Artigo Original

Conversion Symbolique–Langage Naturel D'Expressions Ensemblistes Chez Des Élèves Tunisiens

Symbolic-Natural Language Conversion of Ensemblistic Expressions in Tunisian Pupils

Imed **KILANI**
Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue, Tunisie.

Correspondance de l'auteur :
kilanis2006@yahoo.fr

RÉSUMÉ
Bien que le langage symbolique soit fondamental en mathématiques et dans son enseignement, il est important de l'introduire avec précaution dans les activités scolaires. Il doit être accompagné d'explications verbales pour rendre les concepts mathématiques abstraits plus accessibles. La capacité à convertir les connaissances du langage symbolique en langage naturel, et inversement, est une compétence essentielle à développer chez les élèves (Pólya, 1989 ; Delavault, 1977 ; Duval, 1993, 1995 ; Bronckart, 2007 ; Hache, 2013). Cette étude examine comment des élèves tunisiens poursuivant un cursus scientifique, âgés de 17 à 18 ans, convertissent des expressions mathématiques symboliques en langage naturel français. Les expressions étudiées portent sur les relations d'intersection et d'union entre ensembles, y compris l'ensemble vide. La conversion nécessite une explicitation de la quantification implicite, en utilisant une terminologie accessible pour une meilleure compréhension. Les résultats expérimentaux montrent que de nombreux élèves rencontrent des difficultés pour effectuer cette conversion, notamment pour expliciter et convertir la quantification implicite en français. De plus, l'analyse révèle leur difficulté à saisir le sens global de la situation proposée, en partie due à leur incapacité à comprendre et à convertir correctement des expressions symboliques simples en langage naturel, ainsi qu'à la multiplicité des conditions à considérer. Ces difficultés sont probablement accentuées par leur faible niveau en français.

Mots-clés : Langage symbolique, Langage naturel, Conversion.

ABSTRACT
Although symbolic language is fundamental in mathematics and its teaching, it is important to introduce it cautiously in educational activities. It should be accompanied by verbal explanations to make abstract mathematical concepts more accessible. The ability to convert knowledge from symbolic language to natural language, and vice versa, is a crucial skill to develop in students (Pólya, 1989 ; Delavault, 1977 ; Duval, 1993, 1995 ; Bronckart, 2007 ; Hache, 2013). This study examines how Tunisian students pursuing a scientific curriculum, aged 17 to 18, convert symbolic mathematical expressions into natural French language. The expressions studied involve relationships of intersection and union between sets, including the empty set. The conversion requires an explicit explanation of the implicit quantification, using accessible terminology for better understanding. The experimental results show that many students encounter difficulties in performing this conversion, particularly in making implicit quantification explicit and converting it into French. Additionally, the analysis reveals their struggle to grasp the overall meaning of the proposed situation, partly due to their inability to understand and correctly convert simple symbolic expressions into natural language,

Recebido em: **07/10/2024** | Aprovado em: **15/11/2024**

as well as the multiple conditions to consider. These difficulties are likely exacerbated by their low level of proficiency in French.

Keywords: Symbolic language, Natural language, Conversion.

INTRODUCTION

Les expressions symboliques jouent un rôle crucial en mathématiques en représentant des concepts et des relations entre objets mathématiques. Elles incarnent des idées souvent abstraites et véhiculent des significations complexes et multiples (Kline, 1980 ; Bloch, 2008 ; Leng, 2010). Contrairement au langage naturel, généralement intuitif, le langage symbolique exige une compréhension approfondie. La complexité syntaxique et sémantique de certaines expressions symboliques en mathématiques pose un défi majeur à beaucoup d'élèves, rendant leur interprétation difficile. Les élèves doivent non seulement saisir le sens de chaque symbole pris isolément, mais aussi comprendre l'ensemble de l'expression en tenant compte des interactions entre les différents symboles. Pour aider ces élèves, il est essentiel d'accompagner le langage symbolique d'explications verbales (Delavault, 1977 ; Duval, 1993 ; Chesnais et Coulange, 2022 ; Duval et Pluvinage, 2016). Ces explications devraient clarifier les ambiguïtés, facilitant ainsi la compréhension des concepts mathématiques.

Dans cette recherche, nous avons étudié la capacité des élèves tunisiens poursuivant un cursus scientifique, âgés de 17 à 18 ans, à convertir en langage naturel français[1] des expressions mathématiques symboliques, mettant en jeu des relations simples d'intersection et de réunion entre ensembles. L'expérimentation porte sur un cas concret d'application directe de la notion de « partition »[2] d'un ensemble.

Cet article est structuré en trois parties principales. La première présente un aperçu des avantages et des inconvénients du langage symbolique en mathématiques. La deuxième examine la complexité du passage du langage symbolique au langage naturel et introduit une grille d'analyse pour classifier les différents types de conversion des expressions symboliques impliquant des relations élémentaires entre ensembles finis. La troisième partie décrit une expérimentation réalisée avec soixante-dix-huit élèves tunisiens, suivie d'une analyse approfondie de leurs réponses et des résultats obtenus. L'article se conclut par une discussion générale sur les résultats de l'étude.

SYMBOLISME MATHÉMATIQUES: AVANTAGES ET INCONVÉNIENTS

Le symbolisme mathématique, bien qu'il n'ait pas été une composante essentielle des mathématiques dans l'Antiquité, a gagné en importance au fil du temps. Son développement en tant qu'outil formel majeur a réellement commencé à la Renaissance et s'est affiné au cours des siècles suivants. Des mathématiciens renommés tels que Peano, Viète, Descartes, Newton, Cantor, Zermelo et Leibniz ont introduit de nouveaux symboles et notations pour représenter des concepts abstraits et formaliser des idées complexes. Par exemple, Peano, célèbre pour ses contributions à la logique mathématique et à la théorie des nombres, a également marqué la théorie des ensembles avec ses innovations en notation. En 1889, dans son ouvrage *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita*, il introduit les symboles « ∪ » pour l'union des ensembles et « ∩ » pour leur intersection. Ces symboles ont été rapidement adoptés et se sont imposés comme des standards dans la théorie des ensembles ainsi que dans les mathématiques modernes. Au fil des siècles, l'évolution du symbolisme a révolutionné les mathématiques (Massa Esteve, 2012), permettant d'exprimer des idées avec une précision et une concision largement supérieures à celles du langage naturel. Les symboles et notations nouvellement introduits et en constante évolution, ainsi que les concepts formels, ont grandement facilité la manipulation

[1] En Tunisie, le français est une langue seconde privilégiée enseignée dans les écoles publiques à partir de la troisième année de l'école primaire.

[2] Une partition d'un ensemble E en trois sous-ensembles est une décomposition de cet ensemble en trois parties distinctes U_1, U_2 et U_3 telles que $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ et $U_3 \neq \emptyset$, $U_1 \cap U_2 = U_1 \cap U_3 = U_2 \cap U_3 = \emptyset$, et $U_1 \cup U_2 \cup U_3 = E$.

CEMeR - Caminhos da Educação Matemática em Revista • 2025 • Ano XII • v. 15 • p. 68 - 86 • ISSN 2358-4750
Recebido em: 07/10/2024 | Aprovado em: 15/11/2024

et la compréhension des idées mathématiques complexes (Laborde, 1982 ; Delavault, 1977). Grâce à ces évolutions les mathématiques ont acquis une véritable dimension universelle, transcendant les barrières linguistiques et favorisant la communication entre mathématiciens du monde entier. Elles ont également renforcé la rigueur des raisonnements et des démonstrations en réduisant les ambiguïtés, stimulant ainsi le progrès des mathématiques et contribuant au développement de théories majeures telles que la théorie des ensembles, la théorie des groupes, la théorie des nombres, ainsi que le calcul différentiel et intégral.

Le symbolisme a également permis d'aborder des concepts difficiles à appréhender dans le monde physique, tels que les nombres imaginaires, les espaces vectoriels abstraits et les structures algébriques. En associant ce symbolisme à ces concepts complexes, on les rend plus accessibles, ce qui facilite leur étude et leur application dans divers domaines des mathématiques.

