CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 265 – 296
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Cheick Oumar **DOUMBIA**[1], École Normale Supérieure de Bamako.

Saddo Ag **ALMOULOUD**[2], Université Fédérale de Bahia.

Luiz Marcio Santos **FARIAS**[3], Université Fédérale de Bahia.

Dimensions épistémologique et didactique de la définition formelle de la notion de limite d´une fonction réelle

Epistemological and didactical dimensions of the formal definition of the

RESUMÉ

Ce travail est un extrait de la thèse du premier auteur soutenu en mai 2020, intitulée « Un modèle didactique de référence pour la construction de savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite en terminale science exacte au Mali ». Nous nous intéressons aux aspects épistémologique et didactique de ce concept mathématique, en mettant en exergue les dimensions épistémologique et didactique de la définition formelle de la notion de limite d´une fonction réelle en un point réel. Dans un premier temps, nous présentons les résultats d'une enquête épistémologique exploratoire au près d´enseignants du lycée et de futurs enseignants et en suite nous faisons une analyse de la définition formelle de la limite pour mettre en exergue les aspects de la définition formelle et les connaissances nécessaires pour comprendre cette définition et son importance dans les processus de son enseignement et de son apprentissage. Il ressort de cette étude que c'est la définition intuitive qui émerge chez les étudiants, se perpétue et s'érige en obstacle. Elle est nécessaire pour introduire la limite ; mais elle est limitée car elle est une qualification approximative de la définition formelle. Notre étude montre qu´il est nécessaire de faire une analyse fine de la définition formelle pour minimiser les problèmes liés aux obstacles épistémologiques tels que : limite peut être atteinte ou non, confusion entre la limite et l'image et entre l'étude de la continuité et l'étude de la limite en un point, l'effacement de quantificateurs. Il s'avère nécessaire de faire travailler les étudiants des situations dont la résolution réclame la mise en œuvre de la définition formelle d'une part, et d'autre part, sa mise en rapport explicite avec la définition intuitive.

Mots-clés: Concept de limite, Définition formelle, covariance, contravariance.

ABSTRACT

This work is an extract of the thesis of the first author defended in May 2020, entitled "A didactic model of reference for the construction of knowledge and the actualization of knowledge on the notion of limit in the final year of exact science in Mali". We are interested in the epistemological and didactical aspects of this mathematical concept, by highlighting the epistemological and didactical dimensions of the formal definition of the notion of limit of a real function at a real point. First, we present the results of an exploratory epistemological investigation among high school teachers and future teachers and then we make an analysis of the formal definition of the limit to highlight the aspects of the formal definition and the knowledge necessary to understand this definition and its importance in the processes of its teaching and learning. It emerges from this study that it is the intuitive definition that emerges in the students, perpetuates itself and sets itself up as an obstacle. It is necessary to introduce the limit; but it is limited because it is an approximate qualification of the formal definition. Our study shows that it is necessary to make a fine analysis of the formal definition in order to minimize the problems linked to epistemological obstacles such as: limit can be reached or not, confusion between the limit and the image and between the study of continuity and the study of the limit at a point, the erasure of quantifiers It is necessary to make the students work on situations whose resolution requires the implementation of the formal definition on the one hand, and on the other hand, its explicit connection with the intuitive definition.

Keywords: Concept of limit, Formal definition, covariance, contravariance.

Correspondance:

[1]cheickodoum@gmail.com

[2]saddoag@gmail.com

[3]lmsfarias@ufba.br

Reçu dans 14/10/2023
Approuvé en 14/11/2023

INTRODUCTION

Ce travail est un extrait de la thèse du premier auteur soutenu en mai 2020, intitulée « Un modèle didactique de référence pour la construction de savoirs et l’actualisation des connaissances sur la notion de limite en terminale science exacte au Mali ». Nous nous intéressons aux aspects épistémologique et didactique de ce concept mathématique, en mettant en exergue les dimensions épistémologique et didactique (ARTIGUE, 1990). Cette perspective théorique nous a conduit à l'étude des obstacles épistémologiques liés au champ conceptuel (VERGNAUD, 1990) de la notion de limite d'une fonction réelle.

Dans un premier temps, nous présentons les résultats d’une enquête épistémologique exploratoire au près d´enseignants du lycée et de futurs enseignants et en suite nous faisons une analyse de la définition formelle de la limite pour mettre en exergue les aspects de la définition formelle et les connaissances nécessaires pour comprendre cette définition et son importance dans les processus de son enseignement et de son apprentissage.

Nous voulons mettre en évidence l'importance d'une analyse épistémologique en Didactique des Mathématiques, plus spécifiquement de la notion de limite d'une fonction réelle, en nous concentrant sur la constitution du savoir scientifique lié au concept de limite d'une fonction réelle, tant dans sa genèse historique que dans sa reconstruction mentale chez chaque sujet, que dans ses articulations dans une étape donnée du développement du savoir scientifique (ARTIGUE, 1990).

Dans cette perspective, nous considérons la Didactique des Mathématiques comme une science dont l'objet d'étude porte sur des situations visant l'acquisition de connaissances par des élèves, des étudiants ou des adultes en formation, tant du point de vue des caractéristiques de ces situations, que des caractéristiques des apprentissages qu'elles rendent possibles. Il est donc essentiel de prendre en considération la relation entre épistémologie et didactique, c'est-à-dire les besoins formulés en termes de connaissance des processus de formation et de développement des concepts mathématiques et, plus généralement, de la connaissance des caractéristiques de l'activité mathématique (ARTIGUE, 1990).

Selon les résultats de plusieurs chercheurs en Didactique des Mathématiques, dont la publication d'Artigue (1990), l'analyse épistémologique peut aider le chercheur à avoir une attitude critique sur les conceptions qu'un individu peut construire à partir de son vécu et de son expérience avec les Mathématiques et ses outils. Une analyse épistémologique des connaissances mathématiques peut être un instrument très efficace pour comprendre les éléments historiques qui constituent ces connaissances, en mettant en évidence la compréhension des concepts mathématiques que l'enseignement traditionnel présente généralement sous une forme dogmatique, mais aussi des notions "mathématiques", comme la rigueur mathématique.

Nous nous appuyons aussi sur la notion de champ conceptuel issue de la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1996). C´est une théorie cognitive qui vise à fournir un cadre cohérent et quelques principes de base pour étudier le développement et l'apprentissage de compétences complexes, en particulier celles des sciences et des techniques.

Un champ conceptuel est à la fois un

ensemble de situations et un ensemble de concepts ; un ensemble de situations dont la maîtrise progressive nécessite une variété de concepts, de schèmes et de représentations symboliques en étroite relation ; un ensemble de concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations (VERGNAUD, 2007). On peut donc dire qu'un concept se développe à partir de plusieurs situations et qu'une situation peut être analysée à partir de plusieurs concepts.

NOTION DE LIMITE DE FONCTION RÉELLE

La notion de limite est une notion polysémique ; mais l'enseignement actuel, au Mali, de cette notion ne permet pas aux élèves de donner un sens mathématique à la notion de limite d'une fonction réelle d'une variable réelle. Cet enseignement est essentiellement basé sur le cadre algébrique et le cadre numérique (DOUADY, 1992).

Les pratiques de classes posent le problème comme la recherche de la limite ℓ en x_0 ; elles ne donnent aucune justification. L'enseignement actuel accepte de gérer le fait qu'il est difficile d'enseigner de prime à bord la définition formelle de la limite. Il opte pour une approche intuitive qui veut donner du sens à partir de la mise en place des techniques. Cela nous amène à poser les questions suivantes : qu'apprennent réellement les élèves ? Quelles conceptions de la notion de limite manipulent-ils sans jamais pouvoir recourir à sa définition précise ? Avec ce type d'enseignement quel sera le rapport à la notion de limite des élèves qui vont poursuivre des études mathématiques à l'université ? Niveau où l'on sait que la définition formelle n'est pas construite mais, on la fait fonctionner sur des cas particuliers et généraux, on y rencontre aussi des situations dont la résolution nécessite la définition formelle de la limite.

Il est nécessaire de signaler ici que les professeurs du supérieur évitent les questions sur l'utilisation de la définition formelle. Ce qui explique le fait que beaucoup se retrouvent au niveau licence de mathématiques avec des conceptions erronées, puisqu´il semble que l'enseignement reçu au supérieur n'a pas permis de mettre à jour leurs connaissances sur la notion de limite d´une fonction réelle.

L´étude que nous menons s´appuie largement sur les travaux de thèse du premier auteur soutenu en mai 2020, intitulée « Un modèle didactique de référence pour la construction de savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite en terminale science exacte au Mali ».

Comme nous l´avons indiqué, nous nous intéressons aux aspects épistémologique et didactique de ce concept mathématique. Dans un premier temps, nous présentons les résultats d'une enquête épistémologique exploratoire au près des enseignant du lycée et des futurs enseignants au Mali et en suite nous procéderons à une analyse de la définition formelle de la limite pour mettre en exergue les aspects formels de cette définition en donnant des exemples d'illustration et les connaissances nécessaires pour la comprendre et l'importance de la définition formelle.

ENQUETE ÉPISTÉMOLOGIQUE SUR LES CONCEPTIONS DES FUTURS ENSEIGNANTS SUR LES OBSTACLES

EPISTEMOLOGIQUES RELATIFS A LA NOTION DE LIMITE

L'enseignement actuel de la notion de limite au Mali n'aborde pas les aspects épistémologiques importants ; acquérir des connaissances sur la notion de limite c'est prendre conscience de ces aspects épistémologiques, les affrontés et les surmontés. L'enseignement de la notion de limite doit s'organiser autour de ces obstacles épistémologiques pour que les élèves et étudiants les rencontrent pour faire leur crise de limite et enfin mettre à leur disposition des moyens permettant de les surmonter. C'est dans ces conditions que l'on dira que les élèves ont appris la notion de limite. Cela n'est possible qu'à travers la construction et la mise en application de la définition formelle de la limite. Pour que les aspects épistémologiques soient abordés, il est nécessaire que les enseignants aient une conception claire de ceux-ci. C'est pourquoi nous avons procédé à une enquête épistémologique exploratoire auprès des enseignants dont nous présentons les résultats.

Par rapport à cette enquête, nous explorons les conceptions d'élèves professeurs et d´enseignants du Lycée sur les obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. Pour cela, nous proposons comme tâche la démarche suivante : a) Expliquer pourquoi ℓ *est la limite de f en* x_0 ; b) Démontrer que ℓ *est la limite de f en* x_0.

Pour s'y prendre nous avons élaboré un questionnaire pour 19 futurs enseignants et 4 enseignants du Lycée.

Les tâches ont été organisées en trois sessions pour les futurs professeurs (une session par activité individuel suivi d'un travail de groupe). Tandis que les professeurs du Lycée ont bénéficié de trois jours pour répondre aux questionnaires.

L'analyse des trois activités à montrer que dans les calculs de limite, les enseignants font l'amalgame entre la limite en x_0 et la continuité en x_0, comme illustrent les réponses suivantes d'élèves professeurs.

Activité 1 [1] : dans les réponses au questionnaire, nous avons rencontré fondamentalement des définitions intuitives (qualitatives). Il arrive parfois que la limite soit confondue avec l'image ou avec la limite à gauche. Ceci correspond à l'idée qu'étudier la limite en un point revient "*à chercher l'image de ce point*" ou encore "*à étudier la continuité en ce point*".

Exemple : La production d'un étudiant du semestre 2 (S2) :

« Les définitions correctes sont :

Élève 1 : si x s'approche de a alors f(x) s'approche de ℓ.

Élève 4 : si la distance entre x et a est petite alors la distance entre f(x) et ℓ est aussi petite.

Élève 6 : pour tout nombre réel α strictement positif, il existe un nombre réel β strictement positif tel que : si d(x, a)<δ alors d(f(x), ℓ)<ε

Élève 7 : pour des valeurs de x très très proche de a sans lui être égal, alors f(x) est très très proche de ℓ.

Justification : toutes ces définitions données sont correctes, seulement les formulations en langage mathématique sont

[1] Voir l´énoncé de l´activité dans les annexes.

différentes. Les élèves 1 et 7 se servent de définition littérale tandis que les élèves 4, 6 se servent de la notion de distance.

Les définitions incorrectes et justifications

Élève 2 : dans sa définition le terme x suffisamment proche de a n'est pas bien éclairci, tant que x n'est pas égal à a, il peut toujours être plus proche de a.

