



Magali HERSANT,
Nantes Université, INSPé, CREN.

Modélisation des savoirs dans le cadre de l'apprentissage par problématisation et conséquences didactiques

Knowledge modelling in problem-based learning and didactic consequences

RESUMÉ

Nous présentons d'abord la modélisation des savoirs dans le cadre de l'apprentissage par problématisation. Elle s'ancre dans une épistémologie de la construction du problème. Les savoirs y sont caractérisés comme des savoirs construits en raison, associés à la construction de solutions raisonnées des problèmes. Nous expliquons ensuite comment cette modélisation fournit des conditions pour la conception de situations à partir d'un exemple en SVT. Puis nous précisons comment nous envisageons la question des savoirs relatifs à la résolution de problème en mathématiques à l'aune de ce cadre.. À partir d'un exemple relatif à l'apprentissage de possible et de l'impossible en mathématiques par des élèves de 8 à 11 ans, nous montrons comment cette modélisation conditionne la construction de séances d'enseignement. Nous discutons ensuite l'apport du cadre de l'apprentissage par problématisation dans cette construction et ses articulations possibles avec d'autres cadres de la didactique des mathématiques (théorie des situations didactique, jeux de cadre et dialectique outil-objet).

Mots-clés: problématisation, résolution de problème, impossible.

Correspondance:

magali.hersant@univ-nantes.fr

ABSTRACT

We first present the modelling of knowledge in the context of problem-based learning. It is rooted in an epistemology of problem construction. Knowledge is characterised as knowledge constructed in reason, associated with the construction of reasoned solutions to problems. We then explain how this modelling provides conditions for the design of situations based on an example in life sciences. Then we specify how we consider the question of knowledge related to problem solving in mathematics in the light of this framework. Using an example of learning the possible and the impossible in mathematics by pupils aged 8 to 11, we show how this model conditions the construction of teaching sessions. We then discuss the contribution of the framework of learning by problematization in this construction and its possible articulations with other frameworks of mathematics didactics (theory of didactic situations, frame games and tool-object dialectics).

Keywords: learning by problematisation, problem based learning, impossible.

Reçu dans 11/10/2023

Approuvé en 11/11/2023



INTRODUCTION

Poser un regard didactique sur les phénomènes d'enseignement-apprentissage c'est mettre les savoirs au coeur de ces phénomènes. Ainsi, toute recherche didactique doit pouvoir rendre compte des savoirs qui se construisent ou peuvent se construire en classe et les situer par rapport à leur champ scientifique de référence. La modélisation de ces savoirs permet une médiation contrôlée entre la discipline de référence et la discipline scolaire (Doussot, 2017) et répond à une nécessité consubstantielle à l'étude didactique, tout en étant aussi, notamment par l'explicitation des options épistémologiques qu'elle permet, une condition du caractère scientifique de cette étude. Ainsi, la modélisation des savoirs élaborée dans un cadre didactique dépend des options épistémologiques de ce cadre et des questions qu'il cherche à renseigner et donc, de facto, des fonctions attribuées à cette modélisation.

Depuis une quinzaine d'années, nous utilisons, en didactique des mathématiques, le cadre de l'apprentissage par problématisation (CAP dans la suite du texte) développé par Orange pour ce qui concerne la didactique des SVT (FABRE & ORANGE, 1997 ; ORANGE, 2002, 2005, 2007 ; ORANGE & al., 2022). Ce cadre propose une modélisation des savoirs qui accorde une place importante à la construction du problème.

Dans cet article, après avoir précisé les

raisons pour lesquelles il nous a semblé intéressant d'utiliser le CAP en mathématiques, nous nous attacherons à expliciter la modélisation des savoirs dans ce cadre et ses conséquences didactiques, notamment pour ce qui concerne la gestion des mises en commun et débats. Pour cela, d'abord en appui sur un exemple tiré des travaux en SVT (Orange, Orange-Ravachol, 2007) sur l'apprentissage du fonctionnement du coude nous mettrons en évidence des conditions didactiques que propose le CAP pour permettre la construction de savoirs problématisés. Ensuite, nous illustrerons comment nous reprenons à notre compte pour les mathématiques ces conditions, à partir de notre étude pionnière relative à l'apprentissage de l'idée d'impossibilité en mathématiques à la fin de l'école élémentaire (élèves de 8 à 11 ans) (HERSANT, 2010). Nous illustrerons ainsi comment la modélisation des savoirs dans le CAP nous permet d'envisager l'apprentissage de savoirs sur la résolution de problèmes en mathématiques et quelles conditions didactiques elle propose pour la conception de séquences. Cet exemple nous permettra finalement de discuter, dans une perspective comparatiste, l'apport du CAP à la didactique des mathématiques.

DES SAVOIRS SOLUTIONS DE PROBLEMES

Nous considérons que dans l'enseignement des mathématiques les problèmes remplissent deux grandes fonctions : ils peuvent être des outils ou des objets d'apprentissage (HERSANT, 2010). Ils sont alors,



respectivement, des moyens d'apprendre des notions, concepts ou types de raisonnement, ou des moyens d'apprendre à chercher et résoudre des problèmes.

Ainsi, la théorie des situations didactiques de Brousseau (1998) et les jeux de cadre et la dialectique outil - objet de Douady (1986) attribuent au problème un rôle d'outil pour l'apprentissage de notions mathématiques. Par exemple, dans la théorie des situations didactiques, la situation d'action permet de faire émerger, de trouver, un modèle implicite de la théorie mathématique qui sera explicité au cours d'une situation de formulation et mis à l'épreuve et (in)validé dans les situations de validation et d'institutionnalisation.

