CEMeR

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2024 • Ano XI • v 14 • n. 1 • p. 66 – 81
ISSN 1983-7399

ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE

HUGO FERNANDO **SANTANA-RAMÍREZ**[1],
México.
JAVIER **GARCÍA-GARCÍA**[2],
México.
KAREN GISEL **CAMPO-MENESES**[3],
México.
GERARDO **SALGADO-BELTRÁN**[4],
México.

[1] Universidad Autónoma de Guerrero, México.
[2] Universidad Autónoma de Guerrero, México.
[3] Universidad Autónoma de Guerrero, México.
[4] Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Correspondencia:

[1] 18370370@uagro.mx
[2] jagarcia@uagro.mx
[3] karencampo@uagro.mx
[4] 14252@uagro.mx

Conexiones Matemáticas utilizadas al resolver Tareas sobre el Lenguaje Algebraico en el Nivel Medio Superior

Mathematical Connections used when solving Tasks involving Algebraic Language at the High School Level

RESUMEN

Establecer conexiones matemáticas es una demanda actual en el currículo de diferentes países, ya que estas contribuyen al desarrollo de la comprensión de los estudiantes. Así, este artículo está inserto en esta línea y busca responder la pregunta ¿Qué conexiones matemáticas establecen cinco estudiantes de nivel medio superior cuando resuelven tareas que implican el uso del lenguaje algebraico? Esta investigación es de tipo cualitativa, especialmente es un estudio de caso en el que participaron cinco estudiantes mexicanos de nivel medio superior. Para llevar a cabo esta investigación, se recolectaron los datos a través de la Entrevista Basada en Tareas (previamente validadas), que fueron analizados empleando el análisis temático. Los resultados indicaron el uso de cinco tipologías de conexiones matemáticas: característica, procedimental, representaciones diferentes, parte-todo y significado, siendo las dos últimas las de menor frecuencia en la producción de los estudiantes. Estos resultados invitan a que en una investigación futura se diseñe un proceso de instrucción para desarrollar en los estudiantes la habilidad de utilizar conexiones matemáticas al trabajar el lenguaje algebraico.

Palabras clave: *conexiones matemáticas; lenguaje algebraico; entrevista basada em tareas.*

ABSTRACT

Making mathematical connections is a current demand in the curriculum of different countries since these contribute to the development of students' understanding. Thus, this paper is inserted in this line and seeks to answer the question: What connections do five high school students make when solving tasks involving algebraic language? This research is qualitative, especially because it is a case study in which five high school students participate. To conduct this research, data were collected through the Task-Based Interview (previously validated), which were analyzed using thematic analysis. The results indicated the use of five typologies of mathematical connections: feature, procedural, different representations, part-whole, and meaning, with the last two being the least frequent in the students' production. These results invite future research to design an instructional process to develop students' ability to use mathematical connections when working on the algebraic language.

Keywords: *Mathematical connections; algebraic language; task-based interviews*

Recibido el 05/12/2023
Aprobado en 05/01/2024

INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones en Educación Matemática han resaltado la relevancia de abordar la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra escolar (CORTES et al., 2016; NORDIN et al., 2017; WARREN, 2003). Esto implica, entre otras cuestiones, la transición entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje algebraico, así como su interconexión. A pesar de que el entendimiento del lenguaje algebraico y del álgebra en sí ha ganado importancia en décadas recientes (GALLARDO; ROJANO, 2018; HODGEN et al., 2016; ROJANO, 2004; ROJANO, 2010), en la actualidad se evidencia una notoria carencia de competencia y claridad en el uso del lenguaje algebraico entre los estudiantes.

En la educación de nivel medio superior, emplear técnicas de enseñanza que permitan a los estudiantes adquirir una sólida comprensión de los temas y dominar el lenguaje algebraico es de suma importancia. En ese sentido las conexiones matemáticas se destacan como una forma para lograr esta comprensión a través de establecer relaciones entre objetos matemáticos y otras disciplinas (EVITTS, 2004; JAIJAN; LOIPHA, 2012). Así, el establecimiento de conexiones matemáticas contribuye al desarrollo de la comprensión matemática de los estudiantes y se reconocen como una meta en los currículos de diversos países (CAMPO-MENESES et al., 2023; ELI et al., 2011; GARCÍA-GARCÍA et al., 2022; MHLOLO, 2012).

Las investigaciones sobre conexiones matemáticas muestran que éstas son cruciales para distintos dominios matemáticos (álgebra, geometría, cálculo, entre otras), así como en distintas disciplinas con las que las matemáticas guardan una relación. Por otra parte, el programa de estudio de álgebra en el bachillerato tecnológico mexicano concede gran importancia al lenguaje algebraico como base de la educación matemática, vinculando áreas afines (SEP, 2018). En ese sentido la asignatura de Álgebra busca que los estudiantes identifiquen, analicen y comprendan el uso del lenguaje algebraico en diversos contextos. Busca fomentar el uso de conexiones intramatemáticas y extramatemáticas para lograr un conocimiento funcional en diversas situaciones (GARCÍA-GARCÍA et al., 2022), resaltando la importancia del lenguaje algebraico en la educación media superior.

Por esta razón, esta investigación se interesó en estudiar las conexiones matemáticas en el ámbito del álgebra.

La literatura examina conexiones matemáticas en diferentes dominios, para lo cual se han identificado por lo menos cuatro enfoques:

a) conexiones matemáticas a través de problemas de modelado o aplicación (JAIJAN; LOIPHA, 2012; LOCKWOOD, 2011; ÖZGEN, 2013A; YOON et al., 2010);

b) mediante el tránsito entre representaciones (BUSINSKAS, 2008; MHLOLO, 2012; MOON et al., 2013, 2012; ÖZGEN, 2013b);

c) al resolver tareas específicas en distintos dominios (CAMPO-MENESES; GARCÍA-GARCÍA, 2020; GARCÍA-GARCÍA, 2019; GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES 2018; ELI et al., 2011; LOCKWOOD, 2011; JAIJAN; LOIPHA, 2012; MHLOLO, 2012) y,

d) a través de las creencias de estudiantes y profesores sobre conexiones matemáticas. (KARAKOÇ; ALACACI, 2015; ÖZGEN, 2013b).

