CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2023 • Ano X • v 13 • n. 4 • p. 297 – 314
ISSN 2358-4750

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

Miguel Delgado **PINEDA**,
Universidad Nacional de Enseñanza a Distancia (UNED); España.

Aprender a enseñar desde la formación permanente de profesores con distintos registros semióticos de representación

Learning to teach from the ongoing training of teachers with different semiotic registers of representation

RESUMÉ

El trabajo trata la formación continua del profesor desde un punto de vista de la resolución de problemas. Se trata de resolver un problema educativo formulado al afrontar la resolución de un problema de Matemáticas. En la formación, se ha de considerar cierta ley del mínimo esfuerzo educativo y el principio de estímulo y respuesta que rige cualquier actividad mental. Es fundamental emplear un estimulo adecuado para generar la respuesta activa del profesor, pues al fin y al cavo el ya tiene una experiencia. La ruptura de la inmovilidad educativa debe ser acompañada un poderoso deseo de aprendizaje, por lo cual hay que evitar la formación traducida a sesiones de alguien que intente enseñar al profesor. El problema matemático cebo debe ser relativamente fácil para que un estudiante de Enseñanza Secundaria pueda resolverlo, por ejemplo, un problema de Matemáticas Recreativas relacionado con lo que el profesor intenta enseñar. Ese intento de enseñar la resolución de un problema a sus estudiantes sumerge al profesor en la resolución de un problema de carácter didáctico. Resolver este problema educativo dependerá de la forma en la cual registra los objetos matemáticos y de la forma en la que piensa en ello. La propuesta es determinar algún método resolutivo para cada registro de representación semiótica de los elementos matemáticos. Este es el reto que afronta el profesor para aprende a variar su forma de pensar y la forma de transmitir la matemáticas a sus estudiantes adecuándose a como ellos registran esos objetos matemáticos.

Palabras clave: Formación de profesores, Enseñanza Secundaria, Resolución de problemas, Problema didáctico, Método matemático, Matemática Recreativas.

ABSTRACT

The paper deals with the continuing education of the teacher from a problem-solving point of view. It is about solving an educational problem formulated when facing the resolution of a mathematics problem. In training, it is necessary to consider a certain law of minimum educational effort and the principle of stimulus and response that governs any mental activity. It is essential to use an appropriate stimulus to generate the teacher's active response, because after all, he already has an experience. The rupture of educational immobility must be accompanied by a powerful desire to learn, which is why it is necessary to avoid training sessions in which someone tries to teach the teacher. The bait mathematical problem must be relatively easy for a Secondary School student to solve, for example, a Recreational Mathematics problem related to what the teacher is trying to teach. That attempt to teach problem solving to his students immerses the teacher in solving a didactic problem. Solving this educational problem will depend on the way in which he registers the mathematical objects and the way in which he thinks about it. The proposal is to determine some method of resolution for each register of semiotic representation of the mathematical elements. This is the challenge for the teacher to learn to vary his way of thinking and the way of transmitting mathematics to his students by adapting to how they register these mathematical objects.

Keywords: Teacher training, Secondary education, Problem solving, Didactic problem, Mathematical method, Recreational Mathematics.

Correspondance:

miguel@mat.uned.es

Reçu dans 15/10/2023
Approuvé en 15/11/2023

I N T R O D U C C I Ó N

Una experiencia muy interesante es elegir a un profesor experimentado de Enseñanza Secundaria, o a un grupo de ellos, y preguntarle: ¿Cuándo usted enseña algo, sucede que sus estudiantes aprenden lo que enseña? Esta pregunta que se puede formular a cualquier profesor de cualquier materia, suele obtener una respuesta poco optimista si se trata de un profesor de matemáticas. En este trabajo no nos interesa ahondar por la opinión del profesor sobre las razones de esa respuesta poco optimista. Esta experiencia puede ser confirmada fácilmente por el lector, puesto que es algo que se puede repetir y no tiene por qué creer lo que decimos. No creemos que sea necesario tener que mostrar un estudio estadístico de una muestra de profesores de Matemáticas, para que aflore esa contestación algo pesimista.

A continuación a ese profesor le proponemos un problema del ámbito de la Matemática Recreativa; problema que debe poder ser resuelto por estudiantes de Enseñanza Secundaria. Por ejemplo, le damos, al profesor, un libro y una nota en la primera página « ¿Eres tu el buscador? Si es así vete rápido a la página cuyo número se forma con el triple de la suma de sus cifras. » (KIEFER, 2022). En la página que se debe elegir, se pone un pequeña pegatina en medio del texto. Como refuerzo positivo, le decimos que la pegatina es canjeable por un regalo.

La actitud inicial del profesor nos indicará si es alguien que quiere aprender, o no. Cuando el profesor obtenga la pegatina que está en la página 27, y antes de darle el regalo, le preguntamos por los objetos matemáticos que ha detectado en ese problema y las formas en la cual los ha representado. Por último, le preguntamos por el método empleado en la resolución.

Con el incentivo de otro posible regalo le proponemos otro problema: ¿Puede poner este problema a sus estudiantes en el aula para que lo resuelvan? Muy probablemente, no tendrá ningún reparo para hacerlo, pues ya conoce la solución. Si es así, le decimos que use un libro de 100 páginas con sus estudiantes, la misma nota y la misma pegatina. Cuando nos pregunte si ese es el otro problema que debe resolver, nuestra respuesta será la formulación del nuevo enunciado: ¿Cuéntenos cómo explicará a los estudiantes la forma de resolver el problema? Nos debe indicar la lista de objetos matemáticos empleados por sus estudiantes y cómo los registran. Además, nos describirá la forma en la que intentaron resolverlo. Quizás el profesor se sorprenda pues puede que esperase otro problema de matemáticas y no un problema educativo, o de educación matemática.

Una experiencia práctica similar a la indicada es el objeto de este trabajo. Se actuó con dos muestra; una compuesta por 10 profesores de Enseñanza Secundaria de un curso de Formación Permanente (Matemáticas Recreativas en el Aula de Matemáticas) y otra muestra de otros 6 profesores de otro curso del mismo nivel (Matemáticas Dinámicas con Geogebra). Los cursos mencionados se han impartiendo desde hace más de 15 años en nuestra universidad. UNED no tiene adscritos centros de Enseñanza Secundaria (EESS) que tengan estudiante que deban hacer la prueba de acceso a la universidad. Por ello, no tenemos una población de profesores en activo a los que podamos convocar para experimentar algo. Además, UNED es una universidad nacional y los centros EESS están bajo la dirección educativa de las comunidades autónomas (una espacie de estados dentro de una federación) y es imposible acceder a los profesores sin permiso de la comunidad correspondiente. El carácter obligatorio de hacer cursos de actualización de los profesores en activo hace que profesores de toda España se matriculen en diversos cursos, y los nuestros son unos de ellos. En la programación de los citados cursos establecimos una serie de tareas de obligatorio cumplimiento puesto soy uno de los profesores y el director de los dos cursos mencionados con anterioridad. Así pues, no hubo selección de una muestra experimental, puesto que todos los profesores que se matricularon, libremente, tuvieron que hacerlas. Unas de esas son las que se describen en este trabajo. Así pues, la muestra no es elegida al ser impuesta por matrícula.

