CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 211 – 237
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Didactique des mathématiques: de questions empiriques a des choix systématiques de compréhension de l'enseignement

Didactic of mathematics: from empirical questions to systematic choices for

Marc **ROGALSKI**[1],
Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Cité, et Institut Mathématiques de Jussieu, Sorbonne Université, France.
Aline **ROBERT**[2],
Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Cité, France.
Janine **ROGALSKI**[3],
Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Cité, France.

Correspondance:

[1]marc.rogalski@imj-prg.fr
[2]robertaline@orange.fr
[3]rogalski.muret@gmail.com

RESUMÉ

A partir de questions empiriques concernant l'enseignement des mathématiques, nous formalisons des idées générales en didactique des mathématiques. Les questions initiales concernent souvent les ruptures (collège/lycée, lycée/université), les difficultés chez les élèves ou étudiants, parfois très persistantes, et même des problèmes chez les enseignants. Les idées générales qu'apportent la didactique des mathématiques concernent particulièrement la compréhension avec des points de vue divers : l'épistémologie des notions mathématiques à enseigner, le découpage qu'en font les curricula, les problèmes cognitifs des élèves ou étudiants, le déroulement dans les classes, les pratiques des enseignants. Sur des exemples variés, nous illustrons ces éléments de compréhensions, avec leur portée et leurs limites. Ces exemples sont les suivants : l'intégrale (dans la terminale du lycée et l'université), le théorème de Thalès (au collège), l'implication, la récurrence et la récursivité (au lycée et à l'université).

Mots-clés: Epistémologie, Enseignement, Enseignants, Pratiques.

ABSTRACT

Based on empirical questions concerning mathematics teaching, we formalize general ideas in didactic of mathematics. The initial questions often concern breaks (middle school/high school, high school/university), difficulties among pupils or students, sometimes very persistent, and even problems among teachers. The general ideas provided by mathematics didactics are particularly relevant to understanding mathematics from a variety of viewpoints: the epistemology of the mathematical concepts to be taught, the way they are broken down in curricula, the cognitive problems of pupils and students, classroom procedures and teachers' practices. We use a variety of examples to illustrate the scope and limits of these understandings. The examples are: the integral (in senior high school and university), Thales' theorem (in junior high school), implication, recurrence and recursion (in senior high school and university).

Keywords: Epistemology, Teaching, Teachers, Practices.

Reçu dans 12/10/2023
Approuvé en 12/11/2023

INTRODUCTION

Des entrées empiriques – c'est-à-dire qui ne sont pas considérées dans le cadre d'une théorie particulière – sont souvent prises comme des points de départ des analyses d'enseignements : une difficulté persistante sur un point d'enseignement (ponctuel ou de plus grande envergure), des préoccupations d'enseignants. Par exemple, les programmes changent parfois, ainsi que les curricula sur une notion : cela oblige les enseignants à des adaptations notables, qui demandent réflexion et expérimentation. On peut citer l'inversion dans les programmes entre les triangles semblables et le théorème de Thalès, ou bien le changement de l'intégrale définie comme primitive ou comme celui de la notion d'aire sous un graphe de fonction, ou bien une apparition des équations différentielles de la physique au lycée, parfois travaillées, puis disparues…

De même, ce qu'il y a à enseigner d'un concept mathématique peut changer plus ou moins d'un niveau de scolarité à un autre : ainsi explique-t-on en partie les « ruptures », par exemple du collège au lycée, du lycée à l'université. Un bon exemple à ce sujet est constitué par l'irruption du formalisme en seconde et surtout dans l'enseignement supérieur.

De façon générale, des enseignants, des classes, des inspecteurs, des ministres, des commissions de programmes, des institutions, voire des organisations sociales, ont des questions nombreuses à se poser, parfois contradictoires; certaines peuvent alimenter les travaux didactiques:

- Entre mathématiques en jeu et approches cognitives des élèves, les introductions à choisir pour les notions ainsi que les articulations didactiques à organiser ;
- Plus généralement, des notions mal conceptualisées par les élèves ou étudiants, des difficultés persistantes et les itinéraires cognitifs des élèves à essayer de mettre en place ;
- Les curricula retenus dans les programmes ;
- Les besoins des enseignants et les évolutions souhaitables de la formation des maîtres ;
- Les transpositions diverses des mathématiques, entre mathématiciens, historiens, enseignants…
- Des manuels parfois (souvent ?) contradictoires…

Les chercheurs en didactique des mathématiques peuvent étudier, soit de façon assez générale, soit sur des points très particuliers, comment interviennent ces questions, et comment les réponses qu'ils apportent peuvent nourrir, les enseignants, voire les décideurs et les curricula. Pour ne donner qu'un exemple les didacticiens peuvent ainsi dévoiler de grandes contradictions entre une ambition légitime, en termes de conceptualisation[1] de notions mathématiques et un enseignement comportant des portées et des limites (programmes incohérents, enseignants parfois pas assez formés, pression

[1] La conceptualisation désigne à la fois le processus menant aux acquisitions des nouvelles connaissances, c'est-à-dire à leur disponibilité (utilisation correcte à bon escient) et à leur organisation dans les connaissances antérieures, et ces acquisitions elles-mêmes (le produit) (cf. Vergnaud).

des examens…).

La première partie de l'article présente la démarche globale que nous suivons : à savoir établir une compréhension multiple des notions à enseigner pour en aborder l'enseignement et l'apprentissage.

Compréhension spécifique mathématique, épistémologique et actuelle, motivée par la didactique, et aussi compréhension didactique renseignée par l'analyse des pratiques des enseignants et des activités cognitives des élèves, souvent menée à partir de celle des déroulements des séances en classe, et comportant une analyse des mathématiques en jeu dans les programmes et des difficultés des élèves servant de référence (relief). Suivent les questions qu'on peut se poser à la suite de ces analyses.

La deuxième partie est dévolue à deux exemples, permettant d'illustrer la démarche. L'un concerne l'enseignement de l'intégrale à partir de la classe terminale (grade 12) et donne à voir un scénario d'introduction largement documenté, en particulier sur les raisons d'être de la notion. L'autre est une étude de séances filmées en classe, sur l'introduction du théorème de Thalès en troisième (grade 9), qui illustre les analyses correspondantes. Un exemple d'étude de raisonnement en relation avec les activités cognitives des élèves termine les exemples.

I. UNE APPROCHE DIDACTIQUE PAR UNE COMPREHENSION MULTIPLE

Nous considérerons ici essentiellement trois domaines de compréhension, imbriqués :

* Les concepts mathématiques à enseigner (compréhension épistémique et actuelle) – cela implique un questionnement sur les savoirs concernés, particulièrement les concepts et leur organisation (enquête épistémologique) et les programmes ;

* La cognition chez les élèves, les pratiques des enseignants, les déroulements en classe (compréhension didactique) et les questions afférentes sur l'élaboration d'un itinéraire cognitif prenant en compte les résultats des enquêtes épistémologique didactique.

* La compréhension sociétale (besoins sociétaux, formations des maîtres).

Il nous semble qu'il est nécessaire d'expliciter les trois domaines de compréhension sur les problèmes généraux que nous avons pointés (buts pour l'enseignement des mathématiques, évolution de la société, curriculums), ou sur des questions plus précises sur tels ou tels concepts mathématiques, sur des articulations globales, sur des enseignements détaillés, sur le relief dans les classes. Par « relief » nous entendons une analyse croisant des éléments mathématiques spécifiques de la notion à enseigner, les programmes à considérer et les difficultés déjà connues des élèves (décrites dans des recherches ou faisant partie du bagage professionnel commun). Cela permet de caractériser les mathématiques à enseigner en précisant le découpage qu'en font les programmes, une approche de la transposition didactique, et en intégrant les aspects cognitifs déjà repérés. Ce relief, contrairement à ce qui est dégagé dans les études épistémologiques, est relatif à un niveau scolaire donné et à une période donnée : selon les programmes en particulier, une notion peut être présentée comme une extension de ce qui précède (et cela va être partiellement le cas pour le théorème de Thalès, traité ci-dessous), ou s'avérer éloignée de ce que les élèves connaissent déjà, comme c'est le cas par exemple pour la formalisation de la notion de croissance (Robert et Rogalski, 2022). Et cela a des conséquences sur les difficultés des élèves et sur les introductions envisageables.

Puis nous développerons des exemples qui montreront comment ces compréhensions articulent les mathématiques en jeu, les programmes et les enseignements proposés aux classes par les enseignants.

I.1. COMPREHENSION MATHEMATIQUE

Globalement, nous proposons deux entrées :

* La compréhension des concepts en jeux avec l'analyse de l'élaboration progressive d'un domaine mathématique à enseigner ;

* La compréhension actuelle.

I.1.1 La compréhension des savoirs en jeu, outillée par l'épistémologie et l'histoire

Il s'agit essentiellement de répondre à des questions qui demandent des enquêtes épistémologiques et historiques, orientées par la didactique. Voici quelques-unes de ces questions :

* Quels champs de problèmes sont apparus dans la construction de ces domaines mathématiques ou ces notions particulières ?

* Ces problèmes viennent-ils des mathématiques ou d'autres domaines (techniques, scientifiques…) ?

* Les concepts sont-ils apparus d'abord sous leur aspect « outil » ?

* Ont-ils généralisé ou unifié des savoirs antérieurs ?

* Sous quelles formes sont-ils apparus et se sont-ils développés (cadres, registres, dessins, symbolismes…) ?

* Quels sauts qualitatifs et quels détours sont apparus ?

