**CEMeR**

Caminhos da Educação Matemática em Revista
2024 • Ano XI • v 14 • n. 1 • p. 98 – 115
ISSN 1983-7399

**ARTIGO ORIGINAL/ ORIGINAL ARTICLE**

JUAN PABLO VARGAS **HERRERA**[1],
España
YULY **VANEGAS**[2],
España
JOAQUÍN **GIMÉNEZ**[3],
España

# Conocimientos de Futuros Maestros de Primaria sobre Pruebas Visuales

## *Prospective Elementary School Teachers' Knowledge of Visual Proofs*

## RESUMEN

El presente artículo analiza los posicionamientos iniciales de 108 futuros maestros del grado de Educación Primaria de una universidad española, respecto al proceso de demostración visual distinguiéndolo de la simple comprobación. Se propone una tarea profesional basada en el estudio del área de un triángulo desde un contexto histórico. Se propone una categorización del tipo de prueba utilizada distinguiendo entre: empirismo ingenuo, experiencia crucial, ejemplo genérico y experiencia mental. Posteriormente, haciendo uso de herramientas del Enfoque Ontosemiótico, se describe y caracteriza el conocimiento de los futuros maestros y se teorizan los tipos de pruebas encontrados desde la construcción y análisis de las configuraciones epistémicas. Se encontró que los futuros maestros reconocen el potencial del proceso de demostración y lo identifican en tareas geométricas, pero no establecen elementos claros para validar y/o generalizar, lo que los mantiene en un nivel bajo de la demostración, correspondiente a las comprobaciones, pero insuficiente para construir o validar una demostración genérica de tipo visual. Se discute en primer lugar en torno a la utilidad de las herramientas del Enfoque Ontosemiótico, para justificar la asignación de uno u otro tipo de categoría del tipo de pruebas a las propuestas de los futuros maestros. Finalmente, se reflexiona sobre la importancia del fomento de los procesos geométricos en la formación de futuros maestros de educación primaria, particularmente los relacionados con la demostración y prueba.

**Palabras clave:** *Tipos de prueba, Formación inicial, Futuros maestros, Primaria.*

## ABSTRACT

This article analyzes the initial positions of 108 prospective teachers of the Primary Education degree of a Spanish university, respect to the process of visual demonstration, distinguishing it from simple verification. A professional task based on the study of the area of a triangle from a historical context is proposed. A categorization of the type of proof used is proposed, distinguishing between naive empiricism, crucial experience, generic example, and mental experience. Subsequently, using tools of the Onto-semiotic Approach, the knowledge of prospective teachers is characterized, and the types of evidence found are theorized from the construction and analysis of epistemic configurations. It is found that prospective teachers recognize the potential of the demonstration process and identify it in geometric tasks, but do not establish clear elements to validate and/or generalize, which keeps them at a low level of demonstration, corresponding to verifications, but insufficient to build or validate a generic demonstration of visual type. We first discuss the usefulness of the tools of the Ontosemiotic Approach, to justify the assignment of one or another type of category of the type of proofs to the proposals of the future teachers. Finally, we reflect on the importance of fostering geometric processes in the training of future elementary school teachers, particularly those related to demonstration and proof.

**Keywords** Types of proof, Initial training, Prospective teachers, Primary school.

[1, 3] Universitat de Barcelona, España
[2] Universitat de Lleida, España

**Correspondencia:**

[1]jvargahe9@alumnes.ub.edu
[2]yuly.vanegas@udl.cat
[3]quimgimenez@ub.edu

Recibido el 07/12/2023
Aprobado en 07/01/2024

# INTRODUCCIÓN

Diversos autores han reconocido que los estudiantes desarrollan y logran conocimientos más duraderos en la medida en que sus maestros tengan una mejor formación (BALL; LUBIENSKI; MEWBORN, 2001; GODINO; RIVAS; CASTRO; KONIC, 2008; HILL; BALL; SCHILLING, 2008); por lo que, los programas de formación docente se hacen fundamentales para el logro del aprendizaje de las matemáticas en las comunidades en general. Sin embargo, el problema de los programas de formación recae actualmente en la decisión sobre qué enseñar a los futuros maestros, pues se sabe que requerirán de conocimientos específicos para enseñar matemáticas y de la identificación de diferentes prácticas profesionales y matemáticas que le hagan competente a la hora de enseñar. Así, un futuro maestro debería tener una amplia formación matemática para conocer el qué enseñar, pero a su vez una amplia formación didáctica que le permita analizar el cómo y para qué enseñar lo que enseña.

De acuerdo con Llinares (2008) uno de los propósitos principales de la formación inicial docente, es desarrollar el conocimiento necesario para aprender a enseñar matemáticas, es decir, aprender a seleccionar, utilizar y construir conocimientos desde las necesidades de la propia enseñanza que ejerce. En este sentido, siguiendo a Llinares et al. (2022) los profesores deberán ser competentes en la enseñanza de las matemáticas, lo que implicará ser capaz de tomar decisiones de acciones apoyadas en razonamientos y usando conocimientos específicos vinculados a determinados conjuntos de prácticas. Dicha competencia exige, por tanto, formar a los nuevos profesores desde el desarrollo de procesos y pensamientos matemáticos que le hagan competente a la hora de enseñar. La investigación actual en didáctica de las matemáticas ha permitido describir un conjunto de prácticas profesionales específicas, tipos de pensamientos matemáticos, habilidades, competencias y conocimientos que deberían desarrollarse en los futuros maestros de matemáticas, de modo que, puedan incluirlo en la manera en que comprenden el mundo que los rodea y de paso en su futura labor docente.

Autores como Ginsburg et al. (2005) plantean que para enfrentar los desafíos de la sociedad actual se necesita una amplia comprensión de las matemáticas y esto implica trabajar tanto los contenidos que se deben aprender como las formas de adquisición y uso de estos contenidos. Las propuestas curriculares actuales para la educación primaria remarcan la importancia del desarrollo de competencias. Respecto a la competencia matemática de Castro et al. (2012) ponen de relieve el papel de los procesos matemáticos en su adquisición desde edades iniciales. Estos autores también señalan que procesos y competencias matemáticas enfatizan una misma idea: la capacidad de usar de forma comprensiva las matemáticas que se aprenden en la escuela en una variedad de contextos.

En el caso de la actividad geométrica un proceso relevante es la argumentación. Como proceso matemático, busca lograr que una idea sea creíble y que convenza a las demás personas o a quien estudia. La argumentación se constituye como tal en la actividad central y completa de producir razones, respaldarlas, criticarlas, contra argumentarlas y así sucesivamente hasta convencer (TOULMIN et al., 1984). De acuerdo con Conner et al. (2014) la argumentación y el razonamiento están estrechamente ligados, en la medida en que cuando alguien propone un argumento, está razonando; de igual manera quien razona, crea un argumento.

Algunas investigaciones han abordado estos procesos, desarrollando ideas relevantes para la presente discusión. En Prior y Torregrosa (2020) se presenta un análisis de la organización discursiva de las respuestas de estudiantes de secundaria en la que se solicita probar una propiedad geométrica. Con base en herramientas de la teoría de los paradigmas y los espacios de trabajo matemático, determinan obstáculos epistemológicos que dificultan el tránsito de la geometría natural a la geometría axiomática. Por su parte, Montoya (2014) trabaja también con Espacios de Trabajo Matemático, pero en este caso con maestros nóveles, donde analiza qué obstáculos presentan a la hora de incluir la demostración en escuelas de educación básica y secundaria, evidencia cómo la demostración es una prueba privilegiada por las instituciones de formación y que su uso en las aulas de clase es innata debido a la priorización que se le da en los procesos de formación docente.

