

Perspectivas Didáticas e Históricas do Modelo Epistemológico Dominante no Ensino das Razões Trigonométricas

Didactic and Historical Perspectives of the Dominant Epistemological Model in the Teaching of Trigonometric Ratios

Liliane Lopes **MACHADO**

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGEnM/UEFS

Eliane Santana de Souza **OLIVEIRA**

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

Eliene Barbosa **LIMA**

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

Correspondência do autor:

lilianelopesmachado@gmail.com

RESUMO

O presente estudo tem como objetivo analisar como elementos do Modelo Epistemológico Dominante (MED) orientam o ensino das razões trigonométricas. Para tanto, inicialmente realizamos a análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a fim de compreender as condições e restrições impostas a esse objeto matemático no contexto da educação básica brasileira. Em seguida, analisamos dois livros didáticos, um de 1968 e outro de 2020, com o propósito de identificar mudanças e permanências na apresentação das razões trigonométricas em diferentes tempos pedagógicos. Os resultados indicam que, embora tenha havido a inserção de contextos que buscam justificar a relevância do conteúdo e promover articulações com outras áreas do conhecimento no material mais recente, permanecem abordagens semelhantes quanto à linguagem matemática empregada e à definição das razões trigonométricas a partir de triângulos retângulos semelhantes, evidenciando a ausência de mudanças profundas no tratamento epistemológico desse objeto. Conclui-se que o MED se mantém como referência central na organização do ensino das razões trigonométricas, ao mesmo tempo em que evidencia condições que estruturam esse ensino e restrições que ainda o limitam. Assim, a análise do MED mostra-se fundamental para compreender as raízes epistemológicas que sustentam as práticas pedagógicas e para subsidiar a construção de um Modelo Epistemológico de Referência alternativo para o estudo das razões trigonométricas, apontando a necessidade de investigações mais amplas que considerem outros materiais e contextos educativos.

Palavras-chave: Modelo Epistemológico Dominante, Razões trigonométricas, Teoria Antropológica do Didático.

ABSTRACT

This study aims to analyze how elements of the Dominant Epistemological Model (DEM) guide the



teaching of trigonometric ratios. To this end, we initially analyzed the Brazilian National Common Curriculum Base (BNCC) to understand the conditions and restrictions imposed on this mathematical object in the context of Brazilian basic education. Subsequently, we analyzed two textbooks, one from 1968 and the other from 2020, to identify changes and continuities in the presentation of trigonometric ratios across different pedagogical periods. The results indicate that, although contexts seeking to justify the relevance of the content and promote connections with other areas of knowledge have been incorporated into the more recent material, similar approaches remain regarding the mathematical language used and the definition of trigonometric ratios based on similar right-angled triangles, highlighting the absence of profound changes in the epistemological treatment of this object. It is concluded that the Dominant Epistemological Model (MED) remains a central reference in the organization of the teaching of trigonometric ratios, while also highlighting the conditions that structure this teaching and the restrictions that still limit it. Thus, the analysis of the MED proves fundamental to understanding the epistemological roots that underpin pedagogical practices and to support the construction of an alternative Reference Epistemological Model for the study of trigonometric ratios, pointing to the need for broader investigations that consider other educational materials and contexts.

Keywords: Dominant Epistemological Model, Trigonometric Ratios, Anthropological Theory of Didactics.



INTRODUÇÃO

No contexto hodierno, ensinar Matemática é um desafio, pois envolve lidar com as rápidas transformações sociais, culturais e tecnológicas que influenciam tanto os métodos de ensino quanto às expectativas dos estudantes em relação à aprendizagem. Nesse sentido, é importante compreender as mudanças e permanências dos objetos matemáticos para entender como o conhecimento é produzido e transmitido nas instituições educacionais ao longo do tempo. Também é importante compreender o que os documentos oficiais preconizam sobre esses objetos, a fim de entender o que está posto para os professores da atualidade.

Nesse cenário, o presente estudo tem como objetivo geral analisar como elementos do Modelo Epistemológico Dominante (MED) orientam o ensino das razões trigonométricas. O MED “refere-se à abordagem que prevalece em determinando momento da história e na prática educacional. Ele representa as concepções predominantes sobre como o conhecimento é produzido, validado e transmitido” (Abar; Mesquita, 2024, p. 557). Assim, realizamos a análise do MED para compreender como as condições e restrições institucionais moldam e delimitam o estudo de determinados conteúdos ou práticas, no nosso caso, o objeto matemático em estudo são as razões trigonométricas. Essa análise pode identificar as lacunas, os desafios e as possibilidades de transformação do ensino, considerando tanto as normas institucionais quanto às necessidades dos aprendizes (Oliveira, 2020).

Com base na análise do que está posto, ou seja, na análise do MED, é possível construir caminhos alternativos com a construção de Modelos Epistemológicos de Referência. De acordo com Abar e Mesquita (2024) os Modelos Epistemológicos Dominantes (MED) e os Modelos Epistemológicos de Referência (MER) configuram perspectivas distintas na interpretação e na formulação do conhecimento em um campo específico, como a Matemática.

Assim, ainda de acordo com as autoras, refletir sobre esses dois modelos e suas interações é essencial para compreender como o conhecimento é elaborado e transmitido no contexto educacional.

É importante ressaltar que os conceitos de MED e MER fazem parte da Teoria Antropológica do Didático (TAD) que fundamenta esse trabalho. A TAD “situa a atividade matemática, e então a atividade de estudos em matemática, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais” (Chevallard, 1998, p. 223, tradução nossa). Nesse sentido, a TAD proporciona uma abordagem para analisar a matemática no contexto das atividades humanas que possibilita examinar a relação do indivíduo com o conhecimento matemático, evidenciando como esse saber é produzido, transmitido e transformado nas práticas sociais.

Visando alcançar nosso objetivo geral, realizamos a análise da Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC é um documento norteador da educação brasileira que estabelece os direitos e objetivos de aprendizagem essenciais para todos os estudantes ao longo da Educação Básica. Além disso, serve como referência para a elaboração de currículos pelas redes de ensino e escolas, orientando a formação docente e a produção de materiais didáticos (Brasil, 2018). Dessa forma, analisamos a BNCC para compreender as condições e restrições postas sobre as razões trigonométricas.

