



KAMILO ANDRES MANCHEGO-
PALACIO¹,

Colombia.

RAFAEL SANTOS PINTO-PETRO²,

Colombia

JONATHAN CERVANTES-
BARRAZA³,

Colombia

Desarrollo del Significado Cualitativo en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias al implementar GeoGebra

Development of Qualitative Meaning in Ordinary Differential Equations by implementing GeoGebra

RESUMEN

El problema de investigación está asociado al desconocimiento geométrico que se tiene de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) por parte de estudiantes de una Universidad ubicada en el norte de Colombia. Objetivo: promover el desarrollo de actitudes argumentativas teniendo en cuenta distintos registros de representación de las EDOs al emplear una guía con tareas matemáticas mediadas por GeoGebra para darle significado cualitativo. Esta investigación es de tipo cualitativa y para la recolección de los datos se empleó una entrevista semiestructurada, un diario de campo, registro audiovisual y una tarea matemática. Los principales resultados muestran que el hacer uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra para enseñar las formas cualitativas de las EDOs, permite desarrollar en los docentes en formación mayor comprensión de los objetos y conceptos matemáticos asociados a las EDOs, desarrollando así, mayor significado a las EDOs, en particular, su comprensión cualitativa. Entre las conclusiones se puede destacar que una de las principales causas del problema de investigación, se debe a la escasez de estrategias que implican la forma gráfica con la algebraica de las EDOs al emplear herramientas tecnológicas como GeoGebra.

Palabras clave: Significado, argumentación, comprensión, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

^{1, 2, 3} Universidad del Atlántico,
Barranquilla, Colombia

Correspondencia:

¹Kmanchego@mail.uniatlantico.edu.co

²Rpinto@mail.uniatlantico.edu.co

³jacervantes@mail.uniatlantico.edu.co

ABSTRACT

The research problem is associated with the lack of geometric knowledge of Ordinary Differential Equations (ODEs) by students at a university located in northern Colombia. Objective: to promote the development of argumentative attitudes taking into account different registers of representation of ODEs by using a guide with mathematical tasks mediated by GeoGebra to give them qualitative meaning. This research is qualitative in nature and a semi-structured interview, field diary, audiovisual record and a mathematical task were used to collect the data. The main results show that the use of technological tools such as GeoGebra to teach the qualitative forms of ODEs allows teachers in training to develop a greater understanding of the mathematical objects and concepts associated with ODEs, thus developing greater meaning to ODEs, in particular, to their qualitative forms. Among the conclusions it can be highlighted that one of the main causes of the research problem is due to the scarcity of strategies that involve the graphic forms of ODEs when using technological tools such as GeoGebra.

Keywords: Meaning, interpretation, understanding, Ordinary Differential Equations.

Recibido el 02/12/2023
Aprobado en 02/01/2024



INTRODUCCIÓN

La integración de las nuevas tecnologías como recursos pedagógicos en cursos de cálculo diferencial, cálculo integral y ecuaciones diferenciales, es algo que ha tomado auge en diversas investigaciones en las últimas décadas. Basta con mirar la literatura enmarcada en la Educación Matemática y la educación superior colombiana para evidenciar resultados que sugieren el empleo de este tipo de recursos para facilitar procesos que favorezcan al desarrollo del pensamiento matemático. Por otro lado, hoy en día en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, existe un problema en la interpretación que los estudiantes le dan a las soluciones geométricas, puesto que, se tiende a emplear la atención en la resolución de dichas ecuaciones de forma algebraica, sin embargo, como menciona (GUERRA, 2022) el tener la oportunidad de ver las propiedades cualitativas de las soluciones mediante el uso de software, ayuda a tratar de superar estas dificultades.

La tecnología y su aporte a la educación matemática

Hoy en día, la tecnología es una herramienta fundamental que permite que la sociedad adopte nuevas prácticas, en donde el uso de esta se encuentra implícita en el diario vivir del humano actual, generando impactos notorios de forma generalizada en la mayoría de las prácticas humanas (ONU, 2019). Por lo anterior, gran parte de los educadores del siglo XXI, se han estado acoplado a las nuevas exigencias generadas por la tecnología, a tal punto, que la mediación tecnológica de la educación y la alfabetización tecnológica en la academia, han sido temas que se han venido desarrollando desde hace varias décadas.

Por otra parte, hay evidencia científica que muestra que las nuevas tecnologías posibilitan la mejora de los procesos de adquisición y organización de los conocimientos, la mejora de las capacidades de juicio crítico y la forma de entender y comprender la realidad, el perfeccionamiento de la calidad del aprendizaje de las personas y el cambio en la relación docente-discente (NAVAS, 2009). Es por ello, que diversas investigaciones en Educación Matemática apuntan hacia la integración de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, puesto que, brindan elementos que facilitan muchos de los procesos que, sin éstas, habrían sido imposibles de abordar.

Las ecuaciones diferenciales y su abordaje en la educación matemática

Al sumergirnos en la historia de las matemáticas, es posible encontrar un gran número de aportes relacionados con el cálculo diferencial. Desde los inicios de los estudios de las ecuaciones diferenciales (ED) con I. Newton y G. Leibniz en el siglo XVII, muchos intelectuales han utilizado de las herramientas que las ecuaciones ED les proporcionan para describir o modelar fenómenos de la naturaleza o generar más conocimientos de la disciplina (GIUSTI, 1983). En consecuencia, autores como Rodríguez y Reyes (2020) nos relatan que los esfuerzos realizados por el matemático francés Poincaré amplió mucho más el mundo de las ecuaciones diferenciales y agrega que para Poincaré, “las ecuaciones diferenciales no son solo objetos puramente formales sujetos a reglas de cálculo, sino que también, constituyen objetos con significado geométrico” p.2, y esta idea dio inicio al estudio cualitativo de las ED.