Por otra parte, Saorín et al. (2019) presenta un análisis de respuestas de estudiantes de secundaria a problemas de pruebas geométricas para estudiar el proceso discursivo. Mientras que, Prior y Torregrosa (2013) caracterizan la interacción entre el proceso de razonamiento y verificación que utilizan alumnos de secundaria para resolver problemas, identificando razonamientos configurales que llegan a conjeturas, pero sin lograr una demostración empírica.

Dada la relevancia del proceso de argumentación dentro del marco de conocimientos y competencias del futuro maestro de matemáticas, el presente artículo busca describir y caracterizar los tipos de conocimientos expuestos y movilizados, por un grupo de futuros maestros de educación primaria, cuando desarrollan una tarea profesional orientada a dar valor a la prueba visual como evidencia de desarrollo del proceso geométrico de argumentación.

Se espera que, a través de este documento se logren plantear algunas reflexiones sobre la necesidad de incorporar la argumentación como proceso matemático y los tipos de prueba en la formación inicial de docentes de matemáticas. Particularmente entender cómo el desarrollo de este tipo de procesos enriquece el conocimiento didáctico y matemático de los futuros maestros.

## MARCO TEÓRICO

El conocimiento didáctico-matemático de los profesores de matemáticas ha sido estudiado con especial interés durante las últimas décadas. Este interés ha llevado al desarrollo de modelos para el análisis y la mejora de la interacción y práctica educativa en el aula. Uno de éstos es el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de matemáticas CCDM (GODINO et al., 2016). En este modelo, propuesto desde el enfoque Ontosemiótico (EOS), se considera que dos competencias clave que el profesor de matemáticas debe desarrollar son la competencia matemática y la competencia de análisis e intervención didáctica. Asimismo, se asume que el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas implica un conocimiento profundo de la matemática y su enseñanza, es decir, un conocimiento didáctico-matemático, ya que el conocimiento meramente matemático no es suficiente para una práctica adecuada del profesor de matemáticas (PINO-FAN et al., 2015).

Desde el modelo CCDM se plantea que para lograr una enseñanza idónea el profesor de matemáticas debe poseer distintos tipos de conocimiento. Por un lado, tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el que imparte la enseñanza. Además, debe conocer elementos de niveles posteriores, lo que se denomina como el “conocimiento del contenido matemático per-se”. Este conocimiento se divide en dos tipos: el conocimiento matemático común y el conocimiento matemático extendido.

El primero hace referencia al conocimiento sobre el objeto matemático que es necesario poner en juego para resolver problemas o actividades relacionadas con un tema específico en un nivel educativo determinado. El segundo tipo de conocimiento se refiere a que el profesor además de saber enfrentar problemas sobre un tema determinado debe poseer conocimientos más avanzados, que hacen parte de niveles superiores.

El EOS como teoría de la cognición e instrucción matemática, ha consolidado y explicado ampliamente lo que se entiende por significado y su relación con las nociones de práctica y objetos matemáticos (GODINO et al., 2007; GODINO, et al, 2019). Desde este enfoque se asume que las prácticas matemáticas son cualquier acción o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver un problema matemático, para comunicar la solución a otras personas o para validar y generalizar la solución a otros contextos. Los argumentos son un objeto que ayuda a comprender el nivel de generalidad o consistencia de las visualizaciones.

Son diversos los tópicos que se han investigado vinculados al conocimiento profesional docente, pero pocos de estos trabajos analizan cómo futuros maestros de educación primaria reconocen la importancia de discutir sobre la validación de las ideas matemáticas basados en elementos visuales. Por ejemplo, Gutiérrez (2006) caracteriza la visualización como el conjunto de tipos de imágenes, procesos y habilidades necesarios para que los estudiantes puedan producir, analizar, transformar y comunicar información visual relativa a objetos reales, modelos y conceptos geométricos. Según Hanna y Sidoli (2007) los procesos visuales, implican el uso de elementos lógicos en los razonamientos en relación con la naturaleza de la deducción, y sugieren la existencia de conflictos semióticos debidos a la interpretación de las relaciones geométricas observadas. Desde el EOS, los procesos visuales involucran un razonamiento diagramático que se analiza mediante la configuración de objetos y procesos ostensivos y no ostensivos (GODINO et al., 2016). El razonamiento diagramático según Bakker y Hoffmann (2005) implica tres pasos: construir un diagrama mediante un sistema de representación; experimentar con el diagrama y observar los efectos, reflexionando sobre ellos.

**Aspectos relativos a la argumentación y validación**

En matemáticas, se sabe que se argumenta cuando al tener una afirmación, se desea convencer a alguien o, incluso a uno mismo, de la verdad de una declaración (PEDEMONTE; BALACHEFF, 2016). Los argumentos no tienen una forma específica y diversas teorías se han enfocado en su análisis, descripción y teorización. Se sabe actualmente, que los argumentos deben organizarse en una secuencia de acuerdo con reglas y procedimientos generales (TOULMIN et al., 1984). Por su parte, Macagno et al. (2014) sostienen, que los argumentos y su estructura pueden revelar aspectos distintos e interdependientes de la argumentación, esto es, si refieren a una conclusión, garantía, apoyo a puntos de vista y/o refutación.

Algunas investigaciones han abordado la idea de argumentar como proceso geométrico, en da Silva (2009) se explora cómo adolescentes explican propuestas de solución a problemas de área y perímetro de figuras planas. En este estudio se concluye que los estudiantes saben utilizar algoritmos para la solución de estos tipos de problemas, pero no logran construir explicaciones elaboradas de lo que han hecho.

En esta misma línea, Crespo y Farfán (2005) realizan una caracterización de argumentaciones por reducción al absurdo como recurso de validación de resultados propuestos por estudiantes universitarios; identifican cómo los tipos de argumentación utilizados por los estudiantes dependen directamente de su tipo de formación, y experiencia, desde allí, identifican que aquellos tipos de argumentación no usuales, como la reducción al absurdo, no son utilizadas en contextos fuera de lo académico. Por su parte, Flores et al. (2010) determinan los esquemas de argumentación presentes en futuros maestros cuando resuelven actividades de geometría euclidiana en un ámbito mediado por softwares de geometría dinámica; principalmente discuten que es posible desarrollar el uso de esquemas analíticos en pro del desarrollo del razonamiento deductivo, mediante el diseño de secuencias de actividades abiertas que indaguen a los estudiantes sobre la veracidad de los resultados obtenidos.

Por otro lado, Estrella et al. (2017), analizan las argumentaciones dadas por estudiantes de educación primaria desde el modelo de Toulmin, caracterizando las influencias y el impacto de los elementos argumentativos en las componentes lógica y geométrica. Por su parte, Molina et al. (2019) utilizan este mismo modelo y a través de un análisis Ontosemiótico, describen los procesos de argumentación que realizan futuros maestros de matemáticas al resolver problemas de geometría plana.