Ademais, realizamos a análise de dois livros didáticos, um de 1968 e outro de 2020, a fim de compreender as mudanças e permanências na apresentação desse objeto matemático. Ressaltamos que, o estudo e compreensão do MED vai nos ajudar na construção do Modelo Epistemológico de Referência (MER) em pesquisas futuras. Segundo Gascón (2014), o MED desempenha um papel central na emancipação da didática da Matemática em relação ao Modelo Epistemológico Dominante (MED). O MER funciona como um instrumento que possibilita a superação de limitações



epistemológicas e institucionais impostas pelo MED, sejam elas relacionadas aos processos evolutivos contemporâneos ou aos obstáculos históricos que dificultam o acesso ao saber. Esse artigo está estruturado da seguinte maneira, após a introdução apresentamos uma breve reflexão teórica, seguido dos aspectos metodológicos; em seguida apresentamos a análise da BNCC, a seção seguinte aborda análise dos dois livros didáticos e por fim as considerações finais.

UMA BREVE REFLEXÃO TEÓRICA SOBRE A TAD

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), por meio de seus elementos institucionais, possibilita às organizações praxeológicas matemáticas e didáticas identificar lacunas e elaborar propostas para supri-las. O conceito de praxeologia tem origem nos termos gregos *práxis* e *logos*, que significam, respectivamente, prática e razão (Chevallard, 2002).

Segundo Chevallard (2002), toda atividade humana está organizada. Essa organização pode ser compreendida a partir de um tipo de tarefa a ser realizada, que exige uma técnica, fundamentada por uma tecnologia voltada ao saber, a qual, por sua vez, encontra respaldo em uma teoria. Nesse quadro conceitual, delineiam-se o que o autor denomina Organização Matemática (OM).

Na OM temos, segundo Chevallard (1999), as organizações praxeológicas ou praxeologias, composta por tipos de tarefas, técnica, tecnologia e teoria, representadas, respectivamente, por $[T, t, \theta, \Theta]$. Segundo Chevallard (1999) temos um tipo de tarefa $[T]$ que denota uma ação a ser realizada e em seguida, reconheceremos a maneira como realizar ou fazer essa tarefa, ou seja, por intermédio das técnicas $[t]$, justificando por meio de propriedades, as quais chamamos de tecnologia $[\theta]$, que justificam e/ou explicam as técnicas utilizadas. E, por fim, temos a teoria

$[\Theta]$, que justifica as tecnologias utilizadas.

Chevallard (1999) estrutura as praxeologias ou organização praxeológica em dois blocos: bloco prático-técnico e tecnológico-teórico. O bloco prático-técnico $[T, t]$ está associado à práxis, é o saber fazer; o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ é o logos, está relacionado à razão, ou seja, é o saber. Nesse sentido, a organização praxeológica nos permite investigar nesse trabalho a organização do saber matemático em jogo, bem como a praxeologia que é construída nessa aula.

Nesse sentido, a TAD, especificamente a organização matemática, servira como lente de análise a fim de revelar quais praxeologias matemáticas estão em jogo nas obras analisadas.

Outro termo importante na TAD é a razão de ser, que refere-se às “razões de existência de uma obra – isto é, de qualquer objeto criado e difundido pela actividade humana – entendemos a intenção que presidiu à sua criação ou à sua difusão numa tal instituição, o uso (ou usos) que pretendemos para fazer dela, a utilidade que reconhecemos nela” (Chevallard, 2009, p. 81, tradução nossa). Ou seja, a razão de ser de uma determinada obra diz respeito à sua finalidade, ao sentido que justifica sua existência e ao papel que ela desempenha em uma instituição. Trata-se de compreender o porquê determinada obra foi criada, para que serve e quais necessidades busca atender. No contexto educacional, discutir a razão de ser de um conteúdo implica questionar por que ele é ensinado, que usos lhe são atribuídos e que tipo de formação se espera promover por meio dele.

Outrossim, os termos condições e restrições também figuram na TAD. Com base em Chevallard (2009), compreendemos que, em uma determinada instituição, tudo, a princípio, pode ser considerado condição, no sentido de constituir fatores, características e circunstâncias que possibilitam e orientam a existência e o funcionamento de uma obra ou prática. As restrições, por sua vez, emergem da posição que os sujeitos ocupam dentro dessa instituição, pois tal posição pode limitar ou mesmo impedir a modificação de certas



condições. Assim, aquilo que inicialmente aparece como uma condição pode transformar-se em restrição, dependendo do papel institucional assumido e do poder de ação que se tem sobre essas circunstâncias.

Esclarecemos que a TAD dispõe de diversos outros constructos teóricos que não foram aqui explorados. No entanto, neste momento, optamos por nos ater à apresentação daqueles que se articulam diretamente com os objetivos e a análise desenvolvida neste trabalho.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho é de natureza qualitativa, que de acordo com Flick (2006) “é de particular relevância ao estudo das relações sociais devido à pluralização das esferas da vida” (p.20). Na pesquisa qualitativa, o foco da pesquisa se concentra em compreender como as coisas acontecem, na qual é utilizada a interpretação ideográfica, ou seja, a pesquisa qualitativa é uma experiência interpretativa (Creswell, 2010).

Além disso, caracteriza-se também como documental, pois de acordo com Appolinário (2007, p. 85), “sempre que uma pesquisa se utiliza apenas de fontes documentais (livros, revistas, documentos legais, arquivos em mídia eletrônica), diz-se que a pesquisa possui estratégia documental”. Assim, é uma pesquisa documental, pois se fundamenta na análise de materiais já existentes, nesse caso, o documento norteador BNCC e dois livros de épocas distintas. A pesquisa documental é particularmente útil para compreender os contextos históricos, sociais e políticos que influenciam o objeto de estudo, além de permitir um aprofundamento sobre as bases teóricas e práticas que sustentam os elementos analisados.

