctuations dans le temps de l'ETM de référence. Ainsi, avec la méthode d'Euler, il propose à ses élèves un travail mettant en jeux des connaissances sémiotiques, instrumentales et discursives de leurs ETM personnels qui ne sont pas toutes reliées à des savoirs de l'ETM de référence. En particulier, la double approximation de la méthode d'Euler n'est pas explicitée et si les élèves visualisent une courbe, avec des pas de plus en plus petits, on peut se demander quel savoir de l'ETM de référence est en jeu. Tout au plus, ils construisent une connaissance sémiotique sur la forme de la courbe d'une exponentielle.

En Terminale ES, il est précisé que « Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométrique » (BO spécial n°8, 2011, p4). L'enseignant choisit donc une tout autre introduction que celle de Terminale S en s'appuyant sur un problème d'évolution du prix (par an puis par mois) d'un appartement avec un taux d'augmentation fixe (fictif) de 21% annuel. Le lien avec l'ETM de référence de Terminale ES est ici explicite avec le passage des suites géométriques q^n aux fonctions exponentielles q^x. Le travail proposé, en appui sur un tableur [Ins], permet de calculer des valeurs de $1{,}21^x$ pour des valeurs de x d'abord entières puis en douzième avec une utilisation des connaissances des élèves sur les taux composés (aussi un savoir de l'ETM de référence) [Dis].

Notons qu'en Terminale ES apparaît un malentendu lié à la triade discret-dense-continu (DURAND-GUERRIER & al., 2019) : alors que l'enseignant pense [3] avec enthousiasme pouvoir dire qu'on a défini $1{,}21^{\pi}$, les élèves, quant à eux, ne comprennent pas pourquoi « on a fait tout ça pour ça » puisque la calculatrice permet d'effectuer rapidement et simplement le calcul. Ici, le choix de l'ETM idoine, pourtant en adéquation avec l'ETM de référence, ne permet pas aux élèves de développer des connaissances liées à la triade discret-dense-continu des nombres – qui ne sont d'ailleurs pas dans l'ETM de référence – vraisemblablement à cause de l'ETM personnels des élèves qui montre une prépondérance de la dimension instrumentale (la calculatrice) pour le numérique.

CONCLUSION

Dans cet article nous avons considéré le couple savoir-connaissance à travers la théorie des ETM qui met l'accent sur le travail mathématique dans un contexte éducationnel.

Dans une première approche, le savoir est l'enjeu de l'ETM de référence et la connaissance est l'enjeu de l'ETM personnel. La théorie des ETM déploie ces deux notions en didactique des mathématiques sur l'ensemble de la structure des ETM. C'est pourquoi nous avons utilisé l'idée d'éclatement, avec des savoirs et connaissances de natures différentes.

L'analyse des ETM personnels, en identifiant les trois composantes épistémologiques et les trois processus cognitifs ainsi que les trois dimensions, permet de préciser et de caractériser le travail mathématique par la notion de circulation. Cette circulation du travail mathématique dans l'ETM personnel, après une réinterprétation en termes de connaissances, permet de mettre en lumière une fonctionnalité des connaissances. Il en est de même pour les savoirs dans l'ETM de références, même si nous n'avons pu qu'esquisser ce point dans cet article,

3 Ce n'est pas le cas car cela nécessite une hypothèse de continuité sur **R**, non explicité dans la séance. Le travail en séance, en appui sur l'équation fonctionnelle de l'exponentielle, ne peut permettre d'atteindre que les images des valeurs rationnelles de la variable.

notamment en pointant certaines difficultés liées aux savoirs en jeu – l'identification d'un ETM de référence est complexe.

Ainsi, à travers l'idée de travail mathématique, c'est bien plutôt la fonctionnalité de ces savoirs et connaissances, respectivement dans l'ETM de référence et l'ETM personnel, sur laquelle se focalise la théorie des ETM.

Les ETM de référence et personnel, revisitent la distinction entre savoir et connaissance en pointant les spécificités complexes de chacun des éléments de ce couple. L'ETM idoine, quant à lui, relie les deux ETM précédents et réalise une dualité dynamique entre savoir et connaissances. Mais cette dualité n'est pas sans difficulté pour l'élaboration d'un ETM idoine par les enseignants comme nous l'avons mis en évidence pour l'introduction de la fonction exponentielle. Il est en effet nécessaire au préalable que l'enseignant comprenne, avec ses propres connaissances de son ETM personnel, la fonctionnalité, pas toujours explicite, des savoirs dans l'ETM de référence. Puis, il faut espérer que l'ETM idoine élaboré permette un travail mathématique qui puisse faire émerger les connaissances en jeu dans les ETM personnels des élèves, avec une certaine fonctionnalité.

Plus qu'une précision des notions de savoirs et de connaissances, la théorie des ETM, en se focalisant sur le travail mathématique, a une position originale qui va bien au-delà d'une distinction entre savoir et connaissance : la théorie des ETM propose, à travers le travail mathématique et les trois types d'ETM, une théorisation fonctionnelle de la dualité savoirs-connaissances.