Par ailleurs, la « didactique de la résolution de problèmes » (PLUVINAGE, 1990) ou le « problème ouvert » (Arsac, GERMAIN & MANTE, 1991) renvoient quant à eux au problème comme un objet d'enseignement. Cette fonction de la résolution de problème répond à l'idée que l'apprentissage des mathématiques ne se résume pas à l'apprentissage de concepts, notions ou modes de raisonnement mais qu'il s'agit aussi d'apprendre des savoirs transversaux associés à la recherche et la résolution des problèmes. Ainsi, Pluvinae (1990) propose de travailler particulièrement trois composantes qui correspondent pour lui à trois phases de la résolution de problèmes : l'entrée dans le problème, la recherche d'une solution et la rédaction d'une réponse. Avec les « problèmes ouverts » Arsac, Germain et Mante visent quant à eux l'apprentissage de « la démarche scientifique » qu'ils résument en quatre étapes : essayer, formuler une conjecture, tester, prouver

(ARSAC, GERMAIN & MANTE, 1991).

Pour Fabre (1999), qu'il s'agisse de situation-problème ou de problème ouverts, le lien entre problème et savoir dans ces propositions relève plus d'une épistémologie de la solution du problème que d'une épistémologie du problème. Nous notons pour notre part que dans les propositions de Pluvinae et Arsac et al les savoirs visés se situent à un niveau de généralité qui ne tient pas compte des types des problèmes et des grandes questions du domaine auxquels ils sont associés : des démarches génériques sont visées, indépendamment des caractéristiques du domaine et du sens que peut recouvrir le terme « scientifique » (HERSANT, 2010, 2012). Le CAP nous est apparu comme un cadre intéressant pour dépasser ces deux limites, préciser des savoirs relatifs à la résolution de problème qui peuvent faire l'objet d'un apprentissage et envisager ainsi différemment les relations entre apprentissage de savoirs mathématiques et résolution de problème.

DES SAVOIRS RAISONNES ISSUS DE LA CONSTRUCTION DE PROBLEME

Les fondements épistémologiques du CAP empruntent à Bachelard, Popper, Kuhn (FABRE & ORANGE, 1997 ; DOUSSOT, HERSANT, LHOSTE & ORANGE-RAVACHOL, 2022). Ce cadre pose l'existence d'un lien fort entre problèmes et savoirs de la façon suivante. D'abord, les problèmes n'y sont pas simplement des outils pour construire des savoirs et la résolution de problème en toute



généralité n'y est pas un enjeu. Ensuite, le savoir ne s'y réduit pas à la solution d'un problème, les raisons qui conduisent à cette solution sont consubstantielles au savoir. Autrement dit, dans le CAP, les savoirs n'ont de sens qu'en lien avec les problèmes dont ils sont solution et la construction des problèmes est constitutive des savoirs. Enfin, « les savoirs scientifiques ne sont pas des savoirs factuels, assertoriques ». contrairement aux connaissances communes ; ils possèdent « un certain caractère de nécessité, une certaine apodicticité (BACHELARD, 1949), une dimension critique. Il ne s'agit pas uniquement de « savoir que » mais de savoir « pourquoi cela ne peut pas être autrement » (ORANGE, 2006, p. 77). Ces « savoirs problématisés » sont en rupture avec l'opinion ; ce sont des savoirs raisonnés issus d'une exploration et d'une délimitation des solutions possibles qui permet la construction de nécessités en lien avec l'identification des impossibles et leur thématization comme des nécessités. Ainsi le CAP s'inscrit dans une épistémologie de la construction des problèmes où il est essentiel de « relier les savoirs et les pratiques aux problèmes qui les fondent » (DOUSSOT, HERSANT, LHOSTE & ORANGE-RAVACHOL, 2022, p. 16).

UNE PRATIQUE DES SAVOIRS

L'élaboration de ces savoirs est donc étroitement liée à un travail argumentatif : ce sont des pratiques, et en particulier des pratiques langagières situées (ORANGE, 2005). La construction de ces savoirs raisonnés correspond au processus dit de « problématisation » qui se réalise dans une

dialectique de faits et d'idées (ou de données et de conditions), à l'intérieur d'un cadre. Pour rendre compte de ce processus, Orange distingue trois registres, distincts mais qui fonctionnent ensemble : le registre empirique, le registre des nécessités ou des modèles, le registre explicatif (REX). Le registre empirique est celui des éléments qui interrogent et sont à l'origine d'un problème empirique, des faits retenus comme pertinents et significatifs au cours de la construction du problème (données empiriques) qui « servent d'appui pour construire des nécessités dans le registre des modèles » ou des constats dont on interroge la signification (ORANGE, 2006, p. 82). Le registre des nécessités / modèles est celui où se développent les idées explicatives et les raisons, il comprend les solutions raisonnées, les nécessités et des conditions de possibilité de ces modèles ou solutions.

La problématisation scientifique résulte d'une mise en tension du registre empirique et du registre des modèles qui se réalise en référence à un registre explicatif donnant sens aux modèles et nécessités manipulés, proche du cadre épistémique de Piaget (ORANGE, 2006, p. 76). L'appartenance d'un élément au registre empirique ou des modèles est relative : c'est la fonction de cet élément dans la construction du problème, son statut dans la construction du problème, qui détermine le registre dont il relève.

Pour rendre compte de ce processus Orange propose d'utiliser ce qu'il appelle un espace de contraintes (ORANGE, 2006, FABRE & ORANGE, 2022). Dans le cas de problématisations scolaires, l'espace de contraintes est une modélisation qui vise à



rendre compte de la problématisation qui a lieu pendant un débat scientifique en classe ; il constitue une mise en ordre, selon les trois registres de l'activité scientifique mentionnés précédemment, de ce que le chercheur retient dans l'activité des élèves comme contribuant à la construction des raisons.

CONDITIONS POUR LA CONSTRUCTION DE CES SAVOIRS

Considérer les savoirs à la fois comme raisonnés et comme une pratique conduit à attacher une importance particulière à ces deux aspects dans la conception de séquences. Ainsi, dans les « séquences forcées » (ORANGE, 2010), la mise en texte problématisante des savoirs demande en particulier de réaliser, et donc d'accompagner, des sauts abstraits permettant de passer de la « critique en impossibilité de solutions singulières à un texte prenant en compte des nécessités » (ORANGE & ORANGE-RAVACHOL, 2007). Ces conditions de nature épistémique sont associées à d'autres, de nature, langagière et didactique.