Além da BNCC, o primeiro livro a ser analisado é do ano de 1968, de autoria de Osvaldo Sangiorgi, intitulado *Matemática Curso Moderno*. A escolha dessa obra deve-se à sua relevância histórica e pedagógica no ensino de Matemática no Brasil, uma vez que reflete as

influências e tendências educacionais da época.

Publicado em um período de significativas transformações educacionais, marcado por reformas do ensino e pela busca de métodos considerados mais modernos e eficazes, o livro de Sangiorgi, foi sucesso editorial justamente por incorporar princípios do Movimento da Matemática Moderna (MMM). Essa abordagem, em evidência naquele momento, valorizava uma apresentação mais formal e estruturada dos conteúdos matemáticos, alinhada aos avanços científicos e tecnológicos da época, com destaque para o uso da linguagem simbólica, da teórica dos conjuntos e do rigor conceitual.

Enquanto isso, o livro escolhido no contexto atual foi o *Multiversos Matemática: Sequências e Trigonometria*, de autoria de Joamir Roberto de Souza, publicado em 2020. A escolha dessa obra se deve, por ser um dos livros mais utilizados na região de Feira de Santana, no período do desenvolvimento desse artigo, inclusive em atividades acadêmicas e profissionais, servindo como referência prática para o estudo do objeto do saber em questão.

Esclarecemos que a TAD dispõe de diversos outros constructos teóricos que não foram aqui explorados. No entanto, neste momento, optamos por nos ater à apresentação daqueles que se articulam diretamente com os objetivos e a análise desenvolvida neste trabalho.

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Com vistas a compreender as condições e restrições das instituições dominantes sobre o estudo de razões trigonométricas, vamos realizar a análise do documento norteador do ensino básico de todo o Brasil: a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A BNCC é referência nacional para construção dos currículos dos sistemas e das redes de ensino federal, estadual e municipal, pois propõe uma uniformização de



aprendizagens basilares e comuns a todas as partes do país, acrescida de uma parte flexível, que varia de acordo com as especificidades socioculturais de cada localidade (Brasil, 2018).

Visando nosso objeto de estudo, observamos que as razões trigonométricas vivem na etapa do Ensino Médio na BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias. Nesse contexto, focando nesta etapa de ensino, o documento propõe a ampliação e aprofundamento das aprendizagens desenvolvidas no ensino fundamental, construindo pontes entre os conhecimentos adquiridos e criando estruturas para aprendizados mais aperfeiçoados. Além disso, “o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade” (Brasil, 2018, p.518).

A BNCC do Ensino Médio tem um grande direcionamento para exploração da Matemática na vida e no cotidiano, relacionando-a a outras áreas de conhecimento. Assim, a BNCC está organizada como um conjunto de pares de ideias fundamentais que se articulam entre os campos da Aritmética, Álgebra, Geometria, Probabilidade e Estatística, Grandezas e Medidas. Os pares adotados pelo documento são: “variação e constância; certeza e incerteza; movimento e posição; relações e inter-relações” (Brasil, 2018, p. 520).

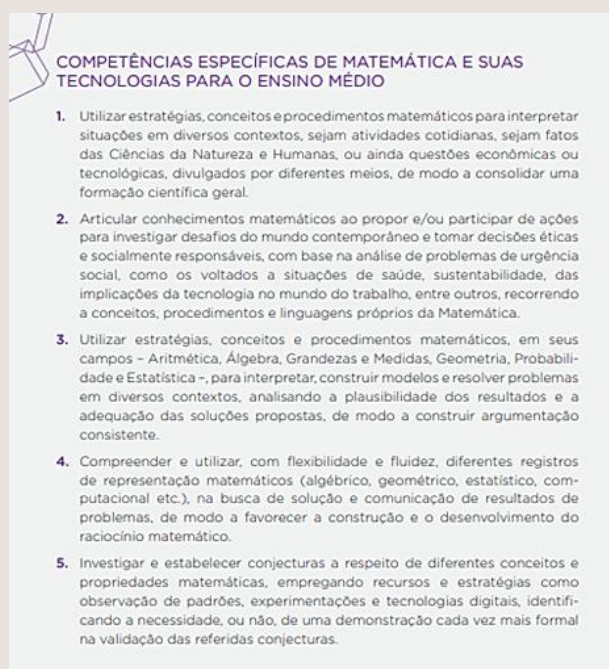
Com base nessa distribuição, podemos perceber que o objeto de conhecimento de razões trigonométricas está localizado no par relações e inter-relações, pois este trata das relações que “envolvem a proporcionalidade entre duas ou mais grandezas, escalas, divisão em partes proporcionais etc. que tratam da interdependência entre grandezas” (Brasil, 2018, p.521).

Um outro ponto importante do par relações e inter-relações é a ideia de unidade Matemática. Esta ideia é a de que a Matemática é fruto da vivência humana, portanto, não é um algo pronto e acabado, mas sim uma área em constante desenvolvimento. Além disso, as práticas matemáticas variam de acordo como cada grupo e cultura usam a Matemática, varia também ao

longo do tempo, das necessidades, perspectivas, e outros fatores.

Ademais, é importante ressaltar que a BNCC está organizada em competências e habilidades. O termo competência é definido no documento como: “a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho” (Brasil, 2018, p.8). Na BNCC do Ensino Médio, encontramos cinco competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, observe-as na figura 1:

Figura 1 – Competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio



Fonte: Brasil (2018, p.523).

Essas competências são abrangentes, permitindo diversas interpretações e englobando uma ampla gama de conhecimentos e habilidades. A partir da leitura do documento, consideramos como condições: a inclusão do desenvolvimento de diferentes estratégias, conceitos e procedimentos para articular os conhecimentos matemáticos com outras áreas; a capacidade de resolver problemas práticos do



cotidiano; a compreensão e aplicação de conceitos matemáticos em diferentes contextos; a análise e interpretação de dados; a modelagem de situações reais; e a construção de uma argumentação consistente.

