

ARTICULAÇÃO DAS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS PARA O ENSINO BÁSICO: o caso do Teorema de Tales

Roberto Carlos Dantas Andrade
*dantasprof@ig.com.br (ETRB e
GEDIM/IEMCI/UFPA)¹*

Renato Borges Guerra
*rguerra@ufpa.br (PPGECM/IEMCI/UFPA
GEDIM)²*

Resumo

Neste artigo, iniciamos por analisar as indicações curriculares brasileiras e as organizações matemáticas presentes nos livros didáticos e assumidas pelos professores na elaboração de suas organizações didáticas objetivando verificar a problemática do isolamento temático e da monumentalização dos conteúdos matemáticos propostos para o ensino básico brasileiro. Com o propósito de enfrentar esta problemática constituímos um sistema didático na concepção de um percurso de estudos e pesquisas, nos termos propostos por Yves Chevallard na Teoria Antropológica do Didático. Neste percurso de pesquisas realizamos um estudo histórico e epistemológico do tema Teorema de Tales o qual revelou a potencialidade que este tema tem de articular e justificar outros temas, setores e áreas propostos para o estudo no ensino básico. Esta potencialidade permite que este tema seja eleito como tarefa/tema fundamental na constituição de organizações matemáticas/didáticas, bem como nos aponta a necessidade de elaboração de um Modelo Epistemológico de Referência que nos permita analisar e desenvolver organizações matemáticas que propicie um fazer matemático interconectado e inteligível.

Palavras chave: comunidade de estudos; organização matemática; teorema de tales.

Introdução

Em nossas investigações temos observado que há um número significativo de pesquisas que concentram seus estudos em níveis temáticos, objetivando estudar o caminho adequado para a introdução de um conteúdo matemático em um nível de ensino específico em uma dada instituição. Alguns casos se mostram sem reflexões mais profundas sobre a construção epistemológica desse conteúdo, e das condições e restrições impostas pelos diferentes níveis educativos nos processos de transposição didática.

¹ Professor Doutor da Escola Tenente Rêgo Barros e membro do Grupo de Pesquisa GEDIM/IEMCI/UFPA.

² Professor Doutor do PPGECM/IEMCI/UFPA. Coordenador do Grupo de Pesquisa GEDIM.

Esta constatação nos motivou investigar possíveis respostas para o enfrentamento de questões problemáticas que ocorrem na prática docente como as questões relacionadas a “um dos problemas atuais que têm despertado grande interesse dos pesquisadores da área da educação matemática é a falta de sentido das matemáticas escolares” (FONSECA et al., 2010, p.248). Este autor acentua que a manifestação deste fenômeno é percebida a partir da falta de motivação dos alunos para estudar matemática, passando pela formação dos professores e possivelmente acarretando a exclusão progressiva de certos conteúdos matemáticos, diminuindo assim a relevância da matemática no currículo e até a incapacidade de percepção da matemática na sociedade.

Derivadas desta questão, algumas indagações foram suscitadas, sobre as organizações matemáticas e didáticas propostas para o ensino, nas instituições escolares, tais como: Que critérios determinam, no ensino básico, que o estudo de um tema da matemática, teorema de Tales, deva ser realizado antes do estudo de outro tema, semelhança de triângulos? Quais relações existem entre o teorema de Tales e a semelhança de triângulos? E ainda, que contribuições para o processo de estudos desses temas podem ser estabelecidas ao ser proposto organizações matemáticas que evidenciem as articulações entre eles? Em uma organização matemática, quais contribuições à eleição de um tema como objeto matemático que articula e justifica outros temas ou setores ou áreas, trarão para o ensino?

Na perspectiva de encontrar possíveis respostas às perguntas acima, estabelecemos o seguinte questionamento que entendemos ser a questão primeira que pode ser vista como a possível origem destas perguntas, qual seja, por que os conteúdos matemáticos apresentam isolamento entre suas áreas, setores e temas nas organizações matemáticas propostas para o ensino básico? Esta indagação emerge ao analisarmos as organizações matemáticas e didáticas propostas nos livros didáticos e nas grades curriculares norteadoras do trabalho docente nas instituições escolares brasileiras.

1. O isolamento temático nas organizações matemáticas propostas nos livros didáticos

A respeito desta problemática nossa investigação tem mostrado que professores no exercício da docência tem se questionado a respeito de como fazer para adequar esse

ou aquele conteúdo à realidade da escola e dos alunos? Quais adequações devem ser realizadas para adaptar o livro didático à grade curricular da escola? Esses problemas se incluem no que Bosch e Gascón (2004) identificam como “problema praxeológico do professor: o que se deve ensinar e como ensiná-lo?” (p.4).

O problema praxeológico do professor evidencia mais uma vez a questão do isolamento entre temas, setores e áreas de estudos da matemática e para enfrentá-lo iniciamos por analisar questões institucionais como, por exemplo, a utilização do livro didático como principal referência para a constituição das organizações matemáticas (OM) e didáticas (OD). Esta questão se torna bastante relevante, pois todos os alunos do ensino médio da rede pública no Brasil recebem livro didático através do Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM), para que possam ser utilizados como aporte para seus estudos.