Cependant, la concision inhérente aux symboles et aux expressions symboliques peut présenter des défis considérables pour les non-experts, en particulier pour les élèves. En condensant une quantité importante d'information en une forme abstraite, ces symboles peuvent devenir difficiles à interpréter et sembler cryptiques. Ainsi, bien que le développement du symbolisme en mathématiques vise à simplifier et structurer l'information, il peut paradoxalement compliquer la compréhension des concepts mathématiques pour certains apprenants. Cette difficulté nécessite souvent d'intégrer des explications détaillées et des stratégies didactiques adaptées pour surmonter les obstacles et faciliter l'apprentissage (Radford, 2008 ; Pólya, 1989). Dans son ouvrage *Comment poser et résoudre un problème*, Pólya (1989) souligne l'importance de trouver un équilibre entre l'utilisation systématique du symbolisme mathématique et la fourniture d'explications claires et appropriées. Il précise que, bien que le symbolisme soit un outil puissant pour représenter des concepts complexes, il ne suffit pas à garantir une compréhension approfondie des idées. Selon lui, intégrer le langage naturel est crucial pour fournir un contexte significatif, rendant ainsi les expressions symboliques et les idées abstraites plus accessibles aux apprenants. Des recherches plus récentes, comme celles de Vlassis (2010), Duval et Pluvinage (2016), ainsi que Chesnais et Coulange (2022), confirment cette approche. Elles montrent qu'une compréhension approfondie des concepts mathématiques par les apprenants nécessite de clarifier les notations et les expressions symboliques par des explications verbales détaillées. Ces clarifications jouent un rôle crucial dans la décomposition des informations complexes et condensées, dans l'établissement de connexions avec les connaissances préexistantes, et dans la prévention des erreurs d'interprétation dues à l'abstraction des symboles seuls. En intégrant le langage naturel avec le symbolisme mathématique, les élèves peuvent mieux saisir les relations entre les concepts, développer une compréhension plus intuitive, et maîtriser plus efficacement les expressions symboliques complexes.

En conclusion, bien que le symbolisme mathématique offre de nombreux avantages en termes de concision, de précision et de rigueur, il présente également des défis pour les apprenants. Trouver un équilibre entre l'utilisation des symboles et les explications verbales est essentiel pour garantir une compréhension plus approfondie et intuitive des concepts mathématiques.

DU LANGAGE SYMBOLIQUE AU LANGAGE NATUREL

Une formulation syntaxiquement et sémantiquement correcte, alignée avec les normes mathématiques, est essentielle pour refléter une compréhension approfondie et une conceptualisation claire des idées mathématiques. Cette compétence joue un rôle central dans le raisonnement mathématique et la communication des concepts. Formuler des énoncés mathématiques avec précision et clarté n'est pas simplement une question de syntaxe ou de sémantique; cela témoigne d'une compréhension profonde des concepts sous-jacents. Duval (2006) souligne l'importance des conversions entre registres sémiotiques dans l'apprentissage des mathématiques, où chaque registre (symbolique, graphique, langagier, etc.) a ses propres règles de syntaxe et de sémantique. La maîtrise de ces conversions nécessite une formulation correcte pour assurer que l'information soit correctement transmise et interprétée dans chaque registre. Une formulation correcte des énoncés mathématiques selon les normes établies permet non seulement de communiquer des idées de manière précise, mais aussi de structurer la pensée mathématique de manière rigoureuse. Selon Chevallard (1991), la transposition didactique implique de rendre les savoirs mathématiques accessibles et compréhensibles, ce qui nécessite une formulation claire et précise. Une bonne formulation syntaxique et sémantique est donc un indicateur de la capacité à conceptualiser des idées mathématiques de manière structurée et rigoureuse.

Bien qu'il soit parfois porteur d'ambiguïtés, le registre de la langue naturelle est essentiel pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Il présente des particularités distinctes qui le différencient des autres registres sémiotiques:

• Il est le plus accessible et le plus familier aux apprenants, car c'est le registre qu'ils utilisent quotidiennement pour communiquer et penser.

• Souvent, il sert de point de départ pour introduire de nouveaux concepts mathématiques avant de les convertir dans des registres plus formels et abstraits.

• Il permet aux apprenants de réfléchir naturellement sur leurs propres processus de pensée et de résolution de problèmes, jouant ainsi un rôle crucial dans la métacognition. Cela aide les élèves à prendre conscience de leur compréhension et de leurs stratégies (Sfard, 2008; Duval, 1995).

• Il est essentiel pour discuter, argumenter et négocier verbalement les significations des concepts mathématiques dans un contexte d'apprentissage, jouant donc un rôle discursif fondamental dans l'enseignement des mathématiques. Il facilite la communication, l'explication, la réflexion et la conceptualisation des idées mathématiques (Sfard, 2008).

• Il permet de relier verbalement les différentes représentations, facilitant ainsi la compréhension des relations entre elles (Duval, 1995).

Bien que les mathématiques modernes reposent largement sur le symbolisme, la langue naturelle est essentielle dans l'enseignement. Elle rend les concepts de base plus accessibles et aide les apprenants à comprendre les idées mathématiques en convertissant des expressions symboliques complexes en termes plus familiers. Cette approche permet de susciter l'intérêt des élèves et de réduire leur appréhension face aux symboles abstraits.

Les expressions symboliques peuvent devenir particulièrement complexes lorsqu'elles intègrent plusieurs concepts, tels que les ensembles, les sous-ensembles, et les opérations ensemblistes comme l'union, l'intersection et la différence. Pour rendre la théorie des ensembles plus accessible et concrète, les enseignants peuvent recourir à des exemples pratiques, tels que la modélisation de groupes de personnes, de collections de données ou de catégories d'objets. En illustrant ces concepts avec des situations réelles, les enseignants permettent aux élèves de saisir non seulement le sens des symboles, mais aussi leurs interactions au sein d'expressions complexes. Cette approche rend les mathématiques plus vivantes et pertinentes, facilitant ainsi une compréhension plus approfondie des relations entre les concepts et des applications pratiques. Par exemple, en utilisant des groupes de personnes ayant des caractéristiques communes ou en manipulant des ensembles de données réels, les élèves peuvent visualiser comment les opérations ensemblistes se convertissent dans des contextes familiers, ce qui renforce leur compréhension et leur engagement envers la matière. Cependant, Duval et Pluvinage (2016) soulignent que la conversion entre registres sémiotiques et langage naturel n'est pas toujours transparente. Les symboles mathématiques, chargés d'informations implicites, révèlent souvent des phénomènes de non-congruence entre le langage naturel et leurs représentations. Ce décalage cognitif met en lumière la complexité des représentations symboliques. Par exemple, l'expression $A \cup B = C$, où A, B et C sont des ensembles, ne montre pas la quantification universelle implicite. Pour clarifier, on peut convertir cette expression en langage naturel comme suit : « L'ensemble C contient exactement tous les éléments qui sont dans l'ensemble A ou dans l'ensemble B, et seulement ceux-là ». Formulée de manière plus explicite, cela devient : « Pour tout élément x, x appartient à C si et seulement si x appartient à A ou x appartient à B ». Symboliquement, cela s'écrit : $\forall x(x\in C \Longleftrightarrow (x\in A \text{ ou } x\in B))$. Ainsi, bien que l'expression « $A\cup B=C$ » puisse sembler simple, elle dissimule des détails importants notamment sur la quantification universelle nécessaire pour une compréhension plus complète. Certains apprenants peuvent ne pas reconnaître immédiatement que ces expressions impliquent une vérification pour tous les éléments possibles, surtout en l'absence de termes explicites comme « chaque » ou « pour tout ». Cette explicitation de la quantification est cruciale pour une compréhension mathématique correcte de la signification de l’expression symbolique. Des difficultés similaires sont parfois observées même chez des étudiants scientifiques (Durand-Guerrier, 1996 ; Chellougui, 2009).

Certains travaux en didactique des mathématiques (Najar, 2010 ; Mesnil, 2014) ont mis en lumière les difficultés que rencontrent certains étudiants, notamment à leur entrée à l’université, lorsqu’il s’agit de manipuler des écritures symboliques mathématiques mettant en jeu des relations entre ensembles. Dans ce contexte, Najar (2010) souligne que les élèves, d'une année à l'autre, sont contraints de manipuler des notions et des symboles introduits de manière ad hoc, souvent sans qu'une véritable réflexion sur leur sens ne soit menée. L'absence de moments d'étude consacrés à la compréhension des concepts ensemblistes et logiques, ainsi qu'à l'utilisation du symbolisme associé, conduit à des résultats d'apprentissage insatisfaisants. Par ailleurs, Mesnil (2014) note que l’opération d’intersection est souvent mal comprise, en partie à cause de sa relation avec la conjonction logique « et », qui peut prêter à confusion. Ces observations mettent en évidence l’importance de développer des dispositifs didactiques spécifiques favorisant une compréhension approfondie des notions fondamentales de la théorie des ensembles et de la logique, ainsi qu’une utilisation adéquate du symbolisme mathématique.

Cependant, ces études n’insistent pas explicitement sur l'importance de l'expression des écritures symboliques dans le registre de la langue naturelle comme moyen d'accéder à une meilleure compréhension de leur sens. À cet égard, Pólya (1989) souligne qu'avant d'appliquer des raisonnements formels, il est essentiel de commencer par analyser les expressions symboliques dans un langage naturel. Cette étape de réflexion, qui consiste à convertir les idées en termes plus familiers et compréhensibles, ne se limite pas à être une simple introduction ; elle constitue plutôt une base solide pour l'application de techniques mathématiques plus avancées. Pour les jeunes apprenants, cette approche est particulièrement cruciale, car elle réduit non seulement le risque de malentendus, mais elle favorise également une compréhension plus claire des concepts. Cela leur permet de mieux structurer leur pensée et de résoudre les problèmes de manière plus efficace et méthodique, préparant ainsi le terrain pour des apprentissages futurs plus complexes. La conversion en langage naturel des expressions symboliques enrichit cette compréhension et facilite la transition vers une meilleure conceptualisation des notions mathématiques, notamment celles qui sont sous-jacentes. La capacité à naviguer entre le langage naturel et le symbolisme mathématique est un atout essentiel pour le développement cognitif des jeunes apprenants.