Élève 3 : sa définition syntaxe sur la notion de limite à gauche qui n'est pas générale.

Élève 9 : sa définition est celle de la continuité de f en a qui est un cas particulier de la notion de limite.

Élève 10 : définition mal formulée et il veut définir la notion de continuité. »

Il y a eu beaucoup de difficultés pour répondre à la question « comment applique-t-on la définition formelle ? ». Certains calculent *f(a)*, d'autres n'ont pas pu répondre, d'autres expliquent les techniques de calcul de la limite. Il y a seulement deux élèves professeurs sur dix-neuf qui ont utilisé une définition quantifiée ; mais cette définition correspond à celle de la continuité d'une fonction en un point, comme on peut l´observer dans la réponse suivante :

Pour déterminer la limite d'une fonction en un point j'utilise la définition : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in Df, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$ *c'est à dire* $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$

En résumé nous pouvons dire qu´il semble que les élèves professeurs ont appris la définition intuitive, mais, ne se rappellent pas (ou ne savent pas) bien la définition formelle. Cela parce que l'enseignement reçu privilégie la définition intuitive au début et ne met pas l'accent sur la définition formelle précise au niveau supérieur. On accorde beaucoup d'intérêts aux règles de calcul de limite ; et on néglige la justification. Cela a comme conséquences la résistance des conceptions erronées telles que la confusion entre la limite et l'image, la limite et la limite à gauche, limite atteinte ou non, l'étude de la limite et l'étude de la continuité en un point.

Les résultats observés montrent que qu'il y a chez ces élèves professeurs une confusion entre la limite et la continuité en un point. Cela semble être la conséquence d´une pratique d´enseignement qui ne prend pas en compte une analyse fine de la définition formelle pour mettre en évidence sa rigueur qui est une de sa raison d'être pour mettre en évidence les insuffisances de la définition intuitive qualitative.

Activité 2[2]

L'analyse des productions montre que les futurs professeurs reconnaissent la définition formelle précise de la limite ; mais, rencontrent des difficultés dans sa mise en œuvre. Certains font une lecture linéaire avec effacement des quantificateurs et pour d'autres c'est seulement l'aspect contra-variant qui est pris en considération. Ils ne maitrisent pas non plus les connaissances nécessaires pour appliquer la définition formelle.

Exemples 1 : Un binôme d'étudiants du semestre 2 (S2) a choisi les réponses suivantes :

■ Par rapport à la question 1) :

Elève 4 : c'est la formule qui permet d'étudier la continuité et la limite d'une fonction en un point, car la relation prouve que f est continue en a et admet ℓ comme limite en a.

■ Par rapport à la question 2) :

[2] Voir l´énoncé de l´activité dans les annexes.

Elève 3 : c'est la définition de f est continue en a ;

■ Par rapport à la question 3) :

Elève 1 : on va de $|x-a|<\delta$ *vers* $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ *par ce que du fait qu'on a l'implication dans la définition cela prouve qu'on doit partir de* $|x-a|<\delta$ *pour construire* $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ *sinon la réciproque est fausse.*

Ce binôme ne répond pas à la question 4). Les réponses données révèlent une confusion entre la limite et la continuité en un point d'une part, et un fonctionnement « covariant » de la définition formelle d'autre part. Il effectue une lecture linéaire de la définition formelle ; ce qui correspond à l'effacement des quantificateurs.

Exemples 2 : Un autre groupe répond aux questions comme suit :

■ Par rapport à la question 1) :

Cette formule nous rappelle : "la formule de la limite''

■ Par rapport à la question 2) :

Cette définition interprète la définition de ℓ est la limite de f en a

■ Par rapport à la question 3) :

L'application de cette définition : "il s'agit de prouver l'existence de δ on va de $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ *pour construire δ''.*

Ici, on constate que ces élèves professeurs reconnaissent la définition formelle de la limite ; mais ils pensent que cette définition formelle ne fonctionne que de façon « contra variante ».

Activité 3[3] :

L'analyse des productions de l'activité 3 confirme les résultats obtenus dans les deux précédentes activités, à savoir : Confusion entre limite en un point et *l'image de ce point* ou encore entre limite en un point et *la continuité en ce point*.

Elle montre par ailleurs, chez ces futurs enseignants l'existence de l'obstacle "limite atteinte ou non" et la non prise en compte l'ensemble de définition de la fonction.

Exemples 2 : Un binôme répond aux questions comme suit :

■ Par rapport à la question 1) :

1) Parmi les exemples suivants précisons ceux qui illustrent bien la définition de la limite

a. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ *N'illustre pas la définition de la limite car la fonction n'est pas définie en ℓ.*

b. $\lim\limits_{x\to 3}(2x-3)$ *Illustre la définition de la limite car elle admet une limite ℓ.*

■ Par rapport à la question 2) :

2) *Précisons celles qui admettent une limite en a.*

a. *f(x)=2x+3* I=]2, 7] *a*=2 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=7$

b. f(x)=-5x+2, I=[-5;5], a=5, $\lim\limits_{x\to -5} f(x)=-23$;

d. *f(x)*= $\begin{cases}2x-1 & si \quad x<3\\ x+2 & si \quad x>3\\ f(3)=6\end{cases}$ I= ℝ *a*=3

$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\begin{cases}6\\5\\f(3)=6\end{cases}$

Traitement des obstacles à l'aide de la définition formelle

■ *Obstacle logique ou effacement des quantificateurs*

En effaçant les quantificateurs la définition

[3] Voir l´énonce de cette activité dans les annexes.

devient si $x=a$ alors $f(x)=\ell$, c'est-à-dire $f(a)=\ell$. Pour ce faire, il semble judicieux de faire travailler les élèves professeurs sur les différentes expressions de l'égalité : «$|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$ » équivaut à « $x=a$ implique que $f(a)=\ell$ ». C'est-à-dire la limite est l'image. Car $\forall \varepsilon > 0$, $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow x = a$

■ *Limite atteinte ou pas*

Avec la définition intuitive on voit qu'une fonction s'approche de sa limite mais qu'elle ne peut pas l'atteindre. Elle renforce l'idée qu'une fonction ne peut pas atteindre sa limite. Cependant avec la définition formelle, permet de s'apercevoir que dès qu'une fonction admet une limite, alors cette limite est atteinte. En effet supposons que f n'atteint pas sa limite ℓ en a i.e. $f(x) \neq \ell$ alors $|f(x)-\ell|>0 \Rightarrow \frac{|f(x)-\ell|}{2} > 0$ $d'où$ $|f(x)-l| < \frac{|f(x)-\ell|}{2}$ ce qui est absurde donc f atteint sa limite ℓ.

L´analyse de ces activités a montré que c'est la définition intuitive qui émerge et s'érige en obstacle pour la compréhension de la définition formelle précise. Les futurs enseignants qui ont fait l'objet de cette enquête ont une conception dynamique de la limite, et les résultats montrent qu´il est nécessaire d'inclure l'histoire des mathématiques dans le cursus des futurs professeurs. Sa manipulation permet aux élèves de mettre à jour beaucoup de connaissances qui lui sont connexes telles que la notion d'intervalles, inéquations avec valeur absolue, distance, composition, décomposition de fonctions, ordre dans $\mathbb{R}$, etc. La définition formelle, si elle est bien comprise, permet de prendre en charge des obstacles tels que la limite est atteinte ou non, l'effacement des quantificateurs, la confusion entre la limite et la continuité, la prise en compte de l'ensemble de définition dans le calcul de la limite, elle marque le passage de l'algèbre à l'analyse.

Compte tenu de ce résultat nous avons jugé important de faire une analyse fine de la définition de la limite.

La notion de limite apparaît comme une notion polysémique en mathématique. Ce caractère polysémique n'aide pas à la compréhension de son sens par les élèves et les étudiants. L'une de ces significations est que la limite est la fin, il n'y a rien de l'autre côté. C'est une notion statique pour les élèves, c'est-à-dire, ils privilégient les aspects statiques

> La notion de limite est avant tout une notion statique, il s'agit d'une interdiction ou d'une impossibilité de franchir quelque chose. Cette limite peut se trouver dans le temps ou dans l'espace (on s'arrête …). Éventuellement, il peut s'y ajouter l'idée qu'il est difficile de s'approcher de la limite, et à fortiori de l'atteindre. L'expression tend vers a en général un sens plus dynamique. (CORNU, 1983, p. 122)

ÉTUDE HISTORIQUE DE LA NOTION DE LIMITE

Pour cette étude nous nous appuyons sur les travaux de Cornu (1983), Sierpinska (1985), Artigue (1996a, 1996b), Bkouche (1997) et Job (2011).

On rappelle les obstacles relatifs à la notion de limite, les problèmes qui ont permis l'émergence de la notion de limite et quelques débats contradictoires à propos de la définition de la notion de limite. Nous présentons aussi une analyse de la définition formelle de « ℓ est la limite d'une fonction numérique d'une variable réelle en un point fini a ».

Euler (1707-1783) aide beaucoup à débarrasser le calcul de son support géométrique. Il travaille non pas sur des grandeurs, mais sur des fonctions qui ont été l'un des facteurs de développement de la notion de limite. A l'époque d'Euler, la notion de fonction n'était pas encore très claire ; il s'agit essentiellement d'expressions algébriques. En introduisant plusieurs ordres d'infiniment petits : dx, $(dx)^2$. Euler développe des fonctions en série. Cela lui permet d'obtenir de nombreux résultats sur les séries numériques. Il est important de signaler qu'Euler ne s'est pas seulement intéressé au point de vue qualitatif (convergence ou divergence) ; mais surtout au point de vue quantitatif (rapidité de convergence, ou même de divergence).

D'Alembert (1717-1783) a été très sensible au problème des infiniment petits et des infiniment grands. Pour lui, les infiniment petits, relèvent de la "métaphysique'', et n'ont rien à faire dans le raisonnement mathématique[4] : Il résulte des raisonnements faisant intervenir des quantités "qui s'évanouissent'' :

> Une quantité est quelque chose ou rien ; si elle est quelque chose, elle n'est pas encore évanouie ; si elle n'est rien, elle est évanouie tout à fait. C'est une chimère que la supposition d'un état moyen entre ces deux-là'' (Œuvre philosophique de D'Alembert volume 2, Ed Jean-François Bastien, 1805, p. 353).

D'Alembert va donc s'attacher à dégager la notion de limite de cette "métaphysique'' des infiniment petits, et à en donner une définition précise, il la définit ainsi :

> On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur quand la seconde peut approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche ; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable. (La Chapelle, D'ALEMBERT. L'Encyclopédie,1ère éd. 1751, Tome 9, p.542)

Il insiste sur le fait qu'une quantité ne devient jamais égale à sa limite[5] : Il prend pour exemples le cercle, limite des polygones inscrits, ou encore la somme d'une progression géométrique. Il définit la "somme d'une suite" (i.e. d'une série) comme "la limite de ses différents termes, c'est-à-dire une quantité dont on approche aussi près qu'on veut, en prenant toujours dans la suite d'un nombre de termes de plus en plus grand". Il fût très réticent à l'égard des séries divergentes[6]. La notion de limite mise en place par D'Alembert oppose la notion de limite à celle d'infiniment petit. Par souci de rigueur mathématique. Sierpinska (1985) précise que la notion de fonction n'apparaît pas dans cette définition, il n'est pas question de nombres mais de grandeurs, et enfin les expressions *s'approcher, différence entre les grandeurs, et inassignable* ne sont pas définies non plus.

Lagrange (1736-1813) est réticent à la fois

[4] "on peut du reste se passer très aisément de toute cette métaphysique de l'infini dans le calcul différentiel'', "la supposition que l'on fait de quantités infiniment petites, n'est que pour abréger et simplifier les raisonnements, mais dans le fond le calcul différentiel ne suppose point l'existence de ces quantités''. (Encyclopédie, article "différentiel'')

[5] A proprement parler, la limite ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la limite ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra.

[6] Pour moi, j'avoue que tous les raisonnements fondés sur les séries qui ne sont pas convergentes me paraissent très suspects, même quand les résultats s'accorderaient avec des vérités connues d'ailleurs. (Opuscules Mathématiques, 5, p.183)

à l'égard de la notion de limite et à l'égard des infiniment petits. À propos de la limite, Il écrit :

> L'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer est, sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'analyse, qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul. (Lagrange cité dans CORNU (1983), p. 58)

Il veut ramener toute l'analyse au calcul algébrique, et pour cela, il travaille avec le développement en série des fonctions. Lagrange qui refuse la notion de limite, est l'un des principaux artisans du passage au domaine numérique, passage qui permettra l'unification du concept de limite. Pour Lagrange, la limite ne met pas en jeu l'infini. Il développe la pratique des majorations et des minorations, en particulier pour contrôler le reste d'une série.

