

Uma Proposta de Atividade de Estudo e Pesquisa para o Ensino do Conceito de Limite

a study and research activity proposal for teaching the concept of limit

Matheus Brandão **OLIVEIRA**

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática – PPGEEnM/UEFS

Eliene Barbosa **LIMA**

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

Eliane Santana de Souza **OLIVEIRA**

Universidade Estadual de Feira de Santana - UEFS

Correspondência do autor:

profmathbrandao@gmail.com

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo apresentar a construção de uma atividade investigativa fundamentada na perspectiva da Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), voltada ao estudo do conceito de limite no ensino de Matemática. Para tal, realizou-se um estudo do conceito de limite em obras de referência da área, como Courant e Robbins (2000) e Stewart (2001), visando à construção e à análise de modelos de referência que subsidiam a elaboração da atividade proposta. A investigação é orientada pela seguinte questão geratriz: é possível preencher um tanque d'água adicionando sucessivamente, com um recipiente, a metade do volume de água adicionado na etapa anterior? Os resultados indicam que a atividade favorece a construção de uma compreensão intuitiva de processos de aproximação sucessiva, contribuindo para a apreensão inicial da noção de limite. Ademais, a proposta estimula a argumentação matemática e a mobilização de significados conceituais em um contexto significativo para os educandos.

Palavras-chave: Limite, Teoria Antropológica do Didático, Volume.

ABSTRACT

This article aims to present the development of an investigative activity based on the perspective of Study and Research Activity (AEP), focused on the study of the concept of limit in Mathematics education. To this end, a study of the concept of limit was carried out in reference works in the field, such as Courant and Robbins (2000) and Stewart (2001), aiming at the construction and analysis of reference models that support the development of the proposed activity. The investigation is guided by the following central question: is it possible to fill a water tank by successively adding, with a container, half the volume of water added in the previous step? The results indicate that the activity promotes the construction of an intuitive understanding of successive approximation processes, contributing to the initial grasp of the notion of limit. Furthermore, the proposal stimulates mathematical reasoning and the mobilization of conceptual meanings in a meaningful context for the students.

Keywords: Limit, Anthropological Theory of the Didactic, Volume.



INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem por objetivo apresentar a construção de uma atividade investigativa fundamentada na perspectiva da Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), para o estudo do conceito de limite, resultado dos trabalhos desenvolvidos na disciplina Tópicos Especiais 1 (EMA027), inserida no Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática (Ppgenm).

Assim, essa atividade é composta por uma situação extramatemática, guiada pela seguinte questão geratriz: é possível preencher um tanque d'água adicionando sucessivamente, com um recipiente, a metade do volume de água adicionado na etapa anterior?

Salienta-se que a estratégia investigativa empregada se inscreve no âmbito da pesquisa qualitativa, dado que, nessa perspectiva metodológica, o estudo assume um caráter predominantemente interpretativo. Nessa abordagem, o pesquisador mantém uma relação indissociável com sua própria experiência, o que possibilita a utilização de múltiplos procedimentos de coleta de dados (CRESWELL, 2007).

Pretende-se que os estudantes mobilizem a noção intuitiva de limite, ou seja, descrever o comportamento de uma função quando a variável se aproxima de um certo valor, sem necessariamente atingi-lo. Na situação problema apresentada, tal noção se traduz em uma situação problema envolvendo um tanque d'água a ser preenchido utilizando um recipiente de volume menor, com a condição de que a quantidade de água utilizada para preencher deve ser sempre a metade do volume anterior adicionado.

De uma forma geral, este conceito de limite é abordado nas instituições de ensino superior, também nos cursos de formação de professores de Matemática, não fazendo parte do arcabouço de conteúdos a serem aprendidos no ensino básico. O seu surgimento está atrelado a busca incessante entre matemáticos em bases que

propusesse ao cálculo diferencial bases mais sólidas e correspondentes ao rigor de sua época.

Nestes termos, esta proposta se configura como uma proposta de abordagem do conceito de limite no ensino básico, ainda que de forma inicial, com o intuito de diminuir o abismo existente entre a manifestação deste conceito no ensino básico e o ensino superior.