Dans le cas d’une expression mettant en relation des ensembles et les symboles mathématiques union ($\cup$), intersection ($\cap$), différence ($-$), égalité ($=$), inégalité ($\neq$), et ensemble vide ($\emptyset$), qui désignent les opérations et relations en théorie des ensembles, nous pouvons distinguer deux niveaux de conversion en langage naturel ; le niveau littéral et le niveau interprétatif :

- **Niveau littéral**: À ce niveau, les expressions symboliques sont reformulées en langage naturel en utilisant des termes appropriés associés aux symboles présents dans les expressions. Ces symboles sont décrits de manière directe, sans interprétation ni explication supplémentaire de leur signification dans le contexte de leur interaction. Cette approche vise à conserver la structure originale des expressions tout en rendant leur contenu accessible, mais elle peut limiter la compréhension des concepts sous-jacents. En conséquence, bien qu'elle facilite la lecture des symboles, elle n'offre pas une vue d'ensemble des relations et des implications qui émergent de leur combinaison. Par exemple, l'expression symbolique $V \cap F = \emptyset$ où V et F sont des ensembles d'élèves pratiquant respectivement le volley et le foot, se convertie littéralement par : « L'intersection de l'ensemble V et de l'ensemble F est égale à l'ensemble vide ». Cette conversion est fidèle au lexique mathématique, mais ne fournit pas une compréhension approfondie de ce que cela signifie dans le contexte de ces élèves. Elle reste centrée sur la manière dont les symboles sont utilisés, sans révéler le sens profond de l'expression.

- **Niveau interprétatif:** À ce niveau, l'expression symbolique est convertie en termes concrets et explicites, révélant la signification derrière les symboles ainsi que les concepts sous-jacents. Par exemple, la phrase « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » contextualise l'expression mathématique $V \cap F = \emptyset$, clarifiant que les ensembles V et F n'ont aucun élément en commun. Cette conversion permet d'accéder à une compréhension plus profonde en intégrant la quantification et les relations entre les ensembles, des éléments essentiels pour guider le raisonnement mathématique (Schoenfeld, 1994). En éclairant les implications de l'interaction entre les symboles, cette approche aide les apprenants à atteindre un niveau de compréhension plus avancé en établissant des connexions significatives entre les concepts, renforçant ainsi leur capacité à raisonner de manière plus opérationnelle.

La distinction entre le niveau littéral et le niveau interprétatif dans la conversion des expressions symboliques en langage naturel est fondamentale en mathématiques. Le niveau littéral se concentre sur l'utilisation rigoureuse de la terminologie mathématique, offrant une conversion lexicale précise des opérations et des relations entre les ensembles. Cependant, ce niveau, bien qu'important, est souvent insuffisant pour une approche opérationnelle des mathématiques. À l'inverse, le niveau interprétatif converti les symboles en termes concrets et explicites, tenant compte des interactions entre eux et révélant des concepts mathématiques sous-jacents, tels que ceux liés à la quantification. Cette approche enrichit la compréhension et facilite l'opérationnalisation des expressions dans les activités mathématiques.

Face à une expression utilisant des symboles d'opérations et de relations en théorie des ensembles, il est important de reconnaître que la conversion peut être soit mathématiquement correcte, soit incorrecte. En combinant cette distinction avec les niveaux de compréhension littéral et interprétatif expliqués ci-dessus, nous pouvons identifier quatre types de conversion en langage naturel, chacun reflétant un niveau de compréhension :

- **Conversion Littérale Correcte (CLC)**: Dans cette conversion, la terminologie mathématique est appropriée pour décrire les symboles de l'expression. Cependant, elle ne révèle pas la signification profonde que cette expression peut dissimuler. Bien que la conversion respecte les termes associés, elle reste limitée, car elle ne permet pas d'accéder au sens mathématique qui émerge de l'interaction des symboles.
- **Conversion Littérale Incorrecte (CLI)**: Dans cette conversion, la terminologie mathématique employée est inappropriée pour décrire les symboles formant l'expression. Cette inexactitude révèle une confusion dans leur interprétation. De plus, la conversion ne cherche pas à dévoiler la signification profonde ou les concepts sous-jacents, ce qui fausse la compréhension des idées mathématiques qu'elle est censée transmettre.
- **Conversion Interprétative Correcte (CIC)**: Cette conversion va au-delà de la simple reformulation littérale en clarifiant la signification globale de l'expression et en mettant en lumière les concepts sous-jacents. Elle témoigne d'une compréhension approfondie des relations entre les symboles mathématiques, permettant de saisir les nuances et les implications. Par exemple, cette conversion explicite la quantification souvent dissimulée, rendant visibles les interrelations et les logiques qui gouvernent les symboles.
- **Conversion Interprétative Incorrecte (CII)**: Cette conversion tente d'interpréter l'expression symbolique, mais elle le fait de manière incorrecte. Cela peut découler d'une

mauvaise compréhension des concepts mathématiques sous-jacents ou d'une interprétation erronée de l'ensemble de l'expression. Elle met en lumière des faiblesses dans la compréhension des notions liées à la théorie des ensembles et des difficultés dans l'interprétation des symboles lorsqu'ils interagissent. Par exemple, elle illustre une tentative incorrecte de quantifier les éléments dissimulés, conduisant à une interprétation erronée des idées véhiculées par l'expression.

Les distinctions entre les différents niveaux de conversion des expressions nous amènent à élaborer une grille d'analyse adaptée aux expressions mettant en jeu des symboles d'opérations et de relations entre ensembles. Cet outil nous permettra d'analyser et d'évaluer les réponses des élèves ayant participé à notre expérimentation, où ils sont invités à convertir des expressions symboliques élémentaires en langage naturel. Il nous permettra d'évaluer leur capacité à saisir le sens profond des expressions, en tenant compte des interactions entre les symboles qui les composent et en explicitant les notions sous-jacentes.
Le tableau ci-dessous récapitule les différents types de conversions, avec leurs critères et évaluations spécifiques. Cette grille d'analyse permet d'apprécier, non seulement la précision terminologique des élèves, mais aussi leur capacité à saisir et expliciter le sens profond des expressions symboliques :

Tableau 1 : Niveaux de conversion en langage naturel des expressions symboliques impliquant des relations élémentaires entre ensembles

Type de conversion	Critères	Evaluation de la conversion
Conversion *Littérale* Correcte (CLC)	Usage correct de la terminologie mathématique relative aux symboles, sans explicitation de la quantification implicite dans l'expression globale	Correcte mais superficielle
Conversion *Littérale* Incorrecte (CLI)	Usage incorrect ou imprécis de la terminologie mathématique relative aux symboles, sans explicitation de la quantification implicite dans l'expression globale	Incorrecte et superficielle
Conversion *Interprétative* Correcte (CIC)	Expression correcte de la signification globale de l'expression symbolique, avec une explicitation juste de la quantification implicite	Correcte et profonde
Conversion *Interprétative* Incorrecte (CII)	Expression incorrecte de la signification globale de l'expression symbolique, avec une explicitation erronée de la quantification implicite	Incorrecte, bien qu'elle tente être profonde.

Source : L'auteur (2024)

Le paragraphe suivant décrira l'expérimentation que nous avons menée auprès des élèves tunisiens, en soulignant ses objectifs, sa méthodologie et les résultats obtenus. Cette expérimentation vise à évaluer la capacité des élèves à convertir en langage naturel des expressions symboliques élémentaires impliquant des ensembles. Elle vise également à analyser leur capacité à interpréter une situation qui représente une partition d'ensembles.

EXPÉRIMENTATION

L'expérimentation que nous avons menée a pour objectif d'évaluer la capacité de soixante-dix-huit élèves tunisiens, âgés de 17 à 18 ans inscrits dans un cursus scientifique, à convertir en langage naturel des expressions symboliques élémentaires mettant en jeu des ensembles. Par ailleurs, nous avons également cherché à analyser leur aptitude à interpréter une situation représentant une partition d'ensembles, en utilisant ces mêmes expressions. Les élèves ont été sélectionnés de manière aléatoire parmi deux lycées distincts : l'un situé à Tunis, la capitale, et l'autre dans une région du nord-ouest de la Tunisie. À cet âge et au regard de leur formation scientifique, nous considérons que les élèves devraient avoir acquis une bonne maîtrise des concepts fondamentaux, notamment les opérations d'union et d'intersection entre ensembles, ainsi qu'une compréhension des principes sous-jacents qui les régissent. Une telle maîtrise est essentielle pour leur permettre de résoudre des problèmes plus complexes et d'appliquer ces concepts dans divers contextes mathématiques. Cependant, comme le notent Duval et Pluvinage (2016), les programmes scolaires de mathématiques abordent rarement le travail explicite de conversion des expressions symboliques en langage naturel. Cette lacune souligne un manque de prise en compte des difficultés que certains élèves peuvent éprouver dans la compréhension du langage symbolique, difficultés qui se manifestent lorsque ces élèves doivent convertir ces expressions en langage naturel.