Nous revenons ici particulièrement sur les conditions épistémiques en nous appuyant sur l'exemple de l'étude de l'articulation du coude avec des élèves de 9 à 11 ans. Il s'agit de permettre la construction d'un modèle de fonctionnement du coude en identifiant trois nécessités : mécanisme assurant la cohésion du membre ; mécanisme lui permettant de se plier ; mécanisme l'empêchant de plier dans tous les sens (ORANGE & ORANGE-RAVACHOL, 2007).

Pour permettre une exploration critique des

possibles et des impossibles, Orange propose d'utiliser un agencement de travaux individuels, en groupes et de débats qui permettent des dénivelés épistémiques. Ainsi, la première partie de la séquence permet la production et la critique de solutions singulières à partir d'une question (« Comment c'est fait dans ton bras pour qu'il puisse bouger ? Fais le schéma de ce qu'il y a dans le bras lorsqu'il est plié et lorsqu'il est étendu »). Des premiers débats sur les solutions singulières des groupes permettent la production de premières argumentations, le plus souvent orales, sous la forme de critiques en impossibilité des solutions proposées (« cette solution ne peut pas fonctionner pas parce que... »). Ces solutions sont reprises comme des types de solutions nommées « caricatures » ; elles donnent lieu à un nouveau travail argumentatif dont le but est de faire émerger des arguments pour lesquels certaines « solutions » ne peuvent pas fonctionner (« Laquelle / lesquelles de ces solutions ne fonctionnent pas ? Pourquoi ?). Ces arguments sont produits à l'écrit par les élèves puis aménagés ensuite par l'enseignant, ce qui permet une dépersonnalisation. L'étape suivante vise à les classer en différentes catégories (« Répartis ces arguments en trois catégories ») pour permettre de thématiser les raisons d'impossibilité (ça ne peut pas fonctionner car le bras tombe / ça bloque / ça bouge dans tous les sens). Finalement ces raisons d'impossibilité sont présentées comme des nécessités du phénomène dont il faut donner les conditions de possibilité (« Comment c'est dans le bras pour que ça ne tombe pas / ça ne bloque pas / ça ne bouge pas dans tous les sens »).

Ainsi, ces débats argumentatifs successifs



permettent plusieurs dénivelés épistémiques : de la critique de solutions singulières à des critiques portant sur des types de solutions ; de la production d'argumentations sur les types de solutions à une typologie de ces argumentations ; des types d'argumentations « contre » (raisons d'impossibilité) à des conditions de possibilité.

USAGE DU CAP EN MATHÉMATIQUES

Les aspects du CAP que nous venons de présenter ont été proposés essentiellement par Orange qui a ainsi développé un cadre adapté à la didactique de la biologie (ORANGE, ORANGE-RAVACHOL, LHOSTE & CHALAK, 2022). Dans cette construction, la nature explicative des problèmes en biologie, dans le domaine de la recherche ou à l'école, joue un rôle important en lien avec l'idée de modélisation. En effet, les problèmes y sont explicatifs au sens où ils « visent à trouver une explication ou à rendre raisons des phénomènes » (ORANGE & al., 2022, p. 24). Le travail porte alors sur la construction et la critique de ces modèles explicatifs (ORANGE, 2002, 2005).

En mathématiques, les problèmes ne sont pas, en général, explicatifs, dans le sens où leur recherche n'est pas motivée, la plupart du temps et, en particulier en mathématiques pures, par l'explication des phénomènes et la construction de leurs modèles. Cependant, bien évidemment, cela n'empêche pas, pour autant, de parler d'explication (voir les travaux de Duval par exemple) et encore moins qu'il ne s'agit pas de construire des raisons. C'est pourquoi, nous

considérons que le CAP peut être utilisé pour la discipline mathématique, (voir aussi HERSANT, 2021, 2022 ; GRAU, 2017) tout en préférant parler de registre des nécessités plutôt que de registre des modèles.

Adopter le CAP pour les mathématiques permet alors d'envisager autrement la place et la fonction des problèmes dans la construction de savoirs mathématiques et de porter, notamment, un regard critique sur les propositions d'apprentissage associées aux problèmes ouverts (HERSANT, 2012) : peut-on apprendre aux élèves à chercher en mathématiques en toute généralité ? Quels savoirs peuvent faire l'objet d'un apprentissage au sens du CAP dans ce cadre institutionnel ? Quelles conditions en permettraient l'apprentissage ?

Nous reprenons ici notre recherche pionnière sur l'usage du CAP en mathématique (HERSANT, 2010) pour illustrer la façon dont ce cadre peut être utilisé pour concevoir des séquences d'apprentissage en mathématiques.

PENSER AUTREMENT LES SAVOIRS SUR LA RÉSOLUTION DE PROBLÈME

La recherche débute par une interrogation sur les savoirs que les élèves de 8 à 11 ans peuvent apprendre à propos de la résolution de problème et par le constat qu'à la fin de l'école élémentaire (HERSANT, 2005), dans la classe de mathématiques, les élèves envisagent l'impossible comme l'impossible quotidien : ils affirment « c'est impossible, j'ai beaucoup cherché et je n'ai pas trouvé ! » (HERSANT, 2008, 2010, HERSANT & THOMAS, 2008).



Cette conception témoigne d'un REX que nous désignons d'empirisme naïf, non valide en mathématiques. Nous estimons essentiel de permettre aux élèves, d'accéder à un REX correct pour ce qui concerne l'impossibilité en mathématiques, avant leur entrée au collège, sans laisser cette construction à la charge des élèves, ce qui serait générateur d'inégalités. Nous avons donc conçu une séquence à cet effet.

Dans les termes du CAP, cela signifie qu'il ne s'agit pas de remplacer une conception erronée du possible et de l'impossible par une conception « meilleure » mais de permettre la construction d'un savoir raisonné sur l'impossible en mathématiques.