ALGUMAS REFLEXÕES SOBRE O PERCURSO HISTÓRICO DO CONCEITO DE LIMITE.

A construção do conceito de limite está relacionada ao desenvolvimento histórico do Cálculo enquanto teoria matemática. Esse desenvolvimento possui antecedentes filosóficos importantes, entre os quais se destacam as reflexões de Zenão de Eleia (490 a.C. - 430a.C.), especialmente em seu famoso paradoxo de "Aquiles e a Tartaruga". Nesse contexto, são problematizadas questões relativas à divisibilidade infinita do espaço e do tempo, levantando dificuldades conceituais associadas ao movimento e à continuidade. Embora Zenão não tenha formulado o conceito de limite, essas reflexões filosóficas reverberaram séculos mais tarde no âmbito do desenvolvimento do Cálculo. (BOYER, 1974; REIS, 2001)

Entre os estudos mais significativos, destacaram-se os trabalhos de Isaac Newton (1646-1716), com suas noções de razões primeiras e últimas e seu método das fluxões, e de Gottfried Wilhelm Leibniz (1642-1727), com seu método infinitesimal. Dentre as contribuições fundamentais para o avanço do cálculo, sobressaiu o Teorema Fundamental do Cálculo, que estabeleceu uma conexão entre as operações de diferenciação e integração, expressa, na notação leibniziana, pela razão $\frac{dy}{dx}$. Nesse momento, as ideias que pairavam sobre o Cálculo Diferencial estavam fortemente associadas à Física, principalmente a ideia de movimento.



Contudo, a concepção de limite passou a vigorar na matemática com o início da aritmetização da análise, tradicionalmente atribuída ao trabalho de Augustin Louis Cauchy (1789-1857), intitulado *Cours d'analyse*, publicado em 1821. Nessa obra, Cauchy apresentou uma definição de limite predominantemente aritmética, desvinculada das intuições geométricas, e propôs uma definição para os números reais que buscava maior rigor. No entanto, esse novo padrão de rigor somente foi alcançado posteriormente: Richard Dedekind (1831-1916) estruturou aritmeticamente os números reais por meio de seus cortes, enquanto Karl Weierstrass (1815-1897), em contribuição posterior, introduziu a notação de *épsilon-delta*, para formalizar a continuidade de funções, uma ideia que mais tarde foi integrada ao conceito moderno de limite de função, ainda utilizado na matemática contemporânea (BOYER, 1974; BARON; BOS, 1985; LIMA; DIAS, 2010; SILVA, 2021).

ANALISANDO ALGUMAS REFERÊNCIAS DE MODELOS DOMINANTES

O ensino de limite faz parte do arcabouço teórico da formação do professor de Matemática, estando presente no curso de Licenciatura em Matemática, incluindo nos materiais didáticos estabelecidos por essas instituições. Nesse sentido, o seu ensino é orientado não somente pelos currículos dos cursos, mas também como um resultado do processo histórico da própria teoria do Cálculo Diferencial. De acordo com Reis (2001), a teoria de limites ganha protagonismo dentro do Cálculo ao expressar o rigor matemático exigido a partir do século XIX, em contraste com

abordagens iniciais do cálculo, como aquelas desenvolvidas por Leibniz e Newton.

Assim, neste trabalho, buscou-se estabelecer relações históricas-epistemológicas entre os conceitos de limite presentes na normatização que orienta os conteúdos a serem abordados nos cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2001) e aqueles mobilizados em materiais didáticos utilizados no ensino de cálculo em diferentes tempos históricos (COURANT; ROBBINS, 1941; STEWART, 2016).

LIMITE: ANÁLISE DE LIVROS TEXTOS ADOTADOS PARA O ESTUDO DE LIMITE NA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA EM DIFERENTES ÉPOCAS

Os livros analisados nesta seção são *O que é Matemática?*, de Richard Courant e Herbert Robbins, publicado em 1941¹, e *Cálculo*, volume 1, de James Stewart, 5ª edição, de 2006. Ambos os livros estiveram presentes, em momentos distintos, na formação do professor de Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana, respectivamente, nos anos de 1986 e 2024. Contudo, para os fins desta análise, o foco recaiu especificamente sobre conteúdo de limite (COURANT; ROBBINS, 1941; STEWART, 2006).