Les séries sont avant tout pour lui des objets algébriques formels. Lorsqu'on substitue des nombres aux indéterminées, se pose le problème de la convergence, et donc la nécessité d'une majoration du reste : après avoir établi la formule : $f(x) = f(x - xz) + xzf'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2}f''(x - xz) + etc.$, il prend soins de calculer le reste pour le cas où "on veuille s'arrêter à son premier, second, troisième, etc. terme'', et il obtient par exemple : "$fx = f + xf' + \frac{x^2}{2}f'' + x^3R, R$ étant une fonction de z qui s'évanouit lorsque *z*=0''. Ayant ainsi travaillé dans le domaine numérique, Lagrange applique ensuite ses résultats à la géométrie et à la mécanique.

À partir de là, la pratique du calcul se développe considérablement, et le passage au domaine numérique s'effectue totalement : après le calcul formel sur les fonctions, on travaille sur les nombres. Fourier, Poisson et Gauss en sont les principaux artisans. Gauss a une idée claire de la notion de limite, et en 1800, il définit les notions de borne supérieure, borne inférieure, limite supérieure, limite inférieure.

C'est Cauchy (1789-1857) qui donne sa place définitive à la notion de limite, en réorganisant l'analyse à partir de cette notion. Pour lui, le concept de limite est le concept de base en analyse, et, dès le début de son cours à l'École Rurale Polytechnique, il définit la limite et introduit les opérations sur les limites :

> Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchaient indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. En géométrie, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus. (CORNU, 1983, p. 53)

Il va fonder toute l'analyse sur la limite : continuité, dérivée, intégrale. Toutefois, Cauchy reste encore marqué par les infiniment petits, et il s'en sert parfois : cela influence son langage ; ses articles de recherche utilisent essentiellement la notion d'infiniment petit. La notion de limite n'est pas encore définitivement affinée : elle se confond encore avec la notion de point d'accumulation : lim(sin $(\frac{1}{x})$ a pour Cauchy, une infinité de valeurs comprises entre -1 et +1. Il y a aussi la confusion entre l'étude de la continuité et l'étude de la limite en un point et la confusion entre limite et image.

La relation fonctionnelle apparaît déjà avec une attribution de valeurs numériques. Mais on parle de valeurs consécutives, ce qui fait dire à Sierpinska (1985) que cette définition concernait seulement les suites numériques. Inspirée par Lakatos (1978, p. 48), elle précise que les quantificateurs et des expressions indéfinies comme, par exemple *s'approcher indéfiniment,* sont implicites dans cette définition. De plus elle précise que Cauchy ne marquait pas distinctement la dépendance entre le voisinage du point auquel on calcule la limite et le voisinage du pont qui est la limite. Elle attire notre attention qu'en langue naturelle on ne fait pas bien attention à l'ordre des mots et aux différences subtiles qui s'ensuivent.

Alors qu'en France les idées de Cauchy ne sont pas reprises immédiatement, la notion de limite se développe rapidement en Allemagne, et Weierstrass (1816-1897) en donne une formulation "statique", sous la forme que nous connaissons aujourd'hui :

> Si étant donné un nombre réel positif quelconque ε, il existe un nombre η_0 tel que pour $0<\eta<\eta_0$, la différence $f(x_0 \pm \eta) - \mathcal{L}$ est plus petite en valeur absolue que ε alors $\mathcal{L}$ est la limite de *f(x)* pour $x=x_0$. Il n'y a rien à ajouter, rien à supprimer ». Ou encore symboliquement
> $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0, \forall x \in Df\ (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon)$. Cette formulation est aussi appelée définition Weierstrassienne de la limite.

À la lumière de cette étude historique, on peut affirmer que la notion de limite a mis du temps pour être clairement définie, sa construction a permis la construction de l'ensemble des nombres réels. Elle n'est pas apparue pour résoudre de nouveaux problèmes ; mais pour formaliser, unifier, généraliser et simplifier des concepts de base de l'analyse. Comme le disent Nicolas Grénier- Boley dans « La notion de « limite de fonction » : quelques exemples d'évolution au cours des diverses réformes de l'enseignement secondaire »

> Historiquement, la notion de limite n'est pas apparue pour résoudre de nouveaux problèmes [7] mais pour fonder l'analyse et l'enseigner (Cauchy, 1811) et il n'y a donc pas de situation fondamentale à son introduction. Plus précisément, la notion de limite est une notion FUG au sens d'Aline Robert, c'est à dire une notion formalisatrice, unificatrice et généralisatrice (elle unit et généralise des notions vues précédemment par le biais d'un nouveau formalisme). (NICOLAS GRENIER-BOLEY http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/limite_ngb_annexe.pdf. (02/02/2019)

C'est une notion complexe et polysémique. Nous allons mettre cette complexité en exergue dans l'étude épistémologique. C'est à travers la notion de limite que les mathématiciens ont mis au point la notion de convergence, la notion d'infini, la notion de nombre réel, la continuité, la dérivée, l'intégrale, etc.

ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE DE LA NOTION DE LIMITE

Nous présentons dans cette étude, les obstacles épistémologiques de la notion de limite, une analyse de la définition formelle de *l* est la limite d'une fonction numérique en un

[7] C'est compte tenu de l'insuffisance, parfois peu rigoureuses et l'inefficacité de ces méthodes (mdra, exhaussion) que la notion de limite a vu le jour.

point fini *a*, les difficultés de l'enseignement et l'apprentissage de la notion de limite.

Nous rappelons que l´épistémologie est la connaissance des processus par lesquels les concepts scientifiques se forment et se développent et, plus généralement, la connaissance des caractéristiques de l'activité scientifique.

Elle permet l'identification des principales questions ou problèmes auxquels ce savoir a été une réponse à un moment donné de son histoire, afin de reconstruire son sens et sa raison d'être. Les problèmes qui ont permis l'introduction de tel ou tel concept comme ceux qui ont gouverné son évolution sont constitutifs de la signification de ce concept (ARTIGUE, 1990) et d'après Chevallard (1995), on ne comprend véritablement un savoir, en tant que production humaine, que si l'on a su identifier les questions auxquelles il est censé répondre.

Nous avons aussi la notion de vigilance épistémologique, de la prise de distance par rapport aux objets d'étude, que permettent également au didacticien de prendre la mesure des disparités entre le savoir savant et le savoir enseigné au sens de Chevallard (1985). En fin l'épistémologie aide beaucoup à la théorisation en didactique. Dans cette perspective, Bachelard affirme que

> Quand on cherche les conditions […] des progrès de la science, on arrive bientôt à cette conviction que c'est en termes d'obstacles qu'il faut poser le problème de la connaissance scientifique. […] c'est dans l'acte même de connaître, intimement, qu'apparaissent, par une sorte de nécessité fonctionnelle, des lenteurs et des troubles. C'est là que nous montrerons des causes de stagnation et même de régression, c'est là que nous décèlerons des causes d'inertie que nous appellerons obstacles épistémologiques. […] En fait, on connaît contre une connaissance antérieure, en détruisant des connaissances mal faites, en surmontant ce qui, dans l'esprit même, fait obstacle à la spiritualisation. (BACHELARD, 1938, p. 13)

Brousseau (1983) met le concept « d´obstacle épistémologique » dans le champ de la didactique. Il distingue quatre types d'obstacles qui se différencient par leur origine :

- Épistémologique, lié au développement historique des connaissances et dont le rejet a dû être intégré explicitement dans le savoir transmis.
- Ontogénétique, du aux limitations du sujet à un moment de son développement ;
- Didactique, connaissances résultant d'une transposition didactique, semble ne dépendre que d'un choix ou d'un projet du système éducatif ;
- Culturel, connaissances véhiculées par le contexte culturel, déjà traitées scientifiquement, mais toujours présentes.

Brousseau fait aussi la distinction entre difficulté et obstacle :

Si le problème qui se pose, à une époque donnée, dans une certaine théorie [scientifique], vient à être résolu *sans que sa solution ne remette en cause de façon décisive le point de vue de la théorie en question*, dans un tel cas, on dit qu'une difficulté a été vaincue. Le signe qu'il y a eu difficulté, c'est que les [sciences] de l'époque ont été bloquées, même si les moyens de la résoudre étaient peut-être déjà disponibles […] On peut parler de la même façon de difficulté dans l'évolution des conceptions d'une notion mathématique chez un individu ou dans la genèse d'une notion.

Si, cependant, le problème qui se pose vient à être résolu après avoir exigé une restructuration de la connaissance et un changement important de point de vue, alors on dit qu'un obstacle a été surmonté. *Le signe qu'il y a eu obstacle, c'est que la théorie de l'époque a freiné et empêché la résolution du problème.*

De la même façon, on peut parler d'obstacle dans l'évolution des conceptions d'une notion [scientifique] chez un individu ou dans la genèse d'une notion. (El BOUAZZAOUI, 1988)

Brousseau caractérise un obstacle de la façon suivante :

a) Un obstacle sera une connaissance, une conception, pas une difficulté ou un manque de connaissance.
b) Cette connaissance produit des réponses adaptées dans un certain contexte, fréquemment rencontré.
c) Mais elle engendre des réponses fausses hors de ce contexte. Une réponse correcte et universelle exige un point de vue notablement différent.
d) De plus, cette connaissance résiste aux contradictions auxquelles elle est confrontée et à l'établissement d'une connaissance meilleure. Il ne suffit pas de posséder une meilleure connaissance pour que la précédente disparaisse (ce qui distingue le franchissement d'obstacles de l'accommodation de Piaget). Il est donc indispensable de l'identifier et d'incorporer son rejet dans le nouveau savoir.
e) Après la prise conscience de son inexactitude, elle continue de se manifester de façon intempestive et opiniâtre. (BROUSSEAU, 1989)

QUELQUES OBSTACLES EPISTEMOLOGIQUES DE LA NOTION DE LIMITE

Nous avons la limite comme « notion métaphysique », comme la notion d'infiniment petit et d'infiniment grand. Ces notions mystérieuses ont constitué l'un des principaux obstacles. Existe-t-il un état intermédiaire entre ce qui est nul et ce qui n'est pas nul ? Y-a-t-il un nombre plus grand que les autres ? Les débats autour des quantités évanescentes ont montré toute la difficulté qu'il y a à faire tendre une quantité vers zéro…la limite peut-elle être atteinte ? et la transposition numérique : (Il s'agit ici d'un obstacle lié à la « difficulté de se détacher du contexte géométrique et cinématique, pour travailler non plus sur les grandeurs, mais sur les nombres », en bref, difficulté avec l'arithmétisation de la notion de limite).

Sierpinska (1985) précise que des obstacles sérieux relatifs aux notions de nombre et d'infini restent à surmonter chez les élèves, malgré un enseignement systématique de ces notions, à cause de l'importance fondamentale de la notion de fonction dans la notion de limite, le franchissement des obstacles qui lui sont liés a une importance toute particulière, il est nécessaire de garder une certaine réserve vis-à-vis des méthodes démonstratives ou intuitives d'introduction des notions de tangente ou de limite à l'aide de différentes représentation géométriques. En fin, elle présente les obstacles épistémologiques de la notion de limite : horror infiniti[8] , obstacles liés à la notion de fonction, obstacles « géométriques », obstacles

[8] Cette expression renvoie à Georg Cantor :« l'horreur de l'infini est une forme de myopie qui empêche de voir l'infini actuel, bien que, dans sa forme supérieure cet infini nous ait crées et nous maintient, et dans toute ses formes secondaires transformées il se manifeste tout autour de nous et va jusqu'à

« logiques », et l'obstacle du symbole. Elle ne propose pas de situations permettant de surmonter ces obstacles. Cornu (1983) a beaucoup travaillé dans le cadre numérique appelé " Jauge numérique", il a eu des résultats similaires que Sierpinska qui a travaillé dans le cadre géométrique appelé" Jauge topologique".