Analisando as competências 1 e 2 observamos que não encontramos habilidades que ressaltam, mesmo que de forma indireta, as razões trigonométricas. Contudo, encontramos na competência específica 3, que visa utilizar de estratégias, conceitos e procedimentos nos campos da Matemática para construir modelos e resolver problemas em diferentes contextos, apresentando de forma mais explícita uma relação com o nosso objeto do conhecimento, a partir de duas habilidades. A primeira habilidade é a EM13MAT308 que busca “resolver e elaborar problemas, em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam às relações métricas ou as noções de congruência e semelhança” (Brasil, 2018, p.529).

Podemos observar que essa habilidade tem como objetivo capacitar os alunos a aplicar e desenvolver os conhecimentos sobre triângulos de forma prática em diferentes contextos, que poderiam ser, por exemplo, problemas que envolvem medições de distâncias e alturas inacessíveis, criação de escalas e proporções, determinação de ângulos em escadas e rampas: até a construção de justificativas teóricas baseadas nessas propriedades. Relacionando essa habilidade ao nosso objeto de estudo, as razões trigonométricas formam a base para resolver uma grande variedade de problemas envolvendo triângulos retângulos e são frequentemente combinadas com outros teoremas geométricos, como o Teorema de Pitágoras, para calcular ângulos ou lados desconhecidos de um triângulo.

A segunda habilidade relacionada a competência específica 3, que podemos associar ao nosso objeto do saber matemático é a EM12MAT314: “Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas compostas, determinadas pela razão ou pelo produto de duas outras, como velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc” (Brasil, 2018,

p.529). Essa habilidade sugere a possibilidade de explorar as razões trigonométricas, pois pode ser interpretada como um momento para introduzir conceitos como seno, cosseno e tangente, permitindo aos alunos compreender e aplicar essas relações em diversos contextos matemáticos e práticos.

A competência 4, apesar de ser de suma importância, não apresenta habilidades relacionadas ao objeto de conhecimento, razões trigonométricas. Enquanto que a competência 5 apresenta a habilidade EM13MAT512: “Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos” (Brasil, 2018, p.533).

Essa habilidade tem como principal objetivo desenvolver um pensamento matemático crítico, levando os alunos a não aceitarem proposições geométricas sem questionamento. Para isso, é necessário que os alunos investiguem propriedades e busquem contraexemplos, para construir um entendimento profundo de quando e por que algo é verdade na Matemática. Além disso, relacionando essa habilidade ao nosso objeto de estudo, ao focar na investigação de propriedades geométricas, incentiva o estudante a explorar como essas razões dependem dos ângulos internos e dos comprimentos dos lados dos triângulos retângulos

A partir da análise da BNCC do Ensino Médio da área de Matemática e suas Tecnologias, foi possível observar que, apesar de ter um forte direcionamento ao envolvimento com aspectos práticos e da realidade, a forma como as habilidades foram organizadas deixa espaço para alguns questionamentos, por exemplo: como articular os objetos de conhecimento para alcançar determinada habilidade? Como, de fato, organizar as competências e habilidades pensando na carga horária do ensino médio completo?

Outro questionamento que pode surgir é a profundidade dessas competências e habilidades



e o quanto isso está alinhado com as demandas sociais, já que na maioria das habilidades é citado “variados contextos”, como na já citada habilidade EM13MAT308, ou como outro na habilidade EM13MAT303: “Resolver e elaborar problemas envolvendo porcentagem em diversos contextos e sobre juros compostos, destacando o crescimento exponencial” (Brasil, 2018, p.528).

Dessa forma, sistematizamos no quadro 01, a partir do nosso olhar e fundamentadas na Teoria Antropológica do Didático, que a Base Nacional Comum Curricular, no que tange às razões trigonométricas, apresentam como condições e restrições os seguintes elementos:

Quadro 1- Condições e restrições para o ensino das razões trigonométricas na BNCC

Condições	Restrições
Incentiva a integração de estratégias, conceitos e procedimentos voltados para conectar os saberes matemáticos a outras áreas do conhecimento.	Imprecisa o momento de estudo e as aplicações das razões trigonométricas, cabendo ao professor interpretar e decidir como trabalhar-las, o que pode gerar inconsistências.
Estimula, no geral, o desenvolvimento do pensamento crítico em Matemática, promovendo a análise e o questionamento de proposições antes de aceitá-las como válidas.	Generaliza e não apresenta caminhos para a integração e articulação entre o objeto matemático razões trigonométricas e os “variados contextos”.
Fomenta, de forma geral, o uso de diferentes registros de representação, tanto algébricos, numéricos quanto geométricos.	Não apresenta de forma explícita as razões trigonométricas.

Fonte: As autoras.

Ademais, no que se refere ao objeto de conhecimento central desta pesquisa, observou-se que as habilidades descritas nos documentos curriculares analisados não abordam de forma explícita às razões trigonométricas. Esse aspecto revela uma lacuna significativa no detalhamento

dos conteúdos e na orientação pedagógica fornecida, uma vez que tal tema, de fundamental importância para a compreensão das relações métricas no triângulo e sua aplicação em contextos práticos, é deixado em aberto. Dessa forma, cabe ao professor, a partir de sua experiência e autonomia, decidir como e em que momento incluir o estudo das razões trigonométricas no planejamento e desenvolvimento de suas aulas, o que pode gerar inconsistências no ensino e uma abordagem desigual entre diferentes contextos educacionais. No mais, apresentaremos na próxima seção a análise dos livros didáticos supracitados.

ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS

A Educação Matemática é uma área de conhecimento que articula dimensões teóricas e práticas para compreender e aprimorar o ensino e a aprendizagem da Matemática. Desse modo, essa área de conhecimento integra reflexão, atuação e sistematização, promovendo um diálogo contínuo entre a prática docente e a pesquisa acadêmica (Garnica; Souza, 2012).

Nesse contexto, as abordagens pedagógicas – compreendidas como conjuntos de princípios, métodos e estratégias que norteiam o ensino e a aprendizagem – refletem, ao longo do tempo, tanto os avanços nas teorias de aprendizagem quanto às transformações nas demandas sociais e tecnológicas. O ensino de conceitos matemáticos fundamentais, como as razões trigonométricas, exemplifica essas transformações.