La notion de partition d'ensembles est profondément liée aux concepts d'union et d'intersection. Bien qu'elle puisse sembler abstraite et plus complexe que ces opérations fondamentales, elle repose sur une idée intuitive : décomposer un ensemble en sous-ensembles non vides et disjoints. Cette décomposition permet de mieux comprendre la structure des ensembles et d'explorer les relations entre leurs éléments. En effet, une partition offre une perspective claire et organisée, facilitant l'analyse des propriétés des ensembles tout en ouvrant la voie à des applications variées dans des domaines tels que la combinatoire, la théorie des graphes et la logique mathématique.

L'expérimentation se présente sous la forme d'un questionnaire dans lequel nous avons demandé à soixante-dix-huit élèves de répondre à deux questions ciblées. Tout d'abord, ils devaient convertir des expressions symboliques élémentaires en langage naturel, axées sur les relations entre ensembles. Ensuite, les élèves étaient invités à interpréter une situation courante impliquant la notion de partition d'un ensemble en trois sous-ensembles, et ce, sans avoir reçu d'instructions préalables à ce sujet. Pour accomplir cette tâche, ils devaient utiliser les expressions qu'ils avaient précédemment converties, ainsi qu'une autre expression symbolique essentielle pour garantir les conditions nécessaires à une situation mathématique de partition.

L'opération de conversion, qui témoigne d'une compréhension du sens des expressions symboliques, nécessite d'expliciter la quantification implicite qu'elles contiennent, car ces expressions sont par nature compactes. Cette concision peut engendrer des ambiguïtés dans les conversions, en particulier chez les élèves qui n'ont pas une maîtrise approfondie du langage symbolique.

Il convient de souligner que le questionnaire proposé est rédigé en français, qui est la langue d'enseignement des mathématiques au lycée en Tunisie. Cependant, l'arabe, en tant que langue maternelle, est également utilisée pour l'enseignement de plusieurs matières, y compris les mathématiques, au niveau primaire et au collège. De nombreuses études (Touati, 2011 ; Souilah, 2018) ont révélé les difficultés rencontrées par les élèves tunisiens pour s'exprimer correctement en français. Ainsi, en plus des défis liés à la conversion des expressions symboliques en formulations verbales, les élèves peuvent faire face à des obstacles linguistiques supplémentaires en répondant aux questions du questionnaire. En effet, la langue française utilisée pourrait limiter leur compréhension des consignes et leur capacité à répondre de manière précise, en raison de la barrière linguistique entre le français et l'arabe. Ben Nejma (2020) et Ben Kilani (2005) ont démontré que les tâches mathématiques deviennent plus complexes pour les élèves tunisiens lorsque les énoncés sont formulés en français. Cette barrière linguistique peut donc compliquer encore davantage le processus de conversion et d'interprétation des expressions symboliques.

Le questionnaire propose une enquête menée dans une classe (C) sur les sports pratiqués par les élèves. Les ensembles sont notés comme suit : V pour les élèves pratiquant le volley, F pour ceux pratiquant le football et B pour ceux pratiquant le basket.

Dans la première question, nous avons demandé aux élèves de traduire[3] en français les significations des expressions mathématiques suivantes : « $V\neq\emptyset$ », « $F\neq\emptyset$ », « $B\neq\emptyset$ », « $V\cap F=\emptyset$ », « $V\cap B=\emptyset$ » et « $B\cap F=\emptyset$ ». Les trois premières expressions indiquent que les sous-ensembles V, F, et B ne sont pas vides, ce qui représente une condition essentielle pour qu'ils forment une partition de l'ensemble C. Les trois dernières expressions montrent que ces sous-ensembles sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire qu'aucun des sous-ensembles ne

[3] Dans le questionnaire, nous avons choisi d'utiliser le terme « traduire » plutôt que « convertir », car de nombreux élèves tunisiens rencontrent des difficultés en français et pourraient ne pas bien comprendre le sens du mot « convertir ».

partage d'éléments avec un autre, ce qui constitue une autre condition nécessaire pour une partition. En détail, les expressions « $V \neq \emptyset$ », « $F \neq \emptyset$ », et « $B \neq \emptyset$ » signifient que chacun des ensembles V, F, et B contient au moins un élément. D'autre part, les expressions « $V \cap F = \emptyset$ », « $V \cap B = \emptyset$ » et « $B \cap F = \emptyset$ » indiquent que ces ensembles sont mutuellement exclusifs, c'est-à-dire qu'aucun élément n'est partagé entre eux. Par exemple, « $V \cap F = \emptyset$ » signifie que les ensembles V et F sont disjoints, ce qui implique qu'il n'y a aucun élève qui pratique à la fois le volley (V) et le football (F).

Les expressions « $V \neq \emptyset$ », « $F \neq \emptyset$ » et « $B \neq \emptyset$ » forment un groupe d'expressions ayant une structure syntaxique similaire. De même, les expressions « $V \cap F = \emptyset$ », « $V \cap B = \emptyset$ » et « $B \cap F = \emptyset$ » forment un autre groupe avec une structure syntaxique comparable. Cette similitude devrait conduire les élèves à donner des réponses syntaxiquement similaires pour les expressions de chaque groupe.

Il est important de noter que toutes ces expressions sont nécessaires pour répondre à la deuxième question. En effet, cette question demande aux élèves d'exprimer en langage naturel la signification de l'égalité ensembliste suivante : $B \cup F \cup V = C$, à condition que les conditions de la première question soient remplies :

- $B \cup F \cup V = C$ signifie que l'union des ensembles B, F, et V couvre entièrement l'ensemble C des élèves de la classe. Autrement dit, chaque élève de C appartient à au moins un de ces trois ensembles. Cela signifie que chaque élève de la classe C pratique au moins un sport parmi les trois sports basket, foot et volley.
- $V \neq \emptyset$, $F \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ indiquent que chaque ensemble V, F, et B contient au moins un élève. Cela signifie que les trois sports basket, foot et volley sont bien représentés dans la classe et chaque sport est pratiqué par au moins un élève.
- $V \cap F = \emptyset$, $V \cap B = \emptyset$ et $B \cap F = \emptyset$ signifient que les ensembles sont mutuellement exclusifs. C'est-à-dire que les ensembles B, F, et V sont disjoints (aucun élève n'appartient à plus d'un de ces ensembles). Cela signifie que chaque élève ne peut appartenir qu'à un seul ensemble parmi B, F, ou V. Cela garantit que chaque élève pratique exactement un sport.

Ainsi, une réponse correcte à la deuxième question doit intégrer les conclusions des trois points précédents, et la situation peut être décrite par la phrase suivante : « Dans cette classe, les trois sports sont pratiqués et chaque élève en pratique un et un seul ».

Il est à noter que, bien que les diagrammes de Venn puissent être utiles pour visualiser cette partition en illustrant les ensembles distincts et leur union couvrant l'ensemble C, aucun élève ne les a utilisés. Nous avons informé les élèves qu'ils pouvaient utiliser le verso de la feuille du questionnaire comme brouillon pour noter leurs réflexions et pour nous permettre de voir s'ils avaient eu recours à ces diagrammes. Cependant, le verso est resté vierge.

Nous analyserons les réponses des élèves en nous appuyant sur la grille d'analyse que nous avons précédemment construite.

Il convient de souligner qu'en raison de la grande diversité des réponses recueillies, nous nous concentrons uniquement sur les réponses les plus fréquemment enregistrées pour permettre une analyse plus ciblée et représentative. Il faut noter aussi que les réponses des élèves sont présentées telles qu'elles ont été rédigées par les élèves, incluant d'éventuelles erreurs linguistiques.