Apesar dos livros serem escolhidos pelos professores da escola, estes não contemplam algumas questões próprias da realidade da escola e dos alunos como, por exemplo, a sequência de apresentação dos conteúdos diferente da proposta na grade curricular, as formas de apresentações dos conceitos e definições às vezes não afinadas com as propostas dos professores e ainda em muitas tarefas propostas nos livros, o aluno tem dificuldades para enfrentá-las isto por vários fatores, sendo um deles a linguagem.

Em trabalhos anteriores, Guerra e Andrade (2009), realizamos estudos analíticos das OM, propostas nos livros didáticos utilizados como referência na elaboração das OM e OD para estudo na escola onde estão sendo realizadas as fases empíricas desta pesquisa, a análise foi concentrada na área Geometria e no setor geometria analítica.

Na análise, constatamos que as organizações matemáticas propostas apresentam os temas de estudos ponto; reta; circunferência e cônicas sem explicitar suas conexões. Este estudo nos mostrou que o setor geometria analítica é dividido em cinco tópicos isolados denominados de estudo do ponto, estudo da reta, continuação do estudo da reta, estudo da circunferência e estudo das cônicas, evidenciando o isolamento dos temas deste setor.

Nas OM analisadas, percebemos que além do isolamento entre os temas há também a desconexão entre tarefas e quando existem, estas conexões são realizadas entre tarefas do mesmo tópico e em muitos casos sem evidenciá-las explicitamente. Em geral as conexões existentes são deixadas como interpretação para o leitor.

Explicitamente, a ênfase é no saber-fazer (tarefa, técnica) que, embora necessário, não constitui o saber, ou ainda o desejado fazer justificável.

Enfim, a partir destas análises nas OM propostas nos livros didáticos concluímos que quando realizada alguma conexão esta é posta, em nossa opinião, de modo tímido, não evidenciando as possíveis articulações e integrações que podem ser realizadas entre os tipos de tarefas propostas ao longo do processo de estudo. Além disto, as análises nos permitiram perceber e concordar com a hipótese levantada por Fonseca et al. (2010) sobre o ensino secundário espanhol que nesse aspecto parece não diferir do ensino básico brasileiro:

Em S o estudo das organizações matemáticas se concentra no bloco prático/técnico sendo baixa a incidência do bloco tecnológico-teórico sobre a atividade matemática que se realiza efetivamente. Não se questiona até que ponto são justificadas as técnicas que se utilizam, e nem a interpretação dos resultados proporcionados por estas técnicas, nem o seu alcance ou domínio de validade, nem a sua relevância para levar adiante uma tarefa determinada, nem sua eficácia, nem sua economia, nem suas relações com outras técnicas, nem suas limitações, nem as possíveis mudanças que podem sofrer essas técnicas para aumentar a sua eficiência na execução de determinadas tarefas (FONSECA et al. 2010, p. 248).

Esta hipótese e os estudos realizados pelo autor permitiram a ele classificar a atividade matemática do ensino secundário espanhol como pontual, rígida e isolada, o que não difere do que temos percebido em nossas análises do ensino médio brasileiro.

As indagações relativas às OM propostas para o ensino médio e a análise realizada nas OM propostas nos livros textos nos motivaram e possibilitaram a eleição de tipos de tarefas que podem estar ora mais, ora menos, presentes em todas as outras tarefas por meio de articulações implícitas ou explícitas entre si. Como no caso do setor geometria analítica onde os tipos de tarefas por nós identificadas e eleitas foram: “Localizar um ponto no plano; Calcular a distância entre dois pontos dados; Encontrar a equação do segmento” (GUERRA e ANDRADE, 2009, p.4).

As articulações entre estes tipos de tarefas, que nomeamos como fundamentais no decorrer do processo de estudo podem prover um fazer inteligível e justificado e proporcionar um olhar para geração de novas OM.

A tênue fronteira entre práxis e logos parece decorrer dessa interdependência de forma que a diferença possa em algum momento ser de ordem apenas funcional. Com isso salienta-se o caráter integrador entre práxis e logos no fazer matemático, isto é, como uma ação articulada e integrada de tarefas para a consecução de outras

tarefas. **Sob essa hipótese, a tarefa como uma articulação integrada de outras tarefas, pode-se inferir a existência de tarefas primeiras ou *tarefas fundamentais* para o desenvolvimento do processo de estudo de um objeto matemático.** (GUERRA e ANDRADE, 2009, p.5)

A concepção das tarefas fundamentais nos permitiu conjecturar em um primeiro momento a elaboração de organizações matemáticas que evidencie as articulações existentes entre os temas da geometria analítica, ou seja, sob a perspectiva da tarefa fundamental pode-se (re)organizar as tarefas de uma organização já existente de modo a poder atuar mais e melhor, e também de maneira justificada e inteligível.

2. O isolamento temático e as diretrizes curriculares

Diante as análises dos livros didáticos, realizamos estudos analíticos nas diretrizes curriculares apontados nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) com o propósito de analisar a possível influência destes documentos oficiais na questão do isolamento temático dos conteúdos matemáticos propostos para a educação básica no Brasil. Esta análise se caracterizou como “análise espontânea” (Bosch et al. 2006. P.55), limitou-se a observar e descrever os conteúdos propostos para o ensino básico e sua distribuição sem nenhum tipo de ferramenta teórica de análise didática.