Dessa forma, realizamos uma análise das diferenças entre abordagens de dois livros didáticos de diferentes épocas sobre o mesmo conteúdo: o primeiro livro é de 1968 e o segundo do ano de 2020. A partir dessa análise, buscamos compreender a abordagem do assunto razões trigonométricas nesses dois livros, que pertencem a diferentes tempos pedagógicos, tendo o olhar voltado para entender os reflexos de movimentos, legislações e programas na apresentação desse conteúdo supracitado. Vale



salientar que nesse momento não vamos analisar as tarefas do livro, voltando o nosso foco apenas para a estruturação e apresentação do conteúdo. Outrossim, levantamos as condições e restrições postas nos livros didáticos das épocas citadas.

LIVRO DE 1968

A obra de Sangiorgi (1968) foi direcionada aos estudantes do ensino secundário, que no Brasil, de acordo com a Lei nº 5692¹, até 1971, representavam o estágio educacional posterior ao o ensino primário e anterior ao ensino universitário. O ensino secundário dividia-se em dois ciclos: o ginásio (equivalente, nos dias de hoje, aos anos finais do Ensino Fundamental I) e o científico (correspondente, na atualidade, ao Ensino Médio). Situado os aspectos da obra escolhida, antes de analisar de fato o conteúdo, é preciso compreender em que contexto social e quais movimentos influenciaram a concepção desse livro didático.

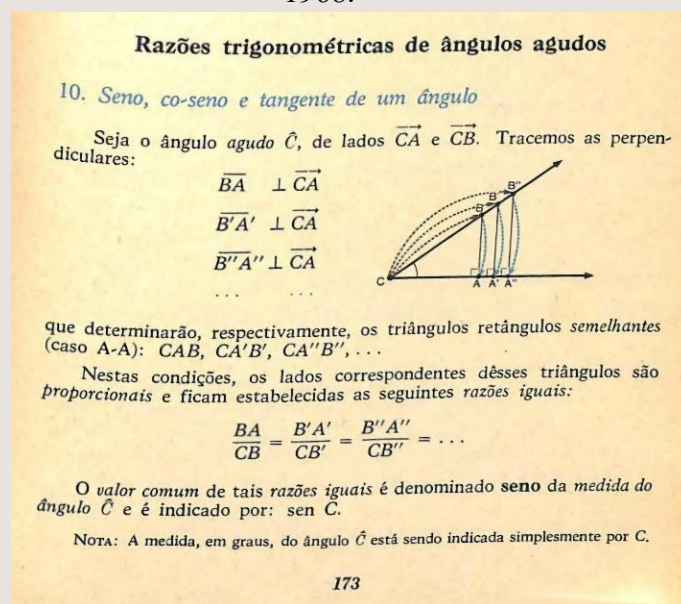
De acordo com Búrigo (2006), os discursos de reformulação do ensino de Matemática como componente de uma modernização ampla da sociedade brasileira iniciaram nos anos 1960, influenciados pelo pós-guerra e a fase de expansão da economia capitalista com o avanço da industrialização do país. Ademais, com base em Dias (2008), a conjuntura pós-guerra e a crescente modernização da sociedade capitalista difundia o discurso unânime da necessidade dos sistemas educacionais de mão de obra altamente qualificada, tanto em conhecimentos científicos quanto tecnológicos, mas principalmente mão de obra “[...] altamente disciplinada segundo a racionalidade técnica utilitária fundadora dos padrões de eficiência que vinham sendo implantados em todos os setores da economia capitalista” (Dias, 2008, p. 13).

Nesse contexto, estabeleceu-se uma reestruturação do ensino da Matemática escolar, que ficou conhecido como Movimento da

Matemática Moderna (MMM), que segundo Dias (2008), pode ser analisada historicamente como uma série de iniciativas, que ocorreram entre 1950 e 1980, reunindo matemáticos, autoridades educacionais e educadores de vários países, da Europa, dos Estados Unidos e da América Latina. As principais características do MMM foram: o uso da teoria dos conjuntos como base para o desenvolvimento da Matemática; introdução de conceitos de grupo, anel, corpo, espaços vetoriais, cálculo diferencial e integral, dentre outros; rigor lógico, abstração e linguagem formal.

O MMM também priorizou principalmente a estrutura interna da própria Matemática, com poucas aplicações práticas e envolvimento em contextos. Além disso, o movimento também influenciou na formação de professores, visto a necessidade de formar docentes para essa nova abordagem. Ao estabelecer um paralelo com o livro de Sangiorgi (1968), objeto dessa análise, percebemos algumas características do movimento.

Figura 2 - 1º Recorte do conteúdo razões trigonométricas do livro de Osvaldo Sangiorgi, 1968.



Fonte: Sangiorgi (1968, p.173).

Figura 3 – 2º Recorte do conteúdo razões trigonométricas do livro de Osvaldo Sangiorgi,

nova organização da educação básica sob a nomenclatura de 1º e 2º graus, além de ampliar a obrigatoriedade desse ensino (Brasil, 1971).

¹ Fixava diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus. Em outros termos, essa lei reformou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961, ao instituir uma

1968.

Logo:

$$\text{sen } C = \frac{BA}{CB} = \frac{B'A'}{CB'} = \frac{B''A''}{CB''} = \dots$$

Observe que o valor do sen C pode ser dado por *qualquer* das razões iguais das medidas dos lados do triângulo retângulo, de mesmo ângulo agudo $\hat{C}$, usado para defini-lo. Assim, por exemplo, se o ângulo $\hat{C}$ mede 36° , então:

$$\text{sen } 36^\circ = \frac{BA}{CB}$$

Da mesma forma com que foi definido o sen C você pode, dada a semelhança dos triângulos retângulos CAB, CA'B', CA''B'', ..., determinar outras razões iguais, usando para isso os demais lados correspondentes. Assim, as razões iguais:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = \frac{CA''}{CB''} = \dots \quad \frac{BA}{CA} = \frac{B'A'}{CA'} = \frac{B''A''}{CA''} = \dots$$

definem, respectivamente, as razões trigonométricas:

co-seno da medida do ângulo $\hat{C}$ (cos C) e tangente da medida do ângulo $\hat{C}$ (tg C)

Logo:

$$\cos C = \frac{CA}{CB} = \frac{CA'}{CB'} = \frac{CA''}{CB''} = \dots \quad \text{tg } C = \frac{BA}{CA} = \frac{B'A'}{CA'} = \frac{B''A''}{CA''} = \dots$$

Para o ângulo agudo $\hat{C}$, cuja medida é 36° , temos:

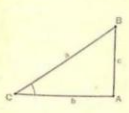
$$\cos 36^\circ = \frac{CA}{CB} \quad \text{e} \quad \text{tg } 36^\circ = \frac{BA}{CA}$$

174

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 174).