Cette construction implique, d'abord, de ne pas réduire l'impossible au contraire du possible comme c'est le cas dans une conception commune mais de lui donner une dimension de nécessité : est impossible ce qui nécessairement ne peut être possible, ce qui ne peut pas être autrement que possible. Pour donner à l'impossible ce statut apodictique il s'agit de l'inscrire comme la conclusion d'une exploration et d'une délimitation des possibles qui met en évidence que « cela ne se peut pas, il ne peut pas en être autrement ». Du point de vue des mathématiques, cela se traduit par un statut d'universalité (« jamais personne ne pourra »). Ces conditions demandent aussi de situer l'impossible par rapport à deux autres alternatives que sont le possible mathématique et l'indéterminé, étant entendu que le possible doit alors aussi être thématiqué comme une nécessité (« cela est possible et il ne peut en être autrement ») et non assertorique ou contingent. Autrement dit, il est indispensable d'introduire

la distinction entre ce dont on est mathématiquement sûr que c'est possible, ce dont on est mathématiquement sûr que c'est impossible, ce qui n'est pas impossible mais dont on est pas sûr qu'il soit possible, c'est-à-dire, ce qui est demeure indéterminé, ces différents statuts s'appréciant à l'aune des connaissances mathématiques disponibles dans le collectif où le problème est travaillé.

Pour ce faire, le champ des problèmes d'optimisation discrète constitue un domaine favorable (voir HERSANT, 2010 pour une analyse détaillée). En effet, beaucoup des problèmes de ce type permettent aux élèves de cet âge de produire facilement une ou plusieurs solutions possibles, pas forcément optimales, puisque les connaissances mathématiques nécessaires pour cela sont rudimentaires (essentiellement savoir ce que sont des points alignés). Et, par ailleurs, on peut choisir les problèmes pour qu'assez rapidement les élèves peinent à améliorer leur solution, ce qui conduit certains à conclure qu'on ne peut pas faire mieux car on a déjà beaucoup cherché et on n'a pas trouvé, ce qui est l'explicitation d'un raisonnement qui se situe dans un registre explicatif de type empirisme naïf. Enfin cette dernière affirmation peut facilement être mise en défaut dès lors qu'un élève de la classe trouve une meilleure solution (dans les termes de la théorie des situations didactiques, le milieu présente des potentialités adidactiques). On a ainsi, *a priori*, des conditions pour soumettre à la critique les arguments d'impossibilité erronés, il s'agit « juste » de trouver effectivement les problèmes qui permettent l'émergence de ces différents cas de figure et de voir ensuite comment permettre l'émergence



d'arguments d'impossibilité acceptables par la discipline et leur validation, ainsi que la catégorisation des différents types d'arguments.

Notre étude de ces conditions nous a conduit à concevoir une séquence composée de plusieurs séances ayant un scénario semblable et dont chacune correspond à la recherche d'un problème d'optimisation discrète (HERSANT, 2010). Chaque séance vise la construction de savoirs raisonnés à deux niveaux interdépendants. D'une part, il s'agit d'organiser une exploration et une délimitation des possibles qui aboutit à une solution raisonnée du problème. Cela implique d'utiliser des arguments pour justifier de la possibilité ou de l'impossibilité d'une solution au problème. D'autre part, la thématization, la critique et la validation ou l'invalidation de ces arguments visent à permettre de construire des savoirs raisonnés relatifs au possible et à l'impossible en mathématiques, en rupture avec le sens commun. La succession des séances permet de rencontrer ces savoirs dans différents contextes et inscrit le travail dans la durée pour permettre une évolution durable du registre explicatif des élèves quant aux arguments acceptables et non acceptables pour justifier le possible et l'impossible en mathématiques.

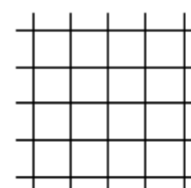
EXEMPLE D'UNE SÉANCE

Prenons l'exemple d'une séance pour illustrer la façon dont nous avons mis en place des conditions à ces deux niveaux pour permettre la construction d'une solution raisonnée du problème et l'évolution du registre explicatif des élèves pour ce qui concerne le

possible et l'impossible en mathématiques. Cette séance est la première de la séquence.

Le problème traité est connu « comme » celui des « trois points alignés » (« No-three -in-line problem » dans sa désignation internationale). Il s'agit de déterminer combien de points au maximum on peut placer sur les intersections d'une grille (figure 1) sans former aucun alignement de trois points.

Figure 1-Grille



Source: L'auteure

La séance a été mise en oeuvre dans plusieurs classes de la fin de l'école élémentaire en France (élèves de 8 à 11 ans). La conclusion du problème varie en fonction des solutions trouvées empiriquement par les élèves. Nous reprenons ici un cas où la meilleure solution trouvée à l'échelle de la classe est 9.

La première phase est une phase dite d'énumération : chaque élève dispose de grilles vierges et est invité à essayer de placer le plus de points possibles sur chacune sans jamais en aligner trois. À ce niveau de classe, tous les élèves savent que ce que sont des points alignés, ils s'engagent facilement dans l'exploration du problème et produisent individuellement une « meilleure solution ». Cette meilleure solution individuelle correspond alors, pour les élèves, à la fois à une disposition des points et à un nombre.

Au cours de cette phase, certains élèves



énoncent qu'ils ne parviennent pas à améliorer leur solution (par exemple, « j'ai beaucoup cherché, c'est impossible de faire plus que 8 ») et concluent qu'on ne peut pas faire plus que cette valeur.

Lorsque la plupart des élèves n'arrivent plus à améliorer leur solution, l'enseignant interrompt la recherche, organise des groupes et demande à chaque groupe de produire une affiche qui représente une des meilleures solutions du groupe. Cette seconde phase permet de premières invalidations en acte de l'impossible empirique. Par exemple un élève formule : « j'ai beaucoup cherché et j'ai placé 8 points, je pensais qu'on ne pouvait pas faire plus que 8 mais Valentin a réussi à placer 9 points sur les intersections dans en aligner 3 ! ».