Este trabajo se inserta en el tercer grupo, ya que explora las conexiones a partir de la resolución de tareas sobre el lenguaje algebraico.

En general, los resultados de las investigaciones citadas reportan que los estudiantes enfrentan dificultades debido a enseñanzas limitadas y falta de reconocimiento de conexiones por parte de los profesores. Las conexiones matemáticas son esenciales para la comprensión de conceptos y la literatura destaca la importancia de establecer estas conexiones entre los diferentes conceptos matemáticos (RODRÍGUEZ-NIETO et al., 2022). Sin embargo, las limitaciones persisten debido a la percepción de temas matemáticos como independientes y a un enfoque escolar en el aprendizaje memorístico y procedimental (CAMPO-MENESES et al., 2023).

Particularmente, las investigaciones que han abordado las conexiones matemáticas en el ámbito del álgebra (BUSINSKAS, 2008; NORDIN et al., 2017; ORMOND, 2016) sugieren que una enseñanza que enfatiza en las conexiones matemáticas puede ser clave para mejorar la enseñanza de los profesores. Así también, se resalta la importancia de conectar el conocimiento matemático con contextos diversos (HERNÁNDEZ-YÁÑEZ et al., 2023) y reflexionar sobre la necesidad de investigar conexiones matemáticas en estudiantes de nivel medio superior en México y su relevancia en el Álgebra (AGUDELO, 2016).

Teniendo en cuenta la importancia de las conexiones matemáticas en el álgebra escolar, en esta investigación interesa responder la pregunta ¿Qué conexiones matemáticas establecen cinco estudiantes mexicanos de nivel medio superior cuando resuelven tareas que implican el uso del lenguaje algebraico?

Este estudio se considera relevante porque se enfoca en identificar las conexiones matemáticas que surgen cuando los estudiantes abordan tareas relacionadas con el lenguaje algebraico, lo cual es importante en la literatura en Educación Matemática, puesto que se ha evidenciado la necesidad de entender y destacar estas "conexiones matemáticas". Además, en García-García et al. (2022) se reporta que en los programas de bachillerato tecnológico mexicanos se destaca la importancia de las conexiones matemáticas en el álgebra.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Conexiones matemáticas

En Educación Matemática hay diversas posturas sobre las conexiones matemáticas, donde la mayoría son retomadas por García-García y Dolores-Flores (2018) concluyendo así que las conexiones matemáticas se refieren a un proceso cognitivo mediante el cual un sujeto establece relaciones verdaderas entre conceptos matemáticos, teoremas, significados, representaciones y procedimientos, etc., entre sí, con la vida real y con otras disciplinas.

Existen dos grandes grupos de conexiones matemáticas: las intra y las extramatemáticas (GARCÍA-GARCÍA; DOLORES-FLORES, 2018). Y estas a su vez se clasifican en diferentes tipologías. Así pues, García-García y Dolores-Flores (2018) proponen unas tipologías y adaptan otras teniendo en cuenta lo reportado por Businskas (2008) y Evitts (2004). En este sentido las tipologías utilizadas en esta investigación se explicitan a continuación a partir de la postura de García-García y Dolores-Flores (2018):

*Procedimental (P)***.** Se presenta cuando los estudiantes utilizan reglas, algoritmos o fórmulas establecidas de manera predeterminada, dentro de una misma representación para llegar a un resultado.

Representaciones diferentes (RD). Esta tipología de conexión matemática se manifiesta cuando los estudiantes representan un mismo concepto matemático utilizando distintas representaciones (gráfica-algebraica, verbal-algebraica, etc.) o bien, representándolo de dos formas diferentes dentro de una misma representación (gráfica-gráfica, algebraica-algebraica, etc.).

Característica (C). Esta tipología de conexiones matemáticas se manifiesta cuando los estudiantes identifican para los conceptos matemáticos algunas características que los hace diferentes o similares de otros

Significado (S). Son aquellas conexiones matemáticas donde los estudiantes le atribuyen un sentido a un concepto matemático en tanto lo que para ellos es (que lo hace diferente de otro) y lo que representa; puede incluir la definición que ellos han construido para estos conceptos. Es diferente de la conexión matemática característica porque no se describen propiedades ni cualidades. En su lugar, los estudiantes expresan lo que para ellos es el concepto matemático en sí y puede incluir su contexto de uso.

*Parte-todo (PT)***.** Esta conexión matemática se manifiesta cuando los estudiantes establecen relaciones lógicas entre los conceptos matemáticos, ya sea de generalización (entre casos generales y particulares) o de inclusión (cuando un concepto matemático está contenido en otro).

METODOLOGÍA

La investigación que se presenta es cualitativa y descriptiva (Hernández et al., 2010), especialmente es un estudio de caso (KOTHARI, 2004). Para llevar a cabo esta investigación se siguieron cuatro etapas: (1) selección de los casos de estudio, (2) diseño de la herramienta de recolección de datos, (3) realización de entrevistas y, (4) análisis de los datos y elaboración del informe.

Contexto escolar y selección de los casos de estudio

El estudio se llevó a cabo en una escuela de Nivel Medio Superior situada al sur de México. Para la selección de los casos de estudio, se tuvo en cuenta que fueran estudiantes que hubiesen cursado la asignatura de álgebra, que la hubiesen aprobado satisfactoriamente (en términos de calificación) y tuvieran disposición para participar en la investigación. Así, se eligieron cinco estudiantes (en adelante, E1, E2, E3, E4 y E5) cuyas edades oscilaban entre 15 y 16 años. Estos 5 estudiantes son los casos de estudio de esta investigación.

Diseño del instrumento

Para la colecta de datos empleamos las Entrevistas Basadas en Tareas según Goldin (2000). Este procedimiento implica la interacción entre un sujeto (el estudiante en este caso) y un entrevistador, abordando una o más tareas bajo normas explícitas e implícitas (Goldin, 2000; Koichu y Harel, 2007). Según García-García (2019), este enfoque permite indagar en profundidad el pensamiento de los entrevistados, considerando tanto respuestas verbales como las producciones escritas.