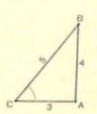
Figura 4 - 3º Recorte do conteúdo razões trigonométricas do livro de Osvaldo Sangiorgi, 1968

Então, usando somente o triângulo retângulo CAB (que é semelhante aos triângulos CA'B', CA''B'', ...), você pode resumir as definições das razões trigonométricas^(*): seno, co-seno e tangente da medida do ângulo agudo $\hat{C}$, da seguinte maneira:



$$\begin{cases} \text{sen } C = \frac{c}{a} = \frac{\text{medida (cateto oposto)}}{\text{medida (hipotenusa)}} \\ \cos C = \frac{b}{a} = \frac{\text{medida (cateto adjacente)}}{\text{medida (hipotenusa)}} \\ \text{tg } C = \frac{c}{b} = \frac{\text{medida (cateto oposto)}}{\text{medida (cateto adjacente)}} \end{cases}$$

Exemplo prático:



$$\begin{cases} \text{sen } C = \frac{4}{5} = 0,8 \\ \cos C = \frac{3}{5} = 0,6 \\ \text{tg } C = \frac{4}{3} = 1,333 \dots \end{cases}$$

As razões que definem o seno e o co-seno, da medida de um ângulo agudo, são números reais sempre menores do que 1 (por quê?), enquanto que a razão que define a tangente da medida de um ângulo agudo é qualquer número real positivo (por quê?).

Em virtude do uso frequente das razões trigonométricas na resolução de uma grande variedade de problemas, constroem-se tabelas, onde são registrados os valores de tais razões, dos ângulos de 1° a 89° , com uma aproximação de 0,0001 por falta. A sua leitura é simples: basta procurar na coluna do sen, cos ou tg o valor da razão trigonométrica correspondente à medida (em graus) do ângulo dado.

Neste compêndio consta uma *tábua* (pág. 181), onde as razões trigonométricas (sen, cos e tg) dos ângulos de 1° a 89° são dadas com a aproximação de 0,0001 por falta. A sua leitura é simples: basta procurar na coluna do sen, cos ou tg o valor da razão trigonométrica correspondente à medida (em graus) do ângulo dado.

Inversamente, conhecido o valor da razão trigonométrica da medida de um certo ângulo — que deve figurar numa das colunas (sen, cos ou tg) — procura-se, na linha horizontal correspondente, a medida do ângulo desejado.

(*) No Curso Colegial serão estudadas as funções trigonométricas: seno, co-seno e tangente, com significado muito mais amplo.

175

Fonte: Sangiorgi (1968, p. 175).

Observamos que a explanação do conteúdo de razões trigonométricas no livro didático de Sangiorgi apresenta as definições de seno, cosseno e tangente associadas aos lados correspondentes e proporcionais de triângulos retângulos, utilizando notações da Geometria Euclidiana para representar esses lados, como BA, CB e AC.

A explicação do conteúdo apresenta apenas um exemplo, localizado na página 175, no qual é considerado um triângulo retângulo com lados medindo 3, 4 e 5. Nessa perspectiva, ao analisarmos a praxeologia desse exemplo, a tarefa (T) consiste em determinar o seno, o cosseno e a tangente de um triângulo retângulo. A técnica (t) mobilizada é o cálculo das razões entre as medidas dos lados fornecidos, enquanto o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ abrange as noções e justificativas relativas às razões trigonométricas no triângulo retângulo.

A partir dos recortes da apresentação do conteúdo sobre razões trigonométricas do livro de Sangiorgi (1968), podemos observar alguns traços da influência do MMM. Como rigor lógico, abstração e linguagem formal. Outro fator que podemos notar nessa abordagem é a falta de exemplos de aplicações práticas e envolvimento em contextos que justifiquem a razão de ser desse conteúdo matemático. Tomando como base o conceito de "razão de ser" segundo Chevallard (2002), essa ausência de exemplos e aplicações práticas contribui para a perda de sentido no estudo de conteúdos matemáticos.

LIVRO DE 2020

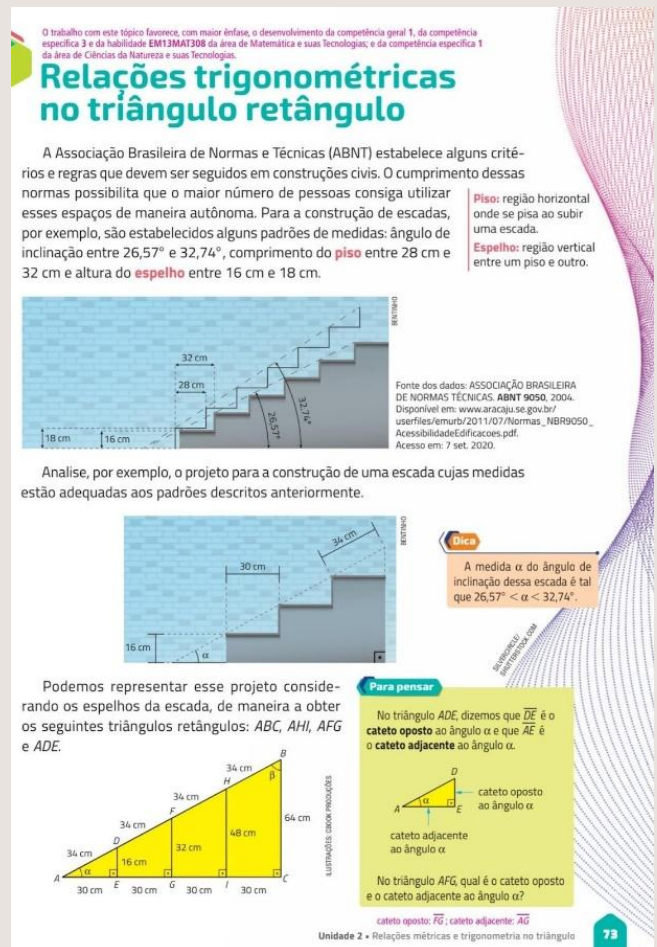
Saindo da década de 1960 e focando no contexto atual do sistema de educação brasileiro, utilizamos do livro de Joamir Roberto de Souza, de 2020, para analisar como o conteúdo sobre razões trigonométricas é abordado. Esse livro é orientado pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atual documento norteador do ensino básico, referência para formação de professores no