No decorrer destas análises verificamos que nestes documentos a ênfase dada é ao desenvolvimento de competências e não ao estudo específico de disciplinas escolares³, fato que abre amplas possibilidades para elaboração de organizações didáticas interdisciplinares, a partir da definição de conteúdos que transversalizem o estudo, esta proposta difere das disciplinas tradicionais. E ainda se evidencia a possibilidade da entrada em processos de estudos por meio do desenvolvimento de projetos de ensino e pesquisa. Estes fatores nos parece contribuir para o estabelecimento de OM e OD que contemplem o maior número possível de articulações entre os objetos matemáticos propostos para o estudo.

Quanto ao trabalho dos professores da educação básica, as recomendações nacionais indicam que estes devem levar em conta os princípios pedagógicos estabelecidos nas normas curriculares nacionais: a interdisciplinaridade, a transversalidade, a contextualização e a integração de áreas através de projetos de

³ Refere-se a uma seleção de conhecimentos que são ordenados e organizados para serem apresentados ao aluno, recorrendo, como apoio a essa apresentação, a um conjunto de procedimentos didáticos e metodológicos e de avaliação.

ensino e da metodologia da resolução de problemas. Além disto, é indicado que os conhecimentos do conteúdo para o ensino de crianças e jovens e as situações de aprendizagem devem propiciar a articulação dos conteúdos através da transposição didática⁴, isto mostra a necessária apropriação do professor no sentido histórico epistemológico do conteúdo matemático a ser ensinado. O que quer dizer não apenas dar informações sobre contextualização, interdisciplinaridade, transversalidade e outros princípios, mas efetivamente elaborar e por em prática OM e OD que propiciem ao aluno competências interdisciplinares que incluam o contexto social. Assim inferimos que as indicações curriculares oficiais propõem o estabelecimento de OM e OD que visem um fazer matemático escolar que propicie a articulação entre os temas e os setores de cada área e entre as áreas.

No entanto, apesar das indicações oficiais acenarem para uma abordagem articulada, o que temos percebido são ainda abordagens que isolam setores e temas, por exemplo, o estudo do tema função do 1º grau que requer análise gráfica, bem como a interpretação da expressão algébrica característica desta função como uma reta no sistema de coordenadas ortogonais, que tem seu estudo proposto no primeiro ano do ensino médio incluído como tema da álgebra. Enquanto que a interpretação da reta como expressão algébrica e da expressão algébrica característica como reta são temas de estudos do setor geometria analítica que por sua vez está incluído na área geometria, porém a geometria analítica tem seu ensino proposto tanto nas organizações didáticas dos livros textos como nas organizações curriculares das escolas, para o 3º ano do ensino médio. E não só isto, o estudo das funções do 1º grau evoca o estudo das proporções e vice versa, porém no sistema de ensino brasileiro as proporções são estudadas no ensino fundamental, sem nenhuma relação com a representação geométrica e em muitos casos não se evidencia a função do 1º grau como uma relação proporcional.

Na análise das indicações curriculares nacionais para o estudo da matemática no nível básico, observamos que os conteúdos para os estudos no ensino fundamental são divididos em quatro blocos de conhecimentos: o estudo dos números e das operações envolvendo Aritmética e Álgebra; o estudo do espaço e das formas na área da Geometria; o estudo das grandezas e das medidas que “permite as interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra, e da Geometria e de outros campos do

⁴ Termo cunhado do trabalho de Chevallard..

conhecimento” (Brasil, 1998, p.49); e o tratamento das informações que visa possibilitar ao cidadão a leitura de dados estatísticos, tabelas e gráficos e a raciocinar a partir de ideias relativas à probabilidade e a combinatória.

Apesar de percebermos nos PCN a preocupação com a perspectiva de articulação entre os objetos matemáticos, a divisão em blocos temáticos não deixa claro um olhar em busca de interligações entre eles, em apenas um destes blocos é enfatizado a interligação das áreas. Pensamos que este fato contribui para o isolamento dos objetos matemáticos quando da elaboração das OM e OD por parte dos professores e também pode ser um elemento motivador aos autores de livros didáticos onde as OM propostas por estes textos estabelecem o isolamento entre as áreas, setores e temas da matemática.

Quanto ao ensino médio as indicações curriculares propõem a divisão dos conteúdos sistematizados em três temas estruturadores: Álgebra que visa tratamento dos números e funções; Geometria e medidas; e Análise de dados. O estudo destes eixos deve “ser desenvolvido concomitante nas três séries do ensino médio” (BRASIL, 2002, p.128) e devem possibilitar “o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos” (BRASIL, 2002, p. 128).

É destacado nos PCN que cada eixo estruturador é uma unidade de conhecimento por ser um “campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo” (BRASIL, 2002, p.120). Para a organização do planejamento escolar é indicado para cada um destes eixos a divisão em unidades temáticas consideradas como partes autônomas de conhecimentos específicos, podendo ser organizadas matemática e didaticamente a partir das características dos alunos, dos tempos e espaços em cada instituição escolar.