El marco de la experimentación fue el modelo de enseñanza a distancia correspondiente a nuestra universidad, UNED. Se hizo uso de los medios telemáticos disponibles en la plataforma virtual de esta universidad, puesto que las características UNED y la dispersión geográfica de los asistentes no facilitan la posibilidad de tener a todos los profesores en un aula física. Disponer de una aula virtual donde todos pueden estar presente tampoco es garantía de estar todos unidos en esa zona virtual o telemática, pues no suelen acoplarse bien las distintos horarios profesionales de todos los profesores, recordemos que son profesores en activo. Otra cuestión es que aunque se puedan hacer reuniones en directo de forma telemática, la formación del estudiante UNED se basa en direccionar adecuadamente al estudiante y asesorarle ante las dificultades empleando algún medios de comunicación que no precise el sincronismo de actuaciones en directo de los participantes y los responsables del curso. Así pues, la metodología de la experimentación es completamente a distancia sin supervisión en vivo de un responsable. Además, vista la oferta de formación de UNED, podemos asegurar que muchos profesores emplean los cursos a distancia en su proceso de formación continua profesional.

FORMACIÓN PREVIA

La formación inicial del estudiante que desarrollará una labor educativa es una primera dificultad en el marco Educativo Profesional, al menos en España, desde hace unos 40 años. Se ha seguido una transformación en las formación previa de aquellos que acceden a ser profesores de Enseñanza Secundaria. Se ha pasado de tener de profesores de Matemáticas que eran licenciados en Matemáticas o Físicas, a unas plantillas de estos profesores con un amplio abanico de esa formación inicial del pre-profesor. Hoy en día, pocos son los estudiantes egresados de un grado de Matemáticas que se centran a la Enseñanza Secundaria como meta profesional. Hasta la prensa generalista se ha hecho eco de esta situación, por ejemplo, se dice: « Los graduados en esta especialidad están muy cotizados en el mercado y las suplencias se están cubriendo con químicos, arquitectos o economistas » (SILIO, 2021), aunque existen artículos similares en otros muchos periódicos nacionales. Con esto queremos destacar la falta de profesores de Matemáticas que son egresados de un grado de Matemáticas, y que el nicho profesional de Profesor de Matemáticas en Enseñanza Secundaria es cubierto por un sin fin de egresados de algún otro grado científico, grado técnico u otros grados supuestamente menos afines. Este marco profesional induce a pensar en el reciclaje profesional del actual profesor de Matemáticas y que la Formación Permanente del Profesor debe ser una vía prioritaria para los profesores en activo y para los futuros profesores.

Ante cualquier pregunta relativa a la posible capacitación del actual candidato a profesor de Matemáticas, tanto matemática como docente, suele suponerse la matemática aun cuando las asignaturas matemáticas cursadas sean escasas en el grado que estudia el pre-profesor. Sin embargo, se suele remarcar enormemente la necesidad de adquisición de conocimientos de tipo didáctico, puesto que no suelen aparecer asignaturas con denominaciones educativas en ese grado.

Actualmente, en España se piden unos requisitos previos al futuro profesor: Haber cursado cierto número de créditos en asignaturas de Matemáticas y tener superado un master de carácter profesional, por ejemplo, algún Master de Formación de Profesor de Enseñanza Secundaria. En el Boletín Oficial del Estado (español) se indican los requisitos para opositar a una plaza de profesor de Matemáticas.

> Cualquier título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto del área de Ciencias Experimentales y de la Salud o de las Enseñanzas Técnicas o cualquier título oficial de Graduado o Graduada de la rama de conocimiento de Ciencias o de Ingeniería y Arquitectura, y además acreditar una experiencia docente o una formación superior adecuada para impartir el currículo de la materia. (BOE, 2015)

Sin embargo, no se entra en la necesidad de adquisición de ciertos conocimientos matemáticos, puesto que se supone que los ha adquirido a lo largo del grado estudiado. Eso hoy en día no es una suposición fiable, sobre todo si se miran las asignaturas de muchos grados.

En el Boletín Oficial del Estado se indican los requisitos para ser profesor de Matemá-ticas en un centro privado:

> a) Tener un título de Licenciado, Ingeniero o Arquitecto, o un título oficial de Educación superior de Graduado.
>
> b) Acreditar una cualificación específica adecuada para impartir las materias respectivas.
>
> c) Tener la formación pedagógica y didáctica a la que hace referencia el artículo 100.2 de la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (BOE, 2010)

Por otro lado, está la relativa cualificación específica con la presumible experiencia docente o de la formación de educación superior adecuada para impartir el currículo de la materia. Esta puede ser acreditar mediante alguno de los siguientes procedimientos:

> a) Experiencia docente consistente en la impartición durante, al menos, dos cursos completos de dicha materia o, en su defecto, 12 meses en períodos continuos o discontinuos, en centros públicos o privados debidamente autorizados para impartir las enseñanzas de Educación Secundaria Obligatoria o Bachillerato.
>
> b) Certificación académica personal, en la que conste haber superado al menos 24 créditos o créditos ECTS de formación, o en el caso de no figurar créditos, dos cursos académicos en cualesquiera estudios universitarios oficiales, de materias relacionadas con la formación que se desea acreditar. A estos efectos, los créditos de formación podrán ser utilizados para acreditar la formación inicial para impartir diferentes materias.
>
> c) Realización de actividades de formación del profesorado, relacionadas con dicha materia, de una duración en su conjunto, de al menos 24 créditos o créditos ECTS, certificadas por la Administración educativa competente. (BOE, 2010)

PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Uno de los pilares en los que se basa la profesionalidad del proceso de Enseñanza es la constante Formación Profesional del profesor en activo que lleva años dando clases.

En los treinta últimos años, la sociedad se ha sumergido en un mundo tecnológico con nuevos medios del tratamiento de la información y de la comunicación (TIC) con un sinfín de medios telemáticos, así pues, esas medios afectan al profesor usual. Con referencia al profesor, se aprecian expresiones como: « El ritmo de cambio: aprendizaje a lo largo de toda la vida y cultura general » (ADELL, 1997). Parece entenderse que ritmo de cambio está dirigido a las tecnologías TIC, mientras que *cultura general* pudieran abarcar la formación general tanto matemática como didáctica.

Una cosa está clara en casi todos los profesores: « hay que resolver problemas en Matemáticas », por ello, todo aquel que estudió hace tiempo recuerda los problemas que contaba el profesor de Matemáticas. En (GASCON, 1994) se habla de una convicción ampliamente compartida, dice él, por la comunidad matemática de que la resolución de problemas juega un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas. También, se afronta la ambigüedad en la terminología « resolución de problemas ». Su tesis es que el término problema de matemáticas depende esencialmente del modelo epistemológico de los términos: problema, enseñar y aprender.