ensino superior e referência nacional para construção dos currículos dos sistemas e das redes de ensino federal, estadual e municipal (Brasil, 2018). Em relação ao nosso objeto de estudo, observamos que as razões trigonométricas são constituídas na etapa do Ensino Médio na BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias, diferentemente da década de 1960, quando esse conteúdo estava presente no ensino fundamental.

Ademais, a BNCC prioriza o desenvolvimento de competências que possibilitem aos estudantes aplicar o conhecimento matemático em situações cotidianas e contextos diversos. Também enfatiza uma aprendizagem que vai além da memorização de fórmulas e procedimentos, focando na resolução de problemas, no raciocínio lógico, no pensamento crítico e na capacidade de argumentação.

Figura 5 – 1º Recorte do conteúdo relações trigonométricas no triângulo retângulo no livro de Souza



Fonte: Souza (2020, p. 73).

Figura 6 – 2º Recorte do conteúdo relações trigonométricas no triângulo retângulo no livro de Souza.

Pelo caso de semelhança de triângulos **AA**, podemos afirmar que os triângulos ABC , AHI , AFG e ADE são semelhantes, uma vez que possuem dois ângulos internos congruentes (ângulo α e ângulo reto). Assim, para esses triângulos, temos que:

$$\bullet \text{ as razões entre o cateto oposto ao ângulo } \alpha \text{ e a hipotenusa são iguais.}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{HI}{AH} = \frac{FG}{AF} = \frac{DE}{AD} \Rightarrow \frac{64}{136} = \frac{48}{102} = \frac{32}{68} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

A razão entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa é denominada **seno** de α , indicada por **sen** α . Neste caso, $\text{sen } \alpha = \frac{8}{17}$.

- as razões entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa são iguais.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AI}{AH} = \frac{AG}{AF} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow \frac{120}{136} = \frac{90}{102} = \frac{60}{68} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$$

A razão entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa é denominada **cosseno** de α , indicada por **cos** α . Neste caso, $\text{cos } \alpha = \frac{15}{17}$.

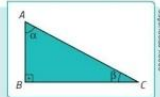
- as razões entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α são iguais.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{HI}{AI} = \frac{FG}{AG} = \frac{DE}{AE} \Rightarrow \frac{64}{120} = \frac{48}{90} = \frac{32}{60} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

A razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo α é denominada **tangente** de α , indicada por **tg** α . Neste caso, $\text{tg } \alpha = \frac{8}{15}$.

O seno, o cosseno e a tangente são **razões trigonométricas**. O campo da Matemática que estuda essas razões, entre outros conceitos, é a **Trigonometria**.

Seja o triângulo retângulo ABC com ângulos internos de medida α , 90° e β .



Em relação ao ângulo α , temos:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{BC}{AC}$$

Em relação ao ângulo β , temos:

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{cos } \beta = \frac{\text{medida do cateto adjacente}}{\text{medida da hipotenusa}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{medida do cateto oposto}}{\text{medida do cateto adjacente}} = \frac{AB}{BC}$$

Para pensar Resposta pessoal.

Considerando as razões apresentadas, o que você pode concluir? Represente um triângulo retângulo qualquer e estabeleça conjecturas. Por fim, discuta com os colegas sua produção.

Fonte: Souza (2020, p. 74).

Por este excerto, podemos observar o reflexo da característica principal da BNCC: a contextualização. Quanto à praxeologia, observamos que a obra se vale da construção de triângulos proporcionais, relacionados ao projeto de espelhos de escada, para exemplificar as razões trigonométricas. Sob essa ótica, ao analisarmos a praxeologia desse exemplo, a tarefa (T) consiste em determinar o seno, o cosseno e a tangente dos triângulos semelhantes apresentados, e a técnica (t) mobilizada é o cálculo das razões entre as medidas dos lados fornecidos. Consequentemente, o bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ abrange as noções e justificativas relativas às razões trigonométricas no triângulo retângulo.

De forma geral, o livro apresenta essa característica bem explícita, com a abertura de todos os tópicos com algum contexto que envolve outra área do conhecimento, como física, engenharia, problemas sociais,

ambientais, dentre outros. No livro de Souza (2020), ao invés de focar exclusivamente nas definições, a abordagem contemporânea começa explorando a aplicabilidade prática da trigonometria em situações reais, como no exemplo que o livro apresenta as normas para construção de escada, que envolvem triângulos e as razões trigonométricas.

CONDIÇÕES E RESTRIÇÕES

Ao aferir os livros didáticos escolhidos, analisando especificamente o conteúdo das razões trigonométricas da abordagem atual com a do passado, observa-se uma mudança na apresentação do conteúdo. A abordagem de 1960, típica dos livros de matemática daquele período, enfatizava a aplicação de fórmulas e a realização de exercícios repetitivos, com foco em habilidades procedimentais. A abordagem atual, como se vê nos livros contemporâneos, valoriza o desenvolvimento da resolução de problemas contextualizados. Enquanto na década de 1960 a trigonometria era abordada de forma mais abstrata, no livro de Souza (2020), ela é explorada como uma ferramenta útil em contextos reais e interdisciplinares, o que pode potencializar a aprendizagem significativa e o interesse dos alunos pelo conteúdo. Sistematizamos no quadro 02 as condições e restrições encontradas na análise da obra de Sangiorgi:

Quadro 2- Condições e restrições para o ensino das razões trigonométricas no livro de Sangiorgi

Condições	Restrições
Introdução às razões trigonométricas a partir da análise da semelhança entre triângulos retângulos, destacando as relações proporcionais entre seus lados.	Ausência de elementos para contextualização, ou seja, à falta de informações ou recursos que situem o conteúdo em um contexto mais amplo ou em situações práticas da vida real.