Em Courant e Robbins (200), o conteúdo de limite é apresentado após uma breve discussão sobre funções e variáveis, na qual os autores se propõem a discutir diferentes tipos de funções e a construção de seus gráficos. Nesse contexto, os autores definiram função como uma relação entre as variáveis X e U , de modo que “[...] é possível que cada valor de uma variável X esteja associado a um valor bem

¹ Para este trabalho, utilizou-se a edição do livro *O que é matemática?*, publicada em 2000. Essa obra está

disponível na Biblioteca Central Julieta Carteadó (BCJC) da UEFS.



definido de uma outra variável U . Então U é chamado de função de X . [...] Se X pertence ao conjunto S , então a variável U percorrerá a um outro conjunto, digamos, T ” (COURANT; ROBBINS, 1941, p. 333).

Nota-se que essa concepção compreende a função como uma relação entre duas variáveis, direcionando o olhar dos autores para as aplicações desse conceito na Física e na Matemática, sem que a definição seja explicitada, necessariamente, em termos de uma relação entre elementos de conjuntos distintos, como ocorre na abordagem predominante nos dias atuais. De fato, o conceito de função sofreu diversas modificações ao longo da história, até ser estabelecido de acordo com a ideia desenvolvida pelo grupo Bourbaki², que definiu função como uma relação entre elementos X e Y , de conjuntos distintos, assegurando que, para cada elemento de X , exista um único elemento associado em Y (conjunto de chegada) (Pires, 2016).

Contudo, embora tenham feito discussões sobre função, incluindo alguns aspectos históricos, os autores propõem que o estudo de limite seja conduzido por meio de equências numéricas, pois, como afirmaram “[...] sequências são bem mais simples do que função de uma variável contínua” (COURANT; ROBBINS, 1941, p.352). O conteúdo é então ilustrado nas Figuras 1 e 2:

Figura 1 - Introdução ao conteúdo de limite

No Capítulo II encontramos seqüências a_n de números e estudamos seus limites à medida que n aumentava indefinidamente ou “tendia para o infinito”. Por exemplo, a seqüência cujo n -ésimo termo é $a_n = 1/n$,

(1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$

tem o limite 0 para n crescente:

(2) $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ à medida que $n \rightarrow \infty$.

Fonte: Courant e Robbins (1941, p. 352)

Figura 2 - Formalização do conceito de limite

(leia-se: a_n tende para a , ou converge para a). A definição da convergência de uma seqüência a_n para a pode ser formulada mais concisamente da seguinte forma: a seqüência $a_1, a_2, a_3, \dots$ tem o limite a à medida que n tende para o infinito se, correspondendo a qualquer número positivo ϵ , por menor que seja, puder ser encontrado um inteiro N (dependendo de ϵ), tal que

$$(3) \quad |a - a_n| < \epsilon$$

para todo $n \geq N$.

Fonte: Courant e Robbins (1941, p. 354)

Como exposto na Figura 1, houve o estudo da seqüência $\frac{1}{n}$, em que se consideram diferentes valores para o elemento n , e é observado o comportamento da seqüência à medida em que n assume diferentes valores. Conclui-se que, quanto maior for o valor de n , mais próximo a seqüência estará do número 0. Com isso, é entendido que, se formos *suficientemente longe* com a seqüência, obteremos valores cuja diferença para zero será *tão pequena quanto queiramos*. Tais conceitos são apresentados pelos autores por meio de exemplos e diferentes valores da mesma seqüência. Essas “quantidades infinitamente pequenas” aparecem inicialmente, nas teorias desenvolvidas por Newton e Leibniz, quando o Cálculo Diferencial ainda se baseava nos “infinitésimos”. Foram justamente esses elementos que ocasionaram a não aceitação dessa teoria, uma vez que tanto Newton quanto Leibniz não conseguiram definir com precisão esse ente, que ora se configurava como valores não finitos, ora como não nulos. (CARVALHO; D'OTTOVIANO, 2006)