Analyse des réponses relatives aux expressions symboliques « $V \neq \emptyset$ », « $F \neq \emptyset$ », et « $B \neq \emptyset$ »

Concernant les expressions symboliques « $V \neq \emptyset$ », « $F \neq \emptyset$ » et « $B \neq \emptyset$ », qui partagent une structure syntaxique identique, nous avons observé que les élèves ont converti chacune d'elles en suivant un schéma syntaxique constant. Ce phénomène est à la fois attendu et naturel. Pour simplifier l'analyse et éviter les répétitions, nous nous concentrerons sur les résultats relatifs à la conversion de l'expression « $V \neq \emptyset$ ». Voici les résultats que nous avons enregistrés pour la conversion de cette expression :

a- Conversion Littérale Correcte (CLC)

Environ 36 % des élèves, soit 28 sur 78, ont donné une Conversion Littérale Correcte pour l'expression « $V \neq \emptyset$ ». Cela indique qu'ils ont utilisé correctement la terminologie mathématique relative aux symboles en jeu, signifiant que V n'est pas vide. Toutefois, bien que cette catégorie exprime la non-vacuité de l'ensemble V, elle ne garantit pas que l'élève comprend pleinement l'implication plus

CEMeR - Caminhos da Educação Matemática em Revista • 2025 • Ano XII • v. 15 • p. 68 - 86 • ISSN 2358-4750
Recebido em: 07/10/2024 | Aprovado em: 15/11/2024

profonde de la quantification implicite dans l'expression, c'est-à-dire l'existence d'au moins un élément dans l'ensemble V.

b- Conversion Littérale Incorrecte (CLI)

Environ 12 % des élèves, soit 9 sur 78, ont fourni une Conversion Littérale Incorrecte, révélant des incompréhensions sur la signification de « V≠∅ ». Par exemple, la réponse « V n'appartient pas à l'ensemble vide » (2) est incorrecte car elle implique une relation d'appartenance entre ensembles, ce qui serait approprié uniquement si V était un élément d'un ensemble d'ensembles. Ici, il est inexact de dire qu'un ensemble "n'appartient pas" à l'ensemble vide, puisque V est simplement un ensemble d'élèves. De même, la réponse « V est l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley » (2) ne convertie pas correctement la notion de non-vacuité, car elle définit V sans indiquer qu'il contient au moins un élève. De plus, l'expression « L'ensemble des élèves qui pratiquent le volley est différent de 0 » (2) est incorrecte, car l'expression « différent de 0 » se réfère à un nombre, tandis que « ∅ » représente un ensemble vide. Ainsi, cette formulation ne correspond pas à la terminologie mathématique appropriée pour décrire des ensembles et ne communique pas correctement la notion de non-vacuité. Ces exemples illustrent les difficultés que rencontrent certains élèves pour utiliser correctement la terminologie de base afin de décrire l'expression symbolique « V≠∅ ». Ils mettent en évidence des problèmes de compréhension ainsi qu'une incapacité à exprimer correctement le sens d'une expression symbolique aussi élémentaire que celle-ci.

c- Conversion Interprétative Correcte (CIC)

Environ 38 % des élèves, soit 30 sur 78, ont fourni une Conversion Interprétative Correcte pour l'expression « V≠∅ », indiquant qu'ils ont compris qu'elle signifie qu'il existe au moins un élément dans l'ensemble V. Les réponses telles que « Il y a des élèves qui pratiquent le volley » (21) et « V contient des élèves qui jouent au volley » (4) illustrent cette compréhension en convertissant correctement la non-vacuité de V en langage naturel. Ces conversions révèlent une maîtrise approfondie du concept de non-vacuité et de la quantification implicite, montrant la capacité de ces élèves à exprimer cette compréhension clairement.

d- Conversion Interprétative Incorrecte (CII)

Environ 14 % des élèves (11 sur 78) ont fourni une Conversion Interprétative Incorrecte, ce qui révèle des incompréhensions notables concernant la signification de « V≠∅ ». Ces erreurs sont souvent dues à des interprétations erronées de ce que l'expression implique réellement ou à des généralisations incorrectes. Par exemple, une réponse telle que « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent le volley dans cette classe » (5) contredit directement la signification de « V≠∅ », qui implique que l'ensemble V contient au moins un élément. Cette réponse exprime plutôt l'idée que « aucun élève ne pratique le volley », ce qui est l'opposé de l'existence d'éléments dans V. De même, la phrase « Les élèves qui pratiquent le volley n'appartiennent pas à les élèves de cette classe » (2) est problématique tant sur le plan grammatical que mathématique. En mathématiques, la notion d'appartenance concerne les éléments et non les ensembles eux-mêmes, et il est incorrect de parler d'ensembles d'éléments en termes d'appartenance à d'autres ensembles. Cette réponse semble suggérer à tort que les élèves pratiquant le volley ne font pas partie de la classe, ce qui est contraire à l'idée que « V≠∅ ». De plus, l'affirmation « Tous les élèves pratiquent le volley » (1) représente une généralisation excessive, introduisant une quantification universelle qui dépasse ce que l'expression « V≠∅ » implique.

Les réponses des élèves révèlent des difficultés importantes dans la compréhension de l'expression symbolique « V≠∅ ». Elles montrent des malentendus quant à la non-vacuité d'un ensemble et des confusions sur la quantification et l'appartenance, indiquant leurs difficultés à appréhender correctement le sens de l'expression élémentaire « V≠∅ ».

En somme, bien que 36 % des élèves aient fourni une Conversion Littérale Correcte (CLC) de l'expression « V≠∅ », une compréhension plus approfondie en termes de quantification est mieux représentée par les 38 % d'élèves ayant proposé des Conversions Interprétatives Correctes (CIC). Ces conversions interprétatives montrent non seulement une bonne compréhension de la signification fondamentale

Recebido em: 07/10/2024 | Aprovado em: 15/11/2024

de l'expression, mais aussi une capacité à expliciter la quantification existentielle implicite. En revanche, les réponses dans les catégories de Conversion Littérale Incorrecte (CLI) et de Conversion Interprétative Incorrecte (CII) révèlent des confusions notables chez certains élèves. Les erreurs dans les Conversions Littérales Incorrectes (CLI) indiquent une méconnaissance des concepts fondamentaux des ensembles, tels que l'appartenance et la définition de l'ensemble vide, montrant une compréhension insuffisante des principes de base de la théorie des ensembles. Les Conversions Interprétatives Incorrectes (CII) mettent en évidence des difficultés dans l'interprétation de la quantification, notamment en ce qui concerne la non-vacuité de l'ensemble V.

Analyse des réponses relatives aux expressions symboliques « V∩F=∅ », « V∩B=∅ » et « B∩F=∅ »

Pour les mêmes raisons mentionnées au début du paragraphe précédent concernant les expressions symboliques « V≠∅ », « F≠∅ », et « B≠∅ », nous nous concentrerons uniquement sur les résultats relatifs à la conversion de l'expression « V∩F=∅ ». Il convient de noter tout d'abord qu'un des élèves n'a pas fourni de réponse pour ces expressions symboliques[4].

L'expression « V∩F=∅ » signifie que les ensembles V (les élèves qui pratiquent le volley) et F (les élèves qui pratiquent le foot) n'ont aucun élément en commun. Autrement dit, aucun élève ne pratique à la fois le volley et le foot.

Voici les résultats que nous avons obtenus pour la conversion de cette expression :

a- Conversion Littérale Correcte (CLC)

Environ 14 % des élèves (11 sur 78) ont fourni une Conversion Littérale Correcte pour l'expression « V∩F=∅ », traduisant l'expression symbolique par : « L'intersection de l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley et de l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot est l'ensemble vide ». Toutefois, bien que cette conversion soit correcte littéralement, elle ne garantit pas une compréhension complète des implications de l'énoncé. En effet, comprendre cette expression nécessite non seulement de reconnaître l'absence totale de chevauchement entre les deux ensembles, mais aussi de pouvoir exprimer cette absence en termes de quantificateurs.

b- Conversion Littérale Incorrecte (CLI)

Environ 42 % des élèves, soit 33 sur 78, ont fourni une Conversion Littérale Incorrecte pour l'expression « V∩F=∅ », révélant des confusions significatives quant à sa signification et des lacunes dans l'utilisation de la terminologie mathématique ainsi que dans la compréhension des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles. Par exemple, la réponse « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley est inclus dans l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot et est égal à l'ensemble vide » (5) confond inclusion et intersection, suggérant incorrectement que l'ensemble des élèves pratiquant le volley est un sous-ensemble des élèves pratiquant le foot tout en étant vide. La réponse « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley = l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot » (4) confond l'égalité des ensembles avec l'absence de chevauchement, ignorant le concept d'intersection vide. De plus, « V inter F appartient à l'ensemble vide » (4) montre une confusion entre l'appartenance d'un élément à un ensemble et l'égalité entre ensembles. La réponse « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley inter l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot est égal à 0 » (3) utilise incorrectement « 0 » pour désigner un ensemble vide, tandis que « V inter F est égal au milieu vide » (3) emploie la terminologie inappropriée « milieu vide » au lieu de l'ensemble vide, et « l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley inclus dans l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot et différent de l'ensemble vide » (3) confond intersection et inclusion, utilisant incorrectement le terme « différent » pour une situation qui devrait être décrite par une égalité. Ces diverses erreurs mettent en lumière des

[4] Pourtant, il a proposé pour l'expression V≠∅ une Conversion Interprétative Correcte : « Le nombre d'élèves qui pratiquent le volley est différent de 0 ». Bien que cette conversion, qui se base sur la notion de cardinalité, soit mathématiquement correcte, elle n'est pas tout à fait conforme aux conventions de la théorie des ensembles, qui privilégie une formulation en termes de quantificateurs pour exprimer la non-vacuité d'un ensemble.