Por otra parte, Rasmussen (2001) brinda estrategias para mejorar el entendimiento de las ED en los procesos de enseñanza y aprendizaje de estas, en donde aborda los enfoques gráfico y numérico en la enseñanza de estas ecuaciones y muestra el análisis de las prácticas matemáticas en la resolución colectiva de ED en un curso introductorio. Así mismo, autores como (ZILL, 2009) basan sus propuestas a través de la modelación de fenómenos diversos, proponiendo medidas para rediseñar el curso de ED y la preponderancia del uso variado de la tecnología a través de softwares que permiten generar mayor significado en la resolución de ecuaciones diferenciales.

Por lo anterior, autores como GALLEGOS y QUIROZ (2016) comentan que es posible encontrar diversas investigaciones que relacionan la enseñanza y el aprendizaje de las ED en el aula con el ámbito de la educación superior. Dentro de estas investigaciones se evidencian trabajos en los que se argumenta que, un gran número de docentes que abordan asignaturas relacionadas con las ED se han enfocado en la enseñanza de las EDO priorizando únicamente el paradigma algebraico habitual de la escuela y se ha ignorado la enseñanza de estas desde el ámbito cualitativo, provocando que el significado geométrico de estas ecuaciones desaparezca (COLLANTE, 2019; CERVANTES-BARRAZA y MORALES, 2017).

Es claro que existen investigaciones que guardan relación con este estudio, dentro de estas investigaciones podemos destacar a (DEHESA, 2006) en donde se habla sobre los discursos en el registro algebraico y geométrico de las EDOs, mostrando que existen ciertas dificultades en el registro algebraico y geométrico, en este mismo sentido (GUERRERO, CAMACHO y MEJÍA, 2010) muestran algunas dificultades de los estudiantes al interpretar las soluciones de EDO que modelan un problema y se precisa que las

formas cualitativas de las soluciones de las EDOs también pueden ser útiles para modelar un problema.

Así mismo, en el estudio realizado por Cervantes-Barraza (2020) se habla sobre las concepciones de futuros profesores de matemáticas en el contexto de la argumentación, y menciona que existe una desconexión entre los métodos algebraico-numéricos de solución de EDOs bajo el contexto de la argumentación. Por su parte, CAICEDO y CHACÓN (2020), estudian el aprendizaje de las ED desde un enfoque cualitativo enfatizando que las EDOs deben verse en su forma cualitativa para poder ser comprendidas de una mejor manera.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Teoría de los Registros de Representación Semiótica

La base de esta investigación se enfoca en los registros de representación semiótica de (DUVAL, 1999), el cual enfatiza en la importancia de utilizar una diversidad de registros de representación, tales como gráficos, algebraicos, numéricos y lingüísticos, para comprender conceptos matemáticos. Esta teoría destaca que la coordinación entre estos registros es esencial para la comprensión de los objetos matemáticos, ya que estos conceptos, al ser entidades ideales, necesitan ser representados mediante diferentes formas semióticas (DUVAL, 1999). Sin embargo, hoy en día es evidente que en el proceso de enseñanza que se está dando a las EDO es carente esta diversidad de registros de representación, siendo dominante lo algebraico y carente los otros tipos de representación (COLLANTE, 2019).



Según Duval (1999) los registros de representación semiótica, como el registro de representación gráfico, registro de representación algebraico, registro de representación pictórico y el lenguaje natural, cumplen con tres actividades cognitivas: elaboración, tratamiento y conversión de representaciones matemáticas. Estas actividades implican la creación de símbolos para representar objetos, la transformación de representaciones utilizando las propiedades del sistema en el que están definidas, y la conversión entre diferentes registros de representación (OLIVARES, 2018).

En el contexto específico de la enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias, (DUVAL, 1999) señala que se utilizan múltiples registros de representación semiótica, como el registro algebraico, el lenguaje natural y el registro de representación gráfico. Estos registros permiten la visualización y expresión de conceptos matemáticos desde perspectivas formales o naturales del lenguaje, enriqueciendo así la comprensión de los estudiantes sobre estos objetos matemáticos. Según (CERVANTES-BARRAZA y MORALES, 2017; CERVANTES-BARRAZA; ORDOÑEZ-CUASTUMAL y MORALES-CARBALLO, 2019) es factible que se involucren tres enfoques para la enseñanza de las EDO (enfoques algebraico, numérico y gráfico) y la problemática de la argumentación en las ED gira en torno a la desconexión existente de estos enfoques.

La integración de estos enfoques teóricos en la enseñanza de las EDO enriquece la comprensión de los estudiantes, permitiéndoles abordar estas ecuaciones desde múltiples registros de representación y situaciones de aprendizaje, lo que facilitaría una comprensión más profunda y holística de los conceptos

matemáticos involucrados.

La argumentación matemática

La disciplina de la Educación Matemática reconoce la relevancia y la pertinencia de los estudios que fomentan la argumentación de los estudiantes en el salón de clases (CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2022; CABAÑAS-SÁNCHEZ; CERVANTES-BARRAZA, 2019; CERVANTES-BARRAZA; AROCA-ARAUJO, 2023). La argumentación como competencia transversal en el aprendizaje de la matemática, favorece en comunicar las respuestas, justificar conclusiones, conectar conceptos previos con los nuevos y por medio de la refutación se puede confrontar los razonamientos de los estudiantes con el propósito de convencer a los demás de la veracidad de las conclusiones presentadas en lo colectivo (SOLAR y DEULOFEU, 2016; CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2022).