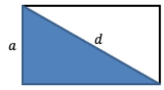
Para el diseño de las tareas, Goldin (2000) propone principios, entre los cuales se adoptaron los siguientes: elección de tareas adecuadas para estudiantes de nivel medio superior; determinación del contenido y formato de grabación y, preparación de entrevistas clínicas y pruebas piloto. Con base en estos criterios, se desarrolló un protocolo inicial con seis tareas, abordando el uso del lenguaje algebraico en distintos contextos:

la noción de variable como número generalizado, lenguaje algebraico en geometría, su aplicación en la expresión de patrones generales y en un contexto físico (velocidad media).
Las tareas se diseñaron en línea con el plan de estudios de Álgebra de nivel medio superior, ajustado a los casos de estudio. Algunas se crearon durante sesiones de trabajo, mientras que otras se adaptaron de autores como Sada-García (2001) y Carpinteyro (2014).

El instrumento inicial, se aplicó a estudiantes de distintos niveles educativos con el propósito de validar su eficacia. Se aseguró que las instrucciones del cuestionario fueran comprensibles para los estudiantes y que las tareas fueran alcanzables. También se corrigieron imprecisiones presentes en el instrumento. Tras analizar los resultados de la prueba piloto, se realizó una reestructuración de las tareas que evidenciaron dificultades de comprensión. Además, se descartaron problemas que con frecuencia se resolvían sin utilizar métodos algebraicos y, se mantuvieron aquellos que permitían soluciones tanto aritméticas como algebraicas. Se ajustaron las instrucciones para fomentar el uso de expresiones algebraicas y para habilitar la formulación de generalizaciones en términos algebraicos por parte de los estudiantes. Después de realizar las modificaciones necesarias, se garantizó que las tareas (ver Figura 1 y Figura 2) permitieran identificar diversas conexiones matemáticas.

Figura 1 – Tareas implementadas. Parte 1.

Tarea 1. Observa la siguiente figura y responde las siguientes preguntas:



a) ¿Cuál es el área del rectángulo?

b) ¿Cuál es el área del triángulo sombreado?

c) Si $d = 13$ y $a = 5$, ¿cuánto mide el largo del rectángulo? Ahora ¿Cuál será el área del triángulo sombreado, por qué?

d) Si el largo (l) del rectángulo midiera 20 cm más que el ancho (a). ¿Qué expresión algebraica permitiría expresar el área del rectángulo usando esta información?

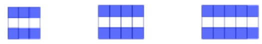
Tarea2. Completa la tabla siguiente según corresponda.

Expresión numérica	Expresión algebraica	Lenguaje común	Representación geométrica
$2 + 5$		La suma de dos números cualesquiera.	
	$2ab$		
	$a \div b$	El cociente de dos números cualesquiera.	
$3(2 + 4)$			

Tarea3. Imagina que tienes que explicar a un compañero el significado de las siguientes expresiones algebraicas. Inventa una situación o problema para explicarlos.

$3x - 2y$	
$p = mv$	
$v = \frac{d}{t}$	

Tarea4. Ursini está diseñando un set de grabación dibujando trayectos que considera mosaicos de dos colores (blancos y azules). Hasta ahora ha dibujado 3 trayectos con diferentes longitudes, para diferenciarlos le asignó un número a cada uno.



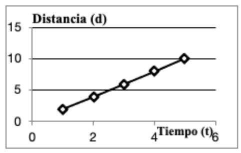
Trayecto 3 Trayecto 4 Trayecto 5

a) Siguiendo el mismo patrón de Ursini ¿Cuál es la cantidad de mosaicos azules que se necesitarán para el trayecto 6?__________ ¿Cuántos blancos?_________

b) ¿Crees que exista alguna regla (fórmula) para determinar cuántos mosaicos azules y cuántos blancos tendrá un trayecto cualquiera? ____ ¿Cuál o cuáles son esas reglas?

Figura 2 – Tareas implementadas. Parte 2.

Tarea5. La siguiente gráfica representa la velocidad media de un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme.



a) ¿Cómo podrías determinar la velocidad media?

b) ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa ese movimiento?

Tarea6. En el grupo de Ulises se aplicó un examen de Física. Julián tuvo el mayor número de aciertos (50 en total) y su calificación fue de 10.

a) ¿Qué cantidad de aciertos debe tener Ulises para obtener "justo" 8 de calificación?

b) Encuentra la cantidad mínima y máxima de aciertos que debe tener Ulises para lograr 9 de calificación. Para ello, considera que el número de aciertos debe ser entero y las calificaciones aprobatorias se redondean de 0.4 al entero inmediato inferior y de 0.5 al entero inmediato superior (por ejemplo, 7.4 se redondea a 7 y 8.5 a 9; la mínima aprobatoria es 7).

Si "x" representa el número de aciertos. Encuentra una regla general que ayude a determinar la calificación de un estudiante en función del número de aciertos que obtenga.

Fuente: recolección de los datos

Consideraciones para la entrevista y recolección de datos

El protocolo para la entrevista contenía preguntas iniciales que permitían a los estudiantes responder con empatía.

La siguiente parte del protocolo involucraba completar tareas y expresar en voz alta el razonamiento detrás de las soluciones. En caso de que los estudiantes no siguieran la sugerencia, el entrevistador planteaba preguntas adicionales para revelar el proceso cognitivo. El tiempo para resolver las tareas propuestas variaba entre 5 y 15 minutos.

Las preguntas auxiliares se enfocaron en el proceso de resolución y motivaron a los participantes a reflexionar sobre sus errores y procedimientos. La grabación de audio y video de las entrevistas permitió registrar las explicaciones de los estudiantes. Las entrevistas se guardaron en archivos separados y se realizó una transcripción completa para cada caso de estudio para su posterior análisis.

Análisis de los datos

El análisis de los datos recolectados se realizó utilizando el análisis temático (BRAUN; CLARKE, 2006) para identificar patrones en las respuestas de los participantes y obtener una visión amplia de las posibilidades y procesos involucrados.

Este enfoque se eligió por su flexibilidad de análisis basado en datos o teoría. Se examinaron las conexiones matemáticas emergentes en las producciones de los casos de estudio, guiadas por las tipologías de conexiones matemáticas establecidas en la fundamentación teórica.

Para emplear el análisis temático se definen a continuación cinco fases, las cuales se siguieron como se indica a continuación. Para cada fase se ejemplifica teniendo en cuenta las respuestas de E2.