De façon générale, nous dégagerons des catégorisations épistémologiques globales de certains savoirs objets d'enseignement, dont on pourra peut-être déduire des conséquences didactiques:

* **Des savoirs RAP** (« réponse à un problème ») : ils sont développés explicitement ou implicitement pour résoudre un ou plusieurs problèmes ; ils apparaissent dans le cas de « situations fondamentales » au sens de la TSD (Brousseau, 1998) ou plus généralement de problèmes demandant la production de nouveaux outils ou de nouveaux objets (Douady, 1986). Nous étudierons ici le cas de l'intégrale avec le lien avec la physique et la mesure des grandeurs ;

* **Des savoirs EDC** (« extensions de concepts ») : ce sont des extensions de concepts antérieurs ou des distinctions plus fines dans de tels concepts ; c'est le cas des successions d'ensembles de nombres (rationnels, décimaux, réels), le passage de la continuité à l'uniforme continuité, de la convergence simple à la convergence uniforme ;

* **Des savoirs EDO** (« extensions de domaines de certaines opérations ») : par exemple des opérations de certains ensembles de nombres à d'autres, des transformations géométriques, certaines opérations de l'algèbre ;

* **Des savoirs FUG** (« formalisant, unifiant et/ou généralisant) : ces idées formalisent, unifient et généralisent des savoirs antérieurs, souvent dans des domaines différents ; ce sont initialement les travaux sur l'enseignement universitaire de l'algèbre linéaire qui ont conduit à développer cette

notion de FUG (ROBERT & ROBINET 1989 ; DORIER, 1992) : unification de domaines différents (équations linéaires, déterminants, formes quadratiques transformations, géométrie cartésienne, calcul vectoriel), généralisations (algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^n$, dimension infinie, analyse), formalisation (axiomatisation et algèbre, matrices, espaces de Banach). D'autres concepts proches des FUG semblent aussi exister dans certains domaines : la formalisation avec quantificateurs dans la notion de limite (en particulier des suites), le passage à l'algèbre au collège, les grandes évolutions de la notion de fonction (fin de collège, lycée et université). Dans l'histoire, la construction du symbolisme algébrique de Viète et de Descartes (SERFATI, 2009) peut aussi paraître comme une théorie FUG…

I.1.2 LA COMPREHENSION MATHEMATIQUE ET EPISTEMOLOGIQUE ACTUELLE

Souvent, il s'agit de réfléchir sur un domaine assez large d'une notion à enseigner, parfois aussi de préciser un concept plus particulier. Voici quelques questions :

* Quel est le développement actuel du domaine mathématique, est-il en un sens toujours en activité dans la recherche contemporaine, ou bien « obsolète » (même néanmoins « classique », comme par exemple la géométrie des triangles) ?

* Certaines notions de mathématiques devenues très familières aux enseignants sont « naturalisées », « allant de soi », alors que les élèves ou les étudiants rencontrent des difficultés. Cela peut les obliger à remettre en débat leurs enseignements. Quelle formation ont-ils reçu sur ce domaine ?

* Quels sont les liens avec d'autres domaines enseignés en mathématiques ? Avec des savoirs d'autres champs (physique, économie, informatique, etc.) ?

* Quels champs de problèmes actuels apparaissent pour l'enseignement ? La notion de *champ conceptuel* (VERGNAUD 1990) appliquée à un domaine actuel peut permettre de l'organiser pour des pratiques en classe.

* Le domaine à enseigner apparaît-il artificiel ou formel, ou peut-on imaginer des « raisons d'être » pertinentes pour des élèves ou des étudiants ?

Nous étudierons plus loin l'exemple, pour l'intégrale, de la classe de terminale à la licence de l'université, des curriculums et de l'épistémologie, et les conséquences d'un point de vue didactique.

I.2 LA COMPREHENSION DIDACTIQUE

Elle se base sur l'étude des pratiques, des déroulements et des activités des élèves. Pour analyser l'activité de l'enseignant et celle de l'élève (des élèves) en classe, une approche de psychologie cognitive inscrite en théorie de l'activité constitue une dimension différente de celles des approches didactiques « classiques » (que ce soit la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau (voir BROUSSEAU 1998 ou 2013), ou de la théorie anthropologique du didactique d'Yves Chevallard (1999). Enseignant et élèves y sont considérés comme des personnes individuelles (des « sujets » psychologiques) et pas seulement des sujets de l'institution didactique. Cela conduit à analyser de manière articulée les pratiques de l'enseignant en classe de mathématiques et les activités cognitives des élèves en classe, motivées et suscitées par l'activité de l'enseignant. Sur la base de cette dualité de perspectives théoriques pour l'analyse des pratiques et des activités, la Double Approche élaborée par Aline Robert et Janine Rogalski (ROBERT & ROGALSKI, 2002 ; 2005 ; VANDEBROUCK, 2008, 2013) propose un cadre théorique pour l'étude de ces pratiques en vue de et par l'intermédiaire de l'étude des processus d'enseignement / apprentissage en classe de mathématiques ; elle est présentée ci-après.

I.2.1. LA DOUBLE APPROCHE (DA) ET L'ANALYSE DES PRATIQUES EN CLASSE

La Double Approche (dénotée DA dans la suite) intègre une analyse didactique, orientée par le contenu mathématique, objet de l'enseignement pour l'enseignant et de l'apprentissage pour l'élève, et une analyse cognitive qui met au centre l'activité des acteurs. Mais une spécificité supplémentaire de la DA, en relation avec la considération des enseignants comme sujets psychologiques, est la prise en compte de la complexité des pratiques : y participent en effet les contraintes du métier, aussi bien institutionnelles que sociales, que l'on propose d'intégrer à leur compréhension, tirée des analyses de ce qui se passe en classe. Cela amène à définir des composantes de ces pratiques à imbriquer pour en déduire, par exemple, des logiques d'action individuelles qui les caractérisent.

Ainsi les choix de contenus et de déroulements des enseignants pour leurs élèves (dimensions respectivement *cognitive* et *médiative* dans la DA) sont rapportés à la fois au contenu à enseigner dans le contexte d'un programme à suivre, au suivi des programmes, aux difficultés des élèves répertoriées ou prévisibles et à la recherche d'un minimum de confort au quotidien (dans la DA, ces deux derniers éléments renvoient à la composante « personnelle » des pratiques). Cela s'appuie sur le *relief* sur la notion enseignée ; l'exemple du théorème de Thalès au collège illustrera ce type d'analyse. C'est cet ensemble qui, pour nous, permet de comprendre les pratiques individuelles, et, à terme, d'espérer contribuer à leur formation.

Nous présentons d'abord la question de l'activité des élèves, considérant d'une part que leur apprentissage est une visée de l'enseignement et d'autre part que cet apprentissage résulte de l'activité mathématique des élèves (hypothèse de travail dans les lignes développementales de Piaget et de Vygotsky).

1.2.2. L'ACTIVITE COGNITIVE DE L'ELEVE

Concernant l'élève, il s'agit d'étudier conjointement la conceptualisation et l'activité dans la résolution de problèmes notamment. Nous nous situons dans la ligne de Gérard Vergnaud (1990 ; 2006), pour qui, d'une part, la résolution de problèmes est la source et le critère du savoir, d'autre part, la conceptualisation a sa source dans l'action. Notre parti pris (ou hypothèse de travail didactique) est que la conceptualisation[2] est une visée centrale de l'enseignement des mathématiques, au-delà de l'apprentissage de procédures pour des gammes de tâches prédéfinies. Un problème est ici une situation - au sens courant du terme – que les élèves doivent traiter mathématiquement, que les mathématiques en jeu soient outils ou objets.

Nous considérons ici un élève « générique », sachant que dans la classe l'enseignant a affaire à un ensemble d'élèves, hétérogène quant aux postures vis-à-vis des mathématiques enseignées, et quant à l'état des connaissances *déjà-là*. L'activité considérée ne se limite pas à ce qu'on peut en observer par les

[2] Rappelons la référence à Vergnaud sur la conceptualisation explicitée dans la note 1.

productions orales ou écrites des élèves, on infère aussi « en amont » des observables (la réflexion, l'anticipation, le contrôle, etc.) la présence et la nature des activités des élèves.

Le cadre de référence pour étudier la conceptualisation et la résolution de problème par l'élève est celui de la théorie de l'activité, développée par Léontiev (1978), à la suite de Vygotsky (1934/1997). Léontiev définit plusieurs niveaux : l'activité, qui répond à un « motif » (un mobile, une raison d'être) de nature assez globale ; les actions finalisées qui répondent spécifiquement à un but à atteindre ; les opérations qui sont des moyens de réaliser ces actions, et qui tiennent compte des ressources et des contraintes présentes dans la situation. Dans la classe, ce sont les deux derniers niveaux qui dominent et c'est leur ensemble que certains didacticiens étudient sous le terme « activité de l'élève »[3]. Le niveau des « motifs » apparaît plutôt dans le long terme de l'activité de l'élève quand celui-ci vise non seulement la réussite à la tâche en cours mais aussi la compréhension qui lui permettra d'apprendre, c'est-à-dire quand l'élève est partie prenante de son apprentissage.

La référence à la théorie de l'activité dans le contexte de l'enseignement / apprentissage est orienté par une conception développementale (partagée par Piaget et Vygotsky), qui considère que l'élève apprend, d'une part des tâches et d'autre part des interventions enseignantes. Toutefois, toutes les situations ne permettent pas les apprentissages : pour Vygotsky (1997/1934) il y a progression si les tâches à accomplir par l'élève se situent dans sa « zone proximale de développement » (ZPD). Dans notre contexte, cela signifie que les tâches mathématiques prescrites à l'élève demandent un travail dans lequel il peut s'engager (il comprend « suffisamment » le problème), mais qu'il ne peut accomplir seul, sans l'aide d'un « mieux sachant ». Celui-ci est le plus souvent l'enseignant qui « étaye » le travail de l'élève par des interventions s'appuyant sur ce que l'élève sait déjà (plus précisément ce que l'enseignant pense que l'élève comprend et sait faire). Cela peut aussi être un élève qui apporte un élément favorable à l'engagement ou la résolution de la tâche ; cet élève est en général plus « avancé », mais il peut aussi seulement apporter un élément qui va jouer pour d'autres élèves un rôle de déclencheur. Dans la ligne de Vygotsky, Bruner (WOOD, BRUNER & ROSS, 1976) a défini plusieurs fonctionnalités de ces interventions qui touchent à l'engagement de l'élève dans la tâche et à sa progression dans son traitement. Cette médiation a été étudiée par exemple dans (PARIES, ROBERT & ROGALSKI, 2009). Nous n'y revenons pas ici.