Finalmente, en Saorín et al. (2019) se analiza la estructura de los razonamientos presentados por estudiantes de secundaria, mediante la identificación de relaciones entre desenlaces del razonamiento configural y el modo en que construyen su discurso escrito. Así mismo, en Clemente y Llinares (2015) se realiza un análisis de relaciones entre las formas del discurso y el razonamiento configural de futuros maestros, presentando tres formas de discurso: gráfico, texto y una mezcla de los dos; los autores discuten en torno a las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes tipos de discurso, el hecho de que cualquier tipo de estos tenga éxito en el razonamiento de los estudiantes parece indicar que la preferencia en la forma discursiva no influye en la generación de relaciones directas con el conocimiento geométrico.

La argumentación como proceso, está, por tanto, ligada a la idea de validación, pues se considera como un proceso en el que se utilizan recursos de tipo técnicos, teóricos, disciplinares y argumentativos -por parte del que aprende- para garantizar la validez de un resultado formulado. La validación, como la actividad tendiente a justificar la eficacia o corrección de un procedimiento o un resultado, o a justificar el carácter de verdadero de una propiedad.

En el presente estudio se usan las categorías de Balacheff (1987) sobre tipos de validación: *empirismo ingenuo, ejemplo crucial y ejemplo genérico* para diferenciar los niveles de argumentación que alcanzan un grupo de futuros maestros cuando se involucran en procesos de razonamiento y análisis de prueba de ciertas relaciones. La primera de estas categorías refiere a la situación en la que el estudiante considera algunos pocos casos particulares, los cuales le son suficientes para validar una proposición. En la segunda, el estudiante pretende verificar una propiedad, permitiendo anticipar algún tipo de generalización. Finalmente, el ejemplo genérico indica una situación que consiste en dejar claras las razones que validan una propiedad.

## METODOLOGÍA

La investigación tiene un enfoque cualitativo de carácter exploratorio (HERNÁNDEZ et al., 2010) y sigue la metodología de estudio de casos (YIN, 2014). El caso es el de las prácticas del grupo humano que configura una clase de didáctica de la geometría, perteneciente al grado de Educación Primaria, de una universidad española. Se busca describir y caracterizar los tipos de conocimiento que movilizan cuando intentan argumentar y posteriormente demostrar de manera visual una relación con figuras geométricas.

**Participantes e implementación**

El estudio se llevó a cabo con 108 futuros maestros del grado de Educación Primaria de una universidad pública española, organizados en 18 grupos (5 – 6 personas). La asignatura en la cual se llevó a cabo la implementación de la tarea profesional es la única que tienen los participantes, relativa a didáctica de la geometría dentro de su programa de formación, por lo que sus conocimientos previos son únicamente los que poseen desde la Educación Secundaria Obligatoria. Para el desarrollo de la tarea profesional se dispuso de una clase de 120 minutos. Los datos obtenidos corresponden a los protocolos escritos de cada uno de los grupos de trabajo. Se realizó una sesión de clase de presentación y desarrollo de la tarea y posteriormente se ejecutó una sesión más de retroalimentación.

**Materiales e instrumentos**

El instrumento de investigación corresponde a una tarea profesional construida en torno a un contexto histórico (cálculo del área de un triángulo utilizando el método griego). La tarea profesional propone a los futuros maestros responder a tres situaciones que implican demostraciones visuales. está dividida en cuatro partes. En la primera se trabaja el área de los triángulos, se propone a los futuros maestros que dibujen triángulos con ciertas condiciones (altura y base dadas) y que verifiquen mediante conteo de la cuadricula el área de la figura; posteriormente se utiliza el método griego de calcular el área de un triángulo como la multiplicación de la longitud de la base por la mitad de la longitud de la altura de manera visual para comprobar los resultados. En la segunda parte de la tarea, se busca trabajar el teorema de Pitágoras y mediante una tabla se intentan buscar regularidades, basadas en el mito del triángulo 3, 4, 5. En la tercera parte se utiliza el tangram de Liu Hui y se propone demostrar de manera visual el teorema de Pitágoras y finalmente en la cuarta parte, se discute en torno a las propiedades y procesos que se podrían incluir en la educación primaria, así como lo que significa la demostración sin palabras y la demostración visual, de modo de lograr discutir sobre la importancia de su uso para el desarrollo del pensamiento geométrico.

El presente artículo aborda únicamente la primera parte de la tarea profesional. Se espera describir las demostraciones visuales propuestas por los futuros maestros y los diferentes niveles de argumentación a los que accedieron a través del uso que dieron a diferentes pruebas de tipo visual.

**Análisis**

Para el análisis se utilizaron en primer lugar los tipos de conocimiento, de acuerdo con el modelo CCDM, dado que sólo se analizará la primera parte de la tarea, en el Cuadro 1, se muestran algunas de las preguntas formuladas a los futuros maestros; los tipos de conocimiento (según el CCDM) asociados a cada una de ellas. Y, lo que se pretende con cada pregunta.

Cuadro 1 - Preguntas, tipo de conocimiento involucrado e intencionalidad

| Preguntas (ítem) | Tipo de Conoc. | Intencionalidad |
|---|---|---|
| 1. En una cuadrícula dibuja un triángulo rectángulo de 7 cm de base y 6 cm de altura. Comprueba que el área hace 21 $cm^2$. | Común | Identificar conocimiento o dificultades sobre cómo determinar el área de un triángulo |
| 2.Dibujando, recortando, componiendo y descomponiendo, muestra ahora que, si tienes un triángulo cualquiera, su área es igual a multiplicar la | Común<br>Extendido | Identificar conocimiento sobre la relación $b \cdot \frac{h}{2}$<br>Distinguir lo particular de lo general |

| | | |
|---|---|---|
| base por la mitad de la altura. | | Promover el análisis sobre la validez de una relación |
| 3. ¿Por qué decimos que en la actividad del ítem 1 estamos haciendo una comprobación y en el ítem 2 una demostración visual? | Extendido<br>Didáctico - matemático | Diferenciar entre comprobación y validación (mediante demostración visual) |

Fuente: Los autores.

Posteriormente se realizó una clasificación de cada uno de los grupos (identificados como grupo 1 hasta grupo 18) siguiendo los tipos de validación utilizada de acuerdo con el Cuadro 2. Esta asignación se realizó de manera independiente por uno solo de los investigadores y fue compartida y discutida con los demás. La asignación de cada grupo a una de las categorías dependió del tipo de validación que brindaban y su coincidencia con las características de cada categoría; las categorías utilizadas están basadas en la descripción presentada en el apartado del marco teórico de este documento, de acuerdo con lo propuesto en Balacheff (1987).

Cuadro 2 – Tipo de validación

| Tipo | Categoría |
|---|---|
| N1 | Empirismo ingenuo |
| N2 | Ejemplo crucial |
| N3 | Ejemplo genérico |

Fuente: Los autores.

En una tercera etapa, dado que se habían identificado los conocimientos movilizados, así como el tipo de cada uno, se realiza la configuración epistémica de la situación planteada, siguiendo las herramientas propuestas por el Enfoque Ontosemiótico (ver Cuadro 3).