Diversas investigaciones han reportado que el rol del profesor en el proceso argumentativo es crucial, desde la planeación y gestión de la clase se propician oportunidades para que los estudiantes construyan argumentos, los validen y construyan conclusiones (SOLAR et al., 2021; CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ y MERCADO-PORRAS, 2020).

En línea con lo anterior, (SOLAR et al., 2021) afirman que, al fomentar la participación la discusión en clases de matemáticas, el profesor debe considerar desde el plan de clase la promoción de la argumentación de los estudiantes, especificando el tipo de preguntas que utilizará con la finalidad de fomentar la construcción de conocimientos al resolver tareas matemáticas.



En esta investigación una tarea matemática refiere a “situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los estudiantes. Éstas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje” (POCHULU, FONT y RODRÍGUEZ, 2016, p.76).

Este estudio se desarrolló bajo una reflexión constante de la práctica pedagógica en un aula universitaria, y dentro de esta reflexión, se destaca la importancia de reconocer los conocimientos disciplinares como eje esencial para un desarrollo profesional competente. Se trató, además, promover el uso de softwares gratuitos como parte del conjunto de herramientas de las TIC para promover la enseñanza de contenidos matemáticos.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El problema de investigación corresponde al desconocimiento geométrico que se tiene de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) por parte de docentes en formación del programa de Licenciatura en Matemáticas de una universidad ubicada en el norte de Colombia. La pregunta de investigación que surgió del problema de investigación corresponde a ¿Cómo desarrollar en los docentes en formación de la licenciatura en matemáticas, la interpretación y la argumentación desde el enfoque gráfico de las EDOs utilizando GeoGebra? Es por ello que, el objetivo de este estudio buscó promover el desarrollo de actitudes argumentativas teniendo en cuenta distintos registros de representación de las EDOs al emplear una guía con tareas matemáticas mediadas por GeoGebra para darles significado cualitativo; entendiendo a GeoGebra como una de esas herramientas que las nuevas tecnologías posibilitan para facilitar diversos procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

METODOLOGÍA

La metodología utilizada se fundamenta en un experimento enmarcado en el desarrollo del conocimiento del profesor (SIMON, 2000). Esta investigación es de tipo cualitativa, ya que tiene un diseño de investigación enfocado en la investigación acción-participativa.

Según Hernández (2014) en la investigación cualitativa se pretende describir, comprender e interpretar los fenómenos, a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes, esto permite que el investigador construya creencias propias sobre el fenómeno. Esta investigación se apoya en el paradigma de diseño (MOLINA et al., 2011; STEFFE y THOMPSON, 2000), donde la naturaleza de la investigación es de tipo cualitativa y se enmarca en el experimento de enseñanza (Teaching Experiment).

En líneas generales, en esta investigación se diseñó y desarrolló un experimento de enseñanza, que consiste en episodios de enseñanza en los que hubo una intervención audiovisual para la recolección de los datos y, en los que interviene un profesor investigador ante un grupo de estudiantes, con el objetivo de experimentar el aprendizaje y el razonamiento matemático (STEFFE; THOMPSON, 2000).

Participantes

Este estudio fue realizado con la participación de 24 docentes en formación de quinto semestre del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad del Atlántico, Costa norte de Colombia véase la figura 1.



Figura 1 – Docentes en formación de quinto semestre de un curso de ecuaciones diferenciales.



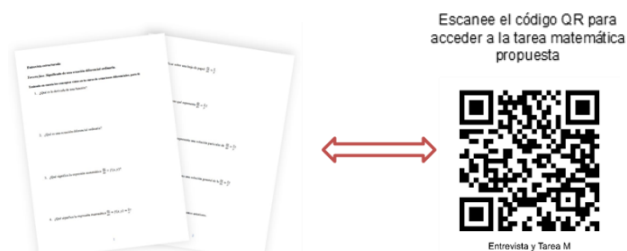
Fuente: Elaboración propia

RECOLECCIÓN DE DATOS

Para la recolección de los datos, se hizo uso del diario de campo para hacer anotaciones de conceptos relacionados con el objeto de estudio, análisis del contenido de la asignatura de ecuaciones diferenciales de una licenciatura en matemáticas, se hizo uso de registros audiovisuales, puesto que este es uno de los instrumentos que permite sistematizar las prácticas investigativas en cada momento e instante de segundo y permite mejorarlas, enriquecerlas y transformarlas (MARTÍNEZ, 2007). Estos procesos se desarrollaron bajo el entendido de que uno de los objetivos implícitos del trabajo de campo era analizar características específicas de las prácticas de los sujetos participantes, por esta razón se utilizaron dispositivos electrónicos que contarán con cámaras para la recolección de datos.

También se recolectaron datos al aplicar una tarea matemática en la que se presentaron preguntas abiertas que estaban dirigidas al cómo interpretan los docentes en formación las EDOs. Esta tarea matemática, se hizo con el propósito de identificar el discurso escrito que los docentes en formación empleaban para responder a las preguntas planteadas y corroborar el problema de investigación, véase la figura 2.