Artigue (1996a) présente une liste d'obstacles épistémologiques que nous citons ci-après :

- le sens commun véhiculé par le terme limite qui favorise une conception de la limite comme barrière infranchissable et même non-atteignable, comme borne ou encore comme ultime terme d'un processus, qui tend aussi à renforcer des conceptions monotones strictes de la convergence,
- le principe de « continuité » (ainsi nommé par référence à Leibniz) qui consiste, traitant le processus de limite comme un processus algébrique « fini », à faire passer à la limite les propriétés communes aux éléments du processus, et plus globalement à ne pas être attentif à ce qui différencie cette opération particulière des opérations algébriques usuelles,
- des conceptions trop dépendantes d'une « géométrie de la forme » qui n'obligent pas à identifier clairement sur quels objets porte exactement le processus de limite et la topologie sous-jacente. Ceci rend difficile la perception du jeu subtil entre cadre numérique et cadre géométrique sous-jacent au processus de limite, et induit ou renforce des convictions erronées comme celle constant à croire qui si ''géométriquement'' un objet tend vers un objet, toutes les grandeurs qui lui sont associées auront pour limite les valeurs correspondantes des grandeurs pour l'objet limite.

Elle évoque aussi les difficultés liées au double statut opérationnel et structural de la limite qui se traduisent par les difficultés à se détacher d'une vision de la limite en simples termes de processus pour dissocier clairement l'objet limite du processus qui a permis de le construire, pour le doter d'une identité propre.

Enfin elle dit que l'on ne peut pas manquer de souligner les difficultés de la formalisation standard de la notion de limite. Et observe que cette formalisation fonctionne comme un tout indivisible, alors que spontanément, l'élève a plus tendance à considérer deux processus distincts : un portant sur la variable, l'autre sur les valeurs de la fonction ; l'imbrication s'opère de plus dans un sens qui n'est en rien naturel : pour écrire que la limite de la fonction est ℓ à l'infini, par exemple, on n'écrit pas que pour x grand, $f(x)$ est proche de ℓ, on se donne au contraire un voisinage de ℓ et on cherche à garantir que, si x est suffisamment grand, $f(x)$ sera dans ce voisinage ! Cette imbrication peut naturelle, induit, dans toutes les définitions standard, une alternance de quantificateurs dont on sait qu'elle est logiquement mal maîtrisée à ce niveau d'enseignement. Fort de ce constat on peut affirmer que la maîtrise des quantificateurs est capitale dans la compréhension et la mise en marche de la définition formelle de la limite.

Michèle Artigue pointe le saut qualitatif majeur entre la définition intuitive et la définition formelle de la limite. Quand elle affirme :

> En fait il y a entre un maniement relativement intuitif de la notion de limite et la notion formalisée standard un saut qualitatif majeur, attesté d'ailleurs par l'histoire même du concept. Le concept

nos esprits » (Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen 1932).

> formalisé apparaît, au sens de Imre Lakatos (LAKATOS, 1985), comme un concept fait pour ‘‘prouver’’, en rupture partielle avec les formes de connaissance qui le précède. Et sa fonction de concept unificateur du champ de l’analyse est, à ce moment-là, aussi fondamentale que sa fonction de production mathématique. (ARTIGUE, 1996b, p. 10)

Et elle précise qu’il s’agit là d’une problématique dont la transposition dans l’enseignement usuel ne peut aller de soi, même si ce dernier, en commençant aujourd’hui par une approche intuitive de l’analyse, et en souhaitant que la formalisation, quand elle est introduite, réponde à des besoins ressentis réellement par les élèves, cherche visiblement à se rapprocher du « sens » de l’évolution historique.

En plus des difficultés évoquées ci-dessus, Michèle Artigue(1996b) invoque aussi les difficultés liées à la rupture algèbre/analyse. Elle signale que cet aspect est très peu travaillé dans les recherches sur l’apprentissage de l’analyse et que Legrand (1993) est l’un des rares chercheurs à avoir pointé ces ruptures. Legrand insiste en particulier sur les ruptures nécessaires au niveau du traitement de l’égalité, ainsi qu’au niveau des formes de raisonnement. En algèbre, pour montrer que deux expressions sont égales, les élèves s’habituent en effet à raisonner si possible par équivalence, transformant ainsi, par exemple, l’écriture $a(x)=b(x)$ en une succession d’écritures $a_i(x)=b_i(x)$, jusqu’à obtenir deux expressions identiques. Il en est de même pour le traitement des équations et inéquations. Entrer dans le champ de l’analyse, cette démarche sera le plus souvent hors de portée, que l’on va faire le détour de montrer que : $\forall\varepsilon>0\,|a-b|<\varepsilon$ et que ce détour sera payant.

C’est comprendre que pour montrer qu’au voisinage d’un point *a*, $f(x)<g(x)$, on ne cherche pas à résoudre exactement l’inégalité mais à trouver un intervalle de centre *a* où l’on peut garantir, par un « bricolage » de majorations et minorations, l’inégalité. Elle précise que tout ceci n’a pas de raison d’être naturel et le sera d’autant moins que l’idéologie usuelle de l’enseignement qui conduit à minimiser les ruptures pour maintenir la fiction d’un apprentissage progressif et continu, tendra à laisser la prise de conscience de ces ruptures au seul registre du travail privé de l’élève.

Elle précise que ceci est difficile également parce que les modes de raisonnement qui sous-tendent ce travail sont nouveaux pour les élèves et les techniques mathématiques associées, délicates. On passe du raisonnement par équivalences successives à des raisonnements par conditions suffisantes : pour montrer que *a* est inférieur à *b*, on construira ainsi généralement une suite d’expressions a_i telles que : $a<a_1<\ldots<a_n$ jusqu’à pouvoir montrer aisément que $a_n<b$. à chaque étape du processus, il faut à la fois accepter de perdre de l’information sur a_i pour pouvoir avancer dans la résolution, sans trop en perdre, ce qui ferait sortir des limites de l’épure. Il y a là tout un jeu subtil qui suppose une familiarité avec les expressions, les ordres de grandeur respectifs qui ne peut s’apprendre que dans le long terme. En plus de ceux-ci nous savons que la construction des solutions aux problèmes est mise en avant dans la résolution des problèmes en analyse.

Artigue (1996b) affirme que l’on mesure là également la distance qui va séparer nécessairement la capacité de restituer les définitions formelles, même intelligemment, en les illustrant d’images montrant une compréhension certaine, et la capacité d’opérationnaliser les définitions dans le traitement des problèmes précis.

Artigue (1996b), s'appuyant sur les actes du groupe de travail sur le Calculus du congrès ICME 7 au Québec en 1992, affirme que partout se manifeste le souci de développer une première approche de l'analyse, adaptée aux élèves actuels, moins étroitement algébrique et algorithmisée que les approches antérieures mais aussi moins formelle, ayant l'ambition de permettre aux élèves de donner plus de sens aux notions qu'ils vont manipuler, et que dans une telle approche, les point de départ sont les intuitions et les conceptions des élèves qu'il s'agit de mettre à jour, de travailler et de faire évoluer, via des situations adaptées. L'arrivée aux formalisations usuelles n'étant pas l'objectif en soi.

Par rapport à cette affirmation nous nous posons la question « Serait-il possible de mettre à jour les conceptions erronées des élèves sur la notion de limite sans utiliser sa définition formelle ?" La réponse est non, puisqu´on voit qu'avec ces approches les élèves et les étudiants trainent des conceptions erronées jusqu'au niveau de la maîtrise. Les travaux de Robert (1982), Cornu (1983) le prouvent clairement. Ces deux auteurs ont montré que des étudiants en DEUG B, DEUG A, en Maths Sup et en CAPES avaient des conceptions erronées sur la notion de limite.

Les problèmes liés à l'enseignement de la notion de limite ne se situent pas seulement au niveau des élèves, il y'a une part considérable au niveau des enseignants. Cela a été détecté par Job (2011) quand il décrit le cas d'une étudiante en agrégation qui discute avec son professeur de didactique. Elle doit préparer un cours sur le concept de limite. Elle pense définir « b est la limite en a de la fonction f » par la condition : $\forall\varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| < \varepsilon$, son professeur la questionne sur cette définition, lui faisant remarquer que $f(x)=b$ lorsque la condition $\forall\varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| < \varepsilon$ est satisfaite, et donc la fonction est constante. Elle lui répond que cela aurait été le cas si elle avait considéré $\forall\varepsilon \geq 0$ au lieu de $\forall\varepsilon > 0$ dans la condition $\forall\varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| > \varepsilon$. Pour cette étudiante c'est une « stratégie didactique » visant à éclater la complexité de la définition usuelle de la limite. Au lieu d'une définition où des conditions, portant sur a et x d'une part, et sur b et $f(x)$, d'autre part, se retrouvent imbriquées les unes dans les autres. Ce qui lui semble « complexe », elle propose par le truchement de deux « définitions », $f(x)$ tend vers b si $\forall\varepsilon > 0 \quad |f(x) - b| < \varepsilon$ et x tend vers a si $\forall\varepsilon > 0 \quad |x - a| < \varepsilon$, une présentation où les deux conditions sont en quelque sorte « séparées ». Il est alors plus facile d'étudier les deux définitions, pour ensuite former la « définition » de la limite qui devient alors « triviale », b est la limite de f en a si $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a.

On voit qu'elle a l'obstacle de la limite atteinte ou non, et elle ne sait pas que l'on ne peut pas séparer les deux expressions car chacun pris isolement n'a aucun sens mathématique, les deux sont inséparables. Ici nous pouvons dire que les résultats des recherches n'atteignent pas souvent les salles de classes ou bien, on n'en fait pas une large diffusion. On doit mettre l'aspect inséparable des deux termes en exergue, l'un est une condition suffisante pour l'autre, l'un est commandé par l'autre ; sinon on n'aura pas accès au sens mathématique de la limite. Et tant que cela n'apparaît pas dans les exercices sur la limite on peut dire que l'on n'a pas appris la notion de limite.

L'acquisition des connaissances sur la notion passe par la confrontation et le franchissement d'un nombre suffisant de ces obstacles. Donc un cours sur la notion de limite doit permettre l'apparition des obstacles et de les surpasser. Les pratiques de classes actuelles au Mali ne s'inscrivent pas dans cette vision.

ANALYSE MATHÉMATIQUE DE LA DÉFINITION FORMELLE

Les pratiques sur la notion de limite sont diverses et cette diversité va jusqu'à la définition de la limite d'une fonction en un point a de $\mathbb{R}$. Pour certains, la formulation de " ℓ est limite de *f* lorsque *x* tend vers *a*" est :

Définition 1 : On dit que $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si pour toute suite x_n tendant vers *a*, la suite $f(x_n)$ tend vers ℓ ;

Cette définition 1 met en exergue l'aspect covariant de la limite en d'autres termes, elle respecte l'ordre « naturel » entre les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction considérée, ce qui semble correspondre aux formulations spontanées des élèves. Elle prend en compte les connotations dynamiques de l'expression « tend vers » :

> [...] la Définition 1 aborde les éléments de l'ensemble de départ et ceux de l'ensemble d'arrivée dans l'ordre naturel : on y considère d'abord les *x*, et puis seulement les *f(x)*. On est proche de la formulation familière de l'idée de limite d'une fonction *f* en un point a : « Quand les *x* se rapprochent de *a*, les *f(x)* se rapprochent de *b* », dont on retrouve d'ailleurs la trace dans l'expression canonique « quand *x* tend vers *a*, *f(x)* tend vers *b* (HAUCHART & ROUCHE, 1987, p. 330 cité par JOB, 2011).

Les auteurs précisent que cette définition présente aussi des inconvénients : Dans sa formulation, il apparaît explicitement un seul quantificateur (pour toute suite). Donc elle cache certaines quantifications *« La Définition 1 fait apparaître un quantificateur, tandis que les Définitions* [9] *2 et 3 en font chacune apparaître deux. Mais il s'agit bien de quantificateurs apparents, car il y a des quantificateurs cachés dans l'expression « x_n tendant vers a » ;* Il est difficile pour l'esprit d'envisager toutes les suites qui convergent vers *a* et en plus toutes les suites correspondantes engendrées par la fonction (double infinité):

> [...] la difficulté principale de la Définition 1 est qu'elle oblige à imaginer toutes les séries de limite *a*. C'est particulièrement difficile à cause de la double infinité d'objets qu'elle mobilise : envisager seulement une suite infinie n'est déjà pas banal ; qu'en est-il alors lorsqu'il s'agit d'envisager toutes celles qui tendent vers a ? L'imagination est brusquement encombrée. ((HAUCHART & ROUCHE, cité par JOB,2011, p.520)

Job (2011) précise ici que les auteurs parlent de suites au lieu de séries :

- la définition 1 tend à masquer l'aspect approximation sous-jacent à la notion de limite *« [...] en gros, elle [la définition 2] se base sur l'idée d'approximation, qui est d'ailleurs estompée dans la Définition 1. »*
- la définition 1 rend mieux compte des intuitions dynamiques sous-jacentes à des expressions comme « tendre vers » que la définition en epsilon et delta, néanmoins, « tendre vers » renvoie à un mouvement continu alors que la définition 1 traite du discret en tablant sur des suites.