Nesse contexto, o estudo da seqüência $\frac{1}{n}$ é utilizado para estabelecer a relação entre os valores tão pequenos quanto quisermos, representados por ϵ , sendo estabelecido que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Esse processo é feito de forma descritiva por Courant e Robbins (1941) sem o uso excessivo de símbolos. Tal fato pode decorrer da própria publicação do livro

² Tal grupo, fundado, em 1935, por André Weil e Jean Dieudonné (1906- 1992) e Henri Paul Cartan (1904-

2008), Jean Frédéric Auguste Delsarte (1903-1968) e Claude Chevalley (1909-1984) (NERY; LIMA; BATISTELA, 2018).

ocorrida em 1941, tendo em vista que a predominância simbólica na matemática surgiu, em meados do século XX, como uma das principais características do momento histórico conhecido como Movimento da Matemática Moderna. Esse Movimento em convergência com os ideais do grupo Bourbaki, traduziu os argumentos matemáticos para a linguagem simbólica (DIAS, 2008).

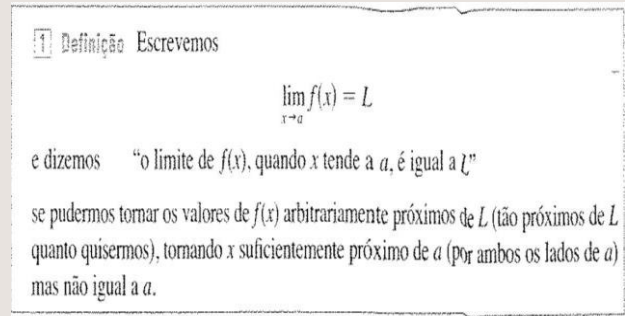
Dessa forma, Courant e Robbins (1941), formalizou o conceito de limite, como exposto na figura 2, em que, por meio do estudo do comportamento de seqüências, os autores afirmaram que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, a medida em que $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, a apresentação do conteúdo de limite ocorreu inicialmente de forma intuitiva, pelo estudo do comportamento das seqüências, sem, posteriormente, modificar para o limite de uma função. Denota-se que, para Courant e Robbins (1941), as seqüências e funções se comportam de forma análoga.

Em contrapartida, o estudo de limites em Stewart (2006) foi precedido por uma sessão direcionada a compreender o “problema da reta tangente”, em que o autor voltou o seu olhar para discussões acerca das retas tangente aos gráficos, associando a ideia de velocidade ao estudo da variação. O conceito de função é abordado relacionando elementos de conjuntos distintos. Nas palavras de Stewart (2006, p. 12): “Uma função f é uma lei a qual para cada elemento x em um conjunto A , faz corresponder exatamente a um elemento $f(x)$ em um conjunto B ”. Esse fato indica que a apresentação do conteúdo está alinhada à definição predominante de função, conforme mencionado anteriormente, incluindo os conceitos de domínio, contradomínio e imagem.

Em seguida, Stewart (2006) introduziu o conteúdo de limite por meio do estudo do comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 2$, escolhendo valores de x arbitrariamente próximos de 2, e, assim, observando que os valores correspondentes de $f(x)$ se aproximavam de 4. A intenção do autor, ao que parece, foi mostrar, de forma intuitiva, a ideia de limite de uma função. Em seguida, expôs a

definição de limite, sem ainda a notação de *épsilon-delta*, conforme ilustrado na Figura 3.

Figura 3 - Definição formal do conceito de limite



Fonte: Stewart (2006, p. 93)

Neste momento, são exploradas as ideias de *tão próximo de L quanto quisermos* e *suficientemente próximo de a*, movimento parecido com o ocorrido em (Courant; Robbins, 1941), para os conceitos de *suficientemente longe* e *tão pequena quanto queiramos*. Contudo, os conceitos apresentados livro de Stewart (2006) refletem as modificações ocorridas dentro da própria teoria do Cálculo Diferencial, cuja base passou a ser associada à ideia de Limite de função, que começou a ser constituída aritmeticamente a partir dos trabalhos de Cauchy no século XIX. Além disso, observou-se uma predominância de símbolos matemáticos, que distam dos encaminhamentos tomados para apresentação do conteúdo em Courant e Robbins (1941). Isso ocorre porque Stewart (2006) optou por seguir uma abordagem que ainda não correspondia a resultados mais atuais e rigorosos para o Cálculo.