Au cours de la phase 3, les affiches des différents groupes sont exposées, on vérifie qu'il n'y a pas d'alignement et on identifie la ou les meilleures solutions à l'échelle de la classe. Les échanges peuvent être l'occasion de mettre en défaut la conception erronée de l'impossible. Une enseignante indique ainsi par exemple « Hugo pensait qu'on ne pouvait pas faire plus que 8 parce qu'il avait beaucoup cherché et n'avait pas réussi mais Pierre a réussi à placer 9 points ! Avoir beaucoup cherché sans trouver ne veut pas dire que c'est impossible. ».

Ces trois premières phases ont en commun de permettre une exploration empirique des possibles et impossibles à partir d'un travail d'énumération et d'optimisation de résultats à l'échelle individuelle, puis du groupe et finalement de la classe. Il y a une dépersonnalisation progressive des solutions mais aussi, et surtout, l'initiation d'un changement de nature de ces solutions : de

dispositions des points sur la grille associées à un nombre, elles deviennent un nombre illustré par une ou plusieurs dispositions de points.

Cette évolution est subtile mais importante. En effet, l'espace des solutions du problème est un sous-ensemble des entiers naturels et non une disposition de points. L'exploration et la réduction des possibles se fera à partir de la recherche de problèmes locaux (est-il possible de placer n points sur la grille sans en aligner 3 ?) qui permettront l'identification de courts-circuits (il est impossible de placer 26 points sur la grille sans en aligner 3). Pour permettre la construction de ces problèmes et des nécessités associées, il faut éviter que les élèves identifient les solutions à des dispositions, sinon ils cherchent à améliorer des dispositions existantes, ce qui rend plus difficile la construction de la nécessité « il ne peut pas y avoir plus de deux points par ligne ». Par ailleurs, ce changement de nature de la solution pose implicitement une disposition des p points comme une preuve par ostension de la possibilité de placer p points et non plus comme une production empirique.

Dans ces premières phases, les élèves réalisent un travail d'énumération qui renvoie à une recherche empirique où sont à l'œuvre des conceptions quotidiennes du possible et l'impossible. À partir de la phase 4, le travail sur des problèmes locaux vise à réduire l'espace de recherche et à permettre un travail sur les raisons qui, en mathématiques, sont acceptables ou pas pour justifier du possible ou de l'impossible. Cela demande de formuler des conjectures sur les solutions (valeurs numériques) possibles et impossibles et de construire des raisons pour prouver ces



conjectures. Pour éviter autant que possible que les élèves travaillent sur des solutions singulières (disposition de points et valeur), les dispositions de points produites précédemment sont mises de côté, on indique qu'il ne s'agit plus de placer des points sur la grille puis on introduit la question : « la meilleure solution dans la classe est 9. D'après vous, est-ce que ça vaut la peine de continuer à chercher encore ? Est-ce que vous pensez qu'on peut faire mieux et pourquoi ? ».

Les élèves explicitent alors, oralement ou par écrit, individuellement ou par groupe selon les classes, leur conjecture et les raisons qui la fondent. Différents arguments sont donnés, par exemple : (a) « on a toujours amélioré notre solution, il n'y pas de raison de ne pas faire mieux » ; (b) « si on se concentre plus on en mettra plus » ; (c) « oui, il y a 2 dans chaque ligne et dans chaque colonne » ; (d) « je pense qu'on peut mettre 1 ou 2 points de plus, je le sens » ; (e) « notre record c'est 9 mais je suis sûr qu'on peut en mettre 10 » ; (f) « non, si on ajoute une croix, il y aura forcément 3 points alignés » ; (g) « avec une autre grille on pourrait en mettre plus » ; (h) (« on ne peut pas ajouter un point de plus sur la grille à 9, sinon il y aura un point aligné »).

Dans la phase 5, ces arguments sont recueillis, affichés au tableau, puis triés et catégorisés. Par exemple, cela peut aboutir aux catégories suivantes : les arguments relatifs à un raisonnement sur une disposition particulière (f, g, h) ; les arguments autour de l'idée qu'on peut faire mieux mais « rien ne nous l'assure, c'est une intuition » (a, b, d, e) ; les arguments en faveur d'une possibilité de faire mieux, basés sur l'idée qu'on peut mettre deux points par

ligne. Si l'argument « on ne peut pas faire plus car on a déjà beaucoup cherché » réapparaît il est de nouveau invalidé. Par ailleurs, les arguments de type « on peut faire mieux, c'est une intuition » montre qu'à ce stade les élèves raisonnent dans un registre explicatif quotidien.

Ensuite plusieurs phases sont consacrées à l'étude de problèmes locaux pour réduire l'espace de recherche et expliciter celui des solutions. Dans les termes du CAP il s'agit d'explorer et de délimiter le champ des possibles et des impossibles. Pour soutenir cette exploration et rendre explicite les deux espaces, les nombres entre 1 et un nombre supérieur à 26 sont écrits dans l'ordre en haut du tableau (figure 2). Au niveau de la résolution du problème, l'étude de problèmes locaux vise à établir des impossibles qui constituent des courts-circuits et permettent de réduire l'espace recherche. Ils seront matérialisés par des nombres barrés dans la file. Des solutions possibles seront aussi établies. Les valeurs associées seront entourées dans la file numérique, ce qui permettra d'explicitier l'espace des solutions. Des solutions raisonnées de ces problèmes seront ainsi construites.

Figure 2 - la file numérique écrite au

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 |

tableau

Source: L'auteur

Tout cela demande d'opérer une rupture entre la recherche de solutions empiriques où le possible et l'impossible peuvent correspondre à une conception quotidienne et la recherche de solutions raisonnées en référence au possible et à l'impossible mathématique. Autrement dit, il s'agit de dépasser des opinions personnelles ou



partagées dans la classe pour se positionner à une échelle de certitude universelle. Pour cela, les aspects langagiers sont importants : il ne s'agit plus de savoir si on peut placer p points sur la grille sans en aligner 3 mais d'être sûr qu'on peut le faire ; il ne s'agit plus de penser qu'il est impossible de placer p points mais d'être sûr que jamais personne ne peut le faire.