REFERENCES

BOSCH, M., & CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 1, p. 77–124, 1999.

BROUSSEAU, G. & CENTENO, J. Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 11, n. 2(3), p. 167-210, 1991.

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique, **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n. 2(3), p. 221-270, 1992.

DEROUET, C., KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., PAEZ MURILLO, R. E., ROUSSE, S., VANDEBROUCK, F., VERDUGO, P., VIVIER, L. Espace de Travail Mathématique. Em: Matheron, Y., Gueudet, G., & al. (Eds.). **Enjeux et débats en didactique des mathématiques. Actes de la XIIIème Ecole d'été de didactique des mathématiques.** Brest: La Pensée Sauvage, p. 421-440, 2016.

DOUGLAS, M. **Comment pensent les institutions**. Paris : La Découverte, 2004.

DURAND-GUERRIER, V., MONTOYA DELGADILLO, E. & VIVIER, L. Real exponential in discreteness-density-completeness contexts. Em: Monaghan, J., Nardi, E., Dreyfus, T. (Eds.). **Calculus in upper secondary and beginning university mathematics – Conference proceedings**. Kristiansand: MatRIC, p. 87-90, 2019.

FLORES, J., GAONA, J. & RICHARD, P. R. Mathematical work in the digital age. Variety of tools and the role of geneses. Em: KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., & RICHARD, P. (Eds). **Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective**. Springer, p. 165-209, 2022.

GÓMEZ-CHACÓN, I. M., ROMERO ALBALADEJO, I. & GARCÍA LÓPEZ, M. Zig-zagging in geometrical reasoning in technological collaborative environments: a Mathematical Working Space-framed study concerning cognition and affect. **ZDM**, v. 48, n. 6, p. 909–924, 2016.

GÓMEZ-CHACÓN, I. M., & NECHACHE, A. (2022). Methodological aspects in the theory of MWS. Em: KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., & RICHARD, P. (Eds). **Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective**. Springer, p. 33-55, 2022.

GONSETH, F. **La géométrie ou le problème de l'espace**. Neuchâtel: Editions du Griffon, 1945-1952.

HENRIQUEZ-RIVAS, C., KUZNIAK, A. & MASSELIN, B. (2022). The idoine or suitable MWS as an essential transition stage between personal and reference mathematical work. Em: KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., & RICHARD, P. (Eds). **Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective**. Springer, p. 121-146, 2022.

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 11, p. 175–193, 2006.

KUZNIAK, A. L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 16, p. 19-34, 2011.

KUZNIAK, A, TANGUAY, D & ELIA, I. Mathematical working spaces in schooling: An introduction. **ZDM-Mathematics Education**, v. 48, n. 6, p. 721-737, 2022.

KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E. & RICHARD, P. (Eds). **Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective**, Springer, 2022.

LAPARRA, M. & MARGOLINAS, C. Milieu, connaissance, savoir. Des concepts pour l'analyse de situations d'enseignement, **Pratiques**, p. 141-160, 2010.

MARGOLINAS, C. Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ?, **Revue française de pédagogie**, 188, p. 13-22, 2014.

MARGOLINAS, C. & BESSOT, A. Les savoirs et la théorie des situations, **CEMeR**, ce numéro, 2024.

MENARÉS ESPINOZA, R. & VIVIER, L. (2022). Personal mathematical work and personal MWS. Em: KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., & RICHARD, P. (Eds). **Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective**. Springer, p. 91-120, 2022.

MONTOYA DELGADILLO, E., VIOLA, F. & VIVIER, L. Choosing a Mathematic Working Space in a modelling task: the influence of teaching. Em: DOOLEY, T. & GUEUDET, G. (Eds.). **Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. Dublin: DCU

Institute of Education and ERME, p. 956-963, 2017.

MONTOYA DELGADILLO, E. & REYES AVENDAÑO, C. The reference Mathematical Working Space. Em: KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., & RICHARD, P. (Eds). **Mathematical Work in Educational Context – The Mathematical Working Space Theory Perspective**. Springer, p. 73-90, 2022.

TALL, D.& VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity, **Educational Studies in Mathematics**, v. 12, n. 2, p.151–169, 1981.

TEXTES DE REFERENCE DES PROGRAMMES D'ENSEIGNEMENT ET MANUELS D'ENSEIGNEMENT

Bulletin Officiel Hors-Série n°4 du 30 août 2001, https://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm

Bulletin Officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011, https://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?pid_bo=25847

Bulletin officiel spécial n°1 du 22 janvier 2019, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special1/MENE1901632A.htm

Bulletin officiel spécial n°8 du 25 juillet 2019, https://www.education.gouv.fr/bo/19/Special8/MENE1921246A.htm

CROC, C., DHOMBRES, J., LOUBATIERES, J., PAINTOUX, T. & PIAU, Y. **Transmath 1re – Enseignement de spécialité**. Collection Transmath Maths Lycée, Nathan, 2019.

MINEDUC. Programa de Estudio 3° Medio, Matemática, 2019https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140137_programa_feb_2021_final_s_disegno.pdf