Figura 2 – Tarea matemática propuesta



Fuente: Elaboración propia

Así mismo, la aplicación de la entrevista semiestructurada permitió recolectar datos de gran valor, en particular los obtenidos de los discursos orales de los docentes en formación los cuales fueron grabados y transcritos. En la aplicación de esta, se desarrollaron preguntas abiertas que guardaban relación al tema de estudio. Según (GUTIÉRREZ, 2021, p.68), “la entrevista semiestructurada recolecta datos de los entrevistados a través de un conjunto de preguntas abiertas, para saturar los datos, es decir, para recolectar información suficiente para entender el área de interés”. Este método de recolección de datos tenía como propósito, analizar el discurso oral y los gestos que los docentes en formación empleaban para responder a las preguntas planteadas.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Para el análisis de los datos recolectados, se tuvo en cuenta el análisis del discurso. Según Sayago (2014) el análisis de discurso es una nueva ciencia transdisciplinaria que analiza la teoría, el texto, la conversación, los mensajes, el habla en casi todas las ramas de las humanidades y las ciencias sociales.

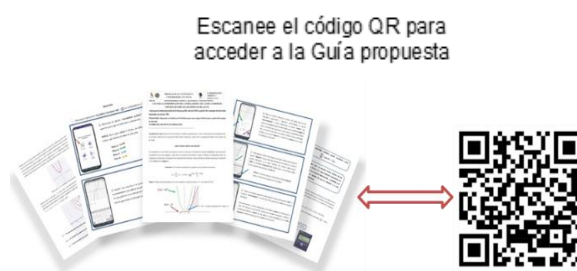


Este tipo de análisis de datos podría considerarse parte del análisis de contenido, puesto que posibilita hacer una descripción objetiva y sistemática del contenido manifiesto de la comunicación y esto implica que el análisis de los datos deba ser sometido a ciertas reglas, en donde se sintetizan el empleo de procedimientos que puedan ser utilizados por otros investigadores de modo que los resultados puedan ser verificados (ANDRÉU, 1998). Así mismo, este tipo de análisis permitió interpretar textos escritos, discursos orales y discursos escritos que fueron grabados y filmados. Todo esto permitió establecer categorías de análisis de tipo cualitativas para proponer figuras que describieran claramente los resultados del análisis de los datos recolectados e identificar la relación entre los datos recogidos con los datos obtenidos de la revisión de la literatura para así determinar un estudio significativo.

Diseño de una guía y una actividad

Al hacer un análisis de los resultados obtenidos luego de haber aplicado la entrevista semiestructurada y la tarea matemática, se evidenció el problema de investigación, y el análisis de los resultados de las entrevistas, los diarios de campo, y la tarea matemática dieron cabida al diseño de una guía en donde se introdujo la noción de la forma gráfica de una EDO a partir del concepto de derivada (CERVANTES-BARRAZA y VARGAS-DELGADO, 2022). Dicha guía fue aplicada al mismo grupo de docentes en formación que inicialmente hicieron parte del estudio, véase la figura 3.

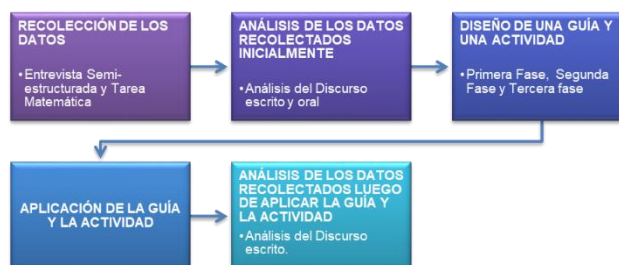
Figura 3 – Guía mediada por las TICs, para el desarrollo de significado cualitativo de las EDOs.



Fuente: Elaboración propia

Esta guía consta de tres fases fundamentales: *La Primera fase*: Inmersión en el software de GeoGebra para crear campos de direcciones a partir del concepto de derivada, tiene como propósito desarrollar la comprensión e interpretación de la forma gráfica de una EDO. *La Segunda fase*: Interpretación y ejercitación (esbozando) en la construcción gráfica de una EDO, tiene como propósito desarrollar la argumentación e interpretación de una EDO y la *Tercera fase*: Significado de una ecuación diferencial ordinaria. Estas fases tienen como propósito desarrollar en los estudiantes habilidades que les permitan argumentar e interpretar la forma gráfica de una EDO y así generar significado cualitativo de estas ecuaciones. Cabe destacar que la tercera fase corresponde a la tarea matemática que inicialmente se aplicó en este estudio (se aplica dos veces), véase el proceso metodológico en la figura 4.

Figura 4 – Secuencia metodológica



Fuente: Elaboración propia

RESULTADOS Y DISCUSIONES

Al aplicar la tarea matemática para identificar el problema de investigación, pudimos observar que los 24 docentes en formación partícipes de esta investigación desconocían a cerca de la forma gráfica, geométrica o cualitativa de una EDO y su respectiva solución.

Resultados y discusiones de la entrevista semi estructurada

En los resultados obtenidos de la entrevista semiestructurada, se evidencia que los docentes en formación se inclinan por las nociones algebraicas, y se muestra que estos conciben a las ecuaciones diferenciales como un objeto puramente algebraico, y en consecuencia, la comprensión carece de registros de representación semiótica, reduciendo así la comprensión de las EDOs.

Los docentes en formación argumentan netamente desde el paradigma algebraico habitual, mostrando que existe desde lo evidenciado, una desconexión entre lo algebraico, geométrico y lo numérico (CERVANTES-BARRAZA, CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2022). A continuación, un fragmento de la entrevista semiestructurada entre los investigadores (IA, IB) y los docentes en formación entrevistados (P1, P2, P3, ..., P24).

-IA: Para ustedes ¿Qué es una ecuación diferencial?

-P1: Es una ecuación que relaciona a una función con sus derivadas.