difficultés significatives dans la compréhension des concepts fondamentaux et dans l'utilisation de la terminologie appropriée en théorie des ensembles. Ces lacunes révèlent une non maîtrise des principes de base, ce qui pourrait considérablement entraver la capacité des élèves à aborder et résoudre des problèmes plus complexes impliquant ces concepts et relations.

c- Conversion Interprétative Correcte (CIC)

Environ 26 % des élèves (20 sur 78) ont fourni une Conversion Interprétative Correcte pour l'expression « V∩F=∅ », montrant une compréhension approfondie de sa signification. Ces élèves ont correctement interprété que les ensembles V et F n'ont aucun élément en commun. Des réponses telles que « Il n'y a pas d'élèves qui pratiquent à la fois le volley et le foot » (12) et « Aucun élève ne pratique à la fois le volley et le foot » (6) illustrent cette compréhension en explicitant correctement la quantification implicite de l'expression : l'absence totale de chevauchement entre les deux ensembles. En allant au-delà de la simple conversion littérale, ces réponses reflètent une maîtrise des implications subtiles, notamment la disjonction totale entre les ensembles. Cette capacité à comprendre et à exprimer les nuances de l'expression démontre une maîtrise des concepts d'intersection et de disjonction en théorie des ensembles.

d- Conversion Interprétative Incorrecte (CII)

Environ 18 % des élèves (14 sur 78) ont fourni des Conversions Interprétatives Incorrectes pour l'expression « V∩F=∅ », révélant des incompréhensions notables concernant la quantification implicite. Par exemple, des réponses telles que « Il y a des élèves qui pratiquent le foot et le volley dans cette classe » (8) et « Au moins un élève pratique le volley et le foot » (1) supposent incorrectement une intersection non vide entre les ensembles V et F, ce qui contredit directement l'énoncé « V∩F=∅ ». De plus, une réponse telle que « Il y a un élève ou plus d'un élève qui pratique le volley » (2) illustre des difficultés à interpréter l'expression « V∩F=∅ ». D'une part, cette formulation est inappropriée dans le contexte mathématique. En effet, pour indiquer qu'un ensemble n'est pas vide, on utilise généralement des expressions telles que « il y a au moins un élève » ou « il existe au moins un élève », qui expriment une quantification existentielle. D'autre part, cette réponse omet l'ensemble F, représentant les élèves pratiquant le football, ce qui conduit à une interprétation erronée de V∩F=∅. En négligeant l'importance d'examiner ces deux ensembles conjointement, les élèves ne peuvent accéder au sens de l'intersection vide. Ces erreurs révèlent ainsi une incompréhension fondamentale de la signification de l'expression « V∩F=∅ ». Enfin, la réponse « L'ensemble V existe dans l'ensemble F et les deux égale à l'ensemble vide, donc il n'y a pas d'élèves qui pratiquent ni le basket ni le foot » (1) est incorrecte à la fois linguistiquement et mathématiquement : les ensembles ne peuvent pas « exister dans » d'autres ensembles, et la confusion entre l'absence d'intersection et l'absence totale d'éléments dans les ensembles montre une compréhension erronée de la quantification implicite. En effet, dire que V∩F=∅ indique uniquement qu'il n'y a pas d'éléments communs aux deux ensembles, et non que les ensembles eux-mêmes sont vides. Ces erreurs mettent en lumière des difficultés substantielles chez ces élèves dans la compréhension des concepts de base comme ceux d'intersection et de quantification.

Les résultats révèlent des niveaux variés de compréhension chez les élèves concernant l'expression « V∩F=∅ ». Bien qu'une minorité ait réussi à fournir une conversion littérale correcte, cela ne garantit pas leur maîtrise des implications, notamment l'absence totale de chevauchement entre les ensembles. En revanche, un nombre significatif d'élèves a présenté des conversions littérales incorrectes, révélant des confusions concernant des concepts fondamentaux de la théorie des ensembles. Ces erreurs soulignent notamment des malentendus sur les notions d'appartenance et d'égalité entre ensembles, ainsi que sur la distinction essentielle entre inclusion et intersection.

De plus, plusieurs élèves ont rencontré d'importantes difficultés en matière de quantification implicite. Ces difficultés se manifestent par des conversions interprétatives incorrectes, où certains élèves supposent à tort que l'expression « V∩F=∅ » sous-entend une quantification existentielle. Par exemple, des réponses affirmant qu'il existe des élèves pratiquant à la fois le volley et le foot révèlent

Recebido em: 07/10/2024 | Aprovado em: 15/11/2024

une mécompréhension profonde de la notion d'intersection vide. Ces insuffisances en matière de quantification sont particulièrement préoccupantes, car elles compromettent la capacité des élèves à aborder des problèmes mathématiques plus complexes, où une interprétation précise des relations entre ensembles est essentielle.

Analyse comparative des réponses relatives aux expressions symboliques « V≠∅ » et « V∩F=∅ »

Face aux résultats obtenus, nous pensons qu'il est pertinent de comparer les réponses des élèves pour les expressions symboliques « V≠∅ » et « V∩F=∅ ». Pour l'expression « V≠∅ », nous avons observé un pourcentage plus élevé de réponses correctes : 36 % pour les conversions littérales et 38 % pour les conversions interprétatives. En revanche, pour « V∩F=∅ », les taux de réponses correctes sont significativement plus faibles, avec 14 % pour les conversions littérales et 26 % pour les conversions interprétatives. Cette différence peut s'expliquer par la nature moins complexe de l'expression « V≠∅ », qui se concentre uniquement sur la notion de non-vacuité de l'ensemble V. L'expression « V≠∅ » indique simplement qu'il y a au moins un élément dans V, une notion relativement directe qui ne nécessite pas une compréhension approfondie des relations entre ensembles. À l'inverse, « V∩F=∅ » est conceptuellement plus exigeante. Elle requiert une compréhension approfondie de l'intersection entre ensembles ainsi que de l'absence de chevauchement entre eux. Cette expression implique deux notions interconnectées : l'intersection des ensembles (les éléments communs) et la vacuité de cette intersection (aucun élément commun). Saisir ces concepts nécessite non seulement de comprendre ce qu'est un ensemble vide, mais aussi comment les ensembles peuvent interagir, ce qui ajoute une couche de complexité supplémentaire.

En outre, nous avons constaté que la proportion de réponses incorrectes pour la compréhension littérale est nettement plus élevée pour l'expression « V∩F=∅ » (environ 42 %) comparée à l'expression « V≠∅ » (environ 12 %). Cela indique que les élèves rencontrent davantage de difficultés pour interpréter littéralement l'intersection vide de deux ensembles, soulignant ainsi la complexité accrue de cette expression.

Contre toute attente, le pourcentage de réponses incorrectes pour la compréhension interprétative est légèrement plus élevé pour l'expression « V∩F=∅ » (environ 18 %) que pour « V≠∅ » (environ 14 %). Cela peut s'expliquer par le fait que de nombreux élèves demeurent souvent à un niveau de compréhension littérale, ce qui limite leur capacité à formuler des réponses interprétatives plus élaborées. Une compréhension insuffisante de la signification littérale de « V∩F=∅ » semble entraver leur aptitude à développer une interprétation profonde, soulignant ainsi l'importance d'une solide compréhension des concepts fondamentaux.

Analyse des réponses relatives à la deuxième question

Dans cette question, les élèves doivent convertir en langage naturel la signification de l'expression symbolique « B∪F∪V=C », en tenant compte des conditions suivantes : « V≠∅ », « F≠∅ », « B≠∅ », « V∩F=∅ », « V∩B=∅ », et « B∩F=∅ », lesquelles ont déjà fait l'objet d'une conversion en langage naturel dans la première question. Pour réussir, il est essentiel d'expliciter la quantification implicite dans chaque expression symbolique. Cela signifie reconnaître que chaque élève de la classe C pratique au moins l'un des trois sports, que chaque sport est pratiqué par au moins un élève, et que chaque élève pratique seulement un sport. Une réponse appropriée pourrait être : « Dans cette classe, les trois sports sont représentés et chaque élève pratique exactement un sport ». Une telle réponse montre non seulement que les élèves comprennent le sens des expressions symboliques, mais aussi qu'ils sont capables d'expliciter les quantifications implicites nécessaires pour une interprétation correcte. Expliciter ces quantifications est crucial pour bien saisir la manière dont les ensembles se couvrent mutuellement et s'excluent les uns les autres, ce qui est fondamental pour une compréhension complète de la partition de l'ensemble C en trois sous-ensembles distincts, V, F, et B.

En examinant les réponses des élèves, nous avons constaté que 17 d'entre eux, soit environ

22 %, n'ont pas répondu à cette question. Parmi eux, seuls 3 ont proposé des interprétations correctes des expressions isolées de la première question. Cette absence de réponse semble découler soit de difficultés à intégrer les conditions de manière cohérente, soit d'un niveau insuffisant en français, rendant la compréhension de la question et la formulation d'une réponse complète difficiles. Par ailleurs, les 14 autres élèves ont produit des conversions incorrectes ou des conversions littérales correctes, qui par essence sont insuffisantes pour saisir le sens complet des expressions. Ces difficultés, accentuées par leur faible maîtrise du français, pourraient expliquer leur blocage face à cette question.