Embora Courant e Robbins (1941) e Stewart (2006) tenham tratado de um mesmo conteúdo, cada livro refletiu uma apropriação singular, condizente com o contexto de sua publicação e das escolhas teóricas de seus respectivos autores. Courant e Robbins, (1941), apresentaram ideias alinhadas ao Cálculo Diferencial anterior ao protagonismo da teoria de limite de função, que somente se consolidou a partir de meados do século XX. Este foi o caso de Stewart (2006)

De forma geral, ambos os livros não abordaram a noção de limite, tendo como parâmetro situação-problema, que não estivessem associadas ao próprio desenvolvimento do Cálculo Diferencial enquanto teoria. Optou-se por discutir o conteúdo de modo a privilegiar o desenvolvimento do próprio campo científico. Contudo, na nossa leitura, isso revela uma limitação no ensino de limite, evidenciando uma lacuna quanto à possibilidade de ministrar esse de forma mais conectada ao cotidiano dos estudantes.

LIMITE NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

A estruturação dos cursos de licenciatura em Matemática foram instituídas de acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura, implementadas em 6 de novembro de 2001 (BRASIL, 2001). No que se refere à parte específica de Matemática, o documento estabelece que os conteúdos a serem mobilizados ao longo do curso de Licenciatura em Matemática são: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear · Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; Geometria Analítica (BRASIL, 2001)

Contudo, embora o ensino do Cálculo Diferencial e Integral esteja previsto nas Diretrizes, não há, nesse documento, detalhamento acerca dos objetos do conhecimento que devem ser abordados nesse campo matemático, tampouco orientações específicas sobre se o conteúdo de limite deveria ser trabalhado ou de que forma. Essa responsabilidade é atribuída às Instituições de Ensino Superior (IES). Nesse contexto, em Brasil (2001, p.4), é estabelecido que “As IES poderão ainda organizar os seus currículos de modo a possibilitar ao licenciado uma formação complementar propiciando uma adequação do

núcleo de formação específica a outro campo de saber que o complemento.”

Dessa forma, a não localização de uma proposta explícita para o ensino de limite em um documento regulador das instituições de ensino superior, configura-se, na nossa análise, um fator limitante, uma vez que não há direcionamento nem garantia de que esse conteúdo seja ou deva ser efetivamente abordado na formação inicial do professor de matemática. Ainda assim, o documento apresenta algumas habilidades gerais a serem desenvolvidas pelo licenciando, nas quais é possível identificar, de maneira implícita, o conteúdo de limite. Entre elas, pode-se destacar, e acordo ao Brasil (2001, p.4): “d) desenvolver estratégias de ensino que favoreçam a criatividade, a autonomia e a flexibilidade do pensamento matemático dos educandos, buscando trabalhar com mais ênfase nos conceitos do que nas técnicas, fórmulas e algoritmos”, em que é possível o conceito de limite ser visualizado como uma experiência de aproximação, construída a partir da exploração de situações, gráficos e representações variadas.

Embora o documento assegure às universidades autonomia para a construção e organização de seus currículos, essa liberdade não impede que tradições acadêmicas consolidadas levem o conteúdo de limite tende a assumir o protagonismo nos cursos de Licenciatura em Matemática, muitas vezes em detrimento de outras abordagens teóricas que poderiam contribuir para a construção de bases conceituais mais sólidas para o Cálculo Diferencial. Por outro lado, não estabelecer sobre quais bases o conceito de limite deve ser abordado em sala de aula, poderia configurar uma condição favorável para discussões plurais, que considerem outros elementos no ensino desse conceito.

Entretanto, no ensino do Cálculo Diferencial, conforme Ávila (2010), o conceito de Limite, apesar de ser amplamente difundido dentro das disciplinas de Cálculo, em específico como teoria base de estudo, mantém-se distante de possíveis aplicações e acaba restrito a uma



abordagem abstrata e formal. O autor ainda aponta que o predomínio do caráter teórico constitui um dos principais entraves para a inserção e o tratamento desse conteúdo no ensino básico.