Além desta distribuição em eixos estruturantes e unidades temáticas, nos PCN é indicada a distribuição dos conteúdos nas três séries do ensino médio. Esta distribuição do conteúdo pode ter influenciado os autores de livros didáticos na elaboração de OM onde se verifica o isolamento entre temas, setores e áreas, e este fato possivelmente provoca algumas desconexões entre setores e temas de estudo da matemática nas proposições de OM e OD elaboradas pelos professores o que se verifica de forma transparente na grade curricular da instituição escolar onde a parte empírica da pesquisa se realiza.

Neste enfoque, Alan H. Schoenfeld apud Bosch e Gascón (2004) “denuncia que a prática escolar tradicional decompõe o saber matemático em pequenas porções” (p.4),

o que possivelmente desenvolve no aluno, como no exposto por Fonseca et al. (2010), a concepção de que para um dado tipo de tarefa o enfrentamento só é possível através de uma única técnica, pois o mesmo passa olhar a matemática por meio de fragmentos de estudos, não lhe sendo possibilitado um olhar articulado que permita escolher dentre as técnicas para o enfrentamento de um dado tipo de tarefa a que melhor soluciona a tarefa proporcionando um fazer que seja justificado e promova economia de tempo, objetivos esperados do processo de estudos da matemática. Estas inferências são descritas por Trigueros apud Bosch e Gascón (2004) através do seguinte questionamento “até que ponto os estudantes podem relacionar os distintos conceitos de cada parte das matemáticas para formar um todo que possa utilizar conjuntamente na resolução de problemas?” (p.8).

A problemática do isolamento também motivo de estudos de Bosch e Gascón (2004), onde eles destacam que na Espanha o ensino da matemática seja no primário ou no secundário como também na universidade há uma tendência de:

[...] atomização dos conteúdos matemáticos em uma serie de questões pontuais relativamente independentes entre si. A desconexão é tanta que se corre o perigo de converter a matemática ensinada em um conjunto de “anedotas” e adivinhações isoladas. Correlativamente as técnicas matemáticas que se utilizam também aparecem isoladas e apresentam uma grande rigidez que se manifesta especialmente na passagem do ensino secundário para universidade e ultimamente na passagem do ensino secundário obrigatório (12-16 anos) ao Bacharelado (16-18anos). (BOSCH e GASCÓN, 2004, p.10)

O exposto destaca que a questão do isolamento temático não se coloca apenas no que se refere aos temas mais também no fazer como havíamos inferido, em consequência, os autores asseveram que a desarticulação aparente no currículo de matemáticas deixa para segundo plano a análise das possíveis articulações que podem ser estabelecidas a partir de cada tema proposto para o estudo, “se constata a ausência de uma estruturação do currículo a níveis superiores ao tema que se coloca, particularmente, no “abandono” desses níveis por parte do professor” (BOSCH e GASCÓN, 2004, p.10). Esta inferência determina certo retraimento por parte do professor no que diz respeito a suas ações em relação aos níveis de abordagem de cada tema, isto é caracterizado por Chevallard, (2001 e 2002) como o fechamento dos temas que constituem um fenômeno didático denominado por este autor de autismo temático do professor.

Alguns exemplos da desarticulação entre os temas Teorema de Tales e Semelhança de Triângulos, entre setores como Geometria Sintética e Geometria Analítica e entre áreas como Álgebra e Aritmética. Também são evidentes no ensino espanhol como no destaque abaixo:

A uma forte desconexão entre os setores de uma mesma área da matemática – como, por exemplo, entre a geometria sintética e a geometria analítica- entre as diferentes áreas da matemática escolar- como, por exemplo, entre as áreas de geometria e funções e grafismos ensino secundário obrigatório espanhol (12-16 anos). No caso das geometrias analítica e sintética, apesar da continuidade e até complementaridade que existe entre ambas, o fato é que se continua estudando completamente separados ao longo do ensino secundário (sintética no secundário e analítica no Bacharelado). (BOSCH e GASCÓN, 2004, p.11)

Notamos que assim como ocorre na Espanha também no Brasil as orientações curriculares estabelecem a partir da distribuição de conteúdos nas séries e nos níveis de ensino desconexões similares.

Tomando como área a Geometria, como setor a geometria analítica e como temas o teorema de tales, semelhança de triângulos e a condição de alinhamento de três pontos e ao analisarmos as proposições curriculares do ensino básico brasileiro observamos que o teorema de tales é proposto para estudo, no 7º ano do ensino fundamental, semelhança de triângulos para 9º ano ambos incluídos no setor da geometria sintética, enquanto que a condição de alinhamento de três pontos é proposto para o estudo, no 3º ano do ensino médio como tema da geometria analítica. Esta distribuição possivelmente é também um dos elementos que influenciam no isolamento que temos percebido.

Outro exemplo do isolamento pode ser evidenciado no trabalho de Garcia apud Garcia et.al. (2006) quando nos afirma que no ensino secundário espanhol, existem dois momentos diferentes relacionados ao estudo da teoria das proporções. A primeira estabelece a relação proporcional no setor da proporcionalidade e na área da aritmética. A segunda estabelece à relação proporcional em um setor que é caracterizado pelas relações entre grandezas, como uma parte do tema funções e suas representações gráficas, nesse setor a proporcionalidade é estudada como uma função linear. Segundo Garcia et.al. (2006) a existência destas duas abordagens propicia a reconstrução de duas OM presentes no ensino básico e muita das vezes totalmente desconectadas.