Familiarización con los datos: Para lograr esta fase 1, se transcribieron audios y videos en formato de diálogo. Se hizo un esfuerzo por mantener una transcripción precisa de lo que los casos afirmaron. Después de la transcripción, ésta fue revisada detenidamente para comprender el lenguaje de los participantes.

Generación de códigos: La investigación empleó la codificación para extraer información esencial de los datos recolectados. Para codificar se analizaron las entrevistas y las evidencias escritas de los estudiantes, identificando frases o respuestas a las preguntas que aludieran a alguna relación verdadera. En la Tabla 1 se ejemplifica cómo se realizó.

Tabla 1 – Generalización de códigos de las respuestas de E2 a la tarea 1.

Extracto	Código
Entrevistador: ¿qué fue lo que hiciste? E2: *utilicé el teorema de Pitágoras para sacar la base del rectángulo* y así llegué a que la base es igual a 12. Entrevistador: ¿Por qué lo hiciste así? E2: porque el teorema de *Pitágoras se ocupa para todos los triángulos rectángulos donde no sabemos el valor de algún cateto o de la hipotenusa, pero para este caso si conocemos un cateto y la hipotenusa* entonces podemos usarlo y así llegar al resultado…	C1: Para resolver la tarea utilicé el teorema de Pitágoras. C2: el teorema de Pitágoras se utiliza para resolver triángulos rectángulos donde no sabemos el valor de algún cateto o de la hipotenusa.

Fuente: Elaboración propia

Búsqueda y revisión de subtemas: En esta fase se revisaron los códigos y se agruparon de acuerdo con su similitud en un subtema. Este subtema es una frase que describe la idea principal de los códigos agrupados teniendo en cuenta características de las tipologías de conexiones matemáticas (temas). Una vez realizado este proceso (ver Tabla 2), se revisan los subtemas realizando una triangulación por expertos para validarlos, eliminarlos o modificarlos según fuera el caso.

Tabla 2 – Definición y revisión de subtemas de acuerdo con las respuestas de E2 a la tarea 1.

Código	Subtemas
C1: Para resolver la tarea utilicé el teorema de Pitágoras. C2: el teorema de Pitágoras se utiliza para resolver triángulos rectángulos donde no sabemos el valor de algún cateto o de la hipotenusa.	S1: El teorema de Pitágoras se emplea para resolver triángulos rectángulos cuando se conocen dos de sus lados.

Fuente: Elaboración propia

Definición y nombre de temas: Para esta fase se estableció la convención de que los temas corresponden a las tipologías de conexiones matemáticas. En este sentido, se asociaron los subtemas definidos en la fase anterior, con las tipologías de conexiones matemáticas, teniendo en cuenta la definición de cada tipología. Un ejemplo de esto se observa en la Tabla 3.

Tabla 3 – Definición de temas de acuerdo con las respuestas de E2 a la tarea 1.

Subtemas	Temas (Conexiones matemáticas)
S1: El teorema de Pitágoras se emplea para resolver triángulos rectángulos cuando se conocen dos de sus lados.	Conexión procedimental.

Fuente: Elaboración propia

Elaboración del informe: después de llevar a cabo las fases anteriores se elaboró un informe detallado sobre los resultados de cada caso, lo cual se presenta en la siguiente sección.

RESULTADOS

Los resultados permitieron identificar diversas conexiones matemáticas que se pueden clasificar en cinco categorías y que se corresponden con las previstas en la fundamentación teórica: procedimental, representaciones diferentes, característica, significado y parte-todo. Cada caso de estudio (E1, E2, E3, E4 y E5) exhibió resultados específicos en relación con dichas conexiones. Los resultados se resumen en la Tabla 4.

Tabla 4 – Conexiones matemáticas evidenciadas por los casos de estudio.

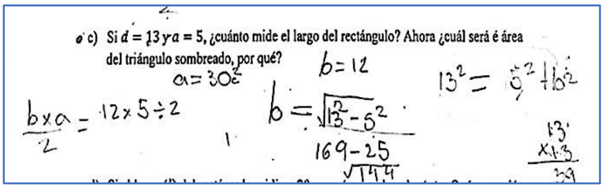
Tipología de conexiones	E1	E2	E3	E4	E5
P	•	•	•	•	•
RD	•	•	•	•	•
C	•	•	•	•	•
S			•	•	
PT		•		•	•

Fuente: Elaboración propia

Conexiones matemáticas de tipo procedimental

Esta conexión matemática fue identificada en los cinco casos de estudio. Al respecto, encontramos que E1 en la tarea 1, utilizó la fórmula base por altura para calcular el área de un rectángulo y aplicó el teorema de Pitágoras para encontrar la base de un triángulo (ver Figura 3 y extracto de la entrevista). En la tarea 4, el mismo caso de estudio identificó patrones en mosaicos azules y blancos, y en la tarea 6, usó la regla de tres para determinar las calificaciones solicitadas.

Figura 3 – Procedimientos utilizados por E1 para encontrar el área solicitada.



Fuente: recolección de los datos

> E: ¿qué fue lo que hiciste?
> E1: a través de la fórmula $a^2+b^2=c^2$, pero la cambié porque en vez de *c* era *d*, después pasé restando la *a* porque si está sumando pasa restando y si está multiplicando pasa dividiendo. Me acuerdo de que cuando vi esta fórmula se pasaba como una raíz cuadrada.
> E: ¿Por qué lo hiciste así? ¿por qué el teorema de Pitágoras?
> E1: me acuerdo de que ese se tenía que ocupar cuando no conocías uno de los lados de un triángulo.

E2 también utilizó la conexión matemática procedimental en las tareas 1 y 6. En la tarea 1, usó fórmulas para expresar el área de un rectángulo y un triángulo, representando las variables con *b* y *a*. En la tarea 6, E2 adoptó un enfoque de ensayo y error para resolver los ejercicios propuestos en los apartados *a* y *b*. Empleó una secuencia numérica para determinar cuántos aciertos se necesitaban para obtener calificaciones del 1 al 8. Sin embargo, en el inciso *b*, solo determinó la cantidad mínima de aciertos necesarios y no abordó el cálculo de la cantidad máxima de aciertos, como se solicitaba en la tarea.

Esta conexión matemática es evidenciada por E3 en las tareas 1, 4 y 6. En la tarea 1, E3 la empleó de manera destacada al aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la base de un triángulo y luego el área del triángulo sombreado, obteniendo un resultado de 30. Sin embargo, omitió especificar la unidad de medida.