Cuadro 3 - Configuración Epistémica asociada al ítem 2

| Situación Problema | |
|---|---|
| Determinar que el área de cualquier triángulo se puede obtener como producto de la medida de su base por la mitad de su altura. Hacerlo mediante demostración visual | |
| Prácticas Matemáticas | |
| P1: Dibujar un triángulo rectángulo con medidas específicas.<br>P2: Dibujar, recortar, componer y descomponer triángulos con papel o en formato digital.<br>P3: Determinar área de un triángulo rectángulo a partir una cuadrícula.<br>P4: Determinar área como relación entre la base del triángulo y la mitad de la longitud de su altura correspondiente.<br>P5: Comprobar de forma algebraica, aritmética y visual relaciones entre los lados de un triángulo y su área.<br>P6: Comprobar la relación $b \cdot \frac{h}{2}$ determina el área para un caso particular de triángulo (rectángulo).<br>P7: Comprobar que la relación $b \cdot \frac{h}{2}$ determina el área de cualquier tipo de triángulo.<br>P8: Diferenciar entre una comprobación y una demostración visual: identificar la comprobación como la validez en algunos casos particulares; demostración como argumentación que valida de forma general para todos los casos posibles. | |
| Lenguaje | Definiciones -conceptos |
| Verbal<br>V1: Triángulo.<br>V2: Triángulo Rectángulo.<br>V3: Triángulo acutángulo.<br>V4: Triángulo obtusángulo.<br>V5: Triángulo Isósceles. V6: Triángulo escaleno. V7: Cuadrícula. V8: Conteo. V9: Dobleces, V10: Composición. V11: Comprobación. V12: Demostración. V13: Validación. V14: Cálculo. V15: Área. V16: Mitad. V17: Cuantificadores. L18: Independencia de la posición. V19: Fórmula. V20: Figura. V21: Gráfico. V22: Rectángulo.<br><br>Gráfico<br>G1. Uso de cuadriculas, G2 gráfico de triángulos en cuadriculas | D1 Elementos de un triángulo (altura, base)<br>D2 Tipos de triángulos<br>D3 Área de un triángulo<br>D4 Generalización de una propiedad<br>D5 Equivalencia. |
| Procedimientos | |
| PR1: Dibujar un triángulo rectángulo.<br>PR2: Construir cuadriculas para contar cantidad de cuadrados unitarios interiores al triángulo.<br>PR3: Utilizar material tangible para proponer relaciones entre la altura y la base de un triángulo cualquiera.<br>PR4: Explicación de la diferencia entre comprobación y demostración. | |

| |
|---|
| PR5: Justificación del uso de material tangible para la presentación de ideas geométricas en estudiantes de educación primaria.<br>PR6: Justificación mediante el uso de un triángulo escaleno, (considerado como genérico).<br>PR7: Interpretación de la prueba visual como demostración por pasos dado su nivel de generalización respecto las posiciones, las medidas y los diferentes tipos de triángulos. |
| Proposiciones (implícitas o no) |
| PO1: El área de un triángulo se puede calcular mediante el conteo de los cuadrados unitarios que están en su interior.<br>PO2: El conteo de cuadrados unitarios puede hacerse mediante la descomposición de figuras en triángulos más pequeños que a su vez, componen cuadrados a contar.<br>PO3: El producto de la longitud de la base de un triángulo por la mitad de la longitud de su altura corresponde al área.<br>PO4: El área de cualquier triángulo es el resultado de multiplicar la longitud de una de sus bases por la mitad de la longitud de su correspondiente altura. (Y eso es equivalente a la expresión clásica de base x altura dividido por dos).<br>PO5: El uso de varios ejemplos relativos a alguna propiedad geométrica NO permite generalizar la misma y admitirla como “demostración”.<br>PO6: Para cualquier triángulo es posible componer un rectángulo, haciendo uso de un triángulo congruente (haciendo el doble) de tal forma que se construya un rectángulo |
| Argumentos (explícitos o no) |
| A1: Uso de material tangible para hacer un conteo, en un caso determinado.<br>A2: Justifico el área de un triángulo determinado a través de conteo de cuadrados internos en una situación específica. (Si tengo una cuadrícula, puedo determinar el área del triángulo mediante reagrupaciones en el conteo interno).<br>A3: Comprobación aritmética de la relación del área de un triángulo determinado (El área del triángulo da 21 porque lo verifiqué en la fórmula).<br>A4: Argumenta que la verificación de uno o varios ejemplos de tipos de triángulo sobre el cálculo del área no permite generalizar la propiedad para cualquier triángulo.<br>A5: Puedo justificar el área de un triángulo rectángulo determinado (mediante equivalencia de áreas o composición/descomposición) como la mitad de un rectángulo, con la misma base y altura.<br>A6: Puedo justificar el área de un triángulo rectángulo cualquiera (mediante equivalencia de áreas o composición/descomposición) como la mitad de un paralelogramo, con la misma base y altura. Posteriormente justifica que la mitad del paralelogramo puede obtenerse, como un paralelogramo que tenga la misma base, y la mitad de la altura.<br>A7: Puedo justificar el área de cualquier triángulo mediante descomposición y composición, quitando el triángulo superior (hasta la paralela media) y añadiendo al otro lado, para hacer un paralelogramo equivalente. |

Fuente: Los autores.

Posteriormente, tomando como base la configuración epistémica (Cuadro 3) y la categorización de acuerdo con los tipos de validación (Cuadro 2), se analizan las producciones de los 18 grupos de futuros maestros, identificando las prácticas matemáticas, lenguajes, definiciones, procedimientos, proposiciones y argumentos evidenciados en sus producciones. En la Figura 1, se muestra a manera de ejemplo, la sistematización realizada de la configuración epistémica de uno de los grupos.

Figura 1 – Sistematización de objetos por grupo de trabajo

| Grupo | Práctica Matemática | Lenguaje | | Definiciones | Procedimientos | Proposiciones | Argumentos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | P1 | V1 | V15 | D1 | PR1 | PO1 | A2 |
| | P3 | V2 | V16 | D2 | PR2 | PO2 | A3 |
| G10 | P4 | V7 | V19 | | PR5 | PO4 | A5 |
| | P5 | V8 | L22 | | | | |
| | P6 | V10 | G1 | | | | |
| | | | G2 | | | | |

Fuente: Los autores.

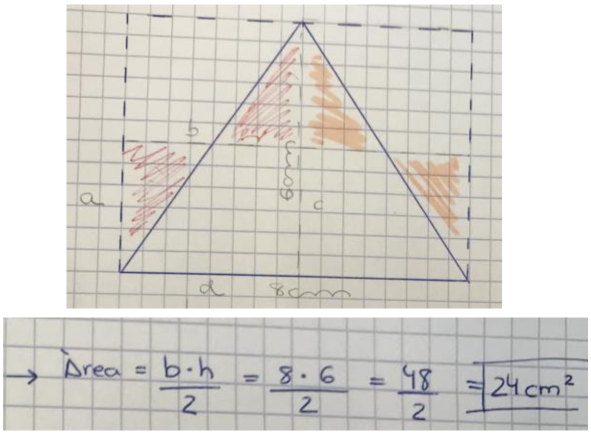
# RESULTADOS

Los resultados se estructuran en tres partes, en la primera, se detallan cuáles son los elementos, conocimientos y características que provienen de la configuración epistémica y que fueron posibles reconocer en cada uno de los niveles de generalización (Balacheff, 1987). Para ello, se observan las pruebas visuales propuestas y sus descripciones correspondientes realizadas por los grupos de futuros maestros. En la segunda parte se describe desde la herramienta de configuración epistémica, los principales hallazgos en torno a las definiciones, el lenguaje, los procedimientos, los procesos, los argumentos y las prácticas identificadas; finalmente en la tercera parte, se busca reflexionar en torno a la integración y mirada en conjunto de las dos teorías utilizadas en el desarrollo de esta investigación.