Estes isolamentos entre os conteúdos também são identificados por Chevallard apud Garcia et.al. (2006) como “confinamento temático do professor” (p.229) o que segundo eles não evidencia para os professores o modo de como os conteúdos matemáticos estão organizados, e nem responde a perguntas como qual a ligação entre a proporcionalidade e a função linear, ou a função linear e a geometria analítica. Assim sendo, os conteúdos se tornam “conteúdos mortos” (CHEVALLARD apud GARCIA et al. 2006), o que transforma essas perguntas em perguntas mortas, de tal forma a indicar para docentes e alunos e as instituições certa ignorância de onde vêm esses conteúdos, para onde eles vão, e de que formas serão aplicados fora do contexto escolar. Essas situações são caracterizadas por Bosch et.al. (2006) como “monumentalização dos fenômenos das organizações matemática: os alunos são convidados a visitar, mas não para construí-las” (p.43).

A monumentalização dos fenômenos chama a atenção para a construção de um caminho adequado para a introdução de um conteúdo matemático em uma determinada instituição específica, porém em muitos casos sem qualquer reflexão mais profunda sobre a forma como este conteúdo foi estruturado e sem levar em conta as condições e restrições impostas pelos diferentes níveis educativos nos processos de transposição didática.

Observando o exposto, quanto às consequências do isolamento e a monumentalização de conteúdos, e com objetivo de reconstruir OM que estabeleça o maior número de articulações possíveis entre temas, setores e áreas, utilizando para tal fim as tarefas fundamentais (GUERRA e ANDRADE, 2009), e que através destas articulações professores e alunos possam tomar consciência da razão de ser destes temas propostos para o estudo no ensino básico. É que decidimos propor a formação de uma comunidade de estudos de professores de matemática que atuam em uma escola pública federal de ensino básico.

3. Referencial teórico e indicações metodológicas

Nossas investigações adotam como marco teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) concebida por Yves Chevallard. A escolha da TAD como referencial teórico principal se dá por dois motivos, o primeiro consiste em tratar os problemas da educação matemática no contexto de um programa epistemológico de construção do conhecimento matemático, por ter como princípio norteador que a atividade matemática

está inserida no contexto das atividades humanas e das instituições, estabelecendo assim que a entrada em um processo de estudo da matemática, como toda atividade humana, pode ser modelado a partir da construção ou reconstrução de praxeologias matemáticas (organizações matemáticas).

O segundo motivo é por apresentar categorias de análise que podem servir de referência para analisar tanto a prática docente como a entrada em processo de estudo, isto no que se refere à construção ou reconstrução das OM e OD. Algumas destas categorias são elencadas como sendo: Os componentes de uma organização para o estudo, Tipos de tarefas, Técnicas, Tecnologias e Teorias; Os momentos didáticos descritos como, o primeiro encontro com o tipo de tarefa, a exploração do tipo de tarefa ou elaboração de uma técnica, a constituição do entorno tecnológico-teórico, o trabalho da técnica, a institucionalização da OM e a avaliação da OM; Os níveis de abrangência e complexidade das organizações matemáticas como pontual, local, regional e global. Entendemos também que as categorias expostas acima não só possuem esta capacidade que nos permite analisar as OM e OD como também funcionam como elementos que as constituem.

No contexto da TAD é asseverada por Gascón (2010, p.14) que paralelo às pesquisas que abordam a problemática do saber matemático surge novas questões de investigação vinculadas à formação matemática-didática do professor e em consequência sobre o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, é também destacado por este que apesar de muitas pesquisas já terem sido realizadas, ainda hoje os pesquisadores a nível global não possuem ferramentas adequadas para tratar deste assunto. “De fato, no âmbito do enfoque epistemológico da didática das matemáticas das investigações sobre as “práticas docentes” o professor de matemática têm aparecido muito tarde e, muito mais tarde do que nas investigações realizadas no âmbito do enfoque cognitivo” (GASCÓN, 2010, p.15).

Em acordo a esta necessidade apontada por Gascón (2010) e em busca de enfrentar o problema da falta de sentido das matemáticas escolares no nível básico e suas questões derivadas, como o isolamento e a monumentalização dos conteúdos matemáticos e outras, propomos o estabelecimento de um sistema didático que nos proporcionasse um ambiente de estudos que objetivasse a elaboração e reconstrução de OM que estabeleça o maior número de articulações possíveis entre temas, setores e áreas, utilizando para tal fim as tarefas fundamentais (Guerra e Andrade, 2009), e ainda

que estas OM pudessem ascender ao nível de Organizações Matemáticas Locais de Relativamente Completas (OMLRC).

A OMLRC é a ferramenta didática desenvolvida por Fonseca (2004) e Bosch et al. (2004) para enfrentar a questão da incompletude das organizações matemáticas nas instituições escolares. A opção por esta ferramenta se dá por esta apresentar como uma das condições para a elaboração da mesma a necessidade que a OM em questão contenha:

[...] um questionamento tecnológico relevante, ou seja, um conjunto de tarefas matemáticas que dizem respeito à interpretação, justificação, confiabilidade, economia e ao alcance das técnicas e, ainda, que tal questionamento incida de tal forma sobre a prática matemática que induza o Momento de desenvolvimento do Trabalho da Técnica em uma direção tal que produza uma atividade matemática de complexidade crescente, que provoque a ampliação do tipo de problemas que podem ser abordados (FONSECA et al. 2010, p.249).