En la tarea 4, se le pidió encontrar un patrón en mosaicos azules y blancos y, en el inciso *a*, E3 determinó la cantidad de mosaicos en un trayecto de 6 unidades.

En la tarea 6, en los incisos *a* y *b*, E3 utilizó el cálculo mental para estimar la cantidad de aciertos necesarios para alcanzar ciertas calificaciones. Sin embargo, solo se ocupó de hallar la cantidad mínima de aciertos, omitiendo la cantidad máxima, como requería la tarea. E3 reconoció que este enfoque le permitía abordar las tareas de manera efectiva.

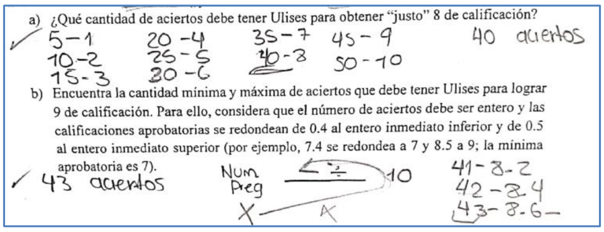
Por su parte E4 estableció esta conexión en la tarea 1, específicamente en el inciso *b*, cuando utilizó la fórmula para calcular el área de un triángulo $\left(\frac{(base\ x\ altura)}{2}\right)$, donde la base se denota como "*b*" y la altura como "a", debido a que en ese momento son incógnitas. Además, E4 representa el resultado con una "*x*" debido a la falta de conocimiento del valor exacto.

En el mismo contexto, en el inciso *c*, E4 emplea el teorema de Pitágoras para encontrar la longitud de un cateto (la base del triángulo) y calcula el área del triángulo sombreado mediante la multiplicación de la base por la altura y la posterior división entre dos. El resultado encontrado fue 30, aunque se omitió la unidad de medida.

Esta conexión se evidencia nuevamente en los incisos *a* y *b* de la tarea 6, donde E4 se acerca a la solución mediante el método de ensayo y error y sugiere, para el inciso *b*, la utilización de una regla de tres para obtener la respuesta. Sin embargo, en este último caso, solo logra alcanzar la cantidad mínima de aciertos requeridos.

E4 en los incisos *a* y *b* de la tarea 6, donde se presenta un diálogo sobre su método de resolución, utilizando una tabla que relaciona calificaciones del 1 al 10 con la cantidad de aciertos necesarios. (ver Figura 4 y extracto de entrevista).

Figura 4 – Procedimiento de E4 en el inciso *a* y *b* de la tarea 6.



a) ¿Qué cantidad de aciertos debe tener Ulises para obtener “justo” 8 de calificación?

5-1 10-2 15-3 20-4 25-5 30-6 35-7 40-8 45-9 50-10 40 aciertos

b) Encuentra la cantidad mínima y máxima de aciertos que debe tener Ulises para lograr 9 de calificación. Para ello, considera que el número de aciertos debe ser entero y las calificaciones aprobatorias se redondean de 0.4 al entero inmediato inferior y de 0.5 al entero inmediato superior (por ejemplo, 7.4 se redondea a 7 y 8.5 a 9; la mínima aprobatoria es 7).

43 aciertos Num Preg ÷ 10 X A 41-8.2 42-8.4 43-8.6

Fuente: recolección de los datos.

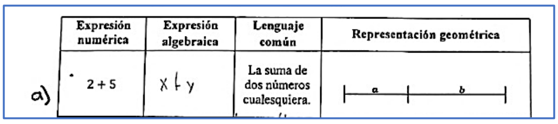
E: ¿Cuál es el método que usaste para llegar al resultado?
E4: cada pregunta buena equivale a 5 aciertos, entonces hice una especie de tabla donde están todas las calificaciones del 1 al 10.
E: ¿si sacara 1 de calificación cuantos aciertos necesito?
E4: necesitaría 5 aciertos.

Por su parte, E5 también evidenció una relación entre las tareas 1 y 6, utilizando fórmulas para el área de un rectángulo y el teorema de Pitágoras. En la tarea 6, calculó aciertos mínimos y máximos con regla de tres y ensayo y error.

Conexiones matemáticas de tipo representaciones diferentes

En el estudio, se observó el uso de esta conexión en las producciones de los casos de estudio E1, E2, E3 y E4 en la tarea 2. Por ejemplo, E1 evidencia haber relacionado representaciones numéricas, geométricas y lenguaje natural con representaciones algebraicas, en el inciso *a* (ver Figura 5), mientras que en el inciso *b* invertía el proceso, relacionando representaciones algebraicas con geométricas y numéricas. De manera similar, en el inciso *c*, relacionó representaciones algebraicas y de lenguaje natural con representaciones numéricas.

Figura 3 –Evidencia de la conexión representaciones diferentes por E1 en el inciso *a* de la tarea 2.



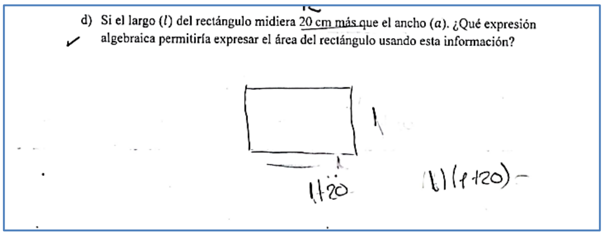
	Expresión numérica	Expresión algebraica	Lenguaje común	Representación geométrica
a)	2 + 5	x + y	La suma de dos números cualesquiera.	a b

Fuente: recolección de los datos

E2 también priorizó el uso de esta conexión, convirtiendo representaciones numéricas, geométricas y de lenguaje natural en algebraicas en el inciso *a*, y realizando conversiones inversas en los incisos *c* y *d*. Por su parte, E3, en la tarea 2, realizó la conversión entre las representaciones numéricas, geométricas y de lenguaje natural en algebraicas en el inciso *a*, realizando conversiones inversas en el inciso *b* y convirtiendo una representación geométrica en una numérica en el inciso *c*.