Polya (1962) describía a un problema como una situación que requiere buscar conscientemente alguna acción adecuada para lograr un objetivo claro en su concepción y que no se alcanzara inmediatamente.

El significado de Problema varia para diversas teorías didácticas. Por ejemplo, Charnay (1994) define problema como la terna (situación, persona, entorno). Schoenfeld (1985) lo define como una relación binaria entre un individuo y una tarea.

Usamos la definición de la RAE por ser la más general. Un problema es « Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. » Aunque también añade la acepción; "Cuestión que se trata de aclarar". Esta definición es la usual entre los profesores y estudiantes.

De Guzmán (2007) indica que con la resolución de problemas se intenta transmitir aquellos pensamientos de utilidad en la resolución de problemas, y esto se hace de forma sistemática.

En (GASCON, 1994) se enumeran algunas perspectivas de la resolución de problemas, (denominación del autor) como cada una de las formas de entender el significado de la resolución de problemas. Formas que o están en la literatura o son idealizadas a la hora de intentar ser sistemático en las posibles interpretaciones didácticas. No enfatizamos la elección de ninguna de las formas idealizados, o no, de lo que es la resolución de problemas en matemáticas, pues nos es suficiente una interpretación ingenua, y por que la resolución del problema matemático es el detonante para enfrentar al profesor con un problema educativo.

Este enfrentamiento o situación didáctica de ruptura con su saber didáctico es lo que pone al profesor en vías de aprender a enseñar de otras formas.

Es claro que tenemos una interpretación generalizada de la resolución de problemas, por un lado el reto o problema matemático a ser resuelto por el estudiante, y por otra lado el reto o problema didáctico de aclarar las posibles vías para afrontar la resolución del problema matemático. Cabe destacar que una condición necesaria para aprender a enseñar un problema matemático es saber resolverlo. Ahora bien, esta condición no es suficiente para saber enseñar a resolver un problema a los estudiantes. La razón es simple, pues cuando se resuelve un problema hay que temer en cuenta la forma en la cual se registra la información matemática o los objetos matemáticos. Esa forma de registrar es importante tanto si el estudiante afronta un reto en una situación didáctica de ruptura, ver (BROUSSEAU, 1998; BROUSSEAU, 1999), como si el profesor recita directamente un discurso sobre la resolución del problema a su alumno, o cualquier posibilidad intermedia imaginable enmarcada en alguna teoría didáctica.

Un ejemplo puede clarificar lo que decimos. La expresión $1 + 3\sqrt{2}$ es un número real irracional para el profesor, sin embargo, el estudiante puede entender que se trata de problema de operar y aportar una solución aproximada, usando la calculadora.

Ahora bien, estamos intentando que se aprenda a enseñar, por lo cual hay que tener en cuenta que cualquier protocolo de comunicación tiene en cuenta que lo que se trasmite es reconocible por los participantes en dicha comunicación. No podemos asegurar que en el caso de una comunicación matemática ocurra ese reconocimiento, ni en el aula.

En Matemáticas hay que tener en cuenta que la comunicación matemática emplea una simbología, una sintaxis y una semántica específica para describir objetos matemáticos que han ido evolucionando con el tiempo según se ha evolucionado desde una matemática de la Grecia Clásica con un marcado carácter práctico a una matemática actual muy formalizada para asegurar a ultranza su coherencia lógica. Los seis óstracos (trozos de vasijas rotas) del periodo helénico de Egipto encontrados en la isla Elefantina son los más antiguos registros de algunas proposiciones del Libro de Euclides. En ellos se aprecia que la comunicación matemática consistía en debatir sobre una figura que se iba construyendo de una forma dinámica, a modo de lo que es hoy una resolución de un problema. El texto contenido en esos óstracos no coincide con las diversas copias y copias-adaptaciones de las diversas fuentes que se conservan del Libro de Euclides. Sin embargo, las figuras y los diagramas son los mismos, Así pues, es patente que la matemática se comunica mediante algún tipo de representación de los objetos matemáticos con los que se traten, y eso no ha cambiado desde la antigüedad. En (DUVAL, 1999) se indica que la actividad matemática precisa de formas de funcionamiento cognitivos que necesitan de sistemas de representación. Estos aportan diversos registros de representación semiótica y que la relación integral de estos por parte del estudiante le hacen comprender los objetos matemáticos. Ahora bien, se debe tener en cuenta que R. Duval trata con dos elementos imprescindibles en el aprendizaje de las matemáticas:

La representación mental como aquel conjunto de imágenes y conceptualizaciones que una persona puede tener sobre un objeto o una situación.

La representación semiótica como el conjunto de signos que son el medio de expresión de las representaciones mentales para hacerlas visibles a otros objetos.

La tarea de toda una vida de una persona está condicionado por el lenguaje que usa para relacionarse o comunicarse con los demás. Todo lenguaje emplea diversos soportes materiales para conectar unas generaciones con otras, soporte oral (como fonemas y palabras), textual (como caracteres alfabéticos y números), simbólico o signos (como grafismos egipcios o asiáticos) , grafico (como las señales tráfico o los gestos) y otros más.

La Matemática entendida como lenguaje requiere hacer uso de todos esos soportes con el fin de comunicar los contenidos matemáticos de una generación a otra. Otra cosa es decidir qué soportes son los más apropiados para la comunicación matemática, y cuales deben usarse en el proceso educativo.

La Teoría de Registros de Repre-sentación Semiótica inició su andadura por el año 1995 como producto del filósofo y psicólogo R. Duval. En Duval (2004) se diferencia entre las representaciones semióticas y las representaciones mentales. Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas, mientras que las representaciones mentales habitan en el cerebro, en nuestra conciencia y nuestro pensamiento, y son fruto de una realidad objetiva; que bien podría ser una representación semiótica. Se indica que las representaciones mentales son las necesarias para acercarse a un objeto en ausencia total del significante perceptible.

Los registros son los medios de expresión y de representación caracte-rizados por su respectivo sistema semiótico.

Quizás como matemático, necesitemos ejemplificar aquello que dice R. Duval en términos matemáticos. Por ejemplo, algunas representaciones semióticas del número un medio son $\frac{2}{4}, \frac{15}{30}, \frac{50}{100}. \frac{250}{500}$, mientras que la imagen mental es cómo almacenamos en memoria el número un medio.

Otro tipo de representación semiótica se produce ante la opción de elegir dos piezas de oro de un conjunto de cuatro, o tres de seis. En este caso, la imagen mental es la proporción un medio.

Duval (2004) propone tres actividades cognitivas esenciales de una representación relacionadas a la semiótica: La formación de una representación identificable, el trata-miento de representaciones y la conversión de unas representaciones a otras.

Se ejemplificar matemáticamente estas cuestiones desde un formalismo matemático.