En fait, le rapport savoir mathématique / élève peut être considéré de plusieurs points de vue : 1) à partir des propriétés « intrinsèques » des objets et problèmes mathématiques, identifiables via des observables (dont les documents d'épistémologie et d'histoire) et des analyses orientées par le contenu mathématique sur les processus d'évolution de ces objets et problèmes ; 2) en considérant les dispositifs d'enseignement mis en œuvre : cela va des programmes et instructions à l'action (activité) de l'enseignant dans la classe gérant le déroulement de la réalisation par les élèves des tâches qu'il a programmées, en passant par

[3] Certains chercheurs évoquent aussi ce terme comme ce que dit ou non, fait ou non, pense l'élève, associé en partie à ce que provoque, en pensée et en actes, ce que dit et montre l'enseignant. Dans la classe nous avons seulement un accès aux activités possibles à partir des traces obserables.

les manuels dont disposent les élèves en considérant les opérations cognitives propres à l'élève (comme individu, sujet psychologique). Ces opérations sont impliquées dans la compréhension (conceptualisation) par l'élève d'éléments mathématiques, et dans la réalisation des tâches. Dans les activités mathématiques de multiples processus psychologiques « généraux » interagissent avec les contenus en jeu : catégorisation et utilisation d'analogies, reconnaissance et extension de propriétés connues, raisonnements, calculs, interprétations et changements de point de vue... Par rapport à la théorie de l'activité de Léontiev (1976), ces opérations sont des « moyens » pour exécuter les actions mathématiques en jeu dans la réalisation des tâches scolaires. Elles apparaissent dans des contextes variés, en étant « marquées » par les contenus mathématiques auxquels elles s'appliquent. On en trouve en particulier des traces dans les adaptations repérées dans les mises en fonctionnement des connaissances mathématiques (HOROKS & ROBERT, 2007), sans que l'accent soit mis sur cette dimension mettant en jeu des opérations intellectuelles générales.

Une approche de psychologie cognitive peut alors être pertinente pour comprendre les difficultés - voire les obstacles - que les élèves doivent dépasser - ou franchir - pour progresser dans un domaine mathématique donné. Nous considérerons de plus près paragraphe II.3.3) l'une de ces difficultés : le « raisonnement sous hypothèse », ou « raisonnement conditionnel », et la récurrence en mathématiques, la récursivité en programmation informatique - en jeu en fin de lycée (grade 12). Ces opérations cognitives appellent toutes à supposer un certain état des objets mathématiques en jeu, sans savoir encore s'il est effectif, et à en inférer un nouvel état.

I.2.3. LE DEROULEMENT DANS LES CLASSES

Notre compréhension de ce qui se passe en classe de mathématiques vise la conceptualisation qui peut se jouer chez les élèves des notions mathématiques enseignées. Il s'agit de saisir, d'apprécier, à la fois le processus de conceptualisation, que l'enseignant contribue à installer, et le produit (cf. note 1).

Cette conceptualisation dépend évidemment du niveau scolaire et se caractérise à partir des programmes, on peut évoquer des niveaux de conceptualisation associés (cf. ROBERT, 2003). Il s'agit pour le chercheur de traduire ce qui est attendu en termes de connaissances précises et de mises en fonctionnement, avec un ensemble de tâches adaptées, des modes de raisonnement et un niveau de rigueur à respecter.

Un travail didactique à mener permet de dégager sur chaque contenu à enseigner au sein d'un programme ce qui est en jeu en termes mathématiques, ainsi que les difficultés des élèves répertoriées ou prévisibles : le relief sur la notion (cf. I), dont des éléments vont être esquissés dans ce qui suit, par exemple le type de notion auquel on a affaire dans un programme donné.

Ce relief sert de référence aux analyses de ce qui se passe en classe, tant du point de vue du scénario proposé, et des analyses de tâche, que du point de vue des activités[4] des élèves à

[4] Le terme activité est ici associé non seulement à ce que l'élève fait mais aussi à ce qu'il dit (ou non), écrit (ou non), pense (ou non)…

partir de ces tâches.

L'analyse de ces activités d'élèves est pour nous le moyen d'accéder, certes partiellement, à la conceptualisation traquée, de comprendre ce qui s'est passé. Partiellement parce que nous n'avons accès qu'aux activités possibles des élèves, et non effectives (inobservables) de chaque élève, et parce que d'autres facteurs, affectifs par exemple, peuvent intervenir, que nous ne prenons pas explicitement en compte. Accès tout de même par une étude fine de ce qui est en jeu dans chaque tâche mis en regard de ce que les élèves en font, avec l'aide de l'enseignant. Cela renseigne à la fois sur l'état des connaissances des élèves et sur les dynamiques d'apprentissage enclenchées par l'enseignant.

Ces dynamiques sont rapportées à nos hypothèses générales sur les apprentissages, qui fournissent des indicateurs pour cette étude des déroulements. Pour résumer, il s'agit d'une part de repérer ce qui est installé par l'enseignant pour à la fois motiver autant que possible les nouvelles connaissances et en faire travailler différents aspects, en les reliant entre eux (cf. relief). Et d'autre part il s'agit de repérer l'organisation prévue du travail des élèves, sa cohérence (cf. scénario) avec l'alternance d'exercices à chercher et d'exposition des connaissances, et, plus localement, d'étudier les dynamiques entre travail des élèves autonome, travail collectif et phases d'« écoute ». Une place importante de nos analyses est réservée à l'accompagnement de ces activités d'élèves par des interactions de l'enseignant, plus ou moins adaptées, en termes de suivi et d'accroche à ce qui peut être en jeu chez les élèves (cf. vigilance et proximités) : c'est notre opérationnalisation du modèle de la ZPD de Vygotsky, que nous avons adopté parmi les hypothèses déjà évoquées.

Ainsi nous analysons les déroulements en classe en étudiant les formes de travail des élèves mais en y ajoutant le détail des interactions entre l'enseignant et les élèves. Il s'agit de repérer ce que les enseignants ajoutent, à l'oral, à leur discours strictement mathématique. Ce peut être par des aides, inividuelles ou collectives, procédurales ou constructives, ou par des décisions amenant à des activités a minima ou a maxima (PARIES & al., 2009). Plus précisément nous étudions la façon dont les enseignantes ou les enseignants relient, à l'oral, les éléments mathématiques en jeu, connus, ou supposés en partie connus des élèves, relevés dans ce qu'ils disent ou font, à ce qui est nouveau (visé ou déjà présenté mais non acquis), on évoque des proximités. Compte tenu de la spécificité du travail mathématique, entre énoncés généraux et exercices particuliers, un des aspects qui est cherché dans les proximités, porteur d'impact potentiel sur les acquisitions des élèves, tient à la distinction entre un appui qui va du contextualisé présent chez les élèves à du décontextualisé introduit (ou à introduire) par le professeur – on évoque alors des proximités ascendantes — ou alors dans le sens inverse, du décontextualisé (le cours notamment) au contextualisé (proximités descendantes), ou alors un appui qui « redit » les choses autrement, au même niveau de généralité (proximités horizontales). Cela peut accompagner, à nos yeux, différentes activités complémentaires nécessaires qui interviennent toutes en mathématiques.

I.3 INFERENCES DIDACTIQUES

A partir d'études épistémologiques de savoirs mathématiques ou de concepts, on se demande si on peut mettre en place des constructions didactiques, selon par exemple des savoirs identifiés, des situations enseignables pour les élèves ou les étudiants, des possibilités pour les enseignants d'élaborer des scénarios. Voici quelques exemples.

* Peut-on imaginer un ensemble de « situations didactiques » permettant aux enseignants de construire des « accès cognitifs » pour les élèves ? Par exemple au moyen de RAP (« réponse à un problème »), avec éventuellement des « situations fondamentales » (nous verrons que c'est le cas de l'intégrale), on peut développer des problèmes assez longs et articulés.

* Existe-t-il d'autres ressorts didactiques ? Par exemple, pour des concepts FUG, on peut créer des problématiques pour remplacer des situations fondamentales, organiser une convergence de thèmes qui unifieront la théorie, utiliser le levier « méta » pour faire comprendre aux élèves ou étudiants l'importance et l'efficacité du détour théorique (y compris des situations méta). Rappelons ici ce qu'on appelle méta (pour métamathématique) : il s'agit de moments où le travail des enseignants et des élèves/étudiants est axé sur une réflexion sur les mathématiques ; on cherche à faire surgir chez les élèves des idées sur des conditions ou des propriétés de certains domaines des mathématiques.

* Selon les idées mathématiques qu'on veut enseigner, on peut souvent utiliser des changements de cadres ou de registres de représentation, à rechercher : par exemple, remplacer une expression analytique par le graphe d'une fonction, ou bien remplacer un problème géométrique par des équations numériques, ou généraliser (plus ou moins formellement) un problème plus immédiat.

* L'importance d'une dialectique outil/objet (gérée par les élèves, ou nécessitant des situations plus construites par les enseignants) peut être actée par un scénario à élaborer pour développer les représentations cognitives des élèves. Par exemple la notion de $\sqrt{2}$ est utile pour jouer entre le calcul ($x^2 = 2$) et la géométrie (diagonale du carré et graphe de xy=2), ou dialectique entre l'évolution progressive d'un rectangle initialement 1x2 vers un carré (une suite numérique apparait alors comme les longueurs de rectangles de même aire s'approchant d'un carré) ; et ceci est souvent facilité par des changements de cadres (DOUADY, 1986 et ROGALSKI, 2002).

* Quel est l'état des élèves ou étudiants relativement aux prérequis, la question de leur zone proximale de développement (voir VIGOTSKY, 1997) permettant l'initiation de scénarios significatifs pour eux.