Sob essa ótica, tal configuração mostra-se como um fator limitante no que diz respeito às possibilidades de abordagem do conteúdo de limite, tanto na formação do professor quanto em sua prática em sala de aula. Esse cenário decorre, em grande medida, do próprio processo histórico de constituição do Cálculo Diferencial, conforme discutido anteriormente.

DO ESBOÇO DE UM MODELO DE REFERÊNCIA PARA CONSTRUÇÃO DE UMA ATIVIDADE INVESTIGATIVA

Diante das discussões expostas anteriormente, pautadas na possibilidade de abordar o conteúdo de limite de forma distinta daquelas apresentadas pelos livros analisados, emerge uma proposta de atividade investigativa, baseada na Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), de Chevallard (2003). De acordo com Almouloud (2022), a AEP orienta-se pela necessidade de reconfigurar os saberes escolares e suas razões de ser. Tal proposta responde à exigência de instaurar um ensino fundamentado na problematização das questões atribuídas aos estudantes e na busca de respostas, conduzida pelo professor. Esse processo se realiza em classes regulares, isto é, em espaços institucionais nos quais a matemática prescrita pelo currículo é ensinada, sem que se imponha, de forma prévia, a organização de dispositivos específicos de observação.

Assim, a atividade que construímos foi conduzida por meio de uma situação extramatemática, em que os estudantes deverão mobilizar diferentes praxeologias para responder a questão geratriz, a qual é: é possível preencher um tanque d'água

adicionando sucessivamente, com um recipiente, a metade do volume de água adicionado na etapa anterior?

Nesse contexto, a organização praxeológica da atividade proposta, configura-se a partir de um tipo de tarefa (T) proposta aos estudantes precisarão mobilizar uma tecnologia (t), embasado numa teoria (θ). (SANTOS; MENEZES, 2015). Assim, a organização praxeológica inicial da atividade estrutura-se da seguinte forma:

T - Tarefa do tipo verificar por meio da investigação e estimativa se é possível preencher um tanque d'água adicionando sucessivamente, com um recipiente, a metade do volume de água adicionado na etapa anterior

t_0 – Identificar os possíveis formatos de tanque d'água e relacionar volumes entre o recipiente e o tanque d'água.

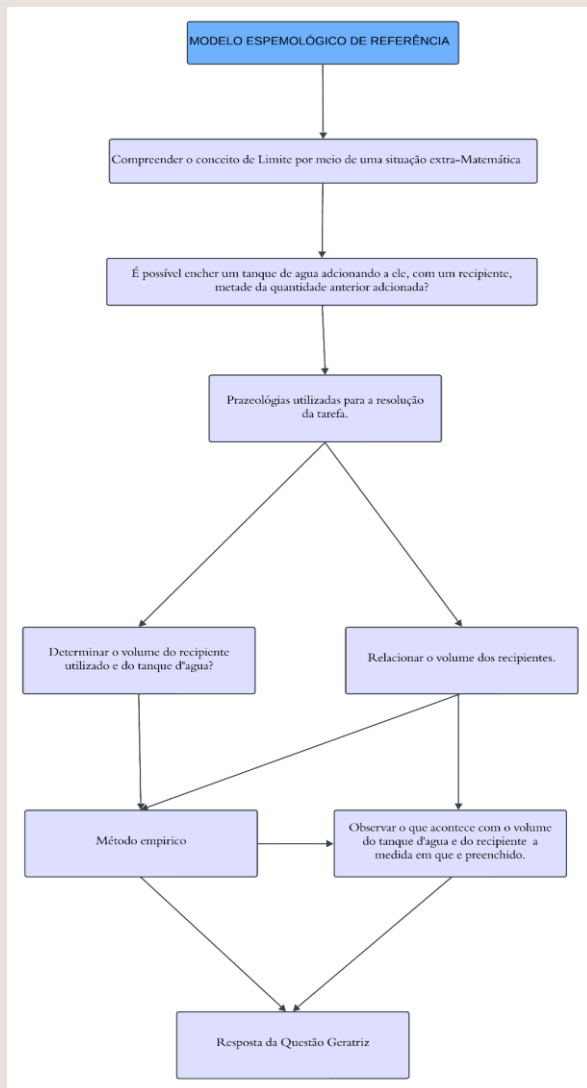
θ - Volume de Sólidos geométricos

θ - Geometria Espacial e a Noção intuitiva de Limite.