En cierta medida Duval establece el conjunto de registros de representación semiótica, relativos a cada uno de los sistemas semióticos que se utilicen, y lo dice indicando que cada registro es una expresión accesible por los sentidos. Sin usar esta terminología, ya que no es matemático, define una relación de equivalencia en ese universo de registros. Una representación está relacionada con otra presentación si existe un método matemático que transforma un registro en otro y viceversa. Esa existencia no implica que el método sea conocido, pues basta con que se acredite su existencia. En el ejemplo de las fracciones, el método matemático es conocido; la simplificación.

Una representación mental es cada una de las clases del conjunto cociente, y para cada clase se prioriza memorísticamente alguna representación semiótica en particular, cuestión en la que interviene la voluntad de la persona. En el ejemplo, para la fracción anterior tenemos el registro $\frac{1}{2}$, el registro textual *un medio*, el registro algebraico $2x + 1 = 0$, el registro gráfico relativo la altura de la función $f(x) = \frac{1}{2}$.

De cualquier forma, cada persona prioriza el registro semiótico que considera adecuado para hacer referencia a su registro mental y comunicarlo de forma eficaz y rápido.

Esta interpretación matemática que decimos puede ser la razón de que algunos autores indiquen que es lo mismo el registro semiótico y el registro mental. Un ejemplo clarifica esto en relación al concepto de fracción polinómica, como elemento del cuerpo de las fracciones polinómicas.

Si consideramos los registros semióticos $\frac{1}{x-1}$, $\frac{x+1}{x^2-1}$, $\frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x+2}$ se tiene que corresponden al mismo registro mental. ¿Cuál registro prioriza el lector?

Entendemos que esta teoría dispone de algunos puntos oscuros para englobar la descripción holística del conocimiento matemático, sin embargo, entendemos que usar los registros de representación semiótica es muy acertado en el proceso educativo. Ahora bien, hay que estar muy atento en el uso de registros muy parecidos sensorialmente pero que corresponde a objetos matemáticos distinto. Por ejemplo, los registros algebraicos $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ y $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^3+2x^2-x+2}$ disponen de distintas fracciones de una misma fracción del cuerpo de las fracciones, sin embargo, se corresponden a tres funciones distintas, para ello basta con estudiar el dominio.

En la comunicación matemática, y más en las acciones educativas, hay que tener en cuenta que los interlocutores suelen tener formas de pensar y entender distintas, provocado por la desigual forma de registrar los objetos matemáticos. En general, una comunicación encaminada a enseñar cómo resolver un problema requiere traducir o adaptar el método de trasmisión a dichas concepciones, sobre todo si se pretende que emerjan otras formas de registrar esos objetos entre los participantes. Un caso paradigmático es generar una tabla de valores de una función real de expresión $\mathrm{f(x)} = \sqrt{\mathrm{x}^2 - 1}$. El profesor sabe qué valores numéricos debe tomar la variable x para tener una idea de la gráfica. Sin embargo, aun con calculadora, el estudiante empleará valores enteros positivos y generará una idea gráfica de algo parecido a la parte positiva, en $[1, +\infty)$, de la gráfica de la función $\mathrm{g(x)} = |\mathrm{x} - 1|$, olvidando la curvatura de la gráfica en los valores cercanos a los puntos mínimos locales y los valores enteros negativos.

En lo relativo a los objetos matemáticos presentes en un problema, la literatura se decanta principalmente por cinco tipos de registros semióticos de representación de esos objetos matemáticos, tipo R. Duval: El registro textual, el registro numérico-tabular, el registro simbólico, el registro algebraico y el registro gráfico. En (Delgado 2016) se consideran dos registros independientes de los otros cinco: El registro metafórico que tiene que ver con cómo se recuerda el objeto y el registro analógico que tiene que ver en cómo se observa en el mundo físico. Por ejemplo, el objeto función $\mathrm{g(x)} = |\mathrm{x} - 1|$ puede registrarse como una máquina a la que se le puede alimentar con cualquier número, de forma que para cada número devuelve otro número que es positivo. También, se puede registrar-interpretar como la trayectoria de un rayo de luz que incide en cierto punto de una línea de un espejo plano. Esto se puede observar usando un puntero laser.

Rara vez un profesor hace hincapié en más de un registro para un mismo objeto matemático. No decimos que no los emplee, si no que su empleo pudiera ser trasparente para el estudiante. Un ejemplo clarificará lo dicho. Si el profesor se platea el concepto de función con el registro algebraico, suele remarcar el registro gráfico como la meta de la resolución de un problema, el de la presentación gráfica de una función. De esta forma el estudiante suele limitar su concepción del objeto función al uso del registro algebraico. Es decir, pudiera ocurrir que una función es una expresión algebraica para el estudiante, abandonando la necesidad de estudiar el dominio de dicha función. Con esto, muchos estudiantes entienden que las funciones

$f_1(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ y $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$ son la misma. Esto se debe a un incorrecto registro del objeto función haciendo uso un simple registro algebraico.

No es raro que a un profesor de matemáticas se le diga que la didáctica de las matemáticas es esencialmente una ciencia social y posee sus propios métodos y medios de estudio e investigación. Al hacer esa indicación se suele olvidar que cualquier ciencia social es comunicada haciendo uso de un lenguaje actual, español, portugués, inglés,..

Hace unas décadas se debía hacer uso de la traducción que hacían algunos expertos en la materia para poder desarrollar las ideas matemático educativas en cada idioma. Hoy en día las tecnologías de traducción automática de los ordenadores nos permite interpretar el siguiente escalón idiomático. Si hacemos uso, vía Internet, de los diccionarios de significados de las lenguas indicadas (RAE, Cambridge, DICIO) podemos apreciar la posible diferencias de significados. Veamos un ejemplo de lo que un hablante español puede entender por pensar, lo que un brasileño puede entender por pensar, y lo que un inglés puede entender por to think .

RAE. Pensar: Formar o combinar ideas o juicios en la mente.

Traducido al portugués: Formar ou combinar ideias ou julgamentos na mente.

Traducido al inglés: Form or combine ideas or judgments in the mind.

DICIO. Pensar: Processo pelo qual a consciência apreende em um conteúdo determinado objeto; refletir; formar, combinar ideias.

Traducido al español: Proceso por el cual la conciencia aprende un objeto determinado en contenido; reflejar; formar, combinar ideas.

Traducido al inglés: Process by which consciousness apprehends a certain object in content; reflect; form, combine ideas.

Cambridge. Think: To get knowledge or skill in a new subject or activity.

Traducido al español: Adquirir conocimientos o habilidades en un nuevo tema o actividad.

Traducido al portugués: Obter conhecimento ou habilidade em um novo assunto ou atividade.