Ao propor a reconstrução das OMLRC nas instituições escolares, Fonseca et al. (2004 e 2010) nos aponta a importância das tarefas a serem enfrentadas, pois elas devem suscitar um questionamento tecnológico o mais abrangente possível para que produza uma atividade matemática de complexidade crescente possibilitando a ascensão de uma organização matemática pontual à uma OMLRC.

É nesse sentido que propomos a investigação das tarefas fundamentais quando da reconstrução das OM nas instituições de ensino, pois esta propicia a transformação de simples tarefa em técnica e principalmente em tecnologia/teoria.

Na busca da reconstrução de OM na perspectiva proposta nesta pesquisa adotamos como procedimentos metodológicos pressupostos do “Parcours d’étude et de recherche” (PER) proposto por Yves Chevallard (2009), por ser este um dispositivo didático que responde aos problemas didáticos que se pretende enfrentar nesta pesquisa.

O PER se estabelece por uma questão Q no sentido forte que propicie a partir dela a derivação de questões outras cujas respostas são acessíveis pela comunidade de estudos por meio de atividades matemáticas desenvolvidas pelo grupo. Dentre as questões derivadas aparecerão questões, umas mais outras menos, cuja técnica ou técnicas para o enfrentamento destas, não são de imediato identificadas pelo grupo o que requer a entrada do grupo em um processo de estudos o qual possibilitará a reconstrução da OM desejada. Além do que “o estudo de Q_0 e de suas questões

derivadas conduz a construção de um grande número de saberes que delimitaram o mapa dos percursos e seus limites” (FONSECA et al. 2010, p.250).

Segundo Chevallard (2009), o PER se constitui a partir de uma questão Q (geratriz) a ser respondida no contexto de um sistema didático S (X, Y, Q) formado em torno de Q, onde X é um grupo de estudo podendo ser de alunos, de pesquisadores, de jornalistas, etc e Y é uma equipe pequena, podendo até não existir, de materiais de estudo (apostilas, livros) de coordenador do estudo (professor, tutor, coordenador de pesquisa, editor, etc.). A constituição do sistema didático tem por finalidade o estudo de Q, a fim de encontrar uma resposta (R) ou um conjunto de respostas. Pretende-se que nesse ambiente o resultado do trabalho que se espera de X sob a orientação e supervisão de Y possa produzir a reconstrução de OMLRC nos termos descritos nesta pesquisa, ou seja, considerando as tarefas fundamentais.

Em nosso trabalho o sistema didático é constituído em torno de uma tarefa/tema que catalisa as articulações com diferentes organizações, o que propicia a formação da comunidade de estudo. Nesses termos, a questão problemática Q é formulada da seguinte maneira: **Em uma organização matemática/didática, quais contribuições à eleição de uma tarefa/tema fundamental como objeto matemático que articula e justifica outros temas ou setores ou áreas, trarão para a reconstrução de OM a serem propostas para estudos no nível básico de ensino?** Um grupo de alunos (X) hipotéticos e (Y) composto por docentes da escola onde a pesquisa se desenvolve e um professor também docente da referida escola e autor desta comunicação. A noção de aluno hipotético objetiva idealizar a atividade liberando o autor desta, provisoriamente, das variáveis contextuais e cognitivas que podem influenciar na execução da atividade (cf. GASCÓN, 2010, p.12).

Assim sendo, o modelo de PER que temos trabalhado se caracteriza pelos mesmos elementos indicados por Fonseca (2010, p.250), quais sejam: Um problema didático-matemático ao qual o sistema de ensino tem de dar respostas (a questão Q anunciada no parágrafo anterior); uma instituição (Escola da Rede Federal de Ensino Básico) onde a questão problemática é colocada e a razão de ser da questão (tarefa/tema fundamental como o teorema de Tales).

4. A comunidade de estudos e as organizações para o estudo

Nas pesquisas que desenvolvemos, as tarefas fundamentais são buscadas na histórica da matemática, na epistemologia da matemática e na epistemologia da matemática escolar. Assim, a constituição do sistema didático a partir da questão Q, em uma organização matemática/didática, suscita quais contribuições à eleição de uma tarefa/tema fundamental como objeto matemático que articula e justifica outros temas ou setores ou áreas, trarão para a reconstrução de OM a serem propostas para estudos no nível básico de ensino? A comunidade de estudos propôs a questão derivada de Q que identificamos como Q_1 e sendo descrita da seguinte maneira ao redor de um tema de estudos como construir “organizações matemáticas de referência” (BOSCH et al. 2006, p.57) elencadas partir de tarefas fundamentais?

Como tema, a comunidade de estudos elegeu o teorema de Tales, a escolha deste tema se deu a partir de uma breve investigação histórica epistemológica do setor geometria analítica realizadas no trabalho de René Descartes (1637) apoiada na tradução e comentários efetuados por Smith e Latham (1954).