-P2: Para mí es una igualdad que relaciona una función y sus derivadas, hay de orden uno, dos, tres, y así, dependiendo de las derivadas, las de orden uno, se llaman ordinarias.

-IA: ¿Sabes cómo sería o qué representa la forma gráfica de una EDO?

-P1: ¿se puede graficar?

-P2: Creo que eso no se grafica; solamente se resuelven.

-P3: Como dice P2, eso no se puede graficar, eso se resuelve y ya.

-P4: No creo que se pueda graficar, estoy de acuerdo con los compañeros

Por lo anterior, es claro que las respuestas de los docentes en formación se enfocaron directamente en los procesos algebraicos, y sus interpretaciones y argumentaciones carecían de rigurosidad disciplinar en el sentido geométrico. En el discurso oral se evidenció notoriamente que, los participantes no encontraban significado alguno a la forma gráfica, y que sus argumentaciones orales desconectaban el enfoque algebraico con el enfoque geométrico corroborando lo planteado por (CERVANTES-BARRAZA y MORALES, 2017; CERVANTES-BARRAZA y CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2019).

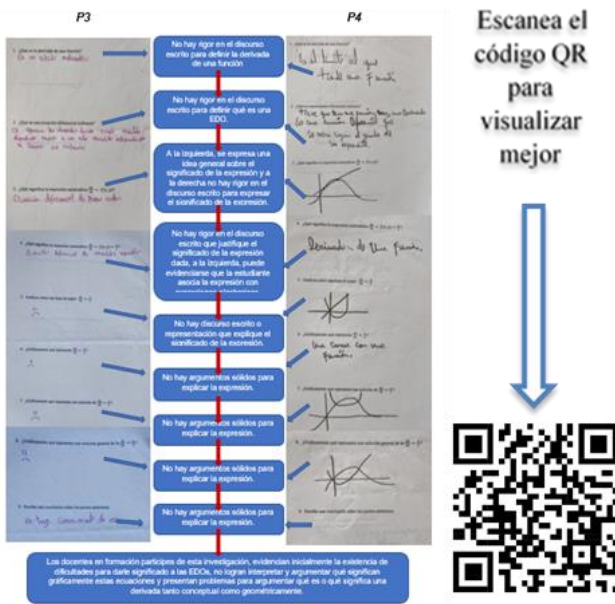
Resultados y discusiones de la aplicación de la tarea matemática

Posterior a la entrevista semi estructurada, se implementó la tarea matemática (SIMON, 2000; CERVANTES-BARRAZA y CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2019). Los resultados de la aplicación de la tarea matemática, al igual que los resultados de la entrevista semi estructurada, mostraron que los docentes en formación encontraban significado netamente algebraico, y sus representaciones geométricas carecían de significado matemático o no tenían relación alguna con el significado cualitativo de las EDOs. Se evidenció que las argumentaciones de los docentes en formación mostraban una comunicación de aspectos algebraicos y las respuestas, las justificaciones y las conclusiones, parecían no conectar los conceptos previos con los nuevos contradiciendo inicialmente a



(CERVANTES-BARRAZA y VARGAS-DELGADO; CERVANTES-BARRAZA y CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2022). En el registro de representación geométrico no estaba presente dentro de los discursos escritos, ni en las representaciones pictóricas desarrolladas por los estudiantes. Véase la figura 5.

Figura 5 – Respuestas de dos docentes en formación, donde se evidencia la carencia de conocimientos disciplinares relacionados con la forma gráfica o cualitativa de las EDOs.



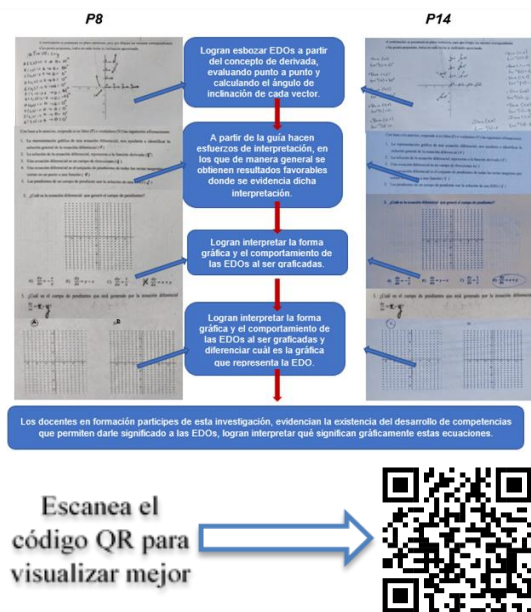
Fuente: Elaboración propia

Resultados y discusiones de la aplicación de la guía y actividades

Luego de analizar los aciertos y desaciertos de la información recolectada que surgió de la aplicación de la tarea matemática, la entrevista semiestructurada, el diario de campo y la producción audiovisual, se creó la guía con actividades con el objetivo de intentar resolver el problema de investigación. Al analizar los datos obtenidos en la guía y las actividades, se pudo observar que 21 de los 24 docentes en formación, presentaron resultados positivos, donde la argumentación y la comprensión a cerca de la

forma gráfica de una ecuación diferencial ordinaria y su respectiva solución aparecían en las respuestas, evidenciando que existió el desarrollo de significado cualitativo de las EDO y evidenciando relaciones entre distintos tipos de registros de representación semiótica (DUVAL, 1999; COLLANTE, 2019; BORGES, 2022; CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2022). Véase la figura 6.

Figura 6 – Muestra de dos de los docentes en formación, donde se evidencian resultados positivos en la segunda fase.