Para la comparación de significados es necesario traducir aquello que devuelve cada uno de los diccionario. El lector puede apreciar que las traducciones a un lenguaje y el significado en ese lenguaje no es exactamente igual, aunque sepa valorar cierta equivalencia de significados. Es claro que en cada idioma aparecen palabras con cierto talante borroso desde el punto de vista de su significado. Por ejemplo, en español, las palabras ideas, juicios y mente. En portugués, las palabras consciência, apreende e ideais. En inglés, Knowledge y skill.

Quizás un traductor profesional emplearía una mejor traducción, sin embargo, como los texto devueltos por los diccionarios no son excesivamente extensos, hemos utilizado la herramienta Traductor de Google, aunque somos conscientes de que existen mejores herramientas de traducción.

Tres son las principales acepciones que el diccionario de la RAE muestra de la palabra pensamiento: Facultad o capacidad de pensar. *Acción y efecto de pensar*. *Conjunto de ideas propias de una persona, de una colectividad o de una época*. Sin embargo, la Psicología precisa su definición de pensamiento como *un proceso mental psicológico a través del cual las personas pueden crear, regular y desarrollar ideas acerca de ellas, del entorno que nos rodea o de los demás*. Además, existen diversas categorías relativa al tipo de pensamiento en el mundo de la Psicología. Una de ellas distingue nueve tipos de pensamiento: Reflexivo, Crítico, Analítico, Lógico, Sistémico, Analógico, Creativo, Deliberativo, Práctico. Otras consideran más tipos 12, 15 o 24 al precisar algunos matices de los nueve indicados.

Esos tipos de pensamientos pueden adaptarse para explicar el pensamiento que se genera cuando se trata con Matemáticas. Sin embargo, trataremos con cada de las capacidades matemáticas innata, o adquirida, que se clarifica en la mente del estudiante como un tipo de pensamiento matemático. Así pues, el concepto de pensamiento matemático está constituido por tópicos, procedimientos y relaciones que involucran objetos matemáticos. Por lo tanto, en lo concerniente a los objetos de enseñanza presente en un problema matemático, hay que tener en cuenta las referencias existente en la literatura a varios tipos de pensamiento de índole matemático. Por ejemplo:

El *pensamiento numérico* al formar o combinar ideas o juicios con cantidades y magnitudes.

El *pensamiento simbólico* al expresar ideas con símbolos.

El *pensamiento algebraico* para formar o combinar ideas o juicios con objetos y símbolos.

El *pensamiento funcional* para formar o combinar ideas o juicios con variables o funciones.

EL RETO

Inicialmente, se intentó que los profesores de la muestra conocieran un problema de estanque de agua:

"...de Antes de que prosigamos hacia Oxford, saco agua del estanque con ese cubo y prepárate para refrescar tu mente con un pequeño problema de lógica. El cubo tiene una capacidad de 20 litros. Si dicha capacidad fuese 25 litros, nos ahorraríamos llenar el cubo de agua doce veces para vaciar el estanque por completo. Dime Adlatus ¿cuántos litros de agua contiene el estanque? (KIEFER, 2022)."

Como nuestra intención no era que resolvieran el problema, si no que se lo presentasen a sus estudiantes para que lo resolvieran, optamos por una variación del enunciado más acorde a los enunciados de problemas que suelen ver los estudiantes: *Ayer teníamos cubos de 20 litros de volumen y llenamos un depósito acarreando cubos de agua. Hoy tenemos cubos de 25 litros y hemos llenado el depósito haciendo 12 acarreos menos. ¿Qué volumen tiene el deposito en litros?* (PPII).

Saber el volumen es sólo es una parte del reto al profesor, pues se le pidió que . describiera como explicar la resolución del problema a estudiantes en los cuatro supuestos casos: Estudiantes de 10 años, estudiantes de 15 años, estudiantes universitarios y otros profesores. Se debía contestar haciendo uso de los distintos registros semióticos de representación, para lo cual debían buscar bibliografía relativa a las representaciones de Duval, describir los objetos y adaptar las resoluciones del problema a dichas representaciones.

PERSPECTIVAS, PENSAMIENTO Y REPRESENTACIÓN

Sin duda, el volumen del depósito y los números de acarreo de cubos son objetos matemáticos correspondiente a la experiencia. No podemos describir todas las formas posibles de afrontar el reto, por ello, hacemos una descripción de lo que esperábamos observar en las respuestas.

Perspectiva Numérica; PN: En este caso nos centramos en aquello relativo a pensamiento numérico sin hacer uso de registro simbólico o registros algebraico alguno. Nos restringimos a actuar dentro del marco de los números naturales, NN, o al marco de los números enteros, NE, si sólo sumamos o si también restamos. Además, destacamos dos métodos de resolución del problema: el método operacional, MO, y el método tabular, MT, o de búsqueda inductiva finita.

[PN, NN, MO]: En este caso los objetos destacables son el exceso de volumen entre cubos, $20 + 5 = 25$ y el volumen correspondiente al exceso de acarreos $20 \cdot 12 = 240$ litros. El número de acarreos, con el cubo de 25 litros, necesarios para satisfacer ese exceso de volumen es múltiplo de 5; $5 \cdot 48 = 240$ y por tanto, el volumen del deposito es $48 \cdot 25 = 1200$ litros.

[PN, NE, MO]: En este caso los objetos destacables son la diferencia de volumen entre cubos, $25 - 20 = 5$ y el volumen correspondiente a la diferencia de acarreos $20 \cdot 12 = 240$ litros. El número de acarreos, con el cubo de 25 litros, necesarios para satisfacer ese exceso de volumen es $\frac{240}{5} = 48$ y por tanto, el volumen del deposito es $48 \cdot 25 = 1200$ litros.

[PN, NN, MT] y [PN, NE, MT]: Ahora los objetos destacables son los volúmenes parciales correspondientes al acareo de cubos para lo cual se construye una tabla con los parciales de cada cubo hasta que esos volúmenes coinciden.

Tabla 1- Registro tabular natural

[PN, NN, MT]		
	Cubos 25 l.	Cubos de 20 l.
1	$1 \cdot 25 = 25$	$(12 + 1) \cdot 20 = 260$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
48	$48 \cdot 25 = 1200$	$(12 + 48) \cdot 20 = 1200$

Tabla 2- Registro tabular entero

[PN, NE, MT]		
	Cubos 20 l.	Cubos de 25 l.
13	$13 \cdot 20 = 260$	$(13 - 12) \cdot 25 = 25$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
48	$60 \cdot 2 = 1200$	$(60 - 12) \cdot 25 = 1200$

Perspectiva Algebraica; PA: Es el caso en el que se emplea algún tipo de pensamiento algebraico, destacándose la utilización de los registros simbólico y algebraicos para los objetos empleados en la resolución. Al igual que en la perspectiva numérica nos restringimos a actuar dentro del marco de los números naturales, NN, o al marco de los números enteros, NE. Destacamos dos métodos: el método de una ecuación, ME, y el método de un sistema de ecuaciones, MS.