* Peut-il y avoir des méthodes à enseigner pour la résolution de problèmes dans certains domaines assez circonscrits ?

I.4. QUELS EXEMPLES SOCIETAUX POUR LA COMPREHENSION DES ENSEIGNEMENTS ?

Des idées épistémologiques fréquentes pour des mathématiques avancées, des objectifs globaux cognitifs et sociaux pour l'enseignement des mathématiques, des théories didactiques, peuvent être utilisés pour élaborer et conduire des scénarios dans les classes.

Par exemple, les introductions axiomatiques, dont les raisons ne sont jamais données, sont souvent présentées abruptement dans les curriculums à l'université, voire parfois au lycée (ROGALSKI, 2022). Elles se traduisent souvent par des incompréhensions chez nombre d'étudiants. Ne serait-il pas alors possible de construire des scénarios portant sur des « *raisons d'être* » de certains concepts, voire des problématiques organisées par des théories plus générales, par exemples nécessitées par des processus historiques ?

Il pourrait aussi être nécessaire de faire évoluer des aspects de l'enseignement qui, plutôt artificiels ou formels, pourraient se refonder sur « *la problématique du questionnement du monde* » (voir Chevallard 2019), où des questions seraient inspirées la réalité plutôt que des « belles » histoires mathématiques (voir aussi ROGALSKI, 2021)

Un exemple clé est la notion de « proportionnalité » : alors qu'elle est essentielle pour la formation à la citoyenneté des élèves, son enseignement est trop souvent en échec pour nombre d'élèves et d'adultes. Une approche à la fois didactique et fonctionnelle devrait contribuer à rendre l'enseignement de ce vaste domaine plus efficace.

II. DES EXEMPLES DETAILLES

Dans notre approche, les trois compréhensions présentées en I. toujours orientées par le questionnement didactique sont à imbriquer. Cependant, selon les recherches cette imbrication n'est pas la même, ce qui est exemplifié dans ce qui suit pour trois domaines, à trois niveaux de la scolarité : l'intégrale du lycée à l'université, un théorème de géométrie classique au collège, et un mode de raisonnement en fin de lycée. En fait le relief constitue une méthodologie de recherche particulièrement bien adaptée au second degré, du fait des contraintes de curricula, de programmes et des besoins spécifiques d'adaptation aux élèves.

II.1. L'INTEGRALE, DU LYCEE A L'UNIVERSITE

Le calcul intégral intervient depuis la classe de terminale (en France) et jusqu'à l'université. Nous allons voir comment les divers domaines de la compréhension, que nous avons présentés de façon générale au paragraphe I, interviennent pour la notion d'intégrale.

II.1.1 L'INTEGRALE ACTUELLEMENT

Jusqu'à la fin de l'université (quatrième année), l'intégrale est un domaine stable et sans renouvellement, basé sur l'intégrale de Riemann et Darboux, puis celle de Lebesgue. Ce n'est qu'au-delà qu'apparaissent des intégrales nouvelles.

Pour le mathématicien, l'intégrale de Lebesgue est essentiellement utilisée par l'analyse et par les probabilités. L'intégrale de Riemann est alors souvent jugée sans intérêt, mais cela n'est pas toujours le cas (voir QUEFFELEC, 2012), et elle est centrale dans l'enseignement en terminale des lycées et en première et deuxième années d'université.

Pour la physique élémentaire, l'intégrale est un moyen essentiel pour la mesure des grandeurs, mais celle-ci a souvent disparu des mathématiques. Reste que c'est aussi une idée fondamentale en probabilités.

II.1.2 L'EVOLUTION DE L'INTEGRALE

Cette évolution est très longue, et elle est d'abord dominée par la mesure des grandeurs.

Dès l'antiquité, Euclide et Archimède attestent d'études sur de nombreuses mesures de grandeurs : aires, volumes, longueurs. Par exemple Archimède prouve les relations entre l'aire du disque πR^2 et son périmètre $2\pi R$, et montre le calcul de l'aire de la spirale. Il utilise la notion d'*exhaustion*, la notion de limite ne la remplacera que plusieurs siècles plus tard. Un manuscrit d'Archimède (retrouvé seulement en 1906 !) montre que celui-ci a utilisé des raisonnements mécaniques et une *méthode des indivisibles*, qui n'apparaîtront explicitement qu'au 17ème siècle.

Bien plus tard, Oresme (14ème siècle), et plus tard encore Galilée (17ème siècle) et certains de ses successeurs (Cavalieri, Descartes, Fermat, Roberval) montrent que si la vitesse d'un mobile tombant est proportionnelle au temps, alors la distance parcourue par le temps est proportionnelle à l'aire sous la droite d'équation v = kt (dans le plan des ordonnées (t,v)) : on trouve alors $d = kt^2/2$.

Plusieurs mathématiciens du 17ème siècle construisent alors (soit par la méthode des indivisibles, soit par les sommes de puissances $1^p+2^p+\dots+n^p$) comment on calcule les aires sous les courbes $y = x^p$. C'est ainsi que la notion de fonction (encore intuitive) s'élabore conjointement avec celle d'intégrale.

Après Barrow, l'essentiel du rapport entre intégrale et dérivation est montré, mais sous forme cinématique. Puis, en utilisant principalement des courbes décrites comme des points évoluant avec le temps, Newton et Leibniz achèvent le formalisme de l'intégrale et ses principales propriétés.

Puis Cauchy et ensuite Riemann construisent l'intégrale de Riemann, puis celle de Darboux. Il faut dire aussi comment, fin 19ème siècle, Borel remet à l'honneur la mesure des grandeurs. Le début du 20ème siècle fait enfin apparaître l'intégrale de Lebesgue, qui va fonder tous les moyens modernes de l'analyse des 20ème et 21ème siècles, en même temps que les probabilités et la physique récente.

On voit ainsi que depuis la mesure des grandeurs, quatre sauts conceptuels sont apparus : les indivisibles et l'additivité de l'intégrale, le passage à l'intégrale des fonctions, le « théorème fondamental de l'analyse » (rapport entre intégrale et primitive), le formalisme de l'intégrale avec ses évolutions progressives et la notion actuelle de mesure.

II.1.3 QUELQUES QUESTIONS DIDACTIQUES PROPRES A L'INTEGRALE

L'intégrale d'une fonction continue positive f est définie en terminale S par l'aire (notion admise) sous le graphe de la courbe. C'est un premier pas dans la reconnaissance du lien profond entre intégrale et mesure des grandeurs (l'origine historique de l'intégrale). C'est mieux que la définition d'avant 2002 : l'intégrale était alors définie par F(b) – F(a), où F est une primitive de la fonction f, définition totalement impropre à mesurer des grandeurs !

L'idée est que dès la terminale, et encore plus en L1, il est essentiel de lier intégrale et mesure des grandeurs, pour plusieurs raisons.

D'abord, sans ce lien, les élèves et les étudiants ont bien du mal à modéliser une mesure de grandeur par une intégrale, par exemple en physique. Ainsi, le problème de la barre, présenté dans le paragraphe suivant, a été posé à 114 étudiants en fin de L1 (première année d'université) ayant vu la définition classique de l'intégrale de Riemann (limite de sommes de Riemann). Seuls 12% d'entre eux ont vu qu'il fallait une intégrale pour résoudre le problème (ROGALSKI, 2018). La difficulté n'est pas de savoir calculer une intégrale, mais de savoir reconnaître que la modélisation d'un problème physique fait intervenir une intégrale.

Ensuite, parce que l'intégrale est, à la fois historiquement et épistémologiquement (voir le paragraphe II.1.2), une co-construction mathématique et physique, propre à illustrer les rapports entre ces deux disciplines, et en particulier les différences d'approches justifiées par des paradigmes différents (grandeurs, physique, mathématiques).

En fait, dès lors que l'écriture $\int_a^b f(t)dt$ est introduite et que le calcul des primitives nourrit le calcul intégral, des difficultés interviendront pour les étudiants comme :

* l'écriture de la lettre muette (t, x, u…) et le lien avec les intégrales de fonctions étagées $\Sigma_i \lambda_i 1\Omega_i$;

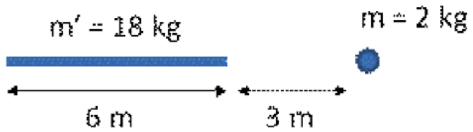
* le calcul du changement de variable qui conduit à une nouvelle forme φ'(u)du : il faut articuler, la notion de primitive et la notion de mesures, et, si on veut, s'appuyer sur la méthode des indivisibles (voir ROGALSKI, 2001). De plus, des questions physiques délicates peuvent intervenir, comme la notion de densité (qui s'interprète comme une dérivée…).

II.1.4 UN SCENARIO SOUVENT UTILISE : LE PROBLEME DU BARREAU

Ce scénario se fonde sur un problème physique de mesure de grandeur. Il a été élaboré vers le début des années 1980 à l'université de Grenoble par Denise Grenier, Marc Legrand et Françoise Richard (GRENIER & al, 1986). En voici deux versions (DECROIX & ROGALSKI, 2015) et (ROGALSKI & al., 2001).

Présentation du problème (Figure 1): Déterminer la norme de la force d'attraction *F* entre une masse ponctuelle *m* de 2 kg et une barre fine de 6 mètres de long et de masse *m'* égale à 18 kg dans la disposition suivante :

Figure 1 – Problème attraction



Source : Les auteurs

La formule G $\frac{m.m'}{r2}$ (établie au lycée) donnant

l'attraction entre deux masses *ponctuelles* (où G est la constante de gravitation) est rappelée.

Soit en cours, soit en travaux dirigés, on essaye de faire discuter les élèves (en terminale) ou les étudiants sur la résolution de ce problème.

* La seule méthode utilisable par des élèves de terminale ou des étudiants de première année d'université pour résoudre ce problème est d'appliquer une « règle du centre de gravité » (on concentre toute la masse de la barre en ce point), règle fréquente dans l'enseignement en physique. Les étudiants trouvent alors F = G.