### Respecto a los tipos de validación

En el nivel más bajo relacionado con el *empirismo ingenuo* (N1) se encontraron justificaciones centradas en el conteo para un caso particular, y el uso de la fórmula tradicional para el cálculo del área de un triángulo en el caso general (ver Figura 2).

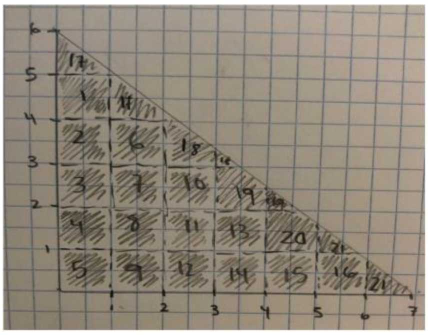
Figura 2 – Propuesta Grupo 18




Fuente: Los autores.

Se identifican prácticas básicas (Cuadro 3) o elementales como P1, donde se dibujan triángulos prototípicos (rectángulos: V22) con medidas específicas. Un 73% de los grupos clasificados en este nivel utilizan la cuadrícula para el conteo y determinación del área buscada, acciones relacionadas con P3. El lenguaje utilizado refiere a figuras conocidas como los triángulos rectángulos (V2), la relación buscada de área (V15) y el material utilizado, la cuadrícula (V7). Al igual que las prácticas utilizadas, los procedimientos que se logran detectar en este nivel son elementales, consisten básicamente en dibujar figuras geométricas y construir las cuadrículas para las actividades de conteo y verificación visual, no se aborda en ningún momento una explicación o justificación de los elementos seleccionados o de la situación en sí que se está trabajando. Si bien la proposición utilizada mayoritariamente es PO1, referida al área del triángulo como resultado del conteo de los cuadros unitarios que están en su interior, en algunos casos se puede inferir que la configuración de estos cuadros no siempre es estática, evidenciando otras acciones (PO2) donde el conteo y configuración del interior del triángulo, puede hacerse mediante la descomposición de figuras más pequeñas (en este caso otros triángulos). Respecto a los argumentos dados por los grupos ubicados en este nivel, se usan A1, A2, y A3 (Un ejemplo de este tipo de argumentos se presenta en la Figura 3, donde el grupo 5, realiza un conteo de la cuadrícula para determinar el área del triángulo).

Figura 3 – Solución propuesta Grupo 5

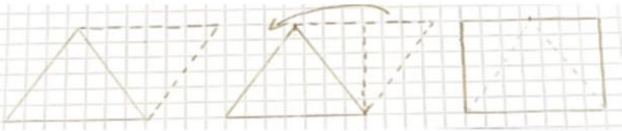


Fuente: Los autores.

De los grupos de futuros maestros un 83% se ubicó en este nivel (N1 – Empirismo ingenuo). Al analizar las producciones de estos grupos, es posible indicar que mostraron un desarrollo leve de los contenidos geométricos necesarios y tienen dificultades como la configuración y/o composición y descomposición de figuras geométricas a partir de figuras más pequeñas; este hallazgo refiere a conocimientos de *tipo común*. No hay evidencia de *conocimiento extendido* en este nivel y el conocimiento didáctico-matemático de los grupos clasificados en este primer nivel, está centrado particularmente en elementos epistémicos referidos a las fórmulas como herramienta para la comprobación y/o justificación de algún enunciado matemático.

En el siguiente nivel, *ejemplo crucial* (N2) se ubicaron el 11% de los grupos de futuros maestros, estos utilizaron un triángulo no rectángulo, que se duplica, para conseguir un paralelogramo (ver Figura 4).

Figura 4 – Propuesta de solución grupo 4

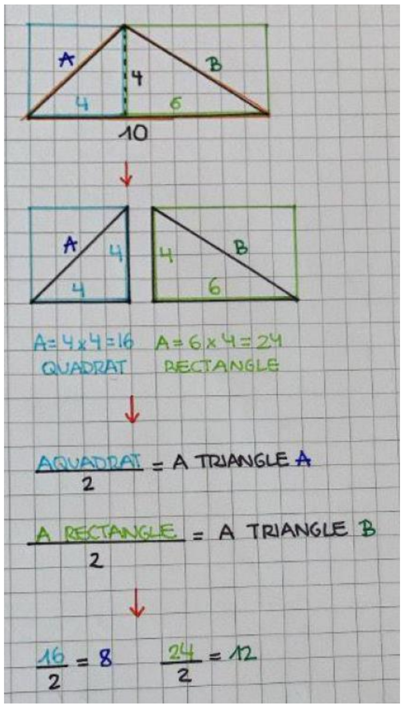


Fuente: Los autores.

Posteriormente buscan un rectángulo equivalente, que no corresponde con el producto pedido, pero que les sirvió para evidenciar que el área del triángulo era el producto de la base por la altura y luego su división por dos.

En este nivel, fue posible identificar prácticas menos usuales como la comprobación de forma algebraica, aritmética y visual de algunas relaciones entre los lados del triángulo y el área (P5). Algunos de los grupos en este nivel, realizaron acciones asociadas a prácticas como P8, en tanto proponían algún tipo de diferenciación entre una comprobación y una demostración visual, a pesar de no lograr diferenciarlo por completo. Un ejemplo se puede ver en la Figura 5 donde el grupo 12 intenta llevar la solución de la actividad propuesta mediante una estructura o demostración visual, pero manteniendo las comprobaciones usuales mediante métodos, símbolos y estructuras algebraicas.

Figura 5 – Solución propuesta Grupo 12



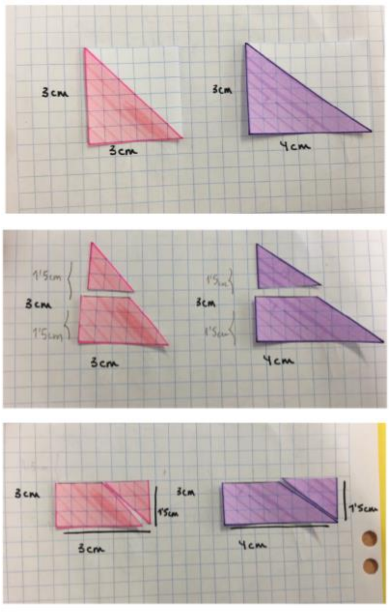

Fuente: Los autores.

Respecto al lenguaje, se utilizan en este nivel muchos más términos referidos a la geometría, destaca que en este nivel aparece la mención a otro tipo de triángulos y no únicamente al triángulo rectángulo (V2, V4, V5), de igual manera, dado que se intenta construir una estructura geométrica que permita realizar la tarea propuesta, se hace referencia a otros elementos como la composición (V10), el cálculo (V14), la posición e independencia (V18), entre otros. Adicionalmente, en este nivel se utilizan elementos del lenguaje gráfico, como las cuadrículas al interior del triángulo (G2).