Pour certains, la formulation de " ℓ est

[9] Il s'agit de la définition en epsilon delta et la définition topologique de la limite.

limite de *f* lorsque *x* tend vers x_0" est :

Définition 2 : $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$ tandis que pour d'autres c'est : **Définition 3** : $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$ de plus, dans chaque cas on utilise la même notation $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$

Job (2011) présente l'analyse en termes d'avantages et inconvénients faite par (HAUCHART & ROUCHE, 1987) :

Quelles sont les avantages de ces deux formulations ? La définition 2 rend compte de l'aspect approximation sous-jacent au concept de limite. Une deuxième idée est d'utiliser, pour définir une limite de fonction, une démarche analogue à celle qui a été suivie pour définir une limite de suite (en gros, elle se base sur l'idée d'approximation, qui est d'ailleurs estompée dans la Définition 1.). Le type de quantification universelle qui intervient dans la définition 2 est d'une certaine manière plus aisée que la quantification universelle qui apparaît dans la définition 1 car elle n'oblige pas à considérer une double infinité d'objets, ses objets (des réels) sont plus « simples » que des suites et en plus on ne doit pas tous les considérer, uniquement les plus petits.

Quelles sont les **Inconvénients de ces deux définitions ?** La définition 2 ne rend pas compte des aspects dynamiques du concept de limite. Elle ne respecte pas l'ordre « naturel » entre les ensembles de départ et d'arrivée de la fonction considérée. La quantification universelle « pour tout ε » masque l'idée qu'on ne s'intéresse qu'aux « petites » valeurs de ε. Elle établit parfois une dialectique entre la covariance et la contravariance.

En considérant la définition 2 « $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0, \quad \forall x \in Df \quad |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \varepsilon$ », on voit que *x* peut être égal à x_0 si *f* est définie en x_0. Dans ce cas on aura $\ell = f(x_0)$ et par suite *f* est continue en x_0. En effet $\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow |f(x_0) - \ell| < \varepsilon$. Supposons $f(x_0) - \ell \neq 0$ alors $\frac{|f(x_0)-\ell|}{2} > 0$. Posons $\varepsilon = \frac{|f(x_0)-\ell|}{2}$, on obtient $|f(x_0) - \ell| < \frac{|f(x_0)-\ell|}{2}$, ce qui est contradictoire, d'où $f(x_0) - \ell = 0$, c'est à dire $f(x_0) = \ell$.

Cette démonstration s'appuie sur la propriété suivante : $\forall\varepsilon > 0\ |x| < 0 \iff x = 0$, dans ℝ, être aussi proche que l'on veut, signifie l'égalité. Dans ℝ, la notion de « nombres consécutifs » n'existe pas, chaque nombre est son propre successeur à partir de là, on a la complétude de ℝ, c'est-à-dire on peut représenter ℝ par la droite numérique. Cette notion de nombres consécutifs marche dans des ensembles tels que ℤ et ℕ. Dans ces ensembles tout élément admet un prédécesseur et un suivant.

En ce qui concerne la définition 2, on peut énoncer les propriétés suivantes :

Propriété 1 : Une fonction *f* définie en x_0 admet une limite en x_0 si la limite de $f(x)$ lorsque *x* tend vers x_0 est égale à $f(x_0)$.

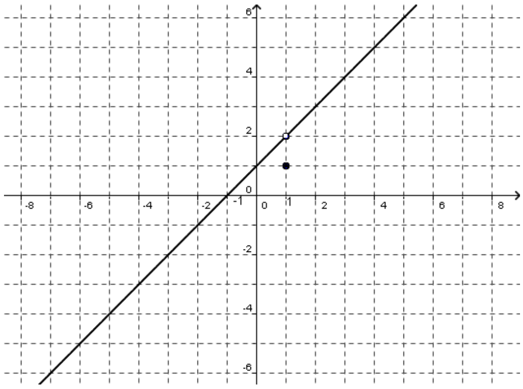
Propriété 2 : soit *f* une fonction définie en x_0, si *f* admet une limite en x_0 alors *f* est continue en x_0.

Propriété 3 : Soit *f* une fonction et *a* un nombre réel. Lorsque *f* admet une limite en *a*, alors *f* est continue en *a* ou bien elle est prolongeable par continuité en *a*.

Avec cette définition on a tendance à confondre la limite et la continuité en un point, la limite et l'image. Considérons l´exemple suivant :

Considérons la fonction suivante définie par $f(x)=x+1$ si $x \neq 1$ et $f(1)=2$

Figure 1 - Illustration de la situation



Source : Doumbia (2020, p. 79)

Ici f est définie en 1, mais, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ mais $f(1) = 1$, f n'est pas continue en 1 et f n'est pas prolongeable par continuité en a. par suite f n'admet pas de limite en a.

Maintenant analysons la troisième définition énoncée comme suit :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \quad \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Avec cette définition on voit clairement que x ne peut pas être égal à x_0. Elle met en exergue qu'il est difficile d'atteindre la limite. Une fonction f définie en a peut admettre une limite en a qui est différente de f(a). En effet, la fonction définie par $f(x)=x+1$ *si* $x\neq 1$ *et* $f(1)=2$ admet une limite en 1 égale à 2 ; mais n'est pas continue en 1 car $f(1) \neq 2$.

En restant toujours sur la définition 3, la propriété suivante marche : « Lorsque f admet une limite à gauche en a et une limite à droite en a égales alors f admet une limite en a. »

Cette propriété n'est pas toujours vérifiée avec la définition 2.

Si la plupart des résultats sont valables avec les deux définitions, il n'en va pas de même dans l'ensemble, et cela peut conduire à énoncer des résultats faux. Les définitions 1 et 2 se contredisent. Si f n'est pas définie en a les définitions2 et 3 sont équivalentes. Mais si f est définie en a les deux définitions se contredisent. Si la fonction f est continue en a les deux définitions coïncident.

Ici on peut affirmer que la définition 3 est une restriction de la définition 2, car on peut obtenir la définition 3 à partir de la définition 2 en prenant une restriction de la fonction f. En effet, soit g la restriction de f à Df-$\{a\}$, on a $\lim_{\substack{x\to a \\ x\neq a}} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$. La définition 3 a plus de potentialités que la définition 2.

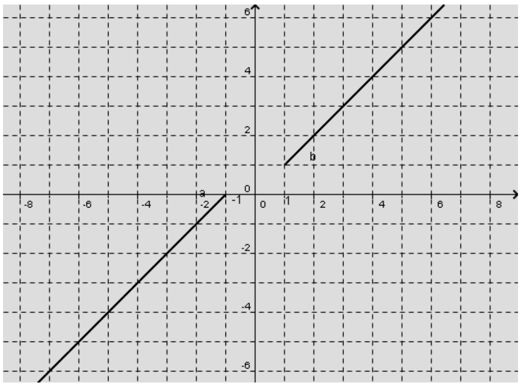
Un des problèmes frappant de la notion de limite est l'écriture symbolique de la définition formalisée :

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 \ \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \varepsilon$. On a tendance à faire une lecture linéaire, c'est-à-dire partir de $0 < |x - x_0| < \delta$ pour avoir $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. L'effacement des quantificateurs est un obstacle « logique » à la compréhension de la définition formelle de la notion de limite.

C'est comme si on connaissait d'avance δ. Cela parce que c'est un nombre très petit. On oublie que ε est fonction de $f(x)$ *et* ℓ . Comme on peut le constater chez Sierpinska (1985, p. 54) « un autre problème lié à l'ordre des quantificateurs dans la définition de la limite est la suivante : la fonction nous mène de l'axe des x à l'axe des y, tandis qu'en faisant l'étude de la limite en un point de la fonction on va en sens inverse ».

La définition n'a pas d'intérêt si on ne suppose pas que a est un point adhérent à A. En effet, si tel n'est pas le cas, on peut trouver U∈V_a tel que U∩A=∅, et la condition f(U∩A)⊂ V est alors vérifiée pour tout nombre L∈R et tout V∈V_L ; tout nombre réel serait alors limite de f lorsque x tend vers a. Nous prenons l´exemple suivant pour illustrer nos propos : Soit la fonction f définie par sa représentation graphique suivante :

Figure 2 - Illustration de la situation



Source : Doumbia (2020, p. 84)

Ici 0 n'est pas une valeur d'adhérence de Df car V=]-1/2 ;1/2[est un voisinage de 0 V∩Df est vide. Donc *f(V∩Df)=Ø* qui est inclut dans tout intervalle de ℝ. Par suite tout nombre réel est limite de *f(x)* quand x tend vers 0.

On ne doit pas séparer les deux membres de la phrase : « *f(x)* tend vers *l* » et « x tend vers *a* », car aucun des deux pris isolément n'a de signification mathématique.

Nous avons deux types de difficultés dans le registre algébrique : La difficulté liée aux symboles quantificateurs (existentiel et universel), et la difficulté logique liée au sens de l'implication, l'effacement des quantificateurs et leur ordre.

Dans l'écriture, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0\ \forall x \in Df;\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \ell| < \delta$. On va de gauche à droite, mais la méthode intuitive brûle deux étapes $\forall \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta\ > 0$ et elle commence directement par : $0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$. Ce qui correspond à l'effacement des quantificateurs appelé obstacle logique. On doit partir de $\forall \varepsilon > 0$ c'est-à-dire de *f(x)* et ℓ pour avoir $|x - x_0| < \delta$, car la donnée de *f(x)* et ℓ détermine entièrement ε. Le problème consiste à montrer que $\forall\ \varepsilon\ > 0$ qu´il existe $\delta\ >\ 0$ qui satisfait la condition.

LE CHAMP CONCEPTUEL DE LA NOTION DE LIMITE

Le problème est d'étudier le comportement local d'une fonction numérique d'une variable réelle au voisinage d'un point. Pour définir la notion de limite d'une fonction, on a besoin des notions topologiques telles que voisinage, d'intervalle, point adhérent, point d'accumulation, distance, successeur et prédécesseur d'un nombre réel (ordre dans ℝ), inéquations avec ou sans valeur absolue, des notions de la logique telles que : les quantificateurs universel et existentiel, la condition suffisante, l'implication de la logique des prédicats, la notion de fonction, composition et décomposition de fonctions, l'image directe et réciproque d'un intervalle, infiniment petit et infiniment grand. La notion de limite est fondamentale pour la dérivée, l'intégrale, la convergence d'une suite, le théorème des valeurs intermédiaires.

La topologie de ℝ est liée à la relation d'ordre. La conception intuitive de l'expression « x tend vers a » est une conception dynamique : on imagine un mobile se déplaçant en se rapprochant de a par la gauche ou par la droite. D'ailleurs les notions de limite à gauche ou à droite font explicitement appel à la relation d'ordre. L'expression « x tend vers a » n'a aucun sens mathématique lorsqu'elle est considérée toute seule. Les intervalles jouent un rôle important dans la notion de limite d'une fonction numérique d'une variable réelle.

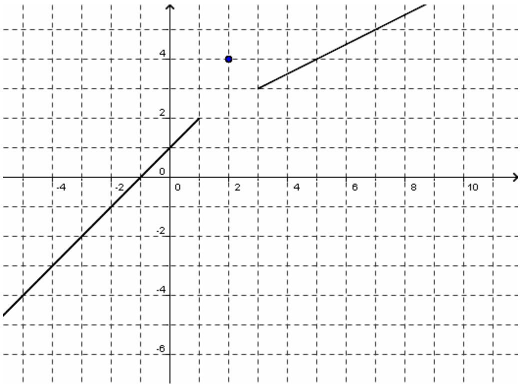
Dans ce cas le comportement local d´une

fonction f au voisinage de a se réduit à la connaissance de la valeur de $f(a)$ (f(V$\boldsymbol{a}$∩A)⊂ J ⇒ $\{f(a)\} \subset J$. Cela n'a pas de sens d'étudier la limite au sens de la définition 2 en un point isolé. Car tout nombre réel est limite de f en a dans ce cas.