Nous décrivons ci-après une procédure initiée par la proposition d'un étudiant qui conduira à une modélisation du problème par l'intégrale.

L'étudiant propose de couper la barre en deux parties égales, en appliquant la règle du centre de gravité à chaque morceau. On trouve alors à peu près F = 1.21 G. Puis par un découpage en des morceaux égaux de plus en nombreux et donc petits, les valeurs égales calculées (avec une calculatrice) sont de plus en plus grandes.

* Le principe du découpage est articulé avec celui de l'encadrement : la barre est

assimilée à un point positionné à l'une ou l'autre extrémité de la barre. La force dépend de la distance, la valeur exacte se situe entre les deux cas extrêmes 4/9 G et 4 G. Puis, si on redécoupe la barre, en assimilant chaque morceau au centre de gravité de l'extrémité droite ou à celui de l'extrémité gauche de ce morceau, on obtient des majorations ou des minorations de la force trouvée.

* Les sommes majorées et minorées sont de plus en plus proches d'une limite qui va être la force F finale.

* Enfin, dans chaque calcul, les distances d'un centre de gravité de l'un des morceaux de la barre à la masse ponctuelle peuvent s'écrire sous la forme $f : x \mapsto 1/x^2$, fonction essentielle pour le phénomène visé. Cette fonction est définie sur le segment [3, 9]. La fonction f est majorée et minorée sur chacun des petits intervalles [c, d] résultat du découpage de [3, 9].

II.1.5 DU BARREAU A LA CO-CONSTRUCTION DE L'INTEGRALE ENTRE MATHEMATIQUES ET PHYSIQUE

La *décontextualisation* de l'exemple de la barre se fait au moyen de la mesure des grandeurs produits en physique.

Les formules usuelles suivantes de ces grandeurs sont valides quand les premiers facteurs sont constants :

Masse = (densité constante) x volume ;

Aire = (hauteur constante) x (longueur de la base) ;

Volume = (hauteur constante) x (aire de la base) ;

Distance parcourue = (vitesse constante) x temps ;

Force = (pression constante) x (surface plane) ;

Attraction = (inverse de la distance constante)^2 x (produit des masses ponctuelles).

Généralisons : les deuxièmes facteurs sont associés à des « domaines » Ω sur lesquels sont définis les premiers facteurs, supposés maintenant être des fonctions f non constantes : densité ou pression en un point d'un volume Ω, hauteur au-dessus d'un point de la base Ω, pression en un point d'une surface Ω, distance d'un point de Ω à l'axe, etc.

De plus on peut définir la mesure m(A) d'une partie A de Ω, ou du moins d'une classe de parties de Ω : aire, volume, masse, distance parcourue, temps entre deux instants, sont supposés définis pour ces parties de Ω.

On se propose donc de savoir à quelles conditions on peut mesurer, ou même définir une grandeur I(Ω, f, m) ou $\int_\Omega f\,dm$ attachée à une grandeur physique décrite par le domaine Ω avec la mesure m et la fonction f. Les conditions raisonnables pour parler de la grandeur cherchée sont les 3 principes qui suivent, issus de considérations physiques :

(1) Si f est constante (f = C), $\int_\Omega f.dm = C \times \text{mesure}(\Omega)$;

(2) Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, avec $\Omega_1 \cap \Omega_2$ de mesure nulle (par exemple vide), alors $I(\Omega, f, m) = I(\Omega_1, f, m) + I(\Omega_2, f, m)$ (additivité par rapport au domaine) ;

(3) Si $f \leq g$, $I(\Omega, f, m) \leq I(\Omega, g, m)$ (croissance).

Pour calculer une mesure de grandeur de la forme I(Ω, f, m) vérifiant les principes (1), (2), (3) :

* on découpe l'ensemble Ω en un nombre

fini de « petits » morceaux Ω_i ;

* on encadre la fonction f entre m_i et M_i sur Ω_i (par exemple, par ses bornes inférieures et supérieures sur l'ensemble Ω_i) ;

* par sommation, on encadre I(Ω, f, m) par des « sommes inférieures » et « supérieures » :

$\Sigma\, m_i\, m(\Omega_i)$ et $\Sigma\, M_i\, m(\Omega_i)$;

* enfin, on essaie de passer à la limite en prenant des Ω_i de plus en plus petits.

La procédure intégrale est donc formée de ces 4 étapes : **découpage, encadrement, sommation, passage à la limite**

Les sommes inférieures et supérieures qui encadrent la mesure cherchée de la grandeur sont en fait les intégrales des fonctions « en escalier » $\Sigma\, \lambda_i\, 1_{\Omega_i}$, et on souhaite passer à la limite de ces intégrales pour obtenir l'intégrale d'autres fonctions.

On a donc une approche physique pour l'intégrale, très intuitive. Mais, mathématiquement, il faut préciser un peu plus la nature des ensembles Ω_i et la nature de leur mesure, d'une part, et quel type de limite on souhaite prendre, de l'autre.

En se bornant au cas Ω = [a, b], seul envisageable en terminale S et en L1-L2, deux alternatives « raisonnables » pour la nature des ensembles Ω_i et la nature de leur mesure et pour le type de limite :

(a1) les Ω_i sont des intervalles, et leur mesure est leur longueur ;

(a2) les Ω_i sont les éléments d'une tribu, pour la mesure de Lebesgue ;

(b1) l'approximation se fait en approchant uniformément f par des fonctions en escalier ;

(b2) l'approximation se fait directement au moyen de l'intégrale (la condition de Cauchy dit que l'intégrale d'une certaine fonction en escalier doit être petite).

En recoupant ces deux alternatives, et en abandonnant dans le premier et le quatrième cas la condition d'encadrement, qui n'est plus utile, on trouve alors quatre théories classiques de l'intégrale mathématique[5].

La notion physique d'intégrale (la procédure intégrale) peut donc se traduire de façon polysémique en mathématiques !

Il reste à faire le lien avec la définition de l'intégrale en terminale : l'aire sous le graphe, qui pourra construire l'intégrale de Darboux en première année d'université, avec la notion de primitive.

II.2. UNE INTRODUCTION AU THEOREME DE THALES AU COLLEGE

Nous allons illustrer notre démarche et en particulier l'utilisation de la notion de relief sur un exemple précis de déroulement en classe d'un scénario dans une classe de troisième, dans un établissement défavorisé socialement. Ce contexte rend plus visible des phénomènes qu'on peut observer « en général » en classe. Après avoir déterminé au préalable ce relief sur la notion, nous décrivons un scénario très

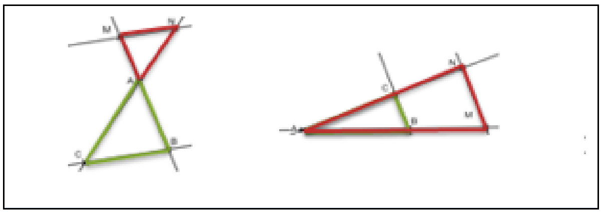
[5] Les intégrales sont : celle des fonctions réglées, celle de Darboux, l'intégrale de Lebesgue des fonctions bornées, l'intégrale générale de Lebesgue.

conforme à ce que nous avons dégagé et des déroulements faisant la part belle notamment aux proximités.

II.2.1. LA DETERMINATION DU RELIEF POUR ANALYSER LE SCENARIO ET SA MISE EN ŒUVRE

Le théorème de Thalès est le nom donné au théorème qui associe aux deux configurations ci-dessous (Figure 2) les deux égalités de rapports qui traduisent la proportionnalité des côtés des deux triangles déterminés par les droites parallèles et les droites sécantes (triangles semblables).

Figure 2 – Configurations Thalès



Source: Les auteurs

On établit aussi la réciproque, ce qu'on ne regardera pas ici.

En ce qui concerne l'enseignement de ce théorème en troisième (dernière année du collège, 14-15 ans, grade 9), un certain nombre d'enseignants, dont celui que nous étudions, considèrent que, conformément aux programmes par cycle, les triangles semblables ont été vus en classe de quatrième avec la définition « triangles qui ont des angles égaux » et la propriété caractéristique de proportionnalité des côtés correspondants (non démontrée mais utilisée). Pour établir le théorème de Thalès, on peut alors associer aux configurations spécifiques en jeu la similitude des triangles qui apparaissent. Il y a de plus une centration sur deux configurations particulières, qui n'avaient peut-être pas été vues auparavant, triangles emboîtés et « en papillon ». Cependant dans l'expression finale du théorème il n'est plus question de triangles semblables, mais de proportionnalité des côtés, laquelle est cachée dans une formule finale.

En ce qui concerne les difficultés des élèves, il y a d'abord une difficulté géométrique, déjà renseignée dans le travail de Horoks, 2008 (en seconde) : l'identification des couples de côtés à associer (homologues) pour écrire correctement les rapports de longueurs égaux traduisant la proportionnalité. La correspondance est souvent faite par les enseignants ou dans les manuels directement, sans revenir aux triangles, à partir de l'alignement des points sur les deux droites ou demi-droites correspondantes, complété par le parallélisme des deux derniers côtés (respectifs). Cela ne facilite pas le repérage des côtés correspondants !

Il y a de plus à passer des côtés (segments), impliqués dans les triangles semblables, à leur longueur, voire à leurs extrémités permettant d'écrire ces longueurs, impliquées dans la proportionnalité. On pourrait évoquer une déconstruction dimensionnelle citée par Duval & Godin (2005), possible source de difficultés. Comme le théorème n'est pas justifié en général, qu'on ne démontre pas explicitement que les triangles en jeu sont semblables, les élèves peuvent ne pas faire le lien entre d'une part la phrase, un peu compliquée, de l'énoncé du théorème [6] et d'autre part le fait que les

[6] Du type : soient d et d'deux droites sécantes en A. Les points B et M sont deux points de la droite d distincts de A. Les points C et N sont deux points de la droite d'distincts de A. Si les droites (BC) et (MN) sont parallèles, alors les longueurs des côtés du triangle ABC sont proportionnelles à celles du triangles AMN. (les énoncés peuvent varier).

triangles déterminés par ces droites sont semblables.