Desse modo, a partir das condições e limitações observadas nas análises dos indícios do modelo dominante (COURANT, 1941; STEWART, 2016; BRASIL, 2001), compreende-se a necessidade da construção de um rascunho de um modelo que tomamos como referência para esboço da atividade. Observa-se que esse modelo mostra a possibilidade de abordar o conceito de limite de forma alternativa ao que foi encontrado (Figura 4).

Figura 4 - Esboço de um possível Modelo Epistemológico de Referência





Fonte: Construção do primeiro autor

ATIVIDADE INVESTIGATIVA CONSTRUÍDA

A proposta de atividade construída para o estudo do conceito de limite envolve uma situação na qual os estudantes serão expostos a um tanque d'água e a um recipiente de menor volume. Pretende-se que os estudantes vivenciem a atividade de forma prática, ao mesmo tempo em que respondem às questões propostas. Parte-se, assim, de uma questão central, da qual decorre uma série de outras questões. Esse movimento configura-se como a praxeologia matemática do processo, na medida em que os estudantes sistematizam técnicas para a resolução da situação-problema, mobilizando conceitos matemáticos pertinentes.

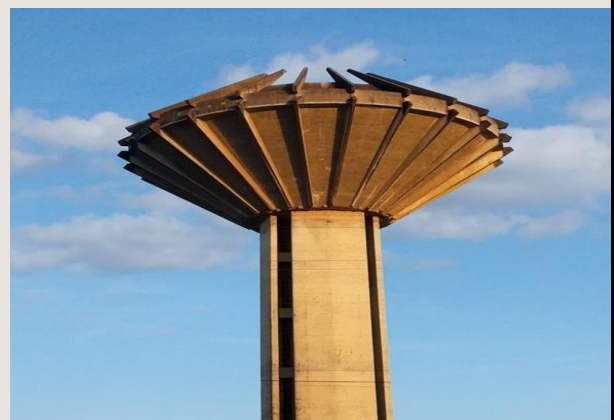
O primeiro passo da atividade é a exploração da questão geratriz Q_0 : é possível preencher um tanque d'água adicionando sucessivamente, com um recipiente, a metade do volume de água adicionado na etapa anterior? Após a apresentação da Q_0 , inicia-se a exploração dela pelos estudantes, que vão desenvolver questões derivadas para entender a Q_0 e, em seguida, buscar respostas às questões derivadas criadas por eles.

O segundo passo é, após a exploração da Q_0 , iniciarmos a apresentação de uma atividade investigativa que promova a construção intuitiva do conceito de limite, a qual apresentamos a seguir.

ATIVIDADE

Para resolução da questão, leia a notícia abaixo publicada no jornal local Acorda Cidade.

Conheça a história da caixa d'água do Tomba, o reservatório que virou cartão postal de Feira de Santana.



Localizado no populoso bairro Tomba, o reservatório foi construído no ano de 1984 como parte do escopo das obras do Sistema Integrado de Abastecimento de Água de Feira de Santana, com uma capacidade para armazenar 3.900 m^3 de água.

[...] Durante anos, lembra a assessoria de comunicação da Embasa, “o reservatório foi fundamental para o



abastecimento do bairro Tomba e entorno, bem como das indústrias do Centro Industrial do Subaé (CIS). Atualmente, ele encontra-se fora de operação, pois já não atende mais ao regime operacional adotado no sistema de abastecimento do município”

Texto completo disponível em: [Conheça a história da caixa d'água do Tomba, o reservatório que virou cartão postal de Feira de Santana - Acorda Cidade - Portal de notícias de Feira de Santana](#)

Questão (Q₀): Acostumado a passear rotineiramente pelo seu bairro para admirar a estrutura da caixa d'água mencionada no texto, Rafael foi tomado pelo seguinte questionamento: porque aquela caixa d'água não transborda? De certo, logo pensou na maquinaria responsável pela pausa da água à medida em que seu nível atingisse um limite máximo. Contudo, Rafael refletiu sobre uma forma mais econômica e eficiente para garantir que a caixa d'água não transbordasse. Ele imaginou encher o reservatório em parte, de forma que, a cada nova adição, fosse colocado metade da quantidade de água adicionada anteriormente. Seguindo este método, a caixa d'água poderá transbordar?