Exemple :

Considérons la fonction suivante définie par : $f(x) = \begin{cases} x + 1 \ si \ x < 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \ si \ x > 3 \\ f(2) = 4 \end{cases}$ et sa représentation graphique

Figure 3 - Représentation de la fonction donnée



Source : Doumbia (2020, p. 84)

Ici 2 est un point isolé de D*f*. La limite de *f* lorsque *x* tend vers 2 au sens de la définition 1 est 4 et *f* est continue en 2. Mais tout nombre réel ℓ est limite de *f* lorsque *x* tend vers 2 au sens de a définition 2. Cela n'a pas de sens de chercher la limite en un point isolé au sens de la définition 3.

Nous avons déjà souligné que la notion de limite est polysémique. Ainsi l'écriture formalisée :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \;\; signifie \; que \quad (\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0) \quad tel \; que \; \forall x \in Df \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$, permet à la fois d'étudier la limite, la continuité et le prolongement par continuité en x_0. On peut tomber dans l'erreur à chaque fois si on ne fait pas attention, par ce que ces notions sont très liées.

En changeant *f* en sa dérivée *f '* on peut étudier la dérivabilité de *f* en x_0. On peut élargir à quatre les notions qui sont définies à partir de l'écriture formalisée. Nous avons remarqué au cas où x_0 n'appartient pas à l'ensemble de définition de la fonction *f* qu´il n'y a pas de confusion ; mais dès que x_0 appartient à *Df* l'étude de la limite semble se confondre avec l'étude de la continuité ou le prolongement par continuité en x_0 de *f*.

Selon Bkouche (1997) la notion de limite relève de deux problématiques qui, si elles sont liées, présentent des aspects contradictoires : La première problématique est d'ordre cinématique au sens où elle s'appuie sur la notion de mouvement; la formulation canonique (en termes de fonction par exemple): "*f(x)* tend vers *b* lorsque *x* tend vers *a*" doit alors être entendue de la façon suivante: lorsque la variable indépendante *x* s'approche indéfiniment de la valeur *a*, alors la fonction (la variable dépendante) *f(x)* s'approche indéfiniment de la valeur *b*. L'assertion citée : "*f(x)* tend vers *b* lorsque *x* tend vers *a*" est ici constituée de deux propositions, une proposition principale "*f(x)* tend vers *b*" et une proposition subordonnée "lorsque *x* tend vers *a*", indiquant ainsi que la variable *x* entraîne, dans son mouvement vers *a*, la variable *f(x)* vers la valeur b ; autrement dit c'est la variable qui commande la fonction.

La seconde problématique est celle de l'approximation, elle peut être formulée de la façon suivante: soit une suite numérique x_n, dire que la suite x_n tend vers une limite ℓ, c'est dire que "plus *n* est grand, plus le nombre x_n s'approche de ℓ ", ce qui participe encore du mouvement, mais s'y ajoute le problème suivant: jusqu'où faut-il aller dans la suite pour que la différence entre x_n et *l* soit plus petite qu'un nombre donné à l'avance, ou, si l'on préfère, pour que l'erreur que l'on fait en remplaçant ℓ par x_n soit plus petite qu'une valeur donnée à l'avance. Un exemple élémentaire d'approximation est le calcul décimal approché d'un nombre : combien de chiffre après la virgule pour que le nombre calculé diffère du nombre cherché de moins d'une valeur donnée à l'avance ? Cet exemple a l'avantage de mettre en valeur le lien entre la notion d'approximation et le calcul lui-même.

On peut citer ici la pratique de la division euclidienne lorsque "ça ne tombe pas juste". Ici l'aspect cinématique devient second, ce qui importe n'est plus le mouvement de la variable indépendante, mouvement défini par la succession des numéros d'ordre, ce que l'on cherche, c´est le numéro d'ordre permettant l'approximation voulue. Autrement dit, c'est la variable dépendante qui s'impose et la structure grammaticale de l'assertion rituelle "*f(x)* tend vers *b* lorsque *x* tend vers *a*" est différente ; il n'y a plus qu'une seule proposition qui indique à la fois ce qu'est la limite et le principe d'un calcul approché. On reconnaît dans cette seconde formulation la définition weïerstrassienne de la limite.

Lorsque la différence *x - a* devient infiniment petite, alors la différence *f(x) - b* devient infiniment petite, formulation que l'on peut rapprocher de celle de Cauchy dans son Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique (1823), il faut prendre ici le terme "suite" dans son acception usuelle et non comme désignant une application de l'ensemble des entiers dans l'ensemble des nombres. Rappelons la formulation originale de Weïerstrass:

> S'il est possible de déterminer une borne *d* telle que, pour toute valeur de *h* plus petite en valeur absolue que *d*, *f(x+h) - f(x)* soit plus petite qu'une quantité *e*, aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction." (Cours de 1861, rédigé par H.A. SCHWARZ, cité par Pierre Dugac, « Fondements de l'analyse, dans Jean Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques (1700–1900), vol. 1, Paris, Hermann, 1978, p. 335–392. Nouvelle édition mise à jour, 1986, p. 237–291).

On voit ainsi apparaître une contradiction entre les deux problématiques ; la première met l'accent sur le mouvement de la variable indépendante et l'effet d'entraînement sur la variable dépendante, la seconde met l'accent sur la variable dépendante et la façon dont elle force les valeurs de la première variable. D'après R. Bkouche (1997), c'est cette contradiction qui constitue l'une des difficultés de la notion de limite, difficulté qui relève de l'ordre mathématique et c'est en cela qu'elle est une difficulté pédagogique.

> Une conception utilitariste de l'enseignement (assurer la réussite, ce qui implique d'éviter ce type de difficulté aux élèves) conduirait à choisir une seule problématique et à choisir les exercices en fonction de cette problématique, ou bien à inventer l'artefact pédagogique convenable qui permettra aux élèves de réussir les exercices ad hoc qu'on leur proposera. Mais qu'auront-ils compris et qu'auront-ils appris ? (BKOUCHE 1997, p. 16)

Selon Bkouche (1997) en revenant sur la notion de limite et les deux problématiques dites ci-dessus, on remarque que plusieurs éléments entrent en jeu parmi lesquels on pourra citer l'aspect intuitif et l'aspect opératoire. Il faut alors préciser que l'aspect intuitif participe de chacune des deux problématiques définies ci-dessus, celle du mouvement et celle de l'approximation dans la mesure où c'est autour de cet aspect intuitif que sont définies les deux problématiques considérées. Cependant l'aspect opératoire a conduit à mettre en avant la problématique de l'approximation dans la mesure où c'est la formulation weïerstrassienne qui, s'est imposée pour donner une définition rigoureuse de la notion de limite et en déduire les conditions de calcul des limites. Bkouche (1997) affirme qu'ignorer, dans l'enseignement, les deux problématiques constitutives de la notion de limite et les deux aspects, l'intuitif et l'opératoire, qui permettent d'appréhender cette notion, ne peut que contribuer à mutiler la notion, et par cela même à mutiler la pensée mathématique des élèves.

Cela l'amène alors à poser la question de la part de l'intuition et de la rigueur dans l'enseignement ; faut-il laisser une grande part à l'intuition, quitte à faire peu de démonstrations, ou faut-il exiger des démonstrations en forme, quitte à laisser de côté la compréhension par les élèves des mathématiques auxquelles ils sont confrontés ? Selon Bkouche (1997) lorsque la question est posée de cette façon, tout est déjà biaisé et les mathématiques disparaissent derrière une pédagogie vide. C'est que, sous cette forme, la question des limites a été déproblématisée. On ne sait plus de quoi il s'agit, on sait seulement qu'il y a un certain règlement à appliquer et que ce que l'on cherche n'a d'autre définition que l'application correcte du règlement, d'où la recherche d'un règlement facile à appliquer. On voit ainsi la fonction de la problématisation, d'une part expliciter, autant que faire se peut, les raisons qui conduisent à étudier une notion et d'autre part mettre en valeur les aspects opératoires qui permettront de résoudre les problèmes relevant de cette notion.

Selon Bkouche (1997) l'un des premiers problèmes où l'on rencontre la notion de limite, est la division qui ne tombe pas juste, et que l'on pourrait citer de nombreux exemples où la notion de limite intervient, que ce soit pour comprendre un phénomène ou que ce soit pour calculer la valeur d'une quantité (nombre ou grandeur), usant de l'une ou de l'autre problématique explicitée ci-dessus ou même des deux ensembles. Il note alors que cette réduction de l'aspect opératoire à la problématique de l'approximation via la définition de Weïerstrass relève moins d'une nécessité logique que d'un choix historique en réponse aux difficultés posées par la notion d'infiniment petit encore utilisée par Cauchy.

Lecorre (2016), inspiré par Lutz, Makhlouf et Meyer (1996), écrit :

> Notons d'abord le caractère contra-variant (LUTZ, MAKHLOUF & MEYER, 1996) de cette définition qui appelle à déterminer pour un voisinage de *f(x)*, le voisinage de *x* correspondant. Un caractère covariant au contraire appelle à déterminer pour un voisinage de *x*, le voisinage de *f(x)* correspondant. (LECORRE 2016, pp. 30-31)

Et il poursuit

> En examinant ensuite cette définition, on s'aperçoit du rôle déterminant de certains éléments de formalisme : la quantification universelle et existentielle (il y a aussi trois quantifications universelles implicites sur *f*, *m* et k), la notion de variable, celle d'intervalle, de voisinage d'un réel, de nombre réel, celle de fonction et celle d'implication. On peut, sur cette simple analyse des éléments constitutifs de la définition, s'apercevoir que celle-ci concentre un nombre important de notions nécessaires pour lui donner sens. (LECORRE, 2016, p. 30-31)

Artigue (1996b) dans une approche de l'analyse non standard et en s'appuyant sur les travaux de Deledicq (1994) reprend ces questions d'introduction de l'analyse avec un regard non-standard, mais sensiblement modifié quand on évoque l'enseignement non standard de l'analyse selon (KEISLER, 1976) et (SULLIVAN, 1976).

Deledicq (1994) montre en particulier qu'une perspective non standard permet de distinguer dans l'entrée dans le champ de l'analyse deux niveaux qui sont en fait inséparables dans une approche standard :

> Le premier niveau est basé sur la manipulation numérique des ordres de grandeur conduisant ainsi à la familiarité avec les petits et les grands nombres et avec leur comportement vis-à-vis des opérations et fonctions élémentaires […]. Le deuxième niveau est davantage axé sur l'introduction de notions élémentaires et, en particulier, sur les définitions et les résultats liés à la complétude de $\mathbb{R}$. Le premier niveau est celui de l'introduction des ordres de grandeurs. On distinguera en fait trois types de nombres, ceux à notre échelle (limités), ceux beaucoup plus grands (i-grands) et ceux beaucoup plus petits (i-petits) et il n'est pas nécessaire pour ce faire d'utiliser un vocabulaire infinitésimal. (DELEDICQ, 1994) cité par ARTIGUE 1996b, p. 19)

On admettra que ces deux ordres de grandeurs sont représentés dans $\mathbb{N}^*$: les entiers limités et les entiers i-grands, obéissant aux règles suivantes :

- un entier i-grand est plus grand que tout entier limité,
- la somme et le produit de deux entiers limités sont limités,
- si n est limité, 2^n l'est aussi.

Et pour ce qui est des nombres réels, un réel sera dit i-grand s'il est supérieur à un i-grand, i-petit s'il est nul ou si son inverse est i-grand, limité dans les autres cas.

On peut, comme l'explique l'auteur, considérer que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont inchangés et que simplement, on les a "coloré" en introduisant des ordres de grandeur. Ces ordres de grandeur ont rompu l'homogénéité de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}$, mais ceci n'est-il plus conforme à la "réalité" du nombre des grandeurs et mesures de grandeurs que la vision homogène standard ? A partir de cette distinction, peut se mettre en place un calcul sur les ordres de grandeur dont les règles reproduisent celles de l'infinitésimal de Leibniz, et où, bien sûr, certaines réponses demeurent indéterminées (on ne sait dire à priori quel est l'ordre de grandeur du produit d'un i-petit par un i-grand). Ce calcul peut être mis en jeu dans une première approche des limites puisque, par exemple, le fait que :

- la fonction f admette pour limite ℓ à l'infini signifiera que : pour tout x i-grand, $f(x)-\ell$ est i-petit ;
- le fait que la suite (u_n) soit convergente s'exprimera par : Si n et n' sont deux entiers i-grands, $u_n-u_{n'}$ est i-petit ;
- le fait que la fonction soit continue en 3, s'exprimera par : Si x-3 est i-petit, $f(x)-f(3)$ est aussi i-petit.