L'autre grande source de difficultés est le travail algébrique à faire sur les rapports, une fois écrits. Quand le lien n'est pas fait entre l'égalité des fractions à établir dans le théorème et le tableau « brut » donnant les longueurs des côtés homologues, établi grâce à la similitude des triangles, les élèves peuvent ne pas reconnaitre qu'il s'agit de calculer une quatrième proportionnelle. De plus le choix d'une méthode pour trouver cette quatrième proportionnelle, soit grâce à un coefficient de proportionnalité soit par « un produit en croix », reste à faire. Une autre difficulté est qu'il y a deux égalités : se pose alors la question de repérer celle qui est utilisable. De plus le calcul de certaines longueurs, que l'on doit obtenir à partir de données intermédiaires pour appliquer le théorème, peut nécessiter des adaptations, surtout lorsque leur expression mélange inconnue et nombres (dans un calcul du type x + 4, ou même (x/(x + 4))).

Enfin une troisième source de difficultés tient à la formulation même du théorème, et notamment de l'implication *si… alors …* (cf. HACHE, 2017).

Ainsi le relief sur le théorème à introduire en troisième, dans le cadre des programmes actuels, indique qu'on a affaire à une notion partiellement extension d'une autre notion connue, mais restreinte à deux figures particulières, peut-être nouvelles. Si on fait chercher les élèves, la notion peut devenir aussi une réponse à un problème (RAP). Quoi qu'il en soit, il est important de faire travailler particulièrement la reconnaissance des configurations et la correspondance des côtés, l'écriture de la double égalité en relation avec la proportionnalité, puis la résolution numérico-algébrique à effectuer, avec les adaptations fréquentes du théorème sur la nature des longueurs en jeu, et aussi de tenir compte des questions de formulation.

II. 2.2. UN SCENARIO COHERENT CONFORME A NOTRE VISION DU RELIEF

L'enseignant grâce à une première activité de révision (exercice en 3 questions) commence par faire travailler les élèves sur les triangles semblables, en leur faisant prendre conscience au passage de la limitation de ce qu'apporte le théorème de Pythagore.

Une fois que les élèves ont été mis en face de deux triangles semblables qu'ils doivent utiliser pour calculer une longueur, le professeur interrompt la recherche de l'exercice et inclut à la séance la révision collective des triangles semblables, avec une présentation projetée et distribuée des connaissances rappelées (définition avec angles égaux et proportionnalité des longueurs des côtés correspondants).

Le professeur reprend ensuite la question 2 de l'exercice laissée en suspens, faisant démontrer que les triangles en jeu sont semblables en utilisant la propriété rappelée de la proportionnalité des longueurs des côtés. Il ne traite pas encore la dernière question, et engage les élèves dans une nouvelle activité qu'on peut considérer comme une introduction du théorème de Thalès sous la forme d'une conjecture (question ouverte), qu'il traitera avec le logiciel GeoGebra : « *Comment obtenir deux triangles semblables en traçant quatre droites ?* ».

Cela permet de familiariser les élèves avec les configurations spécifiques de Thalès et les triangles semblables ainsi déterminés. Ensuite l'enseignant passe à l'exposition des connaissances proprement dites (en deux temps), en projetant au fur et à mesure un document (décrit ci-après), également distribué ou recopié par les élèves sous le titre « Le théorème de Thalès ».

Le document montre les trois configurations possibles ; donne l'expression du théorème de Thalès, rappelle la définition de triangles semblables comme ayant des longueurs proportionnelles, et précise les façons d'exploiter la proportionnalité, avec la considération méthodologique suivante :

« *faire un tableau et utiliser le produit en croix (recommandé) ; utiliser le coefficient de proportionnalité et parler d'agrandissement ou de réduction (parfois utile), ou encore écrire que AM/AB=AN/AC=MN/BC (mode expert)* ».

Le premier temps est un travail sur les configurations avec un repérage sur chacune des figures des parallèles, des sécantes et des triangles qui n'apparaissent pas immédiatement à certains élèves. C'est suivi de la présentation du théorème, comme un lien entre configurations en jeu, triangles semblables et proportionnalité.

Le deuxième temps concerne l'élaboration du tableau de proportionnalité. L'enseignant met en garde les élèves sur la difficulté du repérage des côtés homologues (anticipation) et indique comment faire. Un point bilan récapitule les différentes façons d'envisager la conclusion du théorème de Thalès : tableau de propor-tionnalité, coefficient de proportionnalité (agrandissement et réduction), fractions égales – mode exert qui cache la proportionnalité.

L'enseignant donne un premier exercice d'application immédiate (une configuration en papillon, la donnée de 4 longueurs (homologues 2 à 2), avant de revenir à la dernière question de l'exercice d'introduction (le tipi).

On constate ainsi que beaucoup d'aspects signalés comme importants dans le relief sont repris ici. Ainsi l'enseignant donne aux élèves une motivation pour le théorème, l'introduit comme une extension des propriétés des triangles semblables mais précisée par la réponse à un problème géométrique spécifique, et s'attarde sur toutes les difficultés signalées, en les faisant rencontrer dans des activités.

En conclusion, l'enseignant propose un scénario conforme au relief que nous avons dégagé : il reprend des connaissances anciennes sur lesquelles il va s'appuyer, donne une raison d'être à un travail sur les triangles semblables pour trouver une longueur, introduit de manière problématique les configurations de Thalès. Le cours (exposition des connaissances) permet de compléter et d'aller jusqu'à la formule (égalité des rapports de longueurs). Deux applications, dont l'une immédiate et l'autre avec adaptations, sont proposées ensuite, puis d'autres exercices.

Mais comment le travail en classe se passe-t-il ? Comment se fait (ou non) cet appui que nous traquons entre connu et visé ? C'est ce que nous allons illustrer dans ce qui suit, en prenant plusieurs exemples.

II.2.3. UN DEROULEMENT QUI FAIT LA PLACE A DU TRAVAIL AUTONOME ET A DES PHASES COLLECTIVES TRES APPUYEES SUR LE TRAVAIL DES ELEVES

Une rapide chronique, présentée en annexe, permet de vérifier que le scénario est suivi à la lettre. Comment l'enseignant gère-t-il ses séances ? Nous avons relevé deux types de proximités, dans les appuis sur les élèves.

a) Des appuis immédiats sur le travail des élèves, à leur place ou par échanges avec la classe

Souvent après une recherche individuelle, l'enseignant met en place un jeu de questions-réponses collectives, phases de questionnement et de « reprises » qui permettent d'introduire des proximités locales, en reprenant et en complétant ce qu'a pu dire au moins un élève. L'enseignant garde même en mémoire des réponses d'élèves lui permettant un tel appui ultérieurement et peut reprendre ce qui a été dit, quelquefois de simples mots. De plus l'enseignant accorde une très grande attention au vocabulaire spécifique (droites qui se croisent, sécantes) même s'il ne se prive pas d'un langage courant, voire familier dans ses commentaires méta. Il utilise ainsi souvent des mots inhabituels, mais imagés comme le mot « ingrédient », qui signalent aux élèves la ou les propriétés utilisées.

b) Des appuis différés plus globaux

Après des recherches et corrections des épisodes, suivent régulièrement des points-bilans intermédiaires, réunissant les éléments qui viennent d'être dits de manière dispersée, homogénéisant et donnant un début de cohérence. En effet la gestion par questions-réponses et la reprise de réponses variées, venant d'élèves différents, pourrait engendrer une certaine dispersion du discours de l'enseignant, même si elle est associée à un travail s'appuyant sur les connaissances des élèves. L'enseignant complète ce travail dans les points-bilans par des commentaires « méta », plus globaux, qualifiant, synthétisant ou explicitant ce qui a été travaillé. Cela dépasse, en le prolongeant, le suivi « au fur et à mesure » établi dans la phase précédente. Ces commentaires peuvent aussi servir à préciser ce que les élèves pourront retenir, par-delà ce à quoi ils ont pu participer directement ou non. L'enseignant dégage ainsi et insiste sur les idées importantes, et associe même les élèves à des appréciations sur les mathématiques en jeu. Par exemple il souligne le fait que le théorème de Thalès permet le passage de la géométrie à l'algèbre, tout comme le théorème de Pythagore.

Bilan : cet enseignant, en s'appuyant sur ce qui vient des élèves, immédiatement ou de manière différée, pourrait ainsi contribuer à la transformation de leurs actions en activités, en les inscrivant dans quelque chose de plus large et qui les justifie. Il explicite ainsi, dès que possible et plusieurs fois, les liens entre les différents outils ou connaissances en jeu, il dégage les alternatives mais toujours à partir de ce qui a été commencé par les élèves. Tout se passe comme si, globalement, l'enseignant voulait entrainer les élèves dans une démarche mathématique les amenant même à apprécier la spécificité du théorème, par-delà la résolution de tel ou tel exercice, qui est tout de même visée.

Et pourtant…

II.2.4. UNE ETAPE NECESSAIRE, APRES LE COURS, DANS LE CAS DE CLASSES D'ELEVES DEFAVORISES SOCIALEMENT ?

Le fait que les séances ont lieu dans un établissement avec des élèves défavorisés socialement nous a amené à évoquer un effet loupe intéressant. On constate en effet ici, de manière un peu inattendue, et sans doute accentuée par la composition sociale des élèves, que l'exposition du théorème (le cours) qui a été bien préparée, avec des tâches bien choisies, avec une réelle participation des élèves, effectivement « exploitée » par l'enseignant, n'a pas vraiment suffi à faire débuter l'acquisition cherchée. Ainsi les élèves ne réagissent pas au début du premier exercice proposé après le cours, qui en est pourtant une application immédiate, sans adaptation. L'enseignant est obligé de reprendre ce « cours », assez longuement, mais cette fois en relation avec l'exercice cherché (contextualisation). Les élèves s'y mettent enfin après ces reprises.