Para responder a (Q₀), responda as questões abaixo:

Q₁: Se na primeira vez entra uma certa quantidade de água, quanto entra na segunda vez? E na terceira?

Q₂: Ao somar toda a água colocada aos poucos, o nível da água cresce sem parar ou vai ficando cada vez mais próximo de um certo ponto?

Q₃: Mesmo colocando água infinitas vezes, a caixa pode passar do seu limite ou ela apenas chega cada vez mais perto de encher?

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve por apresentar a construção de uma atividade investigativa fundamentada na perspectiva da Atividade de Estudo e Pesquisa (AEP), para o estudo do conceito de limite. Para isto, utilizou-se como questão geratriz: é possível preencher um tanque d'água adicionando sucessivamente, com um recipiente, a metade do volume de água adicionado na etapa anterior?

A aplicação dessa atividade pode possibilitar que os alunos construam uma compreensão inicial de processos de aproximação sucessiva, reconhecendo que a adição de quantidades progressivamente menores não implica, necessariamente, o transbordamento do reservatório. Espera-se que identifiquem a existência de um valor máximo que pode ser continuamente aproximado. Nesse sentido, a situação favorece a compreensão intuitiva da noção de limite, sem recorrer a formalizações algébricas. Ademais, a atividade estimula a argumentação matemática e a mobilização de significados a partir de um contexto próximo à realidade dos educandos.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOU, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. 2. ed. revisada e ampliada. Curitiba: Editora UFPR, 2022. 344 p.
- BARON, Margaret E.; BOS, H. J. M. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do Cálculo**. Tradução: Rudolf Maier. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. [Unidade 3 –Newton e Leibniz).
- BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução: Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília, 2001. Disponível em: <https://www.mec.gov.br/>. Acesso em: 12 nov. 2024.



CARVALHO, T. F. ; D'OTTAVIANO, Í. M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos: das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 8, p. 13-43, 2006.

COURANT, R. , ROBBINS, H.. **O que é matemática?** Tradução: Adalberto Silva. 1. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa:** Métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

DIAS, A. L. M. O Movimento da Matemática Moderna: uma rede internacional científica-pedagógica no período da Guerra Fria. In: JORNADAS LATINO-AMERICANAS DE ESTUDOS SOCIAIS DAS CIÊNCIAS E DAS TECNOLOGIAS, 7., 2008, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro, 2008. p. 1-20.

LIMA, E. B.; DIAS, A. L. M. O Curso de análise matemática de Omar Catunda: uma forma peculiar de apropriação da análise matemática moderna. **Revista Brasileira de História da Ciência**, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, p. 211-230, jul./dez. 2010.

NERY, W. F.; LIMA, E. B.; BATISTELA, R. F. **Estruturas da Matemática:** indícios do ideário bourbakista no livro didático "A matemática: suas origens, seu objeto e seus métodos" de Carloman Carlos Borges. In: Eliene Barbosa Lima, Larissa Pinca Sarro Gomes, Inês Angélica Andrade Freire, Luiz Márcio Santos Farias. (Org.). Livros Didáticos e Algumas Histórias: Teorias Modernas da Matemática. 1ed.Salvador/BA: Editora da Universidade Federal da Bahia - EDUFBA, 2018, v. , p. 15-30.

REIS, F. S. **A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de cálculo de Análise:** a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. Tese (Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

SILVA, C. M. S. As Notas de Aula de Karl Weierstrass em 1878. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 21, n. 42, p. 294-328, 2021. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/364/331>. Acesso em: 07 fev. 2024.

SANTOS, M. C.; MENEZES, M. B. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 18 dez. 2015.

PIRES, R. F.. O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. In: ENEM – Encontro Nacional de Ensino de Matemática, 39., 2016, São Paulo. **Anais [...]**. São Paulo: SBEM, 2016. p. 1-12.

STEWART, J.. **Cálculo 1**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016. (v. 1).