Les premiers problèmes locaux posés aux élèves concernent la possibilité de placer 9, 8, 7 ... 1 points sur la grille. L'enseignant demande : « est-ce qu'on est sûr qu'il est possible de placer p points sur la grille sans en aligner 3 ? ». Les raisons sont évidentes et ressemblent à celles utilisés par les élèves dans les phases d'énumération associées à un registre explicatif quotidien : il suffit d'exhiber une disposition de points respectant les contraintes. La différence entre le possible quotidien et le possible mathématique est ici ténue, les formulations choisies sont essentielles pour inscrire les solutions raisonnées au niveau de la rationalité mathématique : « on est sûr qu'il est possible de placer 9 points sur la grille, la preuve on l'a fait sur cette grille » ; « on est sûr qu'il est possible de placer 8 points sur la grille, si on en enlève un sur la grille de 9, il n'y aura toujours pas d'alignement ».

Les problèmes suivants portent sur des impossibles évidents : « est-ce qu'on est sûr que jamais personne ne pourra placer 26 points sur la grille sans en aligner 3 ? » ; « est-ce qu'on est sûr que jamais personne ne pourra placer 25 points sur la grille sans en aligner 3 ? ». Ces problèmes sont rapidement traités : « jamais personne ne pourra poser 26 points car il n'y a que 25 intersections ! » ; « jamais personne ne pourra poser 25 points car sinon il y en aura 1

point à chaque intersection, il y aurait des alignements de 5 points. ». À l'issue de ces recherches, l'espace de recherche est réduit et l'espace des solutions est explicite (figure 3) ; des exemples d'arguments possibles et impossibles associés à un REX mathématique ont été produits par les élèves.

Figure 3 - la file numérique complétée



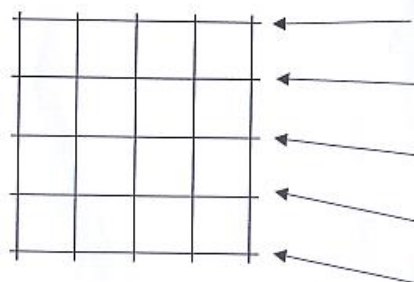
Source : L'auteure

L'enjeu est alors de réduire encore l'espace de recherche, il s'agit de savoir jusqu'où on peut faire des croix sur la ligne, autrement dit « est-ce qu'on est sûr que jamais personne ne pourra faire 10, 11, 12, ... 24 ? ». Aborder ces problèmes de front avec des élèves de 8 à 11 ans est complexe et peut être chronophage. L'enjeu est que les élèves donnent à la contrainte de la consigne « pas plus de deux par ligne » le statut de conditions du problème et donc de raison de l'impossibilité de placer 11 ou plus sur la grille sans en aligner 3. Pour cela travailler sur les problèmes 11 ou 12 est suffisant. De plus, revenir à un travail long sur la formulation de conjectures et de raisons associées à ces conjectures ne garantit pas la production des raisons produites en référence à un registre explicatif mathématiques ; les élèves risquent au contraire de rebasculer vers un registre explicatif quotidien. Aussi, il a été choisi qu'après un court moment où on laisse aux élèves le temps de se faire une idée, l'enseignant affirme que personne ne pourra jamais trouver 12 et demande aux élèves de dire pourquoi. Par ailleurs, il semble difficile de permettre le changement de statut visé sans revenir à un travail sur les grilles. Mais, pour autant, il s'agit



d'éviter un retour vers l'énumération qui produit des solutions singulières. Nous avons donc introduit une « boîte à croix » à cette étape de la séance pour répondre à ces contraintes (figure 4).

Figure 4 - la boîte à points.



Source : Hersant (2010)

Cet artifice didactique oblige à chercher combien de points on peut mettre sur chaque ligne sans avoir à se poser la question des alignements en dehors de ceux sur une ligne de la grille. La boîte à croix va ainsi permettre de produire des caricatures (« pour placer 12 sur la grille, on peut mettre 2 sur la première ligne, 3 sur la deuxième... ») dont la critique conduit à expliquer que « jamais personne ne pourra mettre 12 points sur la grille sans en aligner 3 parce que sinon il y a forcément au moins une ligne avec 3 points. ». L'argument est aussi valable pour montrer que 11 est impossible. Ces résultats permettent de réduire encore l'espace de recherche (« si 12 est impossible, 13, 14... le sont aussi »).

La raison de l'impossible obtenue par la critique de solutions à 12 et 11 points est ensuite reprise en une condition de possibilité d'une éventuelle solution à 10 points : « sur la première ligne, je peux placer 0, 1 ou 2 points, sur la deuxième ligne... sur la cinquième ligne, je peux placer 0, 1 ou 2 points. Au plus, on peut

donc 10 points sans en aligner 3 ». Cela se fait à partir d'une question : « quel est le mieux que l'on pourrait faire et pourquoi ? »

Les solutions des différents problèmes locaux travaillés permettent de conclure sur la solution du problème pour la classe : à l'issue de la séance, la solution est soit 9 soit 10. Mais cette solution n'est pas le but de la séance. Il s'agit en effet d'établir une solution raisonnée du problème et des savoirs sur ce qui permet de justifier le possible et l'impossible dans un registre explicatif mathématique. Les savoirs mis en texte au cours et à la fin de la séance doivent donc renvoyer à ces deux niveaux. Des formulations comme les suivantes, établies au fil de la séance et reprises en fin de séance, rappellent les arguments non acceptables en mathématiques et les types d'arguments acceptables pour montrer le possible et l'impossible en mathématiques :

- Plusieurs d'entre vous ont réussi à placer 9 points sur la grille sans en aligner 3. C'est une preuve qu'on peut placer 9 points. Il suffit d'avoir un exemple comme celui-ci pour affirmer qu'on peut placer 9 points.
- Par un petit raisonnement, on a prouvé que jamais personne ne pourrait placer 11 points sans alignement de trois points.
- Personne dans la classe n'a réussi à placer 10 points sur une grille mais peut-être qu'avec plus de temps l'un de vous peut le faire ou peut-être que quelqu'un extérieur à la classe peut le faire. On ne le sait pas. Ne pas réussir ne signifie pas que c'est impossible.
- Personne dans la classe n'a réussi à



compléter avec un dixième point une des grilles qui comporte 9 points. Mais, peut-être que sur d'autres grilles avec 9 points, on peut le faire. On ne le sait pas. On ne peut donc pas conclure que la meilleure solution est 9. Par contre, on est sûr que 9 est possible, que 11 est impossible. La solution du problème est donc soit 9, soit 10. Pour l'instant on ne le sait pas.