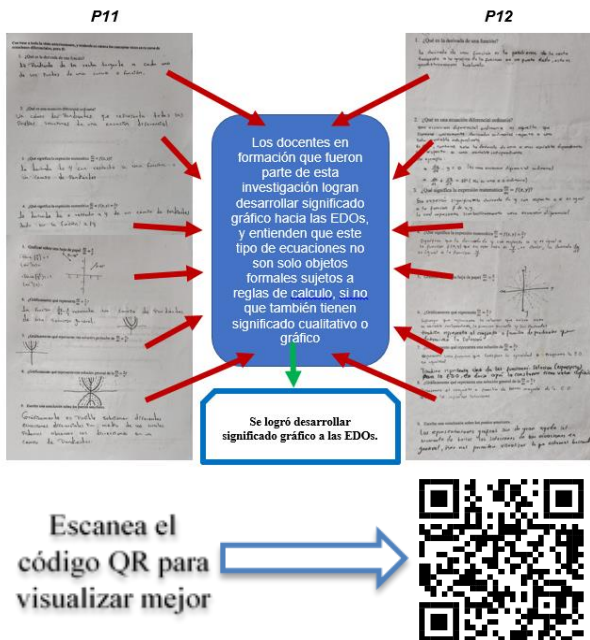


Fuente: Elaboración propia

Al finalizar este momento, se agregó la tarea matemática nuevamente, para que los participantes la volvieran a realizar; y se pudo evidenciar que, existieron resultados favorables donde los 24 estudiantes del programa de licenciatura en matemáticas le daban significado geométrico a la forma gráfica de una EDO, logrando argumentar e interpretar qué eran estas ecuaciones. Los docentes en formación ya no veían a este tipo de ecuaciones como objetos puramente formales sujetos a reglas de cálculo, sino que también, constituían objetos con significado geométrico. Véase la figura 7.



Figura 7 – Muestra de 2 de los 24 docentes en formación partícipes de la investigación, donde se evidencian resultados positivos relacionados con el significado gráfico de las EDOs bajo el concepto de derivada en la tercera fase.



Fuente: Elaboración propia

Resultados y discusiones del contenido de la asignatura de ecuaciones diferenciales de una licenciatura en matemáticas

Dentro de los datos obtenidos, también se encontró que una de las razones por las cuáles el desconocimiento de la forma gráfica, geométrica o cualitativa de EDOs en estudiantes del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad del Atlántico, se debe a que en el sílabo de la asignatura “ecuaciones diferenciales”, no se encuentra incluido el contenido matemático, y este hecho, ha generado que los profesores que enseñan dicha asignatura, se centren únicamente en enseñar los procesos

algebraicos y numéricos que se encuentran allí presentes, dejando de lado el registro de representación geométrica y desconectando dicho registro con registros como el algebraico o numérico, generando así, que los estudiantes desarrollen de forma algorítmica y sin significado geométrico las ecuaciones diferenciales ordinarias, tal y como lo menciona (DUVAL, 1999; COLLANTE, 2019; BORGES, 2022; CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2022).

Por lo anterior, en el proceso de enseñanza de las EDOs, el rol del profesor se centra en procesos carentes de registros de representación geométrica y, en el proceso argumentativo del docente, únicamente se materializan aspectos algebraicos y numéricos, esto genera que el docente desde la planeación y gestión de la clase propicie oportunidades para que los estudiantes construyan argumentos, los validen y construyan conclusiones solo desde lo algebraico y numérico (SOLAR et al., 2021; CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ; MERCADO-PORRAS, 2020). Por ello, en el proceso de argumentación, se reflejan las tendencias a estos lenguajes de representación, obviando lo geométrico y su relación con lo algebraico y numérico. Esto genera que el significado de los conceptos y objetos matemáticos carezcan de rigurosidad disciplinar y significado. Véase el contenido de la asignatura en la figura 8.

Figura 8 – Contenido de la asignatura.



FORMATO CONTENIDO DE CURSO O SÍLABO					
Facultad	Ciencias de la Educación			Fecha de Actualización	Septiembre de 2016
Programa	Licenciatura en Matemáticas			Semestre	Quinto
Nombre	Ecuaciones Diferenciales			Código	22463
Prerrequisitos	Cálculo Integral de una y varias variables			Créditos	4
Nivel de Formación	Técnico	Profesional	X	Maestría	
Área de Formación	Tecnológico	Especialización		Doctorado	
Tipo de Curso	Tédrico	X	Práctico	Tédrico-práctico	
Modalidad	Presencial	X	Virtual	Mixta	
Horas de Acompañamiento Directo	Presencial	4	Virtual	Horas de Trabajo Independiente	8

Escanea el código QR para visualizar mejor



Fuente: Elaboración propia

CONSIDERACIONES FINALES

Es evidente que la ausencia de estrategias que involucren nuevas tecnologías como softwares para el desarrollo de significado cualitativo de las EDOs, se deben en parte a la no presencia de estos conceptos y objetos matemáticos que enmarcan a las EDOs en el contenido de la asignatura de Ecuaciones Diferenciales. Esto es, una de las causas principales por las cuales los docentes en formación de la licenciatura en matemáticas presentan problemas o dificultades en darle significado a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Existieron resultados favorables donde la utilización de herramientas tecnológicas como el software libre de GeoGebra ayudó a desarrollar en los estudiantes del programa de licenciatura en matemáticas significado geométrico a la forma gráfica de EDOs. Los resultados muestran que la guía propuesta en esta investigación logró que los estudiantes participantes dieran significado gráfico a las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Relacionar el concepto de EDO con su significado geométrico no es tarea sencilla si existen lagunas en la comprensión del concepto de derivada, así mismo, el hecho de enfatizar únicamente dicho concepto de EDO con

aspectos netamente algebraicos hace que la comprensión geométrica sea aún más compleja, pero gracias a los resultados de este estudio y resultados de estudios como (COLLANTE, 2019; BORGES, 2022; CERVANTES-BARRAZA; CABAÑAS-SÁNCHEZ, 2022), es posible considerar que los estudiantes con ayuda de tareas matemáticas y guías que implementen softwares para facilitar los procesos de enseñanza de las EDOs, pueden desarrollar significado cualitativo de las EDOs, en particular, relacionar los distintos tipos de representación semiótica (DUVAL, 1999).