Dans ce qui suit, nous présentons les analyses des réponses proposées par les autres élèves :

a- Conversion Littérale Correcte (CLC) (sans tenir compte des conditions)

Une conversion littérale correcte de la situation, en prenant en compte l'expression « $B\cup F\cup V=C$ » et les conditions « $V\neq\emptyset$ », « $F\neq\emptyset$ », « $B\neq\emptyset$ », « $V\cap F=\emptyset$ », « $V\cap B=\emptyset$ » et « $B\cap F=\emptyset$ », pourrait être : « L'ensemble C est exactement la réunion des ensembles B, F et V, où B, F et V sont des ensembles non vides et disjoints entre eux. ». Cependant, nous avons observé qu'aucun élève n'a fourni une réponse complète de ce type. Environ 19 % des élèves (15 sur 78) ont donné une conversion littérale correcte mais incomplète, négligeant les conditions supplémentaires. Les réponses fournies sont : « B union F union V égal C » (9), « Si on unit les ensembles des élèves qui pratiquent le basket, le foot et le volley, on obtient l'ensemble des élèves de la classe » (4) et « L'ensemble des élèves qui pratiquent le basket union l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot union l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley égal l'ensemble des élèves de cette classe » (2). Plusieurs facteurs pourraient expliquer pourquoi certains élèves n'ont pas pris en compte les conditions supplémentaires nécessaires pour décrire cette partition. La multiplicité des conditions concernant les ensembles disjoints et non vides a pu les amener à se limiter à la conversion de l'expression symbolique « $B\cup F\cup V=C$ ». Par ailleurs, une compréhension incomplète ou erronée de ces conditions a pu empêcher leur intégration dans la réponse. Enfin, des difficultés linguistiques en français ont pu entraîner une mauvaise interprétation de la question. Certains élèves ont pu croire, à tort, que seule l'expression « $B\cup F\cup V=C$ » était exigée, négligeant ainsi les autres conditions formulées verbalement et moins mises en évidence dans le texte par rapport à l'expression symbolique « $B\cup F \cup V=C$ ».

b- Conversion Littérale Incorrecte (CLI) (sans tenir compte des conditions)

Environ 9 % des élèves (7 sur 78) ont fourni une conversion littérale incorrecte partielle, se concentrant uniquement sur l'expression symbolique « $B\cup F\cup V=C$ ». Cette focalisation peut être attribuée aux mêmes raisons mentionnées précédemment.

Par exemple, la réponse « B inter F inter V égal C » (4) est incorrecte car elle concerne l'intersection des ensembles B, F et V, alors que l'expression « $B\cup F\cup V=C$ » porte sur leur union. De même, la phrase « B l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket n'est pas inclus dans F l'ensemble des élèves qui pratiquent le foot et F n'est pas inclus dans V l'ensemble des élèves qui pratiquent le volley est égal à l'ensemble des élèves de cette classe » (1) tente de décrire les relations entre les ensembles de manière incorrecte, suggérant à tort que B, F et V sont totalement disjoints. Cette interprétation ne correspond pas à « $B\cup F\cup V=C$ », qui signifie que chaque élève de C appartient à au moins un des ensembles B, F ou V, sans impliquer une exclusion mutuelle.

Les erreurs observées chez ces élèves révèlent des lacunes et une incompréhension profonde concernant le sens et la terminologie appropriée des opérations fondamentales d'union, d'intersection et d'inclusion des ensembles.

c- Conversion Interprétative Correcte (CIC)

Parmi les soixante-dix-huit élèves, un seul a fourni une réponse précise et correcte : « Les trois sports sont pratiqués et chaque élève pratique exactement un sport ». Cette réponse satisfait pleinement les conditions nécessaires pour décrire une partition de l'ensemble des élèves. En termes de quantification, cela signifie que chaque ensemble est non-vide ($V\neq\emptyset$, $F\neq\emptyset$, B≠∅), que les ensembles sont mutuellement exclusifs (V∩F=∅, V∩B=∅, B∩F=∅), et que chaque élève appartient exactement à un seul ensemble, garantissant que leur union couvre l'ensemble des élèves (V∪F∪B=C). Il est important de noter que cet élève a correctement converti en termes de quantification les expressions « V≠∅ », « F≠∅ », « B≠∅ », « V∩F=∅ », « V∩B=∅ », et « B∩F=∅ » dans la question n°1. Une interprétation incorrecte en termes de quantification de ces conditions aurait compromis sa capacité à formuler une telle réponse.

d- Conversion Interprétative Incorrecte (CII)

Face à la diversité des réponses fournies par les élèves, nous avons choisi de nous concentrer sur quelques exemples représentatifs pour éviter une surcharge d'informations. Environ 47 % des élèves, soit 37 sur 78, ont donné des conversions interprétatives incorrectes.

Parmi ces réponses incorrectes, 6 élèves ont proposé la formulation suivante : « Tous les élèves de la classe C pratiquent soit le foot, soit le volley, soit le basket ». Cette réponse indique que chaque élève appartient à l'un des trois ensembles (représentant le foot, le volley, et le basket) sans chevauchement, ce qui montre que les ensembles B, F, et V couvrent l'ensemble C de manière exhaustive. Toutefois, cette réponse ne précise pas que les trois sports sont effectivement pratiqués, ce qui représente une condition essentielle pour une partition complète. Il est notable que ces élèves avaient correctement converti les expressions « V≠∅ », « F≠∅ », « B≠∅ », « V∩F=∅ », « V∩F=∅ », « V∩B=∅ » et « B∩F=∅ » dans la question n°1. Leur réponse incomplète pourrait s'expliquer par une supposition erronée que la pratique des trois sports était implicite dans leur réponse, ou par une difficulté à intégrer explicitement cette condition dans leur formulation.

Les autres réponses incorrectes montrent des confusions conceptuelles. Par exemple, 11 élèves ont écrit : « la somme des élèves qui pratique le basket avec ceux qui pratiquent le volley avec ceux qui pratiquent le foot est égal aux élèves de toute la classe ». Bien que cette réponse indique que l'union des ensembles B, F, et V couvre l'ensemble C, elle omet deux précisions essentielles : chaque élève doit pratiquer exactement un sport et les trois sports doivent être pratiqués. De plus, l'utilisation du terme « somme » pour convertir l'union des ensembles est inappropriée, illustrant une confusion entre l'addition arithmétique et l'union ensembliste. Cette réponse se contente de vérifier la condition B∪F∪V=C sans aborder les autres aspects nécessaires à une partition correcte.

D'autres réponses, telle que « C est l'ensemble des élèves qui pratiquent le basket, le foot, et le volley en même temps » (3), traduisent incorrectement l'expression « B∪F∪V=C » en une intersection des ensembles, suggérant que chaque élève pratique simultanément tous les sports. Cette interprétation contredit la notion d'union des ensembles distincts où chaque élève doit appartenir à un seul ensemble. De même, « Tous les élèves de la classe pratiquent le volley, le foot, et le basket » (1) implique que chaque élève pratique tous les sports simultanément, ce qui est incompatible avec la condition que chaque élève doit pratiquer exactement un sport.

Par ailleurs, certaines réponses montrent une compréhension partielle des conditions. Les réponses telles que « Tous les élèves pratiquent un sport » (2) ou « Toute la classe pratique les sports » (2) montrent que chaque élève est impliqué dans un sport, mais manquent de précision sur l'exclusivité et la couverture complète des ensembles. La réponse « Tous les élèves pratiquent au moins un sport parmi les trois sports » (2) est plus précise, mais omet la condition que chaque élève pratique exclusivement un sport. Enfin, « Tous les élèves pratiquent au moins un sport et tous les sports sont représentés » (1) indique que l'union des trois ensembles couvre entièrement l'ensemble des élèves et que chaque sport est pratiqué, mais ne précise pas que chaque élève pratique exactement un sport parmi les trois.

En résumé, 22 % des élèves n'ont pas répondu à cette deuxième question, probablement en raison de la multiplicité des conditions et des difficultés rencontrées dans l'interprétation correcte des expressions symboliques en termes de quantification. Parmi ceux qui ont tenté de répondre, environ 19 % ont fourni des conversions littérales correctes mais incomplètes, omettant des conditions essentielles telles que la non-vacuité et l'exclusivité des ensembles, qui étaient moins saillantes dans le texte de la question que l'expression symbolique « B∪F∪V=C ». Un seul élève a réussi à interpréter et à combiner correctement toutes les conditions, offrant ainsi une réponse complète et bien formulée.