Finalmente, E4 mostró la conexión matemática de representaciones diferentes en las tareas 1, 2 y 6. En la tarea 1, relacionó expresiones verbales (enunciado de la tarea) con representaciones geométricas y algebraicas (ver Figura 6 y extracto de entrevista). En la tarea 2, aplicó esta conexión en todos los incisos, relacionando representaciones numéricas, algebraicas y geométricas.

Figura 6- Evidencia de la conexión representaciones diferentes por E4 en el inciso *d*, de la tarea 1.



Fuente: recolección de los datos.

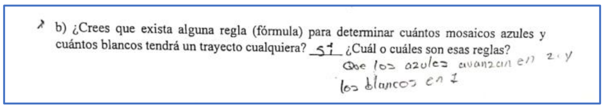
E: ¿Qué fue lo que hiciste?
E4: realicé un dibujo y puse una *l* y una *a*, pero me di cuenta de que no necesitaba ambas porque una tenía relación con la otra, entonces solo usé la *l* y al otro lado *l+20* y de esa forma solo multipliqué las dos y listo.
E: ¿cuál sería el área del triángulo con las medidas que has encontrado?
E4: sería porque es un triángulo.

Aunque E4 cambió la letra *l* asociada al largo y se la puso al ancho, en el extracto explica cómo respondió la tarea evidenciando el uso de esta conexión matemática.

Conexiones matemáticas de tipo característica

En el análisis de las respuestas de los participantes, se destacó el uso de esta conexión matemática en el inciso *b* de la tarea 4. En este contexto, se identificó una relación de 2 a 1 entre los mosaicos azules y blancos en los argumentos de los casos de estudio, lo que significa que, por cada mosaico blanco, había dos azules. Este patrón se repitió en los argumentos de los casos de estudio E1, E3, y E4 en la misma tarea. Sin embargo, ninguno de ellos pudo establecer una expresión general que permitiera predecir el número de mosaicos de cualquier color en cualquier trayecto. Aunque E3 reconoció el patrón característico de los mosaicos y sugirió una forma empírica de predecir su cantidad (ver Figura 7 y extracto de entrevista), no pudo expresarlo con una fórmula matemática. Cabe destacar que esta conexión matemática solo se evidenció en la tarea 4, específicamente en los incisos *a* y *b*.

Figura 7- Patrón identificado por E3 en el inciso *b* de la tarea 4.



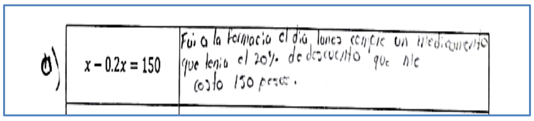
Fuente: recolección de los datos.

E: ¿Cuántos azules aumentan en cada trayecto?
E3: aumenta de 2 en 2.
E: ¿Cuántos blancos aumenta en cada trayecto?
E3: aumenta de 1 en 1.
E: ¿cómo podrías generalizar el aumento de los mosaicos?
E3: no sé cómo ponerlo de una manera que parezca fórmula, pero sí se puede explicar que los azules van avanzando de dos en dos y que los blancos de uno en uno.

Conexiones matemáticas de tipo significado

Esta conexión matemática sólo se evidenció en la tarea 3, específicamente en el inciso *a*, donde E3 y E4 asociaron un significado a una parte de la expresión y la describieron en términos de porcentajes. En la expresión, E3 interpretó el término como un descuento en la compra de un producto. En ese sentido, E3 explicó esta interpretación y la utilidad de calcular el costo de un medicamento si se conociera el valor de *"x"* (Ver Figura 8 y extracto de entrevista). Por otro lado, E4 también asoció el término con un descuento en la misma ecuación, mostrando asociarle un sentido similar.

Figura 8- Respuesta de E3 en el inciso *a* de la tarea 3.



Fuente: recolección de los datos.

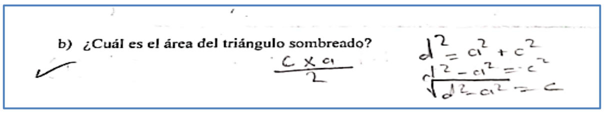
E: ¿a qué se refiere la expresión $0.2x$?
E3: significa el 20% menos de un producto.
E: ¿qué pasaría si en vez de *x* fuera 5 o 10?
E3: ya podemos resolverlo, si me dieras el valor podría saber cuál es el costo de ese medicamento.

Conexiones matemáticas de tipo parte-todo

Esta tipología de conexión matemática se evidenció de manera distinta en diversas tareas. En la tarea 6, inciso *c*, E2 y E6 propusieron una regla general para calcular la cantidad de aciertos necesarios para alcanzar una calificación objetivo. Esta regla implicaba multiplicar el número total de aciertos por la calificación deseada y dividir por 10 que es la calificación máxima que se puede obtener.

En la tarea 1, inciso *b*, E5 encontró la expresión algebraica general con la que podría encontrar el cateto que faltaba, aun sin tener los datos (ver Figura 9 y extracto de entrevista). Esta expresión se basó en el teorema de Pitágoras y podría aplicarse con valores concretos. De manera similar ocurrió en la tarea 6, inciso *b*, cuando E5 nuevamente formuló una expresión algebraica general para determinar un cateto independientemente de los datos proporcionados.

Figura 9- Procedimiento de E5 en el inciso *d* de la tarea 1.



Fuente: recolección de los datos.

E: ¿Qué formula conoces para calcular el área de un triángulo y un rectángulo?
E5: con las fórmulas que nos han enseñado desde siempre.
E: pero si tenemos ambos lados ¿cómo podríamos encontrar ese lado faltante?
E5: con el teorema de Pitágoras, podemos resolverlo, pero como no tenemos números solo quedarían como letras donde y eso lo multiplicaría por la altura y esto serviría cuando queramos darle valores.

CONSIDERACIONES FINALES

Discusión

El estudio se centró en identificar las conexiones matemáticas que establecen cinco estudiantes mexicanos de nivel medio superior cuando resuelven tareas que implican el uso del lenguaje algebraico. Para el análisis de los datos se utilizó la entrevista basada en tareas y el análisis temático; con esto, se identificaron diferentes tipos de conexiones matemáticas en cinco casos de estudio.

Los resultados revelaron que, a pesar de que los estudiantes no tuvieron una enseñanza enfocada en el establecimiento de conexiones matemáticas, lograron establecer diferentes tipologías. Esto evidencia que en general cualquier estudiante es capaz de establecer conexiones matemáticas, pero para tener mejores resultados y por su puesto contribuir a la comprensión de los estudiantes, se quiere que en la enseñanza de los conceptos matemáticos se promueva el establecimiento de estas.