Los docentes de matemáticas deben tener presente, que recursos tecnológicos y didácticos como GeoGebra, son recursos que impulsan no sólo la inclusión de la tecnología en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sino que también, desarrollan e impulsan un alto interés de quien aprende en las sociedades actuales, promoviendo así prácticas pedagógicas transformadoras e inclinadas hacia la revolución tecnológica del siglo XXI.

Los docentes de matemáticas en formación deben tener un conocimiento disciplinar sólido para que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas lleven significancia. El responder a la no desconexión entre los distintos tipos de representación, es un aspecto clave que los docentes de matemáticas en formación no deben dejar en el olvido. Esta investigación propone y espera motivar a los docentes de matemáticas y futuros docentes de matemáticas a que los conocimientos compartidos relacionados con el cálculo, no se sujeten a sólo resoluciones de ejercicios de forma mecánica y algorítmica sin significado geométrico y conceptual alguno, las matemáticas deben ser mostradas y contempladas en su forma más completa.



Finalmente, esta investigación aporta un material didáctico que permite generar en los futuros docentes de matemáticas, conocimientos disciplinares más robustos y con mayor significado al enseñar y aprender EDOs.

REFERENCIAS

ANDRÉU, Jaime. **Los españoles: Opinión sobre sí mismo, España y el Mundo. Análisis Longitudinal Escala de Cantril.** ed. Universidad de Granada, Granada, España, 1998.

CABAÑAS-SÁNCHEZ, Guadalupe; CERVANTES-BARRAZA, Jonathan. Principios que fundamentan el diseño de tareas matemáticas en una planificación didáctica. **Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 85, pág. 7-12. 2019. Disponible em: https://www.researchgate.net/publication/334706412_Principios_que_fundamentan_el_diseño_de_tareas_matematicas_en_una_planificacion_didactica

CAICEDO, Édison; CHACÓN, Gerardo. Aprendizaje de las ecuaciones diferenciales desde un enfoque cualitativo. **Praxis & Saber**, Boyacá, Colombia, v. 11, n 26, pág. 2-16, 2020. Disponible em: <https://doi.org/10.19053/22160159.v11.n26.2020.9856>

CERVANTES-BARRAZA, Jonathan; AROCA-ARAUJO, Armando. Design of interactive mathematical tasks that make up the reasoning and the Ethnomathematics program. **Journal on Mathematics Education**. v.14, n.3, pág. 469-482. 2023. Disponible em: <https://doi.org/10.22342/jme.v14i3.pp469-482>

CERVANTES-BARRAZA, Jonathan; VARGAS-DELGADO, Leonardo. Concepciones de futuros profesores de matemáticas en el diseño de tareas argumentativas. **Revista Encuentros**,

Universidad Autónoma del Caribe, Barranquilla, Atlántico, v. 20, n. 02, pág. 40-56. 2022. Disponible em: <http://ojs.uac.edu.co/index.php/encuentros/articloe/view/2899>

CERVANTES-BARRAZA, Jonathan; CABAÑAS-SÁNCHEZ, Guadalupe. Argumentación matemática basada en refutaciones. **REDIMAT –Journal of Research in Mathematics Education**, v. 11, n. 2, pág. 159-179. 2022. Disponible em: <https://doi.org/10.17583/redimat.4015>

CERVANTES-BARRAZA, J. A., CABAÑAS-SÁNCHEZ, G., MERCADO-PORRAS, K. El rol del profesor en la construcción de conocimiento matemático a través de la argumentación colectiva. En HERNÁNDEZ, Lidia; MONTIEL, Gabriel; SLISKO, Josip. **Tendencias en la educación matemática 2020**. Puebla, México. Ed. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, 2020. p. 214-231.

CERVANTES-BARRAZA, Jonathan; MORALES, Armando. Tipos de razonamiento emergentes en la enseñanza de ecuaciones diferenciales ordinarias (edo). **Cuba: Matecompu**. v. 1, pág. 1-12. 2017. Disponible em: https://www.researchgate.net/publication/331616539_tipos_de_razonamientos_emergentes_en_la_ensenanza_de_ecuaciones_diferenciales_ordinarias_edo

CERVANTES-BARRAZA, Jonathan; ORDOÑEZ-CUASTUMAL, Joan; MORALES-CARBALLO, Armando. Los argumentos de estudiantes universitarios en la solución de problemas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). **Innovación Educativa**, v. 20, pág. 81-99, 2019. Disponible em: <https://www.ipn.mx/assets/files/innovacion/docs/Innovacion-Educativa-82/Los-argumentos-de-estudiantes-universitarios-en-la-solucion-de->



[problemas-sobre-ecuaciones-diferenciales-ordinarias-\(EDO\).pdf](#)

CERVANTES-BARRAZA, Jonathan. Concepciones de futuros profesores de matemáticas en el contexto de la argumentación. **Academia y Virtualidad**, v. 13, n. 1, pág. 10-22, 2020. Disponivel em: <https://doi.org/10.18359/ravi.4337>

COLLANTE, Andres. Un estudio de la ecuación diferencial ordinaria con estudiantes de ingeniería mecánica mediante una situación problema. 2019. Tese (Maestría en enseñanza de las matemáticas). Pontificia Universidad Católica del Perú. 2019.