Notre hypothèse est qu'il y aurait besoin de ce travail sur cette application immédiate, demandant une contextualisation du cours après son exposition, pour que chaque élève commence à s'approprier la connaissance visée. Ce serait à ce moment-là seulement que le théorème deviendrait une connaissance proche de chaque élève, et que le processus de conceptualisation pourrait commencer. Tout ce qui précède l'exercice construirait une familiarisation avec la situation et les « ingrédients » à utiliser, mais cela resterait, dans ce premier temps, « externe » aux élèves, associé à une ZPD collective, entendu mais pas du tout approprié. Cela fournit quand même à l'enseignant l'appui nécessaire pour que sa reprise du cours, suite au travail contextualisé des élèves, soit cette fois entendue et que le processus visé s'enclenche. La suite des séances nous renseigne à ce sujet : dans l'exercice suivant, cette fois la résolution démarre dès le début et se poursuit « normalement ».

II.3. RAISONNEMENT SOUS HYPOTHESE ET RECURRENCE

Dans ce qui suit nous illustrons une analyse psychologique de l'activité de l'élève concernant des opérations logiques non élémentaires. Il s'agit du raisonnement sous hypothèse notamment en jeu dans la récurrence et la réursivité.

II.3.1.

Rappelons schématiquement le principe du raisonnement sous hypothèse : il s'agit d'une condition classiquement exprimée sous la forme « si A alors B » (ou : A=>B). Dans la pratique scolaire, le plus souvent, on connaît la valeur de vérité de A ou celle de B, et on utilise cette valeur de vérité pour une preuve « directe » de la véracité ou la fausseté d'une des propositions. Concernant la vérité on suppose que A est vraie et on en déduit que B est vraie. En fait, on démontre - sans le dire en général - que A est une condition suffisante de B. Une conception erronée, conception dite *NS*, repérée chez des enseignants eux-mêmes (GANDIT, 2004, p. 56), conduit à considérer que « si un type de raisonnement permet de démontrer une condition suffisante, la preuve de la condition nécessaire se fera suivant le même type » [ce qui n'est pas le cas].

II.3.2.

Une autre difficulté est celle de la pertinence de l'implication : il est difficile pour les étudiants de raisonner à partir d'une prémisse qu'ils connaissent comme fausse (ROGALSKI & ROGALSKI, 2004), un résultat convergeant avec celui de Harris & Leevers (2000). Détaillons les éléments centraux de la première recherche. On a soumis des questions à des étudiants de CAPES (préparation aux fonctions d'enseignant de mathématiques dans l'enseignement secondaire) : ces questions portaient sur la véracité d'implications concernant des contenus mathématiques, dont des implications à prémisse fausse. Aussi bien le sens des propositions que la valeur de vérité de l'hypothèse et de la conclusion sont aisément évaluables par référence aux propriétés des objets en jeu. Dans l'activité mathématique on est au niveau d'analyse « local » des « pas de raisonnement », en prenant en compte aussi bien des pas de raisonnement sans quantificateurs, qu'avec un – ou plus d'un – quantificateur. Quatre catégories de réponses d'étudiants ont été identifiés : « logique » (typiquement : « l'implication est vraie parce que l'hypothèse est fausse » : ±20%), « pertinent » (« l'implication est stupide », « elle n'a pas de sens » : ±20%), « non conditionnel » (« l'assertion est fausse car l'hypothèse est fausse » : ±40%), « mixte » (l'un ou l'autre des réponses : ±20%). On apprécie à quel point la conception de l'implication est fragile.

II.3.3.

Le raisonnement sous hypothèse, dans une incertitude sémantique sur la véracité de la prémisse, peut poser un problème de même ordre pour des élèves peu avancés ou des sujets peu scolarisés. Luria (1969 ; 1976) a ainsi rapporté une étude faite dans les années trente auprès de paysans Özbecks non scolarisés, réétudiée dans un article récent d'un spécialiste des Özbecks (DOR, 1995). Luria montre comment les procédures d'inférence sont bloquées quand ils ne portent pas sur des contenus connus : les syllogismes sont alors perçus comme des séries de jugements concrets, isolés, non-reliés entre eux et ne pouvant être un moyen de déduction. En revanche, si les conditions du problème à résoudre sont conformes à la réalité concrète connue, alors le problème est résolu correctement rapidement.

II.3.4.

Les élèves et étudiants rencontrent des problèmes du même ordre, nous semble-t-il, quand ils sont confrontés à l'apprentissage de la récursivité, comme concept et outil dans la programmation informatique. Rappelons qu'une fonction ou plus généralement un algorithme est récursif quand il contient un ou des appels à lui-même. Des données peuvent aussi être récursives, comme celles de descendance : la descendance d'un individu est constituée de ses enfants et des descendants de ses enfants (ou est vide : on s'arrête), ou les arbres binaires. La récursivité est en particulier employée pour traiter les structures de données récursives, ainsi que pour réaliser le paradigme algorithmique « diviser pour régner ».

Typiquement, le raisonnement sous hypothèse est en jeu dans l'écriture de l'invariant au cœur du programme de calcul d'une fonction sur N, quand on suppose $f(n-1)$ définie et qu'on calcule $f(n)$ en fonction de $f(n-1)$. (La même question peut se poser, dans le curriculum français en mathématiques de fin de secondaire, pour l'étude des suites définies par récurrence.) En tant qu'outil de programmation, la récursivité est une technique pour résoudre des problèmes complexes basée sur la résolution de versions « plus petites » des mêmes problèmes, jusqu'à arriver à un cas de base « trivial ».

La récursivité apparaît comme un concept inévitable dans les cours de programmation informatique (en début d'université) ; elle est en même temps un des concepts les plus difficiles à comprendre, que ce soit pour des étudiants qui apprennent la programmation que pour des étudiants avancés (LACAVE, MOLINA & REDONDO, 2018). Dans un questionnaire utilisé par ces chercheurs sur les difficultés rencontrées lors de la conception de programmes, un item renvoie spécifiquement à la difficulté spécifique du raisonnement sous hypothèse. Par exemple, dans le cas d'une fonction f sur N, le raisonnement sous hypothèse est en jeu dans l'écriture de l'invariant au cœur du programme quand on suppose *f*(n-1) définie (cas de n-1) et qu'on calcule *f*(n) en fonction de *f*(n-1). Pour les étudiants la difficulté persistante est de « *croire au cas n-1* ».

CONCLUSIONS

Nous sommes partis de questions empiriques liées à des contingences concernant à divers titres les apprentissages des mathématiques : programmes et curriculums, problèmes des enseignants, difficultés des élèves et étudiants.

Nous avons alors proposé de suivre une démarche issue de recherches en didactique des mathématiques, en considérant trois perspectives : les mathématiques (histoire, épistémologie), les pratiques des enseignants et les activités des élèves en classe. Les aspects sociétaux n'ont pas été développés ici. Les premiers aspects permettant en particulier d'élaborer un « relief » sur les notions à enseigner, qui contribue à donner une référence pour renouveler les approches, sur les contenus à enseigner, les scénarios à développer en classe, et en amont sur les programmes et la formation des enseignants.

Au moyen de trois exemples de contenus très différents, nous avons illustré comment ces compréhensions s'articulent et enrichissent à la fois notre connaissance de l'enseignement de ces notions, et notre élaboration de propositions de renouvellement éventuel : il s'agit de l'intégrale (en fin de lycée, grade 12), du théorème de Thalès (en dernière année de collège, grade 9), et de problèmes sur la logique à l'œuvre dans la récursivité (fin du secondaire, début université).

D'une part, notre parti pris est la visée de conceptualisation des notions mathématiques par les élèves qui pourrait constituer le principal objectif des enseignements. Mais un concept ne vit jamais seul, et cette visée exige de respecter la cohérence mathématique qui préside à l'organisation des champs conceptuels. C'est précisément ce que peut permettre le premier aspect de la compréhension, épistémologique, que nous avons illustré, avec des implications sur les programmes et leur ordonnancement.

D'autres exigences sont liées à cette visée ambitieuse, qui tiennent aux pratiques des enseignants en classe - et aussi à la posture des élèves ; ce qui leur est proposé est une variable déterminante aux mains des enseignants, même si des contraintes de taille existent. Il s'agit, lors des déroulements, d'élaborer et de jouer en classe un scénario propre à dessiner un itinéraire cognitif en s'adaptant aux élèves sans dénaturer la visée. Charge à l'enseignant, nous y insistons, d'accompagner les activités que les élèves déploient au fur et à mesure du scénario, grâce à des dialectiques variées, entre appui sur des connaissances connues et nouvelles, entre travail autonome et travail collectif, entre recherches d'exercices et moments d'exposition des connaissances, entre travail oral et travail écrit, entre évaluations et apprentissages.

Et cela recouvre à la fois une grande exigence pesant sur l'enseignant, avec une grande disponibilité de ses connaissances mathématiques et didactiques, favorisées par la compréhension développée par les didacticiens, et finalement une grande ambition pour ses élèves.

Mais d'autre part, la contingence de bien des aspects de l'enseignement nuit de façon importante à la mise en place d'un tel programme visant la conceptualisation des notions pour tous les élèves. Il y a là toutes les contraintes évoquées ci-dessus. L'incohérence et la variation trop rapide des programmes ou curriculums qui en empêchent l'analyse approfondie, voire l'expérimentation, la mode des innovations, pas toujours motivées, les réductions d'horaires d'année en année, la difficulté de travailler en profondeur dans les classes, les rabattements sur la technique pour réussir les examens, et même la formation parfois utilitaire des enseignants, de moins en moins disciplinaire, tout ceci risque d'empêcher la mise en place dans les classes de ces activités d'élèves à la base d'un enseignement à la hauteur des ambitions inspirées par nos recherches.

Comment peut-on, pour un chercheur en didactique des mathématiques, s'impliquer alors dans l'enseignement mathématique ? Les types de tâches qu'on a proposés dans notre texte sont certes ambitieuses pour élaborer des enseignements, mais elles restent adaptées pour travailler dans la réalité des classes.