Artigue (1996b) affirme que l'on a ici coupé l'insécable de la définition standard et remplacé, de fait, un calcul sur des fonctions, N fonction de ε par un calcul sur des nombres. On a également rétabli l'ordre en quelque sorte naturel de regard, allant de x à $f(x)$. On touche là du doigt deux avantages essentiels d'une approche non standard et ce qui fait que les définitions peuvent ici constituer de véritables outils de travail pour le débutant.

Le second niveau de l'analyse est celui qui correspond à l'entrée en scène du théorème de complétude, entrée en scène équivalente dans l'axiomatique non-standard à l'axiome de standardisation qui va nous garantir qu'il existe des réels dits standards tels que tout réel limité soit i-proche d'un réel standard et d'un seul (c'est-à-dire qu'il existe dans le halo de tout réel limité un nombre qui joue le même rôle que 0 parmi les nombres i-petits). Ainsi :

> on retrouve alors le point de vue originel de Cauchy et Dedekind et l'on pourra ensuite affirmer que toute suite classique (c'est-à-dire

> définie sans faire appel à la distinction entre ordres de grandeurs) convergente définit un seul réel standard : celui dans le halo duquel viennent s'accumuler ses termes d'indice i-grands", et c'est là que commence véritablement l'analyse. C'est à ce niveau qu'intervient aussi la notion d'ombre qui joue un rôle analogue de standardisation au niveau graphique et permet de rendre compte d'intuitions ou de propriétés graphiques plus difficilement exprimables au niveau standard. (ARTIGUE, 1996b, p. 20)

L'auteure affirme que Deledicq (1994) souligne que l'on pourrait dire que cette séparation en deux niveaux de l'analyse existe de fait dans l'enseignement actuel, avec la distinction qui s'est opérée entre analyse intuitive et analyse formelle. Il existe cependant une différence essentielle : dans la séparation non-standard, existe, dès le premier niveau, une formalisation simple mais efficace qui permet d'engager réellement le jeu des preuves et réfutations.

Artigue (1996b) soulève la question faut-il pour autant se lancer dans l'aventure d'un enseignement non standard ? et elle répond que se lancer dans cette aventure serait méconnaître lourdement la réalité des lois qui gouvernent les systèmes didactiques que de penser qu'une approche aussi faiblement reconnue dans la communauté mathématique, aussi peu présente dans la culture mathématique, puisse légitimer un enseignement à grande échelle.

De plus, elle affirme que si une approche non standard comme celle présentée ci-dessus est séduisante, il serait faux de prétendre que l'on a grâce à elle trouvé la voie royale de l'enseignement de l'analyse. On peut penser qu'elle fournit certes un équilibre entre l'intuition et la rigueur plus satisfaisant au départ que celui que nous vivons actuellement au lycée. Mais, pour ce que l'on gagne ainsi, il y a nécessairement un prix à payer. L'analyse non standard ne nous balise pas un chemin sans obstacles et il faudra bien un jour affronter les difficultés qui lui sont inhérentes. Par exemple le fait que, l'on peut trouver chaque définition classique, comme celle de la continuité d'une fonction en un point, un critère non standard qui lui est équivalent (cf. plus haut), il n'y a équivalence que tant que l'on s'intéresse à des fonctions standard et à des points standards (une fonction aussi simple que la fonction linéaire $x \to \omega x$, avec ω i-grand, continue bien sûr au sens classique, ne vérifie pas ce critère en 0). Dès que l'on quitte le champ des objets standards, le non standard nous est en fait difficilement compréhensible.

D'après Artigue (1996b), sans doute ne serait-il pas inutile que les enseignants sachent que derrière le langage infinitésimal qu'ils utilisent sans cesse, de façon floue et éventuellement avec un peu de mauvaise conscience, dans leurs explications et commentaires informels, il y a une rigueur accessible qui, de plus, n'a rien à voir avec la métaphysique de l'infini.

Selon elle, il est clair qu'il n'existe pas de voie royale qui puisse faire de cette entrée dans le champ de l'analyse, un chemin régulier, continu, sans embûches. Comme l'ont clairement montré les travaux qui se sont développés en didactiques de l'analyse, les difficultés et obstacles sont multiples et chercher à les contourner ne fait que les renforcer. Les connaissances acquises en fait nous aident d'abord à mieux comprendre le fonctionnement de nos élèves et étudiants, à anticiper leurs difficultés, à chercher patiemment des moyens d'action adaptés au lieu d'osciller entre quête de la méthode miracle et résignation fataliste.

S'appuyant sur les résultats des recherches en didactique sur l'entrée en analyse, elle affirme que cette entrée ne peut se penser que dans le long terme, sur plusieurs années, elle ne peut s'effectuer d'emblée avec les savoirs formalisés, « achevés », qui nous sont devenus si familiers. Elle se fera nécessairement par des approches provisoires qui permettront d'avancer, mais engendreront aussi des connaissances, des représentations de la connaissance, nécessairement partiellement erronées. Ceci signifie que notre enseignement ne peut pas vivre sur la fiction d'un développement continu et régulier de la connaissance mais sur l'image d'un développement plus chaotique d'où les régressions liées aux déséquilibrations ne sont pas exclues.

Elle fait remarquer qu'un peu partout, les approches intuitives basées sur l'exploration des phénomènes, souvent liées à l'utilisation des technologies informatiques, ont remplacé ou tendent à remplacer les approches formelles qui avaient accompagné la réforme des mathématiques modernes. Ces approches fournissent sans aucun doute aux élèves, une familiarité, un contact enrichissant avec un certain nombre de phénomènes ou objets relevant du champ de l'analyse. Notre expérience didactique doit cependant nous inciter à considérer une certaine méfiance, les discours partout trop enthousiastes qui accompagnent souvent ces réactions à un ordre ancien décevant. Nous devons en particulier, selon elle, être attentifs à la façon dont est engagée dans ces approches la rationalité scientifique. Certes, la formalisation limitée et provisoire, mais nous devons nous demander si elle permet d'engager de façon raisonnable le jeu des preuves et des réfutations qui est une composante essentielle de l'activité mathématique.

Enfin, elle attire l'attention qu'en tant qu'universitaires, nous ne devons surtout pas minimiser le saut qualitatif qui sépare ces approches intuitives du rapport à l'analyse que nous visons à l'université dans les filières scientifiques. Il y a là une rupture qu'il faut se donner les moyens de marquer et de consommer, en n'attendant pas qu'elle s'opère d'elle-même. La majorité de nos étudiants n'y survivrait pas et nous serions plus que jamais prisonniers du piège d'un enseignement qui, tout en affichant de grandes ambitions, se borne à évaluer des compétences minimales.

On peut conclure à partir de ces analyses que pour le succès de l'enseignent de la notion de limite, il faut rentrer par les conceptions intuitives des élèves, les mettre à jour, élaborer des situations qui mettent à défaut les conceptions erronées et en fin procéder à la formalisation de la notion de limite et la rendre opérationnelle. En d'autres termes, trouver un équilibre entre l'intuition et la rigueur dans l'enseignement des mathématiques : cela met en évidence l'importance de la dialectique entre l'intuition et la rigueur dans l'enseignement des mathématiques comme le dit Berrou (2011, p. 1) « Entre rigueur et intuition, il n'y a pas à choisir. Les deux sont un précieux atout pour l'étude des mathématiques et l'idéal pour se faire de la mathématique une alliée plutôt qu'un obstacle est de cultiver les deux attitudes, surtout si l'on se connaît une dominante. »

L'enseignement actuel de la notion de limite au Mali n'aborde pas ces aspects épistémologiques importants, acquérir des connaissances sur la notion de limite c'est prendre conscience de ces aspects épistémologiques, les affrontés et les surmontés. L'enseignement de la notion de limite doit s'organiser autour de ces obstacles épistémologiques pour que les élèves et étudiants les rencontrent pour faire leur crise de limite et enfin mettre à leur disposition des moyens permettant de les surmonter. C'est dans ces conditions que l'on dira que les élèves ont appris la notion de limite. Cela n'est possible qu'à travers la construction et la mise en application de la définition formelle de la limite. Pour que les aspects épistémologiques soient abordés, il est nécessaire que les enseignants aient une conception claire de ceux-ci.

La définition formelle de la limite fonctionne de deux façons sinon trois suivant la nature de la fonction en jeux :

- **Contravariant :** "on peut rendre la distance entre *f(x)* et *l* aussi petite que l'on veut en prenant *x* suffisamment proche de *a*'' ;

Exemple : $\lim_{x \to -2} (2x + 5) = 1$

Soit $\varepsilon > 0, |2x + 5 - 1| < \varepsilon \Longrightarrow |x + 2| < \frac{\varepsilon}{2}$ donc $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

Supposons que $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, $|x - -2| < \delta \Longrightarrow |x + 2| < \frac{\varepsilon}{2} \Longrightarrow |2x + 4| < \varepsilon$ c'est-à-dire

$|2x + 5 - 1| < \varepsilon$. D'où $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ convient.

- **Covariant :** "quand *x* s'approche de a alors *f(x)* s'approche de ℓ".

Si f est bijective les deux fonctionnent, c'est-à-dire nous avons la réciprocité de la condition ;

Exemple Montrons que : $\lim_{x \to -2} (2x + 5) = 1$

$soit\ \delta > 0, |x - -2| < \delta \Longrightarrow -\delta - 2 < x < \delta - 2 \Longrightarrow -2\delta < 2x + 4 < 2\delta$

$\Longrightarrow |2x + 4| < 2\delta$ en posant $2\delta = \varepsilon\ on\ obtient\ \delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Avec la fonction affine

$f(x) = 2x + 5$ on peut appliquer la covariance marche, sinon en prenant la fonction rationnelle $f(x) = \frac{-6x+2}{2x+1}$ on a du mal à appliquer la covariance.

- **La dialectique entre la contravariance et la covariance :** "on fixe delta à l'avance et on construit un nouveau delta qui satisfait la condition suffisante".

Exemple : montrons que $\lim_{x \to -3} \sqrt{x + 4} = 1$

$$\lim_{x \to -3} \sqrt{x + 4} = 1,\ soit\ \varepsilon > 0\ \left|\sqrt{x + 4} - 1\right| < \varepsilon \Longrightarrow \left|\frac{x + 3}{\sqrt{x + 4} + 1}\right| < \varepsilon$$

Par ailleurs on sait que $|x - -3| < 1\ ce\ qui\ implique\ 0 < x + 4 < 2$ soit $\frac{1}{\sqrt{2}+1} < \frac{1}{\sqrt{x+4}+1} < 1 \Rightarrow \left|\frac{x+3}{\sqrt{x+4}+1}\right| < |x - -3| < \varepsilon$. Donc $\delta = min\{1, \varepsilon\}$.

Ici nous sommes obligés de donner une valeur à delta à l'avance, puis construire le delta qui convient.

La définition intuitive met l'accent seulement sur l'un ou l'autre aspect de la notion de limite. C'est seulement avec la définition formelle que l'on rencontre les trois.

CONCLUSION

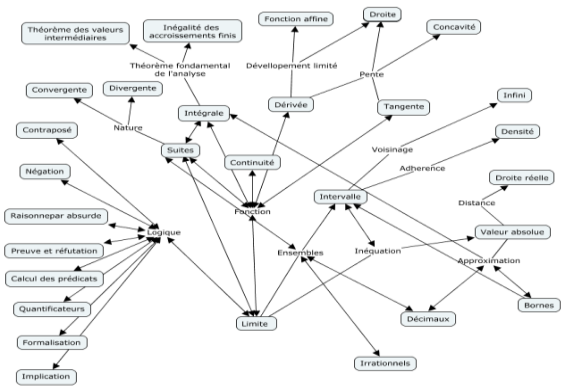
Dans ces considérations finales, nous abordons les aspects que nous jugeons pertinents pour cette étude, à savoir le rôle du cadre théorique et les principaux résultats.

Les analyses que nous avons conduites nous ont permis de mettre en évidence les dimensions historico-épistémologique, didactique et cognitives de la notion de limite de fonction réelle à une Variable réelle. Du point de la dimension épistémologique, nous avons identifié quelques processus liés à la constitution de la notion de limite d´une fonction réelle à variable réelle, tant dans sa genèse historique, que dans ses articulations avec d´autres savoirs mathématiques. Elle nous a permis d´avoir des appuis pour comprendre les processus d’enseignement et d’apprentissage des concepts liés à la notion de limite de fonction et pour envisager des élaborations didactiques permettant d’agir sur ces processus dans le contexte de l’éducation formelle.