Adicional a los conceptos involucrados en la tarea (triángulo y área) en este segundo nivel se realiza la distinción del tipo de triángulo (D2) y se intenta proponer una generalización (D4); Por su parte, los procedimientos son un poco más sofisticados, en este sentido, se utiliza material tangible para configurar las figuras y buscar el área solicitada (PR3). Además, se aborda la diferencia entre la comprobación y la demostración (PR4).

A pesar de los intentos por avanzar en otro tipo de demostración y comprobación del área del triángulo y, aún cuando se utilizó un método que parecía resultar de manera diferente a lo usual, al final, la proposición que más se distingue en este nivel es del tipo PO4, que refiere a la expresión clásica del área de un triángulo como base por su altura dividido entre dos. El Argumento del tipo A6 es el que se reconoce en las propuestas de este nivel. Se intenta justificar mediante equivalencias de áreas, por ejemplo, el área del triángulo solicitado como la mitad de un paralelogramo. Un ejemplo de este tipo de argumentación, es posible identificarlo en la respuesta del Grupo 16. (Ver Figura 6)

Figura 6 – Propuesta solución Grupo 16



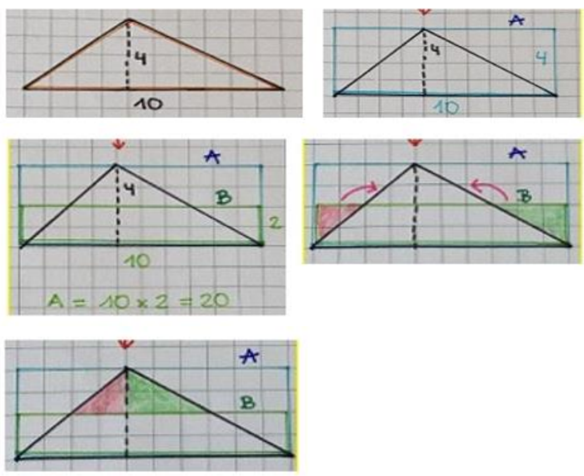

Fuente: Los autores.

Respecto a los tipos de conocimientos, se identifica respecto al *conocimiento común* el uso de una variedad más amplia de tipos de figuras geométricas, particularmente triángulos isósceles y escalenos. Se hace referencia a propiedades como la equivalencia, la composición y la descomposición de figuras. Por su parte, el *conocimiento extendido* está marcado por las relaciones que establecen los futuros maestros entre diferentes polígonos y cómo utilizan esto para el logro del objetivo de la actividad propuesta; las relaciones entre paralelogramos y triángulos y la configuración que realizan de estas figuras (incluso cuando no son las figuras que resuelven el problema, sino que permiten transitar hacia la solución) habla de un conocimiento diferenciador y extendido.

Por otra parte, respecto a los *conocimientos de tipo didáctico-matemático*, los pertenecientes a este nivel, presentan además de elementos epistémicos y cognitivos (conocimiento sobre las formas y sus características y propiedades), una tendencia al trabajo con material tangible, el dibujo como estrategia de solución y algunos elementos iniciales que refieren a las pruebas de tipo visual.

Finalmente, en el nivel alto, ejemplo genérico (N3), se encontró un cierto nivel de generalidad y una justificación más robusta, como el caso del grupo 12 (Figura 7), que argumenta: *“Hemos hecho una demostración visual porque el objetivo era que, mediante estrategias visuales y prácticas, se entendieran y demostraran evidencias lógicas, dando sentido o significando un hecho o teorema matemático. De esta manera la demostración tiene un valor más empírico ya que sirve como una verificación de una hipótesis…”*

Figura 7 – Propuesta Grupo 12




Fuente: Los autores.

La práctica matemática que caracteriza a las acciones del grupo ubicado en este nivel es P8. En este tipo de prácticas se diferencia entre una comprobación y una demostración visual. El grupo que accedió a este nivel comprobó de forma no usual el área de un triángulo y lo hizo además con un ejemplo genérico. Su lenguaje es más avanzado, como por ejemplo al incluir (L6) un triángulo escaleno para su propuesta de solución a la tarea planteada. Adicional a los procedimientos usuales que se encuentran en una primera etapa de su propuesta de solución, es posible distinguir también prácticas como PR7, pues el grupo propone una interpretación de la prueba visual como una demostración por pasos, la cual, además, se hace de manera general al seleccionar un tipo "cualquiera" de triángulo.

Los conocimientos identificados refieren de manera directa y evidencian saberes sobre las formas y su estructura, lo que permite por ejemplo el uso de triángulos no usuales como el triángulo escaleno y obtusángulo; un triángulo que normalmente no se utiliza dentro del trabajo escolar, dada su poca regularidad. El hecho de encontrar este tipo de triángulo para la generalización de la propiedad estudiada refiere a conocimientos tanto de tipo común como extendido, pues implica una comprensión de la geometría del nivel para el cual está planteada la tarea profesional, pero también de niveles superiores que permitió la emergencia de dicho tipo de razonamientos.

La propuesta presentada por el grupo 12 en la Figura 7, se constituye en una evidencia de diversos *conocimientos didáctico-matemáticos.* Es posible ver que el conocimiento de las formas geométricas (como el triángulo en este caso) está presente, lo que referiría a un elemento de tipo epistémico; sin embargo, el uso de una estructura no usual, la composición de colores, el paso a paso que se presenta, así como la demostración visual con soportes gráficos e indicaciones icónicas y no necesariamente algebraicas o verbales, refiere a un dominio superior de elementos de tipo mediacional, interaccional e incluso afectivos. Se esperaría que quien pertenezca a este nivel, logrará construcciones en las que la forma y sus propiedades fueran suficientes para el enunciado y demostración de una situación geométrica en particular.

**Respecto a las configuraciones epistémicas**

Ahora, la segunda parte de los resultados refiere a los elementos puntuales que fueron identificados en la configuración epistémica de la tarea en general. En este sentido, se encontró, en cuanto a las prácticas matemáticas, que los futuros maestros mayoritariamente desarrollan prácticas referidas a la situación con medidas determinadas (P1, P2, P3 y P5). Su actividad matemática se basa en seguir instrucciones y realizar procedimientos como contar y comprobar de forma aritmética que se cumple alguna propiedad, en este caso, el área del triángulo.

En relación con los procedimientos el 88,9% utilizan PR1 y PR2. Estos procedimientos se centran en el dibujo de triángulos en cuadriculas para obtener su área mediante conteo. El concepto más utilizado es el D1, relativo a los elementos de un triángulo como su altura y su base. Finalmente, las proposiciones que más aparecen son la PO1 (77,8%) y la PO2 (72,2%).

En cuanto al lenguaje verbal o gráfico, se constata el uso de las formas prototípicas y la alusión a términos triángulo (94,4%), triángulo rectángulo (83,3%), rectángulo (72,2%) área (100%) cuadrícula (88,9%) y conteo (83,3%). Sólo el grupo 12 justifica considerando distintos tipos de triángulos, y habla de "siempre" como expresión de los cuantificadores. En dos grupos más se muestran representaciones gráficas que buscan "alejarse" del triángulo rectángulo, pero no se explicita la generalidad.