En revanche, 56 % des élèves ont fourni des réponses incorrectes. Parmi ces réponses incorrectes, 9 % ont proposé des conversions littérales erronées, confondant l'union des ensembles avec leur intersection et se limitant uniquement à l'expression « B∪F∪V=C ». Par ailleurs, 47 % ont donné des réponses interprétatives incorrectes, illustrant des confusions conceptuelles telles que la confusion entre l'union et l'intersection des ensembles, ou une mauvaise compréhension des conditions d'exclusivité et de couverture complète. Certaines de ces réponses reflètent une compréhension partielle des conditions nécessaires pour une partition correcte, comme la pratique simultanée de tous les sports ou l'omission de l'exclusivité de chaque élève à un seul sport. Bien que la majorité de ces élèves aient réussi à expliciter la quantification dans les expressions symboliques de la première question, ils ont probablement rencontré des difficultés à les intégrer toutes dans une formulation correcte décrivant la situation. Cette tâche nécessite une compréhension approfondie du rôle et de l'importance de chaque condition.

Les erreurs des élèves révèlent des difficultés à saisir et à expliciter les conditions nécessaires pour une partition correcte des ensembles, exacerbées probablement par des problèmes de compréhension du français. La focalisation excessive sur l'expression symbolique « B∪F∪V=C », au détriment des autres conditions essentielles, a conduit à des réponses incorrectes, qu'elles soient littérales ou interprétatives. Les confusions entre les concepts d'union et d'intersection montrent des lacunes profondes dans la compréhension des concepts ensemblistes de base. Les difficultés à expliciter curettement la quantification dans les expressions symboliques semblent également empêcher l'accès au sens global de la situation proposée.

CONCLUSION

Le symbolisme mathématique, bien que fondamental dans les mathématiques modernes, est une construction humaine complexe qui peut être difficile à saisir pour les jeunes apprenants en raison de sa complexité syntaxique et sémantique. Comme le souligne Duval (1995, 2006), pour surmonter les défis de cette complexité, il est essentiel de trouver un équilibre en classe entre l'utilisation des expressions symboliques et les explications verbales, afin de garantir une compréhension optimale et d'éviter les malentendus.

Dans cette recherche, nous avons étudié la manière dont des élèves tunisiens âgés de 17 à 18 ans, suivant un cursus scientifique, convertissent en langage naturel français des expressions mathématiques symboliques, en particulier celles portant sur les relations d'intersection et d'union entre ensembles, y compris l'ensemble vide. Bien que ces expressions soient élémentaires, elles peuvent parfois manquer de clarté pour les élèves, notamment lorsqu'elles sont combinées. Pour analyser leurs réponses, nous avons élaboré une grille permettant de distinguer différents niveaux de conversion, désignés par les acronymes CLC (conversion littérale correcte), CLI (conversion littérale incorrecte), CIC (conversion interprétative correcte) et CII (conversion interprétative incorrecte). Cette classification permet de différencier clairement les réponses correctes des incorrectes, qu'elles soient littérales ou interprétatives.

Les résultats montrent qu'un nombre significatif d'élèves ne parvient pas à fournir une conversion interprétative des expressions symboliques, qui nécessite d'expliciter les notions sous-jacentes, notamment la quantification cachée, tout en démontrant une véritable compréhension de leur sens. Ils se tournent souvent vers des conversions littérales, qui manquent d'explicabilité. Leurs conversions littérales mettent parfois en lumière des confusions concernant des concepts fondamentaux, tels que la distinction entre union et intersection, ainsi qu'entre inclusion et intersection. De plus, les résultats révèlent que de nombreux élèves, lorsqu'ils tentent de fournir une conversion interprétative, commettent des erreurs dans l'explicitation de la quantification cachée dans les expressions symboliques. Or, une explicitation correcte de cette quantification est essentielle pour interpréter adéquatement les relations d'intersection et d'union entre ensembles. Des lacunes à ce niveau pourraient nuire à leur capacité à aborder des problèmes mathématiques plus complexes, où une interprétation précise des quantificateurs s'avère cruciale.

L'étude a également mis en évidence les difficultés rencontrées par la majorité des élèves à considérer simultanément plusieurs expressions symboliques essentielles pour garantir une partition d'un ensemble en trois sous-ensembles. Ces difficultés semblent être aggravées par des problèmes de compréhension du français. En effet, leur attention se concentre souvent de manière excessive sur l'expression symbolique « $B \cup F \cup V = C$ », qui est plus saillante dans le texte de la question, les conduisant à négliger les autres conditions nécessaires à une partition adéquate.

Cette recherche préliminaire nécessite d'être approfondie par des entretiens avec les élèves afin de fournir des éclairages précieux sur les causes réelles des difficultés rencontrées. De plus, la réalisation d'expérimentations dans la langue maternelle des élèves, l'arabe, offrirait l'opportunité d'analyser l'impact de la langue sur la compréhension des expressions symboliques. Une telle approche permettrait d'explorer si les difficultés observées sont spécifiquement liées à la langue d'enseignement ou si elles révèlent des enjeux plus profonds concernant la compréhension des concepts mathématiques, notamment en ce qui concerne la quantification et les relations complexes entre ensembles. En enrichissant cette recherche, nous pourrions mieux saisir les interactions entre symbolisme, langue et apprentissage mathématique.

REFERÊNCIAS

BEN KILANI, I. **Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique**. 2005. Thèse (Doctorat) – Universités Lyon 1 et Tunis, co-tutelle.

BEN NEJMA, S. L'impact de la langue de formulation d'un énoncé sur les démarches mises en œuvre par des élèves dans une activité de modélisation algébrique. **Petit x**, n. 112, p. 54-76, 2020.

BLOCH, I. Les signes mathématiques dans l'enseignement spécialisé : restauration du processus interprétatif. Les sciences de l'Éducation, **Pour l'ère nouvelle**, numéro spécial 41-1, coordonné par Bailleul M., p. 91-114, 2008. Université de Caen.

BRONCKART, J.-P. L'activité langagière, la pensée et le signe, comme organisateurs du développement humain. **Langage et société**, p. 121-122, 2007.

CHELLOUGUI, F. L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 29, n. 1, p. 123-154, 2009.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique : Du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1991.

CHESNAIS, A. ; COULANGE, L. Rôle du langage verbal dans l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques. Synthèse et perspectives en didactique des mathématiques. **Revue Française de Pédagogie**, n. 214, p. 85-121, 2022.

DURAND-GUERRIER, V. **Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication**. 1996. Thèse (Doctorat) – Université Lyon 1.

HACHE, C. Langage mathématique à la transition primaire / collège. Dans : Faire des mathématiques à l'école : de la formation des enseignants à l'activité de l'élève. **ARPÈME**, 2013. p. 452-463.

DELAVAULT, H. De l'importance du langage dans l'enseignement des mathématiques. **Cahiers de Fontenay**, n. 6, p. 89-107, 1977.

DUVAL, R. Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993. IREM de Strasbourg.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages**

intellectuels. Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. **Educ Stud Math**, v. 61, n. 1-2, p. 103-131, 2006.

DUVAL, R. ; PLUVINAGE, F. Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**, v. 21, p. 117-152, 2016.

KLINE, M. **La perte de certitude**. Oxford : Oxford University Press, 1980.

LABORDE, C. **Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique**. 1982. Thèse (Doctorat) – Université Scientifique et Médicale Institut National Polytechnique de Grenoble.

LENG, M. **Mathématiques et réalité**. Oxford : Oxford University Press, 2010.

MASSA ESTEVE, MR. Le rôle du langage symbolique dans la transformation des mathématiques. **Philosophica** , v. 87, p. 153-193, 2012.

MESNIL, Z. **La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement**. 2014. Thèse (Doctorat) – Université de Paris.

NAJAR, R. **Effets des choix institutionnels d'enseignement sur les possibilités d'apprentissage des étudiants. Cas des notions ensemblistes fonctionnelles dans la transition Secondaire / Supérieur**. 2010. Thèse en cotutelle – Université de Tunis et Université de Paris.

PÓLYA, G. **Comment poser et résoudre un problème**. Dunod, 1989. (Ouvrage original publié en 1945 ; traduction de How to Solve It, Princeton University Press). Réimpression : Editions Jacques Gabay.

RADFORD, L. Iconicité et contraction : une étude sémiotique des formes de généralisations algébriques de modèles dans différents contextes. **ZDM Mathematics Education**, v. 40, n. 1, p. 83-96, 2008.

SCHÖNEFELD, AH. **Pensée mathématique et résolution de problèmes**. Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1994.

SOUILAH, E. L'enseignement du français en Tunisie est-il en décalage avec la demande sociale ? **Synergies Europe**, v. 13, p. 27-37, 2018.

TOUATI, Z. Le statut et la place du français dans l'enseignement et la société en Tunisie. Plurilinguisme, Politique linguistique et Éducation, **PURH**, p. 465-473, 2001.

VLASSIS, J. **Sens et symboles en mathématiques : étude de l'utilisation du signe « moins » dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue**. Berne : Peter Lang, 2010.