En línea con lo anterior, se observó que el uso de conexiones matemáticas puede variar según el contexto escolar y la enseñanza recibida. Se destaca que los conocimientos previos de los estudiantes influyeron en su capacidad para establecer conexiones matemáticas (CAMPO-MENESES; GARCÍA-GARCÍA, 2021). E2, por ejemplo, cometió errores en operaciones algebraicas, lo cual es un conocimiento previo, mientras que E4 y E5 mostraron una mejor habilidad al resolver las tareas evidenciado mayor apropiación de conceptos vistos en clases anteriores.

Algunos de los casos de estudio corrigieron errores cometidos en sus evidencias escritas durante las entrevistas, lo que les permitió establecer otras conexiones matemáticas.

Hernández-Yáñez et al. (2023) encontraron que, aunque los estudiantes comprendieran conceptos, tenían problemas para representarlos adecuadamente, lo cual es similar a lo observado en esta investigación. A pesar de no enfocarse en ecuaciones cuadráticas, este estudio identificó problemas en representaciones algebraicas.

Además, Rodríguez-Nieto et al. (2022) resaltan la importancia del contexto y el conocimiento de los profesores. En esta investigación el contexto y los conocimientos previos en álgebra fueron esenciales, incluso debido a las confusiones contextuales o a la falta de habilidades para relacionar temas, se observaron dificultades en algunas tareas.

La literatura en el campo de la Educación Matemática relacionada con conexiones matemáticas en estudiantes de bachillerato permite plantear similitudes con los hallazgos de esta investigación. Al respecto, Healy y Hoyles (2009) descubrieron que la mayoría de los estudiantes de 14 años usaban métodos aritméticos para describir patrones en sucesiones, aunque solo uno de estos métodos era adecuado para la representación algebraica. Los resultados de esta investigación coinciden en que los estudiantes pueden identificar los primeros términos de una sucesión, pero les resulta difícil encontrar la fórmula general.

Lo anterior está relacionado con la dificultad de establecer la conexión matemática parte-todo, que también ha sido reportado en Campo-Meneses y García-García (2023) aunque con otros conceptos matemáticos. Por lo que es importante que en el aula se promuevan situaciones que lleven a los estudiantes a analizar casos particulares y así poder generalizarlos.

Las tipologías de conexiones matemáticas identificadas en esta investigación, se asemejan a las tipologías identificadas por Radford et al. (2007) y Ellis (2007), en particular, la conexión parte-todo en la atribución de significado a expresiones algebraicas. Además, estudios como los de Businskas (2008), Evitts (2004) y García-García y Dolores-Flores (2018) informan sobre tipologías similares, como conexiones procedimentales, representativas, características, de implicación, de parte-todo y de modelado.

Esto sugiere que las conexiones matemáticas sean promovidas en el aula por los profesores de matemáticas independientemente del concepto matemático o el nivel educativo.

Conclusiones

Los resultados del estudio demuestran la utilidad del marco de referencia para analizar las conexiones matemáticas de los estudiantes en tareas relacionadas con el lenguaje algebraico. Se observaron conexiones de tipo procedimental, representaciones diferentes, característica, de significado y parte-todo en diferentes niveles.

Aunque el uso de estas conexiones varió entre casos de estudio, es relevante destacar que, incluso entre estudiantes de rendimiento medio en matemáticas, existe la capacidad de establecer diversas conexiones matemáticas. Esto subraya la viabilidad de implementar este enfoque en el aula, siempre y cuando los profesores estén capacitados para establecer y promover estas conexiones entre conceptos, representaciones y situaciones de la vida real, así como para integrar las matemáticas con otras disciplinas y cuestiones cotidianas.

En resumen, este trabajo respalda la idea de que es posible analizar conexiones matemáticas en diversos contextos de resolución de problemas matemáticos. Para una validación más sólida, se requiere una muestra más amplia de participantes que confirme la variedad de conexiones matemáticas utilizadas por los estudiantes en tareas matemáticas.

Este estudio resalta la importancia de analizar el establecimiento de conexiones matemáticas en estudiantes de rendimiento satisfactorio y destaca la influencia de los conocimientos previos y el contexto en dicho establecimiento. Estos resultados tienen implicaciones para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de nivel medio superior.

REFERENCIAS

AGUDELO, V. C. Las concepciones de tres profesores de matemáticas sobre determinantes cruciales de su práctica de enseñanza en 'el inicio del trabajo algebraico escolar'. **Materiales curriculares para un Seminario de 'Diseño y Desarrollo Curricular en Matemáticas'**. 1 – 21, (2016).

BUSINSKAS, A. **Conversations About Connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections.** 2008. 1. V.183f. Thesis (Doctor of Philosophy) - Faculty of Education, Simon Fraser University, Canada. 2008.

BRAUN, V; CLARKE, V. Using thematic analysis in psychology. **Qualitative Research in Psychology,** v. 3, n.2, p. 77-101, 2006.

CARPITEYRO, E. **Algebra y sus aplicaciones**. México. Patria, 2014.

CAMPO-MENESES, K. G.; GARCÍA-GARCÍA, J.; FONT, V. Mathematical Connections Associated with the Exponential and Logarithmic Functions Promoted in the Mathematics Curriculum. **International Journal of Instruction,** v. 16, n. 4, p.17-36, 2023.

CAMPO-MENESES, K. G.; GARCÍA-GARCÍA, J. Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. **Educación Matemática**, v.32, n.3, p.209-240, 2020.

CAMPO-MENESES, K. G.; GARCÍA-GARCÍA, J. La comprensión de las funciones exponencial y logarítmica: una mirada desde las Conexiones Matemáticas y el Enfoque Ontosemiótico. **PNA**, v. 16, n. 1, p. 25–56, 2021.

CAMPO-MENESES, K. G.; GARCÍA-GARCÍA, J. Conexiones matemáticas identificadas en una clase sobre las funciones exponencial y logarítmica. **Boletim de Educação Matemática**, v. 37, n. 76, p. 849–871, 2023.