[PA, NN, ME]: Los objetos destacables son el volumen del depósito y el número de acarreos del cubo de 25 litros que son tratados como incógnitas, empleando los símbolos V y n. Las expresiones algebraicas empleadas son , $V = 20 \cdot (n + 12)$ y $V = 25 \cdot n$ litros. Además para resolver el problema se resuelve la ecuación $20(\mathrm{n}+12)=25\mathrm{n}$ haciendo uso de las propiedades distributiva y cancelativa de los números naturales. Es decir, empleado como pasos intermedios $20(\mathrm{n}+12)=(20+5)\mathrm{n}$ y $20\mathrm{n}+240=20\mathrm{n}+5\mathrm{n}$. La incógnita n se determina con la ecuación final $240=5\mathrm{n}$ buscando por inducción hasta desde $\mathrm{n}=1,\cdots \mathrm{n}=48$, y $\mathrm{V}=25\cdot 48=1200$.

[PA, NE, ME]: Los objetos destacables son el volumen del depósito y el número de acarreos del cubo de 20 litros que son tratados como incógnitas, empleando los símbolos V y m. Las expresiones algebraicas son $\mathrm{V}=20\cdot \mathrm{m}$ y $\mathrm{V}=25\cdot(\mathrm{m}-12)$. Además, para resolver el problema se resuelve la ecuación $25(\mathrm{m}-12)=20\mathrm{m}$ haciendo uso de las propiedades distributiva y del elemento opuesto de los números enteros. Es decir, empleado como pasos intermedios $25\mathrm{m}-300=20\mathrm{n}$ y $25\mathrm{m}-20\mathrm{m}=300$. La incógnita m se determina con la ecuación final $5\mathrm{m}=300$ usando la división entera $\mathrm{m}=\frac{300}{5}=60$, y $\mathrm{V}=20\cdot 60=1200$.

[PA, NN, MS]: Los objetos destacables son el volumen del depósito y el número de acarreos de los cubos de 25 y 20 litros que son tratados como incógnitas, empleando los símbolos V , n y m. Las expresiones algebraicas empleadas son , $V=20\cdot m$, $V=25\cdot n$ y $m=n+12$. Resolver el problema consiste en resolver el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} m=n+12 \\ V=20\cdot m \\ V=25\cdot n \end{cases}$ usando el sistema $\begin{cases} m=n+12 \\ V=20\cdot m \\ 5n=240 \end{cases}$ con $\begin{cases} m=60 \\ V=1200 \\ n=48 \end{cases}$ como solución.

[PA, NN, MS]: Los objetos destacables son el volumen del depósito y el número de acarreos de los cubos de 25 y 20 litros que son tratados como incógnitas, empleando los símbolos V , n y m. Las expresiones algebraicas empleadas son, $V=20\cdot m$, $V=25\cdot n$ y $n=n-12$. Resolver el problema consiste en resolver el sistema de ecuación lineales $\begin{cases} n=m-12 \\ V=20\cdot m \\ V=25\cdot n \end{cases}$ usando el sistema $\begin{cases} n=m-12 \\ V=20\cdot m \\ 5m=300 \end{cases}$ con $\begin{cases} n=48 \\ V=1200 \\ m=60 \end{cases}$ como solución.

Perspectiva Funcional; PF: En este caso se emplea algún tipo de pensamiento funcional, destacándose la utilización de los registros gráficos y algebraicos para los objetos empleados en la resolución. A diferencia de la perspectiva algebraica no distinguimos los casos de una función real de variable real de una sucesión de números reales. Destacamos dos métodos: el método de igualar funciones, MI, y el método de gráfico de determinar los puntos comunes a dos gráficas, MG.

[PF, MI]: Los objetos destacables son el volumen del depósito y el número de acarreos de alguno de los cubos. El volumen se expresa mediante dos funciones del número x que es tratado como una variable; empleando $\mathrm{V}_1(\mathrm{x})$, $\mathrm{V}_2(\mathrm{x})$ y x. Las funciones empleadas son, o $\mathrm{V}_1(\mathrm{x})=20(\mathrm{x}+12)$ y $\mathrm{V}_2(\mathrm{x})=25\mathrm{x}$ o $\mathrm{V}_1(\mathrm{x})=25(\mathrm{x}-12)$ y $\mathrm{V}_2(\mathrm{x})=20\mathrm{x}$. Además para resolver el problema se tiene la ecuación $\mathrm{V}_1(\mathrm{x})=\mathrm{V}_2(\mathrm{x})$. La igualdad se cumple para $\mathrm{x}=48$, para la primera definición, lo cual hace que el problema está bien enunciado y $\mathrm{V}(48)=1200$.

[PF, MG]: Se emplean los mismos objetos descritos para [PF, MI]. Además para resolver el problema se representan las funciones y se determina el punto de corte de las dos gráficas. El punto común es $(48, 1200)$, para la primera definición. Aquí destacamos los registros gráficos de las funciones que se emplean no son fáciles de usar sino se trabaja con un programa que muestre las gráficas. Aun así, la ventana gráfica de los programas suelen estar centradas en el origen y cada eje tiene la misma escala. Para poder ver el punto de corte de las dos gráficas caben dos opciones: Cambiar la escala que no es muy operativa vista la diferencia entre 48 y 1200, y desplazar la ventana visible que es una opción más pero se pierden de vista los ejes.

LOS DATOS

Todos los profesores reconocieron que solucionaron el problema matemático aplicando la perspectiva [PA, NE, ME] en un inicio. Destacamos que el grupo de 6 profesores simplemente emplearon Geogebra para que resolviera la ecuación planteada, empleando la incógnita x que es una de las que reconoce el programa como incógnita o variable.

Ningún profesor consideró perspectiva alguna distinta de la que utilizó para resolver para explicar el problema a los estudiantes, con independencia del nivel académico de estos. Tampoco describieron diferencia de registro semiótico entre ellos y sus estudiantes para cada uno de los objetos matemáticos.

Una vez obtenidos estos resultados, se le presentó una versión simplificada del listado de perspectiva y se les formulo unas preguntas. Para contestar se les dio tres días puesto que sus tareas profesionales pudieran imposibilitar contestar rápido. Además, de esta forma les permitíamos reflexionar sobre los distintos enfoques.

Cabe destacar que 13 de los 16 profesores participantes no distinguían los casos relativos a números naturales del de números enteros, es decir, no repararon en la diferencia de operar con $m + 12$ o con $n - 12$, si bien ellos operaron con $x + 12$ y $x - 12$. Nunca operaron con números naturales o enteros, realmente operaron con números reales positivos con parte decimal nula. Los tres restante advirtieron la diferencia operatoria pero no se decantaban por los números naturales, puesto que consideraron enteros positivos.

En un momento de la experiencia, los profesores de la muestra debían elegir dos perspectivas de las disponibles para explicar a cada tipo de estudiantes. Se elegía una primera como preferente y una segunda como alternativa.