Faz uso integrado de representações algébricas e geométricas, permitindo uma compreensão mais visual das relações.	Falta de exemplos e aplicações práticas ou situações concretas que demonstrem como os conceitos apresentados podem ser utilizados na resolução de problemas reais ou no cotidiano.
--	--

Fonte: As autoras.

Agora organizamos no quadro 03 as condições e restrições encontradas na análise da obra de Souza (2020):

Quadro 3- Condições e restrições para o ensino das razões trigonométricas no livro de Souza

Condições	Restrições
Introdução às razões trigonométricas a partir da análise da semelhança entre triângulos retângulos, destacando as relações proporcionais entre seus lados.	Não sugere a utilização de recursos tecnológicos, como software ou aplicativos, para potencializar o estudo sobre as razões trigonométricas;
Faz uso integrado de representações algébricas e geométricas, permitindo uma compreensão mais visual das relações.	Ausência de indicação para a construção de materiais manipuláveis relacionados que auxiliem na compreensão das razões trigonométricas.
Utiliza de elementos para contextualização com a realidade e aplicações.	-
Faz uso de aplicações práticas e situações concretas que demonstrem como os conceitos apresentados podem ser utilizados na resolução de problemas reais ou no cotidiano.	-

Fonte: As autoras.

Infere-se, portanto, que a análise do conteúdo das razões trigonométricas em dois tempos pedagógicos diferentes, apresentou as mudanças e permanências de abordagens que ocorreram no ensino, conseguimos demonstrar isso por meio da sistematização das condições e restrições. É válido ressaltar que esse é um pequeno recorte dos livros didáticos, que revela apenas esse aspecto pontual da apresentação desse conteúdo e não considera o desenvolvimento geral do livro. Pelo recorte feito, observamos que a mudança mais significativa que ocorreu foi na inserção de um contexto que ajuda a justificar a importância do assunto e relaciona a Matemática a outra área do conhecimento. No entanto, não observamos significativas mudanças na linguagem matemática empregada em ambos os livros. Além disso, para definir as razões trigonométricas, os dois livros partem de triângulos retângulos semelhantes, demonstrando que a abordagem desse conteúdo em tempos distintos não sofreu mudanças profundas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudos preliminares sobre o Modelo Epistemológico Dominante (MED) sobre as razões trigonométricas permitiram analisar as mudanças e permanências no ensino de Matemática ao longo do tempo, considerando a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e dois livros didáticos de épocas distintas: *Matemática Curso Moderno* (1968), de Osvaldo Sangiorgi, e *Multiversos Matemática: Sequências e Trigonometria* (2020), de Joamir Roberto de Souza. A análise revelou condições e restrições presentes no processo de ensino-aprendizagem, possibilitando reflexões sobre os paradigmas que moldam a prática pedagógica em diferentes contextos históricos.

Concluimos, portanto, que os estudos sobre



o MED são fundamentais para compreender as raízes epistemológicas que orientam o ensino das razões trigonométricas. O MED também se faz importante à medida que identifica as condições que existem e aponta as restrições que ainda limitam o ensino. Esse trabalho inicial destaca a importância de análises mais aprofundadas que considerem outros materiais e contextos para ampliar a compreensão sobre o MED nas práticas pedagógicas ao longo do tempo.

REFERÊNCIAS

- ABAR, C. A. A. P.; MESQUITA, A. J. N. Subsídios para o desenvolvimento de um modelo epistemológico de referência para a compreensão do conceito de equações diferenciais ordinárias. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 26, n. 3, p. 553–569, 2024. DOI: 10.23925/1983-3156.2024v26i3p553-569. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/66285>. Acesso em: 7 dez. 2024.
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Médio**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018.
- BRASIL. **Lei nº 5.692, de 11 de agosto de 1971**. Fixa diretrizes e bases para o ensino de 1º e 2º graus, e dá outras providências. Diário Oficial da União: Brasília, DF, 12 ago. 1971. Disponível em: <https://www.planalto.gov.br>. Acesso em: 9 dez. 2024.
- BÚRIGO, E. Z.. O Movimento da Matemática Moderna no Brasil: encontro de certezas e ambigüidades. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n.18, p.35-47, maio./ago. 2006.
- CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique**. Juillet 1998. Cours donné à l'université d'été Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, La Rochelle, 4-11 juillet 1998; paru dans les actes de cette université d'été, IREM de Clermont-Ferrand, p. 91-120. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=27. Acesso em: 21 nov. 2024.
- CHEVALLARD, Y. **Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement**. In: Journal du Séminaire TAD/IDD; p.1-288, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php?id_article=140 Acesso em: 20 jan. 2025.
- CRESWELL, J. W.. Parte II: Planejamento da Pesquisa. In: CRESWELL, John W.. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Porto Alegre: Artmed, 2010. p. 175-265.
- DIAS, A. L. M.. O Movimento da Matemática Moderna: uma rede internacional científica-pedagógica no período da Guerra Fria. In: **JORNADAS LATINO-AMERICANAS DE ESTUDOS SOCIAIS DAS CIÊNCIAS E DAS TECNOLOGIAS**, 7., 2008, Rio de Janeiro. Anais [...]. Rio de Janeiro, 2008. p. 1-20.
- FLICK, U. Pesquisa qualitativa e quantitativa. In: _____. **Introdução à pesquisa qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2006. p.39-49.
- GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. . Educação Matemática, História, História da Matemática e História da Educação Matemática. In: GARNICA, A. V. M.; SOUZA, L. A. . **Elementos de História da Educação Matemática**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. p. 17- 47.
- SANGIORGI, O.. **Matemática Curso Moderno 4**. 2 ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.
- SOUZA, J. R. . **Multiversos Matemática: Sequências e trigonometria**. 1 ed. São Paulo: Editora FTD, 2020.