DEHESA, Nahina. Discursos en el registro algebraico y geométrico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. **Educación Matemática**, Distrito federal, México, v. 18, n. 2, pág. 123-147, agosto. 2006. Disponivel em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40558507006>

DUVAL, Raymond. Registros de representación comprensión y aprendizaje. En, DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española. p. 25-80, 1999.

GALLEGOS, Ruth; QUIROZ, Samantha. El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. **REMILE. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa**, Ciudad de México, México, v. 19, n. 1, pág. 99-124, junio/septiembre. 2016. Disponivel em: <https://doi.org/10.12802/relime.13.1914>

GIUSTI, E. **Calculus: An Historical Approach**. New York, Springer-Verlag, 1983.

GUERRA, Martín. Conocimientos previos y GeoGebra en la enseñanza y aprendizaje de las

ecuaciones diferenciales ordinarias. **REDISED**, universidad de El Salvador, v. 4, n. 2, pág. 121-134, julio/diciembre. 2022. Disponivel em: <https://revistas.ues.edu.sv/index.php/redised>

GUERRERO, Carolina; CAMACHO, Matias; MEJÍA, Hugo. Dificultades de los estudiantes en la Interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. **Enseñanza de las ciencias**, v. 28, n. 3, pág. 341-352. 2010. Disponivel em: <https://raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/210804>.

GUTIERREZ Raquel, Entrevistas estructuradas, semi-estructuradas y libres. En TEJERO, Jesús. **Técnicas de investigación cualitativa en los ambitos sanitario y sociosanitario**. España. Ediciones de la Universidad de Castilla-La Mancha. 2021. p. 65-85.

HERNÁNDEZ, R; FERNÁNDEZ, C; BAPTISTA, P. **Metodología de la Investigación**. 6a ed. México, DF. McGraw-Hill, 2014.

NAVAS, María. Dimensión formativa de la alfabetización tecnológica. **Teoría de la Educación; Educación y Cultura en la Sociedad de la Información**, universidad de Salamanca, España, v. 10, n. 2, pág. 129-152, julio. 2009. Disponivel em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=201017352008>

MARTÍNEZ, Luis. La observación y el diario de campo en la definición de un tema de investigación. **Revista perfiles libertadores**, v. 4, n. 80, pág. 73-80, 2007. Disponivel em: <https://acesse.dev/GsBfq>



MOLINA, M.; CASTRO, E.; MOLINA, J. & CASTRO, E. Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*. v. 29, n. 1, p. 75–88. 2011. Disponible em: <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435>

OLIVARES, Edwin. **Coordinación de diferentes registros de representación semiótica para movilizar la noción de elipse en estudiantes de física**. Tese (maestría en enseñanza de las matemáticas), Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. 2018.

SAYAGO, Sebastián. El análisis del discurso como técnica de investigación cualitativa y cuantitativa en las ciencias sociales. **Cinta de moebio: Revista de Epistemología de Ciencias Sociales**, Valparaíso, Chile, v. 49, pág. 1-10. 2014. Disponible em: <http://dx.doi.org/10.4067/S0717-554X2014000100001>

ONU. **Global Sustainable Development Report**. Nueva York. Organización de las Naciones Unidas. 2019.

POCHULU, Marcel; FONT, Vicenc; RODRÍGUEZ, Mabel. Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 19, n. 1, pág. 71-98, marzo. 2016. Disponible em: <https://doi.org/10.12802/relime.13.1913>

RASMUSSEN, Chris. New directions in differential equations a framework for interpreting students' understandings and difficulties. **Journal of Mathematical Behavior**, Reino Unido, v. 20, n. 1, pág. 55-87, enero/marzo. 2001. Disponible em: [https://doi.org/10.1016/S0732-3123\(01\)00062-1](https://doi.org/10.1016/S0732-3123(01)00062-1)

RODRIGUEZ Jorge; REYES; Alverto. **Estudio**

cualitativo y algebraico de sistemas diferenciales multiparamétricos. Barranquilla, Colombia. Sello Editorial Universidad del Atlántico. 2009.

SIMON, M. Research on the development of Mathematics teacher: The teacher development experiment. Em KELLY A., y LESH R. (ed). **Handbook of research desing in mathematics and Science education**. Mahwah. Laurence Erlbaum associates. 2000. p. 335-359.

SOLAR, Horacio; DEULOFEU, Jordi. Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. **Bolema**, Río Claro, Brasil, v. 30, n. 56, pág. 1092-1112. 2016. Disponible em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13>

STEFFE, L. P. & THOMPSON, P. W. Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essential Elements. Em Lesh R. & KELLY A. E. (eds). **Research Design in Mathematics and Science Education**, Hillsdale. Erlbaum. 2000. p. 267-307.

SOLAR, H.; ORTIZ, A.; DEULOFEU, J.; ULLOA, R. Teacher support for argumentation and the incorporation of contingencies in mathematics classrooms. **International journal of mathematical education in sMcience and technology**, v. 52, n. 7, pág. 977-1005. 2021. Disponible em: <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1733686>

ZILL, D. M. **Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado**. 9na. ed. Ciudad de México, México. Cengage, 2009.