Para los estudiantes de 10 años: Como opción primera, [PN, NE, MO] fue elegida por 11 profesores. El motivo era que se podía presentar de forma verbal sin tener que escribir nada, que es lo que correspondería a un problema de Matemáticas Recreativa. Cinco profesores eligieron [PA, NE, ME] y un profesor eligió [PN, NE, MT], si bien reconocía que la tabla era muy larga. Los que eligieron primera opción [PN, NE, MO], eligieron [PA, NE, ME] como segunda opción y los restantes eligieron [PN, NE, MO].

Para los estudiantes de Enseñanza Secundaria: Como opción primera, [PA, NE, ME] fue elegida por 15 profesores. El motivo era la necesidad de presentar una forma simbólica ya algebraica relativamente corta. El otro profesor eligió [PA, NE, MS] por la necesidad de sistematizar la resolución del problemas Las elecciones segundas fueron al revés [PA, NE, MS] para los 15 profesores que eligieron primera opción [PN, NE, MO], y [PA, NE, ME] para el otro.

Para los estudiantes universitarios: Como opción primera, [PA, NE, MS] fue elegida por 10 profesores, cuatro eligieron [PF, MG] y dos eligieron [PF, MI]. El motivo fue que los estudiantes universitarios sabrían tratar con funciones y sus gráficas. Las elecciones segundas fueron [PF, MI] para 15 profesores, y [PA, NE, MS] para el otro.

Se les pidió que realizaran una crítica positiva y una negativa de cada una de las perspectivas. Sorprendentemente las criticas negativas sólo se centraron en la diferencia de tratar con números naturales o con enteros, pero sin mucha convicción. Además, esta práctica persiguió una formación más amplia ante las estrategias para resolver un simple problema, que al fin y al cabo era lo perseguido en los cursos de Formación Permanente.

MATEMÁTICAS: CIENCIA ABSTRACTA Y EXPERIMENTAL

El mecanismo de abstraer requiere de la práctica de objetos matemáticos, empleando simplemente los números. Se les pidió que adaptaran el problema inicial a la forma usual de presentar un problema. Una adaptación, más o menos precisa, de las redacciones es: Problema Abstracto (PPAA); *Determine un número que es múltiplo de 25 y de 20, tal que la diferencia de los cocientes es 12.*

Todos reconocieron que el cociente, x, correspondiente a 25 es menor que el correspondiente, y, a 20. Se utilizó este conocimiento para afrontar el problema desde la teoría de las ecuaciones diofánticas, con lo cual se les pidió completar la ecuación $25x + 20y = \cdots$. Una vez que quedo clara la ecuación; $25x + 20y = 240$, se les presentó el método de resolución a partir de la igualdad de Bézout $25a + 20b = 5$ correspondiente al máximo común divisor de 20 y 25; $mcd(20{,}25) = 5$. De esta forma se obtuvo la solución $x = 48$ e $y = -48$. Esto permitió resolver una nueva ecuación $25x + 20y = 0$ con la solución $x = 48$ e $y = 60$. Con esto se puso fin a la enumeración de métodos de resolver el problema matemático en cuestión y la formación matemática en esta cuestión.

El problema inicial, PPII, quedo reflejado como una interpretación metafórica del problema abstracto, PPAA. De ahí, el registro semiótico metafórico de representación del concepto de ecuación diofántica como una máquina que es alimentada por números naturales y devuelve números naturales, algo similar a las máquinas (registro metafórico) que representan a funciones reales de dos variables reales. Como ejemplo, el problema se representa como la necesidad de saber con qué números debe ser alimentada la máquina para que devuelva el número 240.

Sin duda, se puede experimentar de forma heurística la búsqueda de la solución del problema, si se tiene un depósito de 2000 litros con 240 litros en su interior, se añaden cubos de 20 litros y se extraen cubos de 25 litros, hasta conseguir dejar el depósito vacío. Ahora bien, esto es una variación del procedimiento del problema inicial. También, se puede experimentar si se cambia el factor escala y en lugar de utilizar 20 y 25 litros por 20 y 25 centilitros utilizando una cuneta de 20 litros. En cualquier caso, consideramos que dicha experimentación no es fácil de llevar a cabo con agua. Así pues, hacemos uso del registro semiótico analógico para poder experi-mentar con los estudiantes.

Aconsejamos que la experimentación se realice en el patio o en una cancha de deportes por cuestiones evidentes del tamaño de la solución. Cada cubo de 20 litros es representado por una tira adhesiva de 20cm de longitud y cada cubo de 25 litros por una tira de 25cm. Se dibujan dos segmentos paralelos con uno de los extremos en una misma recta perpendicular y se pegan en uno de los segmentos 12 pegatinas de 20cm. La experimentación consiste en ir pegando en el de las 12 pegatinas de 20cm y en el otro pegatinas de 25cm a la vez hasta conseguir la misma longitud con pegatinas. Esta igualdad de segmentos se consigue al construir 12 metros de segmento de pegatinas. Desde luego que se puede experimentar dentro del aula si se consideran tiras de 20mm y 25mm.

Un profesor indicó la posibilidad de experimentar con pegatinas cuadradas de área 20mm y 25mm, pero se le hizo notar que para esas áreas se necesitaban lados de longitud $\sqrt{20}$mm y $\sqrt{25}$mm, y eso no era fácil de hacer con estudiantes. Tres profesores propusieron hacer un simulación de pegatinas con Geogebra.

A día de hoy, desconocemos si los profesores intentarán desarrollar la experiencia analógica con sus estudiantes cuando pase el invierno, pues la idea era sacar la enseñanza de las matemáticas del aula. Aunque se hizo la pregunta sobre experimentar, las respuestas fueron alentadoras aunque supeditadas a las necesidades del curso académico y del permiso de la dirección para actuar fuera del aula. Probablemente al final del curso sepamos si se experimentó, o no.

Reconocimos que los problemas de Matemáticas Recreativas están formulados para que la resolución no se realices de forma casual e ingenua. Es decir, son problemas para sistematizar el proceso de resolución o para saber elegir los objetos matemáticos convenientes. Ponemos como ejemplo las perspectivas [PA, NE, MS] y [PN, NE, MO], aunque quizás lo más simple sea lo mejor, aunque sea más difícil focalizar.

Igualmente, reconocimos que afrontar el problemas recreativo desde la perspectiva gráfica [PF, MG] requiere hacer uso de una aplicación generadora de gráficos que nos permita buscar dónde las dos gráficas se unen. Un programa como Geogebra bien pudiera ser esa herramienta gráfica. Ahora bien, si se disponía de ella, entonces se puede tratar con gráficas de funciones reales, cuando la variable es natural, o se puede tratar con dos secuencias de puntos de distinto color y ver cual de ellos coinciden en la pantalla.

También, reconocimos que la experimentación con pegatinas o la realización de una tabla, para el problema inicial, requería muchas pegatinas y muchas líneas en la tabla. Esto es así puesto que los problemas recreativos suelen ser formulados en el proceso inverso a su resolución y los datos que se presentan sesgan las perspectivas de resolución elegidas. Los datos aportados; 20, 25 y 12, general unos datos de salida 60, 48 y 1200 que no son pequeños para usar pegatinas y líneas de una tabla de valores.