Cette analyse nous a permis de situer notre problème didactique, à savoir le déphasage entre la notion de la limite et sa définition formelle, et les types de problèmes découlant de la problématique de l’enseignement et l’apprentissage : la notion de limite est covariante ; mais sa définition formelle est tantôt contra-variant, tantôt covariant et parfois nous avons une dialectique entre les deux aspects. Cette analyse nous a aussi permis de mettre en évidence la raison d’être de la définition formelle de la notion de limite.

Nous déduisons de cette étude la carte conceptuelle (Figure ci-dessous) qui met en évidence certains des objets mathématiques qui nourrissent le concept de limite, et les notions mathématiques construites à l’aide de la limite.

Figure 4 – Carte conceptuelle de la notion de limite



Source : L’auteur

La notion de limite est intimement liée aux concepts de fonction, de variable, d’intégrale, de dérivée, de continuité, d’ensemble, d’inéquations avec valeur absolue, de logique et de topologie de $\mathbb{R}$ et la notion d’infini.

Il ressort, aussi, de cette étude que c’est la définition intuitive qui émerge chez les étudiants, se perpétue et s’érige en obstacle. Elle est nécessaire pour introduire la limite ; mais elle est limitée, car elle est une qualification approximative de la définition formelle, elle permet aux étudiants d’avoir une idée de ce qu’est la limite, elle renforce l’obstacle « une fonction n’atteint pas sa limite », la limite est la limite à gauche, la limite est une notion dynamique. La définition formelle précise n’émerge pas compte tenu de la forme dont elle est enseignée ; elle est donnée de façon brute et appliquée à des cas simples, il n’y a pas d’analyse fine autour d’elle.

Il est nécessaire de faire une analyse fine de la définition formelle pour minimiser les problèmes liés aux obstacles épistémologiques tels que : limite peut être atteinte ou non, confusion entre la limite et l’image, entre l’étude de la continuité et l’étude de la limite en un point, l’effacement de quantificateurs. Il est important de proposer des situations dont la résolution fait appel à la limite.

Une analyse fine de la définition formelle permettra aux futurs professeurs de réaliser une séquence didactique qui va permettre aux élèves de donner une signification mathématique au concept de limite, elle permet aussi d’actualiser leurs conceptions. Cette analyse doit intervenir dans les écoles de formation des élèves professeurs pour qu’ils aient une idée claire de la notion de limite, cela les aidera à procéder à une transposition interne significative et aussi d'avoir une vision plus large sur les obstacles que leurs élèves pourront rencontrer dans l'apprentissage de la notion de limite.

Nous pensons qu'à partir de ce travail les enseignants vont réserver une place de choix pour la définition formelle de la limite.

RÉFÉRENCES

ARTIGUE, M. **« Réformes et contre-réformes de l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994) »**, eds. Bruno Belhoste et al., Les sciences au lycée : un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger (Paris : Vuibert), 195-217, 1996a.

ARTIGUE, M. **« L'enseignement des débuts de l'analyse, problèmes épistémologiques, cognitifs et didactiques »**, J.A Dorta, Diaz et alii (eds), La Universidad de la Laguna, Tenerife, pp. 27-53, 1996b.

ARTIGUE, M. Épistémologiques et didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques**, La Pensée Sauvage, vol. 10, n. 23, pp. 241-286, 1990.

BACHELLARD, G (1938) **La formation de l'esprit scientifique**. Paris: Vrin, 1980.

BKOUCHE, R. Des limites et de la continuité dans l'enseignement, **Repères-IREM**, n. 24, 1996.

BKOUCHE, R. Épistémologie, histoire et enseignement des mathématiques**. For the learning of mathematics**, v. 17, n. 1, p. 34-42, 1997.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques, **Recherche en Didactique des Mathématiques**, v. 23, p. 303-346, 1983.

CHAPELLE DE D´ALEMBERT 1ère édition, 1751

CHEVALLARD, Y. (1995). **La fonction professorale : esquisse d'un modèle didactique.** Notes du cours donné à la VIIIe école d'été de didactique des mathématiques (Saint-Sauves, 22-31 août 1995). Recherches en Didactique des Mathématiques (no 17/3, 1997, p. 17-54) dans une version remaniée, sous le titre « Familière et problématique, la figure du professeur ».

CHEVALLARD, Y. **La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1985.

CORNU, B. **Apprentissage de la notion de limite – Conceptions et obstacles** – Thèse de doctorat de Troisième Cycle de Mathématiques Pures – L'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1983

DELEDICQ, A. **Teaching with infinitesimals**. Springer –Verlag, 1994.

DOUADY, R. Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. **Repères-IREM**, v. 6, p.132-158, 1992.

DOUMBIA, C. O. **Un modèle didactique de référence pour la construction des savoirs et l'actualisation des connaissances sur la notion de limite au Mali**. Thèse sur l´enseignement, la philosophie et l´histoire des Sciences de L´Université Fédérale de Bahia et l´Université Étatique de Feira de Santana, 2020. In : https://repositorio.ufba.br/handle/ri/31999

Dugac, P. « **Fondements de l'analyse** », dans Jean Dieudonné, Abrégé d'histoire des mathématiques (1700–1900), vol. 1, Paris, HERMANN, 1978, p. 335–392. Nouvelle édition mise à jour, 1986, p. 237–291

EL BOUAZZAOUI H. **Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction**, Thèse, Université

Laval, Québec, 1988.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. Nadine Bednarz, Catherine Garnier. Construction des savoirs Obstacles et Conflits, CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc., pp.41-63, 1989. Disponível em: https://hal.archivesouvertes.fr/file/index/docid/516581/filename/Les_obstacles_epistemologiques_et_la_di dactique_des_mathematiques89.pdf

HITT, F. Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: the concept of limit **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, IREM de Strasbourg, Vol. 11 p. 251 – 267, 2006

GRENIER-BOLEY, N. **La notion de « limite de fonction » : quelques exemples d'évolution au cours des diverses réformes de l'enseignement secondaire** (s/d). In : limite_ngb_annexe.pdf (univ-irem.fr)

JOB, P**. Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques.** Thèse. Université de Liège, Belgique, 2011.

LAKATOS, I. **Preuves et réfutations : essai sur la logique de la découverte mathématique**. Paris : Herman, 1985.

LAKATOS, I **Cauchy and continuum dans Mathematics, Science and Epistemology**. Cambridge: Cambrigde University Press, 1978.

LECORRE, T. (2016). **Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de la notion de limite. Élaboration d'un cadre basé sur un modèle de rationalité pour l'accès aux objets mathématiques complexes.** Thèse. Université Grenoble Alpes.

LEGRAND M. **Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse**, Repère IREM, Vol. 10, pp. 123- 159, 1993.

Œuvre philosophique de D'Alembert volume2, Editeur Jean-François Bastien, 1805

POINTCARRÉ, H. **la logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement. L'enseignement mathématique** 1, pp. 157-162, 1899. Disponible sur le link :http//: doi.org/1051.69/seals-1226 consulté le 15/01/2019.

ROBERT, A. **Acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur**, Thèse de doctorat Université Paris 7, 1982.

SIERPINSKA, A. Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. **Recherches en Didactique des Mathématiques,** v. 6, n. 1, pp. 5-67, 1985.

VERGNAUD, G. ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? **Investigações em Ensino de Ciências**, Porto Alegre, v. 12, n. 2, p. 285-302, 2007. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID172/v12_n2_a2007.pdf .

VERGNAUD, G. A comprehensive theory of representation for Mathematics Education. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 2, n. 17, p. 167-181, 1998.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 10, n. 2-3, p.133-170, 1990.

A N N E X E S

Activité1 :

1°) à la question : que signifie ℓ est la limite de *f(x)* quand *x* tend vers a ? Les élèves de la 11ème et 12ème ont donné les réponses suivantes :

Elève 1 : si *x* s'approche de a alors *f(x)* s'approche de ℓ

Elève 2 : on peut rendre la distance entre *f(x)* et ℓ aussi petite que l'on veut en prenant *x* suffisamment proche de *a*

Elève 3 : si *x* s'approche de *a* en restant inférieur à *a* alors *f(x)* s'approche de ℓ en restant inférieur à ℓ

Elève 4 : si la distance entre *x* et a est petite alors la distance entre *f(x)* et ℓ est aussi petite.

Elève 5 : pour que la distance entre *f(x)* et ℓ soit petite il suffit que la distance entre *x* et *a* soit petite.

Elève 6 : pour tout nombre réel α strictement positif, il existe un nombre réel strictement positif β tel que si *d(x,a)*< β alors *d(f(x), ℓ)*< α .

Elève 7 : pour des valeurs de *x* très très proche de *a* sans lui être égal, alors *f(x)* est très très proche de ℓ.

Elève 8 : On peut rendre la distance entre *f(x)* et *l* aussi petite que l'on veut, en prenant *x* très très proche de *a* sans être égal à *a*.

Elève 9 : pour tout voisinage ouvert O de ℓ privé de ℓ il existe un voisinage ouvert de a privé de de *a* dont l'image est contenue dans O.

Elève 10 : si l'image de *a* par *f* est ℓ

Elève 11 : si *x* appartient à *Df* et *f(a)* est égale à ℓ.

Selon vous : quelle(s) est sont la (les) définition(s) qui est (sont) correcte(s) et dites pourquoi ? Quelle(s) est (sont) la (les) définition(s) qui est (sont) incorrecte(s) et dites pourquoi ?

Donnez la définition correcte si elle n'est pas parmi les propositions faites par les élèves.

2°) comment utilise-t-on votre définition pour montrer qu'un nombre réel ℓ est la limite d'une fonction en un point ?

Catégorisation des réponses

Définition intuitive	E1, E4, E7
Définition formelle	E2, E8, E9
Confusion avec limite à gauche	E3
Confusion avec l'image	E10
Confusion avec la continuité	E5, E6, E11

Activité 2 :

On donne la définition suivante : $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \ \forall x \in Df\ \ 0 < |x - a| < \delta$ $\Rightarrow \left| f(x) - l \right| < \varepsilon$ et on a posé les questions suivantes aux étudiants de 1ère et 2ème Année d'universités

1°) Que vous rappelle cette définition ?

Elève 1 : la formule de Cauchy

Elève 2 : la formule de la continuité

Elève 3 : la formule de la limite

Elève 4 : formule qui permet d'étudier la continuité et la limite d'une fonction en un point.

2°) Interpréter cette définition ci-dessus

Elève 1 : quand *x* s'approche de *a* alors *f(x)* aussi s'approche de ℓ

Elève 2 : c'est la définition de ℓ est la limite de *f* en *a*

Elève 3 : c'est la définition de *f* est continue en a

3°) Expliquer comment on l'applique

Elève 1 : on va de $|x - a| < \delta$ *vers* $\left|f(x) - l\right| < \varepsilon$

Elève 2 : il s'agit de prouver l'existence de δ on va de$|f(x) - \mathrm{l}| < \varepsilon$ pour construire δ

Elève 3 : il y a une dialectique on va de I f(x)-lI< ε pour construire δ et en gardant en tête que δ est un nombre qui est petit dépendant de ε autrement dit on fixe δ à l'avance.

4°) Donner les connaissances nécessaires pour sa compréhension. Parmi ces connaissances préciser celles que les élèves ne disposent pas en justifiant votre affirmation.

Activité 3 :

1°) Une fonction peut-elle atteindre sa limite ? Justifiez votre réponse en donnant un exemple.

2°) Parmi les exemples suivants préciser les fonctions qui atteignent leur limite et dites pourquoi et celles qui n'atteignent pas leur limite en justifiant votre réponse.

* 1°) On donne les fonctions suivantes définies sur un intervalle I, préciser celles qui admettent une limite en *a*.

a. $f(x)= 2x+3$, I=]2, 7] a=2; b. $f(x)= -5x+2$ I=[-5 ; 5] a=5; c. $f(x)= \dfrac{x^2-4}{x+2}$ I= ℝ-{-2} a=-2

d.$f(x)= \begin{cases} 2x-1 & si \quad x<3 \\ x+2 & si \quad x>3 \\ f(3)=6 \end{cases}$, I= ℝ a=3