Bien des études seraient utiles pour regarder de grandes questions mathématiques qui demeurent, notamment en termes de difficultés dans les classes, spécialement concernant les transitions, et les notions qui traversent plusieurs années de la scolarité, et peut-être aussi pour coordonner des programmes sur plusieurs années. On peut en effet supposer qu'une des difficultés rencontrées par les élèves au moment des transitions est l'insuffisance de ce qui est proposé au niveau inférieur en termes de conceptualisation justement : les élèves peuvent « réussir » les contrôles, mais leur apprentissage est trop limité, souvent à des aspects techniques, et ne leur permet pas les adaptations nécessaires à ce qui est demandé, sans être retravaillé, au niveau supérieur. Le passage arithmétique/algèbre, celui entre algèbre et analyse notamment pour les fonctions (collège, lycée et université) ou bien même la proportionnalité (école, collège, lycée, université) sont des notions de ce type, qui demandent encore des investigations didactiques.

Deux questions se posent tout de même : comment faire profiter l'institution et les enseignants même partiellement de nos études ? Dans quelle mesure contribuer à former des enseignants alors qu'ils ne pourront pas toujours implanter dans leurs classes le cœur de nos visées ?

REFERENCES

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques**. Grenoble: La Pensée sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2013.

CHAPPET-PARIES, M. ; ROBERT, A. Introduire le théorème de Thalès en troisième – quel appui sur le travail des élèves en classe ? **Cahiers du laboratoire André Revuz**, n. 24, 2022.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 19, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Des programmes, oui. Mais pourquoi ? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 1, n. 39, p. 97-115, 2019.

DOR, R. Ecrire l'oral, traduire l'écrit : quelques remarques centrées sur des matériaux özbeks. **Revue du monde musulman et de la Méditerranée,** n. 75-76, p. 29-51, 1995.

DORIER, J.-L. Illustrer l'aspect unificateur et simplificateur de l'algèbre linéaire. **Cahiers de**

DIDIREM, n. 14, 1992.

DOUADY, R. Jeu de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 2, n. 7, p. 5-31, 1986.

DUVAL, R. ; GODIN, M. Les changements de regard nécessaires sur les figures. **Grand N**, n. 76, p. 7-27, 2005.

GANDIT, M. Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : deuxième partie**. Petit x,** n. 66, p. 49-82, 2004.

GRENIER, D. ; LEGRAND, M. ; RICHARD, F. Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A 1ère année. **Cahier de didactique des mathématiques.** Paris : IREM, n. 22, 1985.

HACHE, C. (Ed.). **Groupe Léo. Formuler, reformuler**. Paris : IREM, 2017.

HARRIS, P.L. ; LEEVERS, H.J. Reasoning from false premises. Em: **Children's reasoning and the mind**. Routledge, Psychology Press, 2000.

HOROKS, J. Les triangles semblables en classe de seconde : de l'enseignement aux apprentissages. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 28, n. 3, p. 379-416, 2008.

HOROKS. J. ; ROBERT, A. Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships**. J Math Teacher Educ**, n. 10, p. 279–287, 2007.

LACAVE, C. ; MOLINA, A.I. ; REDONDO, M.A. A preliminary instrument for measuring students' subjective perceptions of difficulties in learning recursion. **IEEE Transactions on Education**, v. 61, n.2, p. 119-126, 2018.

LEONTIEV, A. **Le développement du psychisme**. Paris : Editions sociales, 1976.

LURIA, A.R. **Cognitive development: Its cultural and social foundations**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1976.

PARIES, M. ; ROBERT, A. ; ROGALSKI, J. Comment l'enseignant de mathématiques, en classe, met ses élèves sur le chemin des connaissances : un point de vue méthodologique en didactique des mathématiques. **Travail et Apprentissages**, v. 3, p. 95-123, 2009.

PERRIN, D. **Autour du théorème de Thalès**. Conférence IREM 7 Juin 2006. https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ThalesDP.pdf

QUEFFELEC, H. Réflexions sur l'enseignement de l'intégration, **Gazette des mathématiciens**, n. 132, Paris, 2012.

ROBERT, A. Un Point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : l'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation. **Petit x**, n. 63, p. 7-19, 2003.

ROBERT, A. ; ROBINET, J. Quelques résultats sur l'enseignement de l'algèbre linéaire, **Cahier de didactique des mathématiques de l'IREM de Paris 7,** n. 53, 1989.

ROBERT, A. ; ROGALSKI, J. Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. **La Revue Canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies (RCESMT / CJSMTE)**, v. 2, n. 4, p. 505-528, 2002.

ROBERT, A. ; ROGALSKI, J. A cross-analysis of the mathematics teacher's activity. An example in a French 10th-grade class. **Educational Studies in Mathematics**, v. 59, n. 1-3, p. 269-298, 2005.

ROBERT, A. ; ROGALSKI, J. D'un problème

d'optimisation d'une surface agricole au cours sur le sens de variation en seconde : une étude de cas. **Cahier du LDAR**, n. 22, 2022.

ROGALSKI, J. ; ROGALSKI, M. Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, n. 9, p. 175-203, 2004.

ROGALSKI, M. Des problématiques avant des axiomatiques : des exemples de raisons d'être. **Repères IREM**, n. 123, p. 5-30, 2021.

ROGALSKI, M. ; POUYANNE, N. ; ROBERT, A. **Carrefours entre analyse algèbre géométrie**. Paris : Ellipses, 2001.

ROGALSKI, M. ; DECROIX, A.-A. **L'intégrale, de la physique aux mathématiques**. Atelier CI2U, CIIL, CIISP LYON, Mai 2013.

ROGALSKI, M. Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady, **Actes de la journée en hommage à Régine Douady.** Paris : IREM de Paris 7, 2002.

SERFATI, M. La constitution de la pensée symbolique mathématique. **Actes du colloque Espace Mathématique Francophone**. Université Cheikh Anta Diop de Dakar, Sénégal, 2009.

VANDEBROUCK, F. (coord.) **La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants**. Toulouse: Octarès Editions, 2008.

VANDEBROUCK, F. (ed.) **Mathematics Classrooms. Students' Activities and Teachers' Practices**. Sense Publishers, 2013.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 2/3, p. 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. Activité, développement, représentation. **Colloquium didactique des mathématiques ARDM Janvier 2008**. Paris : Publications de l'IREM, 2009.

VYGOTSKY, L. (1997/1934). **Langage et pensée**. Paris : La dispute.

ANNEXE DE LA CHRONIQUE

Exercice du Tipi :

L'habitation traditionnelle des Indiens des plaines d'Amérique du Nord est le tipi. Un tipi est constitué de longues tiges de bois appuyées les unes aux autres, d'une enveloppe extérieure faite de peaux d'animaux et d'une porte toujours orientée vers l'Est.

Pour la reconstitution d'un village amérindien, on cherche à construire un tipi où chaque perche en bois mesure 9 mètres et dépasse de 1,5 mètres. Le diamètre du cercle tracé au sol mesure 12 mètres.

1) Le but de ce tipi est d'abriter un totem de 4 mètre de haut.
Le tipi est-il assez haut pour acceuillir ce totem ?
2) Les concepteurs souhaitent placer une plateforme circulaire au sommet du tipi.
Quel sera le diamètre de la plateforme ?
3) On y pense que maintenant... Les ailes du totem sont à une hauteur de 3,5 mètres et ont une envergure de 2,2 mètres.
Est-ce que le totem peut rentrer dans le tipi sans dépasser des parois ?

Tâches par épisodes	Activités et Durées – - *les moments d'exposition de connaissance en italique* - les moments de recherche soulignés
Séance 1	
Question 1 du tipi (24') Mathématisation et Théorème de Pythagore	5' recherche individuelle globale 8' modélisation par le professeur et figure 3' recherche individuelle (calcul de la hauteur) 8' correction collective (un élève au tableau)
Début de la question 2 du tipi : *Pythagore ne fait pas tout* (14') Retour motivé aux triangles semblables (rappel de cours)	7' recherche individuelle 7' correction collective (théorème de Pythagore inutilisable *et révision collective des triangles semblables)* (point-bilan)
Idem (6')	6' *travail sur la fiche triangles semblables* et premier retour sur la question 2 par le professeur (point-bilan)
Séance 2	
Question 2 du tipi suite (24')	11' rappels du professeur et recherche collective de la similitude des deux triangles en jeu dans la question 4' correction par le professeur (point-bilan) 5' correction du tableau de proportionnalité des longueurs des côtés par le professeur (point-bilan) 4' correction finale par le professeur (point-bilan)
Conjecture : obtenir deux triangles semblables et début du cours sur Thalès (19')	6' recherche individuelle 5' recherche collective avec Geogebra 8' conclusion du professeur : des droites parallèles impliquent des triangles semblables et *début de cours sur le théorème Thalès par le professeur*
Séance 2 suite	
Cours Thalès (suite) (10')	10' *Retour sur la fiche Théorème de Thalès* (3 points-bilans)

Premier exemple d'utilisation cherché en classe (23'30)	13'30 Tracé de la figure au tableau par le professeur et recherche individuelle - Quelques interventions du professeur (aides procédurales) 4'30 Début de correction par le professeur- retour au cours (point-bilan) 5'30 Fin de la correction avec un élève au tableau (2 points-bilans).
Reprise de la question 3 du tipi	Recherche collective *et résolution* 30''Rappel des résultats trouvés aux questions 1 et 2 et commentaire sur l'énoncé de la question 3 2'15 Construction de la figure utile pour raisonner 7'55 *Calcul de DE par une première méthode* (tableau de proportionnalité et quatrième proportionnelle) : conditions d'utilisation (justification du parallélisme), rédaction (écriture en abrégé), tableau de proportionnalité et calcul 1' commentaire sur le résultat trouvé pour l'exercice du tipi 50' *Retour sur une autre méthode* (coefficient de proportionnalité et agrandissement)