No livro *La Géométrie*, Descartes inicia seus estudos refletindo sobre a relação entre os cálculos aritméticos e as operações geometrias e um correspondente geométrico às operações algébricas. Em seguida construiu a simbologia que iria usar na obra e mostrou como se chega as equações que servem para resolver problemas. Fez um estudo sobre os tipos de equações de segundo grau e como resolvê-las. Finalmente, aplicou seu método na resolução algébrica do problema de Pappus para quatro retas. Estabelecendo assim os princípios gerais da Geometria Analítica.

Ao descrever sobre a relação entre a aritmética e a geometria Descartes resume seu trabalho descrevendo que “na solução de problemas geométricos [...] não usei outro teorema exceto os que afirmam que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos lados [...]” (DESCARTES, 1637, p.10. tradução nossa). Esta afirmativa nos indica a compreensão de que a teoria das proporcionalidades estabelece em nível histórico e epistemológico a conexão e articulação da aritmética com a geometria possibilitando assim o desenvolvimento do método para enfrentamento dos tipos de tarefas concebidos no contexto geométrico, sendo este método a própria geometria analítica.

Estas construções de Descartes nos motivaram na eleição do teorema de Tales como tema para estudo, desta forma uma segunda questão Q_2 foi estabelecida no

sistema didático, qual a potencialidade do teorema de Tales para o ensino básico? Na perspectiva de enfrentamento da Q_2 a comunidade decidiu realizar estudos históricos epistemológicos deste tema matemático de estudo propostos na grade curricular da escola. Este estudo objetiva a compreensão da construção do conhecimento deste objeto no sentido da tomada de consciência das possíveis articulações que podem ser estabelecidas e ainda das possíveis aplicabilidades deste conhecimento buscando evidenciar os porquês da presença deste objeto na grade curricular, na perspectiva de propiciar ao professor subsídios teóricos que o possibilite responder perguntas dos alunos como qual o motivo deles alunos estarem estudando este ou aquele conteúdo matemático.

No percurso do estudo um dos membros da comunidade destacou que “Tales possivelmente não estabeleceu relação de semelhança de triângulos, pois não havia triângulo e sim relações entre segmentos, o triângulo é a construção da nossa mente”, este argumento fundamentou-se no que descreve Guedj (2008) Tales “deduziu que no instante em que minha sombra for igual à minha estatura, a sombra da pirâmide será igual à sua altura” (p.43).

O destaque sobre a consideração ou não da semelhança de triângulos, provocou intenso debate, pois alguns professores não concordaram, afirmando que se Tales não tivesse pensando em semelhança de triângulos não teria se preocupado com o instante e o dia, além do que ele era astrônomo e já deveria conceber a propagação retilínea dos raios solares.

Desta forma, novas questões foram levantadas como: (Q_3) Qual relação existe entre o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos? (Q_4) Qual relação existe entre o Teorema de Tales e as Proporções? (Q_5) Tales no episódio da medição da altura da Pirâmide utilizou a teoria das proporções ou semelhança de triângulos? (Q_7) Ao propor para o aluno do sétimo ano encontrar o valor de x , este sendo a medida de um segmento de reta, resultado de uma figura formada por um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, estaremos trabalhando no campo algébrico ou geométrico?

Com a finalidade de melhor esclarecer e evidenciar as questões formuladas o grupo decidiu por dividir tarefas entre seus membros para estudos específicos das questões levantadas para apresentação e estudos em encontros futuros. As tarefas foram assim distribuídas: estudo da demonstração do teorema de Tales pelo método das proporções, proposição de Eudoxo; aplicações do Teorema de Tales, buscando evidenciar as relações deste com outros temas e setores da matemática escolar.

Ainda sobre o estudo histórico epistemológico do teorema de Tales, em outro episódio Guedj (2008) destaca a proposição de Tales onde este afirma “que a cada triângulo poderia corresponder uma circunferência” (p.36), o quê implicou no argumento de que três pontos, não alinhados, definem um triângulo, o que é evidente, porém é pouco evidente que eles também podem determinar uma circunferência. Esta argumentação provocou debate entre os componentes da comunidade de estudo, onde uma parcela do grupo concordava com o que havia sido exposto e outra parcela concordava parcialmente acrescentando que no caso da circunferência nem sempre, pois algumas condições deveriam ser consideradas, foi quando um dos membros do grupo exclamou *se é evidente a construção do triângulo então sempre por três pontos não alinhados passa uma circunferência já que todo triângulo tem circuncentro e este é sempre possível de ser determinado.*

A partir desta conclusão houve algumas reflexões que destacavam a relação de imbricação que ocorre entre a condição de alinhamento de três pontos, o triângulo e a circunferência, conteúdos de estudos propostos como temas da geometria analítica. Através destas reflexões, o grupo mais uma vez se reportou às organizações didáticas desenvolvidas em sala de aula as quais tomam como referências as OM propostas no livro didático, onde os temas mencionados são tratados sem nenhuma articulação. Este episódio provocou a manifestação dos membros do grupo que pôs em destaque a importância da constituição desta comunidade e da elaboração da OM de referência para estudos na escola.