Con los datos 20, 25 y 1 se tiene que el volumen $V = mcm(20,25) = 100$ y los acarreos de 20 y 25 litros son 5 y 4 respectivamente.

Uno de nuestros objetivos en la formación de profesores es que realicen la experimentación de problemas con sus estudiantes. Por ello se le facilitón una secuencia de enunciados similares con distintos datos según la tabla 3.

Tabla 3- Tabla de problemas similares

C1	C2	Dif	Ac 1	Ac 2	V
20	25	1	5	4	100
20	25	2	10	8	200
20	25	3	15	12	300
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	25	12	60	48	1200

De esta forma se puede elegir otro enunciado y experimentar con los estudiantes. Con esta tabla se muestra un proceso inductivo para resolver el problema inicial, además de proceso inductivo de escalar los problemas o una cascada de problemas similares. Sin duda, para experimentar pueden ser cambiados las capacidades de los cubos sin más que hacer las variaciones oportuna en la tabla anterior. Los profesores entendieron esta cascada de problemas como una estrategia de resolución muy clarificadora.

CONCLUSIÓN

A través de esta experiencia se ha mostrado que la Formación Permanente haciendo uso de la resolución de problemas puede estar focalizada en ampliación de perspectivas de resolución haciendo uso de los distintos registros semióticos de representación de los objetos matemáticos y en relación con el tipo de pensamiento matemático que pudieran tener tanto profesores como estudiantes.

No podemos suponer que la formación permanente tenga una fuerte componente teórico-didáctico, pero pensamos que el profesor debe sentir que aprende una parte matemática para no negar la parte didáctica. No se debe aludir, de inicio, a un profundo abandono de las concepciones profesionales del profesor, contrastadas en mil y una práctica diaria, y abrazar una supuesta teoría didáctica globalizadora que enunciará los problemas didáctico de forma que el profesor no los reconozca. El profesor que está en activo y expresa un deseo de actualizar su formación, es muy crítico con todo aquello que cree que no lo pondrá en práctica aunque se lo cuenten en ese proceso de actualización. En general, desean pocas teorías, matemáticas o didácticas, y muchos ejemplos prácticos que consideren útiles para su labor profesional. Tampoco podemos creer que, en la tarea de formar permanentemente al profesor, debamos convertir al profesor en un investigador en didáctica, ni en un experto en psicología y en matemática educativa, pues sin duda él lo es aunque sea de forma ingenua y práctica. Otra cosa es que tenga que adoptar un posicionamiento en una teoría didáctica.

Insistimos que entendemos que el profesor lo que demanda son herramientas, concepciones y métodos que le faciliten su trabajo o que les presente otros puntos de vistas para ajustar su labor docente. Al menos eso es lo que dicen en la encuesta inicial del curso en el que se matriculan; encuesta a la que no hemos aludido en este trabajo en ningún momento anterior. Así pues, desistimos de hacer transitar al profesor por alguna teoría didáctica de la enseñanza de las Matemáticas para reforzar aquello que él conoce por su práctica; la resolución de problemas y ampliar su punto de vista. Eso no quiere decir que no les pongamos un oportuno cebo didáctico con la formulación de un problema didáctico como el de este trabajo y que le hagamos buscar cuestiones didácticas en la red.

La experiencia mostrada con un problema de Matemática Recreativa, de un nivel aceptable pare los estudiantes de Enseñanza Primaria y Secundaria, nos muestra un posible camino para variar la acción docente desde el reconocimiento de las formas de pensar matemático y desde el marco de los registros semióticos de representación de los objetos matemáticos. Si se entiende que un estudiante aprende algo matemático al saber relacionar diversos registros semióticos de representación de ese algo, no podemos dejar de suponer que el profesor sea un experto haciendo cambios entre dichos registros. Esto le dará una fortaleza didáctica muy sólida, y perspectiva adecuada la las que atesoran sus estudiantes.

REFERENCIAS

ADELL., J. Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la educación. **EDUTEC Revista Electrónica de Tecnología Educativa**, n. 7, p. 1-21, 1997.

BROUSSEAU, G. **Théorie des Situations Didactiques**. Grenoble: La pensée sauvage, 1998.

BROUSSEAU, G. Educación y Didáctica de las matemáticas. **México: Educación Matemática**, 1998.

BOE (2010) Boletín Oficial del Estado. Real Decreto 860/2010, de 2 de julio, por el que se regulan las condiciones de formación inicial del profesorado de los centros privados para ejercer la docencia en las enseñanzas de educación secundaria obligatoria o de bachillerato. Madrid, España. https://www.boe.es/boe/dias/2010/07/17/pdfs/BOE-A_2010-11426.pdf

BOE (2015) Boletín Oficial del Estado. Real Decreto 860/2010, de 2 de julio, por el que se regulan las condiciones de formación inicial del profesorado de los centros privados para ejercer la docencia en las enseñanzas de educación secundaria obligatoria o de bachillerato. Madrid, España https://www.boe.es/eli/es/rd/2015/07/17/665/dof/spa/pdf

CHARNAY, R. Aprender (por medio de) la resolución de problemas. Em: Parra, C., & Saiz, I. (Eds.). **Didáctica de la Matemática**. Aportes y reflexiones. Buenos Aires: Paidós Educador, p. 51-64, 1994.

DE GUZMÁN, M. Enseñanza de las ciencias y la matemática. **Revista Iberoamericana de Educación**, v. 43, p. 19-58, 2007.

DELGADO PINEDA, M. Registros para una función real cualquiera de variable real. **El Cálculo y su Enseñanza**, v. 1, n. 6, p. 1-28. México, 2016.

DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Colombia: Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, R. **Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis issues for learning**. Educational Resources Information Center (ERIC), 1999.

GASCÓN., J. El papel de la resolución de problemas en la Enseñanza de las Matemáticas. **Educación Matemática**, v. 6, n.3, p. 37-51, 1994.

KIEFER, P. **Edad Media, Problemas de lógica**. Colonia : NGV, 2022.

RAE. Diccionario de la Real Academia Española y de la Asociación de Academias de la Lengua Española. https://dle.rae.es/

Cambridge. Cambridge dictionary. https://dictionary.cambridge.org/es/diccionario/ingles-estudiantes/

Dicio. Dicionário On Line de portugués. https://www.dicio.com.br/

Traductor de Google: https://translate.google.es/

POLYA, G. **Matemáticas y razonamiento plausible**. Madrid: Editorial Tecnos, 1962.

SCHOENFELD, A. **Mathematical Problem Solving**. New York: Academic Press, 1985.

SILIO, E. **Debacle en las oposiciones a profesor de Matemáticas: más de 720 plazas quedarán desiertas**. Madrid: Periódico El País, 2021.