DISCUSSION

Dans la présentation de notre exemple, nous avons choisi de mettre en évidence comment nous avons traduit les idées de solutions raisonnées d'un problème et de savoirs problématisés inscrits dans une pratique scientifique qui caractérisent la modélisation des savoirs dans le CAP. Nous avons aussi choisi d'illustrer particulièrement les conditions que nous avons installées pour permettre les dénivelés épistémiques nécessaires à l'inscription du travail du problème dans un REX mathématique et non dans le REX de l'empirisme naïf dans lequel se situent la plupart des élèves au début de la séance. Dans cette présentation, le jeu entre les trois registres de l'activité scientifique – registre empirique, registre des nécessités, registre explicatif – est peu explicité. En réalité ce jeu est bien présent et c'est d'ailleurs son étude a priori, sous la forme d'un espace de contraintes – que nous n'avons pas la place de reproduire ici – qui est à l'origine de la conception de la « boîte à points »

(voir HERSANT, 2010, p. 158 – 164). En effet, les premiers tests de la situation dans une classe ont mis en évidence la difficulté des élèves à attribuer à la condition « pas 3 points alignés » associée pour eux à la consigne, donc à une condition posée par l'enseignant, un statut de nécessité du problème. Il a fallu imaginer une façon d'opérer ce changement de statut sans donner la solution du problème. Pour cela, un changement de cadre (DOUADY, 1986) a été utile. En effet, probablement parce que les élèves de cet âge associent clairement le cadre arithmétique aux mathématiques, l'impossibilité d'obtenir 12 en faisant la somme de cinq nombres inférieurs ou égaux à 2 est construite facilement avec un statut apodictique. La raison de cette impossibilité peut ainsi ensuite être traduite en la nécessité d'avoir au plus 2 points par ligne.

L'introduction de la file numérique qui permet une explicitation de l'espace de recherche et de l'espace des solutions répond à une autre difficulté identifiée au cours de l'analyse *a priori*. Il s'agit en effet de créer un milieu partagé dans la classe (au sens de la théorie de situations, c'est-à-dire les énoncés, résultats, savoirs et connaissances naturalisés fournis dans l'énoncé du problème ou apportés par la résolution de questions précédentes) pour favoriser le doute et donc la recherche de nécessité. Cette file numérique y contribue dans la mesure où, outre le fait qu'elle met en évidence ce que l'on sait sur le problème, elle



met en évidence ce que l'on ne sait pas.

Par ailleurs, il n'aura pas échappé au lecteur que le choix des problèmes d'optimisation présente l'intérêt de permettre des rétroactions utiles pour invalider les arguments associés à un registre explicatif de type empirisme naïf. Cette condition qui renvoie à la propriété rétroactive du milieu (au sens de la théorie des situations didactiques) a été importante dans le choix des problèmes. Ainsi le CAP structure la conception de la séance par la modélisation des savoirs qu'il propose, mais l'ensemble des conditions didactiques mises en place s'appuient aussi sur d'autres cadres théoriques.

Nous avons insisté au début de cet article sur le fait que le CAP relève d'une épistémologie de la construction du problème et non d'une épistémologie de la solution du problème. Dans l'exemple donné, ce qui illustre particulièrement cette idée est le dénivelé épistémique qui consiste à passer d'arguments « contre », qui invalident des solutions, à des conditions de possibilité des solutions du problème, construit comme un problème mathématique, c'est-à-dire à des nécessités mathématiques. En transposant aux mathématiques une phrase de Doussot (DOUSSOT, 2017, p. 27), nous pouvons dire qu'un problème mathématique se déploie lorsqu'un modèle est mathématisé par confrontation à des données qui en récuse l'évidence explicative.

CONCLUSION

Dans cet article, nous avons montré l'intérêt du CAP pour revisiter la question de l'apprentissage de la résolution de problème en mathématiques. En associant étroitement construction de savoirs et construction de problème, le CAP permet de ne pas limiter l'apprentissage de la résolution de problème à des démarches générales comme l'apprentissage de la démarche scientifique ou la démarche d'investigation (HERSANT, 2022 ; HERSANT & ORANGE-RAVACHOL, 2015). Ce cadre invite à identifier des savoirs de résolution de problèmes plus précis, en lien avec le développement d'un registre explicatif mathématique. C'est l'idée d'épistémologie régionale de Bachelard (BACHERARD, 1949).

Nous avons aussi mis en évidence comment la caractérisation des savoirs dans le CAP fournit des conditions pour la conception de situations, de façon complémentaire à d'autres cadres didactiques comme la théorie des situations didactiques ou les jeux de cadres. En particulier, le concept de caricature dont la fonction est de permettre, grâce à des sauts épistémiques, de permettre la production des raisons d'une solution — au sens de ça ne peut pas être autrement — nous semble particulièrement intéressant.

L'exemple choisi relève de l'apprentissage de savoirs sur la résolution de problèmes mais les conditions explicitées dans cet article



permettent la conception de situations pour l'apprentissage de savoirs notionnels. La thèse de Grau en propose un cas particulièrement détaillé pour l'apprentissage du concept d'affinité en seconde (GRAU, 2017).

Le CAP fournit aussi des outils intéressants pour analyser l'activité d'élèves et identifier plus précisément les REX qu'ils mobilisent pour résoudre des problèmes issus de différents domaines des mathématiques à différents niveaux de scolarité (HERSANT, 2022; HERSANT & QUINIOU, 2017 ; HANKELN & HERSANT, 2020 ; CHOQUET, GRAU, HERSANT, LEGRAND & ZEBICHE, 2022).