Considerações e desdobramentos

Podemos concluir que o estabelecimento do sistema didático despertou nos professores a necessidade da entrada em processos de estudos, pois muitos episódios históricos epistemológicos podem revelar articulações entre temas que não são evidenciados nas OM propostas por autores nos livros didáticos, como no caso do alinhamento de pontos, o triângulo e a circunferência que para alguns componentes da comunidade só ficou evidente após o estudo, como na declaração de um dos membros, “só agora eu atentei para esse detalhe que por três pontos não alinhados quaisquer pode ser traçada uma circunferência, isso permite que ao falar de condição de alinhamento eu

já posso tratar da equação da circunferência” e outro membro do grupo acrescentou “da equação da reta e da área de polígonos dados os vértices”. Isto revela a potencialidade do teorema de Tales que de forma implícita ou explícita pode revelar-se como tarefa/tema fundamental.

Outro ponto destacado foi sobre a relação entre o teorema de Tales e a semelhança de triângulos o grupo concluiu que se trata de temas imbricados, pois no estudo ainda não ficou claro se Tales utilizou a semelhança de triângulos para estabelecer o teorema ou vice-versa. Um dos membros do grupo chegou a exclamar que “o teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos são as mesmas coisas”, porém o grupo decidiu por aprofundar mais os estudos a fim de assumir ou não esta conclusão. O que ficou bastante claro para a comunidade foi o nível de articulação entre esses temas e mais o estudo da teoria das proporções, o que permitiu também estabelecer articulações entre as áreas Geometria e Álgebra.

Por fim, podemos preliminarmente concluir que o teorema de Tales é um tema que transversaliza o ensino básico, pois ele pode ser colocado como tarefa/tema que articula outros temas, setores e áreas, além de justificar o estabelecimento do estudo de alguns destes. De outro modo, o teorema de Tales de acordo com sua função na OM pode assumir o papel de tarefa, de técnica ou de tecnologia/teoria.

Indicamos como trabalhos futuros pesquisas para elaborações de OM que potencialize o teorema de Tales como tema que articula e justifica outros temas, setores e áreas propostas para o estudo no ensino básico, bem como realizar estudos de outros temas que revelem a potencialidade da tarefa fundamental e nos ajude a minimizar as questões do isolamento, e da monumentalização.

Nesse sentido, inferimos a necessidade da elaboração de um Modelo Epistemológico de Referência (MER)⁵ que possibilite a análise e o desenvolvimento das OM propostas nos livros didáticos, bem como as que vivem nas instituições de ensino. De outro modo, acentuamos que de posse do MER e tomando a Tarefa Fundamental como dispositivo didático que detona e mantém o processo de elaboração das OM e OD com certo nível de articulação entre os tipos de tarefas e os temas de estudo, desencadear um processo de estudo em que possivelmente o fazer matemático é

⁵ SIERRA (2006, p. 48) destaca que MER é um instrumento que auxilia a descrição e análises do modelo epistemológico dominante nas instituições de ensino, além de atender as restrições que o modelo apresenta e que, reflete de alguma forma na relação institucional da OM em questão, pois viabiliza outros meios de se estudar a OM na instituição considerada.

potencializado pela articulação entre os temas, os setores e as áreas de estudo da matemática no ensino básico.

Referências

Brasil, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília, 2002.

Brasil, Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática**. Secretária de Educação Fundamental. Brasília, 1998.

Bosch, M. et al. *La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico* **Revista Latinoamericana de Investigación Matemática Educativa (RELIME)**. Vol. 18 nº 2, México. P. 37-74, 2006.

Bosch, Mariana e Gascón, Josep. *La praxeología local como unidade de análisis de los procesos didácticos*. 2004. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid>>. Acesso em 12 out. 2010.

Chevallard, Y. *La notion de PER: problèmes et avancées*. Toulouse, 2009. Disponível em < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acessado em 8 de out. 2010.

Chevallard, Yves, et. al. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

Chevallard, Yves. *Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. Actes de la XI école d'été de didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage, p. 41-56, 2002.

Descartes, R. *The geometry of Rene Descartes with a facsimile of the first edition, 1637*. Trad. David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc. 1954.

Fonseca, C. et al. *Los REI en la creación de secuencias de enseñanza y aprendizaje*. In anais do **III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic**. Catalunya, Spain. pp. 247- 256, 2010.

Fonseca, C. *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad*. Tese de doutorado. Universitat de Vigo, Espanha, 2004.

Gascón, Josep. *Del problem solving a los recorridos de estudio e investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica*. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)**, Nº 22, p. 9-35, 2010.

Garcia, J. et al. *Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics*. **Zentral blatt für Didaktik der Mathematik**, v.38(3), p.226-246, 2006.

Guedj, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das letras, 2008.

GUERRA, Renato B. e ANDRADE, Roberto C. D. Tarefas fundamentais e o ensino de geometria analítica. *Taller 21*, In anais do **VIII Reunión de didáctica de la matemática del cono sur**. Asunción, Parguay, 2009.

SIERRA, A. D. *Lo matemático en el diseño y analisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. Tese apresentada para *Universidad Complutense de Madrid - Facultad de Educación*, Departamento de *Didáctica y Organización Escolar*, Madrid. 2006.