CORTES, J. C.; HITT F.; SABOYA, M. Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un espacio de trabajo Matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la Escuela Secundaria. **Boletim de Educação Matemática**, v. 30, n. 54, p. 240 – 264. 2016.

DOLORES, C.; GARCÍA-GARCÍA, J. Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: Un estudio de casos en el nivel superior. **Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 57, p. 158-180, 2017.

DOLORES-FLORES, C.; RIVERA-LÓPEZ, M. I.; GARCÍA-GARCÍA, J. Exploring mathematical connections of pre-university students through tasks involving rates of change. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v.40, n. 3, p. 369-389, 2019.

ELI, J. A.; MOHR-SCHROEDER, M. J.; LEE, C. W. Exploring mathematical connections of prospective middle-grades teachers through card-sorting tasks. **Mathematics Education Research Journal,** v.23, p. 297–319. 2011.

ELLIS, A. B. Connections between generalizing and justifying. Students' reasoning with linear relationships. **Journal for Research in mathematics education**, v.38, n.3, p. 194–229. 2007.

EVITTS, T. A. **Investigating the mathematical connections that preservice teachers use and develop while solving problems from reform curricula** 2004 [Tesis de Doctorado no publicada]. Pennsylvania State University College of Education. 2004.

GALLARDO, A.; ROJANO T. Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. **Recherches en Didactique des Mathématiques.** p.1–20. 1988. Recuperado el 20 de diciembre de 2018

GARCÍA-GARCÍA, J.; DOLORES-FLORES, C. Intra-mathematical connections made by high school students in performing Calculus task. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, v. 49, n. 2, p. 227-252, 2018.

GARCÍA-GARCÍA, J., HERNÁNDEZ-YAÑEZ, M. E. RIVERA LÓPEZ, M. I. Conexiones matemáticas promovidas en los planes y programas de estudio mexicanos de nivel secundaria y media superior sobre el concepto de ecuación cuadrática. **IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH**, v.13, n.1485. 2022.

GARCÍA-GARCÍA, J. Escenarios de exploración de conexiones matemáticas. **Números**, v. 100, p. 129-133, 2019.

GARCÍA-GARCÍA, J., DOLORES-FLORES, C. Exploring pre-university students´ mathematical connections when solving Calculus application problems. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology** v.52, n.6, p. 912-936. 2021a.

GOLDIN, G. A. A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En KELLY, A.; LESH, R. (Eds.), **Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.** Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 2000. p. 517–545

HEALY, L; HOYLES, C. Visual and symbolic reasoning in mathematics: ¿Making connections with computers? **Mathematical Thinking and Learning,** v.1, p.59 – 84. 2009.

HERNÁNDEZ, R; FERNÁNDEZ, C; BAPTISTA, M. **Metodología de la investigación.** México, DF: McGraw Hill. (2010).

JAIJAN, W.; LOIPHA, S. Making mathematical connections with transformations using open approach. **HRD Journal**, v.3, n.1, p. 91–100. 2012.

KARAKOÇ, G.; ALACACI, C. Real world connections in high school mathematics curriculum and teaching. **Turkish Journal of Computer and Mathematics Education,** v.6, n.1, p.31-46. 2015.

KOICHU, B.; HAREL, G. Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. **Educational Studies in Mathematics.** V.65, p. 349–365. 2007.

KOTHARI, C. R Indian: New Age International. **Research Methodology: Methods and Techniques.** 2004.

LOCKWOOD, E. Student connections among counting problems: an exploration using actor-oriented transfer. **Educational Studies in Mathematics,** v.78, p. 307–322. 2011.

MHLOLO, M. K., Mathematical connections of a higher cognitive level: a tool we may use to identify these in practice. African Journal of **Research in Mathematics, Science and Technology Education, South Africa**, v. 16, n. 2, p. 176-191, 2012. 2012.

MOON, K; BRENNER M. E; JACOB, B; OKAMOTO, Y. Prospective secondary mathematics teachers' understanding and cognitive difficulties in making connections among representations. **Mathematical Thinking and Learning,** v.15, n.3, p.201–227. 2013.

NORDIN, N.H; TENGAH, K; SHAHRILL, M; TAN, A; LEONG, E. Using visual representations as an alternative in teaching simultaneous equations. **Proceeding of the 3rd international conference on education**. v.3, p.198-204. 2017.

ORMOND, C. A. Scaffolding the mathematical "connections": A new approach to preparing teachers for the teaching of lower secondary algebra. **Australian Journal of Teacher Education,** v.41, n.6, p.122-164. 2016.

ÖZGEN, K. Problem çözme bağlaminda matematiksel ilişkilendirme becerisi: öğretmen adaylari örneği. **NWSA-Education Sciences,** v.8, n.3, p.323–345. 2013a.

ÖZGEN, K. Self-efficacy beliefs in mathematical literacy and connections between mathematics and real world: the case of high school students. **Journal of International Education Research,** v.9, n.4, p.305–316. 2013b

RADFORD, L.; BARDINI, C.; SABENA, C. Perceiving the general: the multi-semiotic. **dimension of students' Algebraic activity. Journal for Research in Mathematics Education,** v.38, n.5, p. 507 – 530. 2007.

RODRÍGUEZ-NIETO, C. A; RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ, F. M; FONT, V. A new view about connections: the mathematical connections established by a teacher when teaching the derivative. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,** v.53, n.6, p.1231-1256. 2022.

ROJANO, T. Local theoretical models in algebra learning: A meeting point in mathematics education. **Proceedings of the Twenty-sixth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.** Recuperado e 15 de noviembre de 2018. 2004.

ROJANO, T. Modelación concreta en álgebra: balanza virtual, ecuaciones y sistemas matemáticos de signos. **Números. Revista didáctica de las matemáticas,** 75, 5–20, 2010.

SADA–GARCÍA, M. T**. Matemáticas I. Aritmética y Álgebra**. México. 2001.

SEP. **Programa de estudios del componente básico del marco curricular común de la educación media superior.** México: Secretaría de Educación Pública, 2018.

WARREN, E. The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. **Mathematics Education Research Journal** v.15, n.3, p.122 – 137. 2003.

YOON, C; DREYFUS, T; THOMAS, M. O. J. How high is the tramping track? Mathematising and applying in calculus model-eliciting activity. **Mathematics Education Research Journal** v.22, n.1, p.141-157. 2010.