El 55,6% de los grupos, usan argumentos como A1, A2, A3 y A5 (referidos al conteo, la comprobación aritmética del área y la justificación de área como equivalencia con la mitad de un rectángulo) para justificar cómo obtener el área del triángulo rectángulo.

En otros casos, se muestra como mitad de un paralelogramo, que luego se ve como equivalente a un rectángulo (27,7%). En estos grupos se sigue estrictamente la fórmula del área del triángulo como base por altura sobre dos y no se encuentra evidencia de que se entienda la fórmula como la longitud de la base por la mitad de la longitud de la altura. Cuatro grupos (22,2%) proponen procedimientos generalizables, con argumentos como A6 y A7, para validar sus explicaciones, aunque sea de forma implícita. Uno de estos grupos (Grupo 12) justifica su respuesta usando además el argumento A4. El grupo 14 usa un triángulo isósceles y el Grupo 16 usa dos casos (triángulo rectángulo isósceles y no isósceles). El uso de estos argumentos puede ser verificado en la Figura 6.

Estos grupos establecen equivalencias generales mediante descomposición y composición. El grupo 4 afirma que la simple verificación de uno o más ejemplos para el cálculo de área no permite generalizar la relación.

### Una propuesta integradora

Finalmente, como un elemento integrador, en esta tercera parte de los resultados se comentan aspectos referidos a los tipos de validación que en general fueron identificados en la población total, pues a través de la caracterización de los niveles de generalización utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico, se hizo posible la clasificación de las producciones de todos los grupos. En este sentido, se constata que el 83,3% de los grupos realizan justificaciones que se sitúan en el empirismo ingenuo (N1). Estos grupos sustentan la validez de sus respuestas en la verificación de la relación en algunos casos con medidas particulares o bien no llegan a justificar la relación. Y se basan en la comprobación aritmética. Un 11,2% de los grupos propone justificaciones que pueden identificarse con la noción de ejemplo crucial (N2). Estos grupos, verifican sus proposiciones en un caso o dos, asumiendo que, si la relación se cumple en dicho caso, funcionará siempre. Algunos de los grupos en esta segunda categoría (grupo 4, grupo 14 y grupo 16) se separan del ejemplo inicial (triángulo rectángulo) y hacen comprobaciones en otro tipo de triángulos (ver Figura 2). Finalmente, se encuentra que sólo un grupo (grupo 12) es asignado al N3 de generalización, ejemplo genérico. En efecto, este grupo selecciona un caso “genérico” (triángulo obtusángulo escaleno) y explica sus razones mostrando diversas transformaciones para justificar la validez de la relación: el área de un triángulo equivale a multiplicar la base por la mitad de su altura (Figura 2). El grupo G12, es el único que consigue visualizar el área del triángulo como producto de la base por la mitad de la altura, estableciendo paso a paso una descomposición y composición en el caso de un triángulo escaleno como ejemplo genérico.

## CONSIDERACIONES FINALES

El análisis realizado (elementos de la configuración epistémica-niveles de generalización) ha permitido caracterizar el conocimiento matemático de los futuros maestros, particularmente el relacionado con los procesos de validación. Se ha observado que las prácticas, argumentos y estrategias visuales puestas en acción por los futuros maestros mayoritariamente son las correspondientes a un empirismo ingenuo. Un único grupo supera la simple comprobación empírica como forma de validación.

Balacheff (1987) indica que la expresión de una experiencia mental, refiriendo a la última categoría de su clasificación (ejemplo genérico) requiere construcciones cognitivas y lingüísticas complejas. Quizás eso explica que en nuestro estudio solo un grupo se ubica en dicha categoría.

Se constata un conocimiento débil de los futuros maestros respecto a la demostración, así como la complejidad Ontosemiótica al relacionar los procesos de argumentación, visualización y prueba (FERNÁNDEZ, 2013; HAJ-YAHYA; HERSHKOWITZ, 2013).

En relación con el conocimiento común, se constata que la apariencia perceptual es uno de los elementos dominantes cuando se quieren abordar diferentes aspectos conceptuales (BERNABEU et al., 2017; GONZATO et al., 2011), coincidimos con estos autores, en tanto el primer nivel de generalización agrupa la mayoría de los trabajos de los futuros maestros; esto es una muestra de que, el uso de figuras prototípicas y en posición típica, basados en la apariencia más estudiada de los triángulos (triángulos rectángulos con base en su lado más corto) domina los análisis y el trabajo geométrico que se buscaba desarrollar.

Por otra parte, respecto al conocimiento extendido, reiteramos uno de los resultados presentados en Vargas et al. (2023) en tanto, la falta de conocimientos comunes hace que los futuros maestros tengan dificultades para avanzar a otros niveles y estadios del conocimiento. En este sentido, el desconocimiento de diferentes casos (que implicaría el uso de diferentes tipos de triángulos como el isósceles o escaleno) impide el avance en el proceso de generalización y por ende mantiene a los futuros maestros y a sus producciones en el nivel N1 de los anteriormente definidos.

La tarea profesional implementada con los futuros maestros da cuenta de sus conocimientos profesionales, tanto matemáticos como didácticos y reitera la importancia de desarrollar e implementar este tipo de actividades en los procesos de formación de futuros maestros, en tanto, al enfrentarlos a situaciones en donde no se posee la totalidad de los conocimientos necesarios para la solución o, aquellas en que se requiere una experimentación y deconstrucción de los saberes previamente establecidos, se obliga al futuro maestro a seleccionar y movilizar diferentes conocimientos en pro del logro de una solución correcta y efectiva.

Respecto a las herramientas del Enfoque Ontosemiótico, consideramos que son fundamentales y permitieron justificar de manera concreta elementos que parecieran ser simplemente perceptivos. El amplio marco teórico que se ha definido, así como la descripción de sus herramientas de análisis, permite que investigaciones como esta, en las que se utilizan herramientas de diversos planteamientos teóricos, se puedan consolidar y llevar a buen término, mediante el diálogo y conexión entre teorías.

Se reconoce la limitación de la mirada sobre el trabajo en grupo en cuanto no ha permitido reportar resultados individualizados. Se espera seguir profundizando en el tema del uso de procesos visuales, analizando su significado, para brindar oportunidades de aprendizaje a los futuros maestros de manera que consideren estos procesos como una herramienta poderosa para estudiar la validez de las afirmaciones matemáticas y la necesidad de involucrar al alumnado en este tipo de actividad matemática desde la educación primaria.

Finalmente, Consideramos que este tipo de estudios son relevantes, en tanto la descripción y caracterización de los conocimientos que se ha realizado, así como los análisis dentro de los tipos de validación en relación con el proceso geométrico de argumentación, sirven como punto de partida para propuestas de mejora en torno a los procesos formativos; así como también, desarrollan en los participantes de la investigación, conocimientos nuevos, competencias y procesos que normalmente no se desarrollan en modelos clásicos para la enseñanza de la geometría, aportando de esta manera al proceso mismo de formación en el cual están insertos.

## AGRADECIMIENTOS

Este estudio fue desarrollado en el marco de los proyectos: 72220049 financiado por ANID/PFCHA Chile; PID2021-127104NB-I00 financiado por MICIU/AEI/10.13039/501100011033/ y por "FEDER Una manera de hacer Europa" y PID2019-104964GB-I00MICINN

## REFERENCIAS

BALACHEFF, N. Processus de preuves et situations de validation. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l], v. 18, n. 2, p. 147 – 176. 1987. https://doi.org/10.1007/BF00314724

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas, Una empresa docente**. Bogotá: Univ. de Los Andes. 2000.