REFERENCES

- ARSAC, G.; GERMAIN, G.; MANTE, M. **Problèmes ouverts et situations-problèmes**. Lyon: IREM de Lyon, 1991.
- BACHELARD, G. **Le rationalisme appliqué**. Paris: PUF, 1949. (Quadriges).
- BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble: Pensée sauvage, 1998.
- CHOQUET, C.; GRAU, S.; HERSANT, M.; LEGRAND, J.-M.; ZEBICHE, N. Le travail mathématique à l'aune du cadre de l'apprentissage par problématisation: conception de situations et conditions pour la construction de nécessités pour les élèves. *Em: SYMPOSIUM ETM7, STRASBOURG.*, 2022, Strasbourg.
- DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 5–31, 1986.
- DOUSSOT, S. Modélisation des problématisations historiques en classe et chez les historiens. **Recherches en éducation**, 2017.
- DOUSSOT, S.; HERSANT, M.; LHOSTE, Y.; ORANGE-RAVACHOL, D. Introduction: origine et développement du cadre de l'apprentissage par problématisation. *Em: Doussot S., Hersant M., Lhoste Y., Orange-Ravachol D. (Eds.). Le cadre de l'apprentissage par problématisation. Apports aux recherches en didactiques*. Rennes: Presses Universitaires de Rennes, p. 7–22, 2022.
- FABRE, M.; ORANGE, C. Construction des problèmes et franchissement d'obstacles. **ASTER**, v. 24, p. 37–57, 1997.
- GRAU, S. **Problématiser en mathématiques: le cas de l'apprentissage des fonctions affines**. 2017. Thèse de doctorat - Université de Nantes, Nantes 2017.
- HANKELN, C ; HERSANT, M. Processus de modélisation et processus de problématisation en mathématiques à la fin du lycée – Une étude de cas conjuguant des approches de recherche en Allemagne et en France. **Éducation et didactique**, v. 14, n. 3, p. 39–67, 2020.
- HERSANT, M. **Des problèmes pour chercher à l'école primaire**. Nantes: IREM des Pays de la Loire, 2005, Disponible em: <https://irem.univ-nantes.fr/category/publications>.
- HERSANT, M. **Empirisme et rationalité à l'école élémentaire, vers la preuve au cycle 3**. 2010. 202 f. Mémoire de recherche, Habilitation à Diriger des recherches - Université de Nantes, Nantes 2010. Disponible em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01777604>.



HERSANT, M. L'usage du CAP en didactique des mathématiques : quels apports possibles? *Em*: A. Chesnais, H. Sabra, (Eds.). **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2020**. Paris, p. 202–224, 2021.

HERSANT, M. “**Problèmes pour chercher**” : **experience, possible and necessity in pupils reasonings**. Disponível em: <https://hal.science/hal-03662897>. Acesso em: 17 fev. 2023.

HERSANT, M. Recherche et résolution de problèmes dans l'enseignement des mathématiques : une étude didactique pour identifier les savoirs et les apprentissages possibles. *Em*: ELALOUF, M.-L. ; ROBERT, A. ; BELHADJIN, A ; BISHOP, M.-F. **Les didactiques en question(s). état des lieux et perspectives pour la recherche et la formation**. Bruxelles: De Boeck, p. 192–202, 2012.

HERSANT, M.; ORANGE-RAVACHOL, D. Démarche d'investigation et problématisation en mathématiques et en SVT : des problèmes de démarcation aux raisons d'une union. **Recherche en Education**, n. 21, p. 95–108, 2015.

HERSANT, M.; QUINIOU, A.-C. Conditions didactiques d'une activité mathématique au lycée professionnel : deux études de cas. **Spirale**, v. 59, p. 107–122, 2017.

HERSANT, M.; THOMAS, Y. Quels savoirs mathématiques dans les problèmes pour chercher à l'école élémentaire ? Le cas de problèmes d'optimisation au cycle 3. *Em*: **ACTES DU 35È COLLOQUE DE LA COPIRELEM, 2009, Bombannes**. Bombannes: IREM de Bordeaux, 2009. Disponível em:

<https://www.arpeme.fr/documents/7B2350EFA82EDDE513C6.pdf>.

ORANGE, C. Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques. **Les Sciences de l'éducation - Pour l'Ère nouvelle**, Caen, v. 38, n. 3, p. 69–94, 2005a.

ORANGE, C. Problématisation, savoirs et apprentissages en sciences. *Em*: FABRE, M. ; VELLAS, E. (Eds). **Situations de formation et problématisation**. Bruxelles: De Boeck, p. 75–90, 2006.

ORANGE, C. Problèmes, savoirs et problématisation : l'exemple des activités scientifiques. *Em*: Durand, M. ; Fabre, M. (Eds). **Les situations de formation entre savoirs, problèmes et activités**. Paris: L'Harmattan, p. 191–210, 2007.

ORANGE, C. Situations forcées, recherches didactiques et développement du métier enseignant. **Recherches en éducation**, n. H.S. 2, p. 73–85, 2010.

ORANGE, C.; ORANGE-RAVACHOL, D.; LHOSTE, Y.; CHALAK, H. L'apprentissage par problématisation en SVT. *Em*: Doussot, HERSANT, LHOSTE, ORANGE-RAVACHOL (Eds). **Le cadre de l'apprentissage par problématisation. apports aux recherche en didactique**. Rennes: PU Rennes, p. 23–39, 2022.

ORANGE, C.; ORANGE-RAVACHOL, D. Problématisation et mise en texte des savoirs scolaires : le cas d'une séquence sur les mouvements corporels au cycle 3 de l'école élémentaire. *Em*: **ACTES DES CINQUIÈMES JOURNÉES SCIENTIFIQUES DE L'ARDIST, LA GRANDE MOTTE, 2007**. Disponível em:



<http://www.aix-mrs.iufm.fr/ardist>.

PLUVINAGE, F. Didactique de la résolution de problèmes. **Annales de didactiques et de sciences cognitives**, v. 3, p. 7–34, 1990.