BALL, D.; LUBIENSKI, S.; MEWBORN, D. Research on teaching mathematics. The unsolved problem of researchers´ mathematical knowledge. In V. Richarson (Ed.) **Handbook of Research on Teaching** (pp. 433-456), Washington D. C.: American Educational Research Association, 2001.

BAKKER, A.; HOFFMANN, M. Diagrammatic Reasoning as the Basis for Developing Concepts: A Semiotic Analysis of Students' Learning about Statistical Distribution. **Educational Studies in Mathematics**, [s.l], v. 60, p. 333 – 358. 2005. https://doi.org/10.1007/s10649-005-5536-8

BERNABEU, M.; LLINARES, S.; MORENO, M. Características de la comprensión de figuras geométricas en estudiantes de 6 a 12 años. En J. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XXI** (pp. 157–166). Zaragoza: SEIEM, 2017.

CLEMENTE, F.; LLINARES, S. Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestros en la resolución de problemas de geometría. **Enseñanza de las ciencias**, [s.l], v. 33, n. 1, p. 9–27. 2015. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1332

CONNER, A.; SIGLETARY, L.; SMITH, R.; WAGNER, P.; FRANCISCO, R. (2014). Identifying kinds of reasoning in collective argumentation. **Mathematical Thinking and Learning**, [s.l], v. 16, n. 3, p. 181 – 200. 2014. https://doi.org/10.1080/10986065.2014.921131

CRESPO, C.; FARFAN, R. Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. **RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 8, n. 3, p. 287–317. 2005

DA SILVA, J. As relações entre área e perímetro na geometria plana: o papel dos observáveis e das regulações na construção da explicação. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Río Claro, v. 22, n. 34, p. 81 – 104. 2009.

DE CASTRO, C.; MOLINA, E.; GUTIÉRREZ, M. L.; MARTÍNEZ, S.; ESCORIAL, B. Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. **Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, Canarias, v. 80, p. 53 – 70. 2012.

ESTRELLA, S.; OLFOS, R.; MORALES, S.; VIDAL, P. Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas. **RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 20, n. 3, p. 345–370. https://doi.org/10.12802/relime.17.2034

FLORES, C.; GÓMEZ, A.; FLORES, Á. Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 12, n. 2, p. 22–42, jul/dic. 2010.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in mathematics education. **ZDM – Mathematics Education**, Berlin, v. 39, n. 1–2, p. 127–135, mar. 2007. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

GODINO, J D.; BATANERO, C.; FONT, V.; GIACOMONE, B. Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XX** (pp. 285 – 294). Málaga: SEIEM, 2016.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. **For the learning of Mathematics**, [s.l], v. 39, n. 1, p. 38 – 43. 2019.

GODINO, J.; RIVAS, M.; CASTRO, W.; KONIC, P. Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. **Acta de la VII Jornadas de Educación Matemáticas Región de Murcia**. Murcia: Centro de profesores y recursos, 2008.

GONZATO, M.; GODINO, J.; NETO, T. Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. **Educación Matemática**, [s.l], v. 23, n. 3, p. 5–37, 2011.

GINSBURG, A.; LEINWAND, S.; ANSTROM, T.; POLLOCK, E. **What the United States Can Learn from Singapore's World-Class Mathematics System (and What Singapore Can Learn from the United States): An Exploratory Study**. Washington: American Institutes for Research. 2005.

GUTIÉRREZ, A. La investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría, en Flores, P.; Ruiz, F.; De la Fuente, M. (Eds.), **Geometría para el siglo XXI** (pp. 13 – 58). Badajoz: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2006.

HANNA, G.; SIDOLI, N. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives, **ZDM – Mathematics Education**, Berlin, v. 39, p. 73 – 78. 2007. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0005-0

HAJ-YAHYA, A.; HERSHKOWITZ, R. When visual and verbal representations meet-The case of geometrical figures. In Lindmeier, A.M., Heinze, A., (Eds.), **Proceedings of the 37th**

**Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** (pp. 409–416). Kiel: PME, 2013.

HERNÁNDEZ, R.; FERNÁNDEZ, C.; BAPTISTA, P. **Metodología de la Investigación**. México D.F.: McGraw-Hill. 2010.

HILL, H.; BALL, D.; SCHILLING, S. Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers´ topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**. V. 39, p. 372 – 400. 2008.

LLINARES, S. Construir el conocimiento necesario para enseñar matemática: Prácticas sociales y tecnología. **Evaluación e Investigación**, v. 3, n. 1, p. 7 – 30. 2008.

Llinares, S.; Breda, A.; Climent, N.; Fernández, C.; Font, V.; Lupiáñez, J.; Moreno, M.; Perez-Tyteca, P.; Ruiz-Hidalgo, J.; Sánchez, A. Formación y desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En Blanco, L.; Climent, N.; González, M.; Moreno, A.; Sánchez-Matamoros, G.; De Castro, C.; Jiménez-Gestal, C. (Eds.), **Aportaciones al desarrollo del currículo desde la Investigación en educación matemática** (pp. 481-530). Granada: Universidad de Granada, 2022.

MACAGNO, F.; MAYWEG-PAUS, E.; KUHN, H. Argumentation Theory in Education Studies: Coding and Improving Students' Argumentative Strategies, **Educational Studies in Mathematics**, [s.l], v. 34, p. 523–537, 2015. DOI 10.1007/s11245-014-9271-6

MOLINA, O.; FONT, V.; PINO-FAN, L. Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, v. 37, n. 1, p. 93–116, mar. 2019. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484

MONTOYA, E. El proceso de prueba en el espacio de trabajo geométrico: profesores en formación inicial. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, v. 32, n. 3, p. 227–247, nov. 2014. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1049

PEDEMONTE, B.; BALACHEFF, N. Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the ck¢-enriched Toulmin model. **Journal of Mathematical Behavior**, [s.l], v. 41, p. 104 – 122, 2016.

PINO-FAN, L.; ASSIS, A.; CASTRO, W. Towards a Methodology for the Characterization of Teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. **EURASIA J. Math. Sci. Technol. Educ**, [s.l], v. 11, p. 1429 – 1456. 2015. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

PRIOR, J.; TORREGROSA, G. Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. **RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 16, n. 3, p. 339–368, nov. 2013. https://doi.org/10.12802/relime.13.1633

SAORÍN, A.; TORREGROSA, G.; QUESADA, H. Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. **RELIME – Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa**, Ciudad de México, v. 22, n. 2, p. 213–244. 2019. https://doi.org/10.12802/relime.19.2224

TOULMIN, S.; RIEKE, R.; JANIK, A. **An Introduction to Reasoning**. New York, USA: Macmillan Publishing Company, 1984.

VARGAS J.; VANEGAS, Y.; GIMÉNEZ J. Análisis de conocimientos didáctico-matemáticos sobre clasificación de poliedros en futuros profesores de educación primaria. **Revista Paradigma,** *[S. l.],* v. 44, n. 4, p. 293 – 320, 2023. 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p293-320.id1404

YIN, R. **Case Study Research: design and methods**. Sage Publications. 2014.