A QUELLES QUESTIONS LA THÉORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS ESSAIE-T-ELLE DE RÉPONDRE ?

Gérard Vergnaud[1]

AVERTISSEMENT

Le souci de laisser aux collègues brésiliens et sud américains un ensemble significatif de mon travail m'a conduit à réunir ici des écrits courts traitant de thèmes relativement différents. Leur unité ne s'aperçoit qu'au second degré, par leur complémentarité. J'espère que ce choix ambitieux ne décevra pas trop les lecteurs.

INTRODUCTION

Il n'y a pas de réponse aux questions qu'on ne se pose pas ; et certaines des questions abordées dans cette contribution n'émeuvent guère la communauté des chercheurs. Pourtant elles contribuent à nourrir le tableau des connaissances significatives apportées par ce nouveau champ de recherche qu'est la didactique ; et elles sont utiles aux enseignants.

J'ai choisi d'aborder quatre grands thèmes, pour lesquels la théorie des champs conceptuels apporte une certaine contribution.

1 Le développement des connaissances et des compétences dans la durée
2 Les conceptualisations identifiables dans l'activité en situation : concepts et théorèmes en acte
3 Les relations entre ces conceptualisations en acte et les signifiants langagiers et symboliques possiblement utilisés en classe
4 Trois principes d'incertitude et le développement de la rationalité.

LE DÉVELOPPEMENT DES CONNAISSANCES ET DES COMPÉTENCES DANS LA DURÉE : L'EXEMPLE DES STRUCTURES ADDITIVES

Le développement est un processus important ; mais qu'est-ce qui se développe ? Une variété de formes d'organisation de l'activité, dans une variété de registres : des gestes, des compétences scientifiques et techniques, des formes d'interaction avec autrui, des compétences langagières et conversationnelles, des ressources émotionnelles et affectives.

Je m'intéresse en priorité aux compétences scientifiques et techniques, mais leur développement n'est pas indépendant de celui des autres registres ; en outre, il se produit tout au long de la vie, aussi bien dans le temps bref d'une prise de conscience que dans le temps long de l'expérience ; presque toujours dans une interaction active avec des situations et avec autrui.

Parler de formes d'organisation de l'activité, c'est dire davantage que de parler de compétences : ce sont des formes dont on peut décrire et analyser le déroulement temporel, pas seulement le but recherché. Pourtant il est utile de rappeler certaines définitions ordinaires de la compétence. elles évoquent souvent une idée de comparaison, avec une perspective différentielle ou développementale :

Différentielle : A est plus compétent que B s'il sait faire quelque chose que B ne sait pas faire

[1] Directeur de recherche émérite au CNRS.

Développementale *A est plus compétent au temps t' qu'au temps t s'il sait faire ce qu'il ne savait pas faire.*

On peut enrichir ces définitions par des idées qui évoquent justement l'activité.

A est plus compétent s'il s'y prend d'une meilleure manière
A est plus compétent s'il dispose d'un répertoire de ressources alternatives qui lui permettent d'adapter sa conduite aux différents cas de figure qui peuvent se présenter
A est plus compétent s'il est moins démuni devant une situation nouvelle

Mais ces définitions complémentaires ne sont pas elles-mêmes suffisantes pour caractériser les différences significatives entre formes d'organisation de l'activité. Prenons un exemple simple, celui du dénombrement :

Le schème élémentaire, celui de l'enfant de 5 ou 6 ans qui dénombre des objets sur la table devant lui, ou celui de l'enseignant qui compte les enfants présents dans l'autobus pour s'assurer qu'il n'en a oublié aucun, après une visite qu'il a organisée : deux concepts-en-acte suffisent pour caractériser leur activité :

- Celui de **cardinal,** ou mesure de l'ensemble dénombré , lequel est discret.
- Celui de **correspondance bi-univoque,** entre les objets d'une part, (ou les enfants de l'autobus) et les nombres prononcés d'autre part (éventuellement évoqués à voix haute ou à voix basse). Témoins observables de cette correspondance, les gestes effectués pour désigner tour à tour chacun des éléments dénombrés. La règle « *les compter tous et ne pas compter deux fois le même* » résulte de cette bi-univocité.

Les connaissances impliquées dans l'activité de dénombrement sont plus riches dans l'exemple ci-après : au cours de la préparation en France de la coupe du monde de 1998, une réunion de responsables de l'organisation matérielle des rencontres s'était tenue à Paris ; Le but était de répertorier les stades susceptibles d'accueillir les spectateurs, attendus en grand nombre.

L'un des participants déclare alors « je crois que le stade de Nantes est assez grand ». Dès le lendemain le président du comité d'organisation téléphone au directeur du stade de Nantes et lui demande « Combien y a-t-il de places dans votre stade ? » et l'autre répond «Je ne sais pás ». Il embauche alors deux personnes, pendant deux jours, pour dénombrer les places de son stade.

L'organisation de leur activité ne peut pas être réduite au schème élémentaire vu plus haut et aux deux concepts de cardinal et de correspondance bi-univoque.

D'abord le partage de l'activité entre les deux personnes chargées de dénombrer suppose le théorème d'addition

$$\mathbf{Card\ (A\ U\ B) = Card\ (A) + Card\ (B)}$$

Si chacun note sur un papier le résultat auquel il est parvenu, il faut alors appliquer l'algorithme de l'addition et les concepts associés à la numération de position : somme des unités, puis des dizaines, retenue éventuelle, puis somme des centaines et des milliers.

Pour les parties rectangulaires du stade, il suffit de multiplier le nombre de sièges par rangée par le nombre de rangées.

$$\mathbf{Card\ (R}\ \mathrm{X}\ \mathbf{S) = Card\ (R) * Card\ (S)}$$

Pour le coin angulaire du stade, le problème est plus délicat ; mais le plus âgé des deux ptéposés au dénombrement indique à son collègue : « *tu montes jusqu 'en haut et tu comptes la rangée la plus longue. Moi je compte en bas la rangée la plus courte ; on fait la moyenne des deux et on multiplie par le nombre de rangées ».*

Le plus jeune rétorque « tu crois ? »

A l'évidence ces connaissances ne font pas encore partie du répertoire du plus jeune.

$$\mathbf{S_{moyenne} = S_{max} + S_{min}) / 2}$$

S = S moyenne multiplié par R

Ainsi, on peut distinguer, dans l'analyse de l'activité, des compétences d'une puissance inégale en dépit de leur parenté. Une manière intéressante de les différencier est d'identifier des formes conceptuelles distinctes. Grâce à cette conceptualisation implicite, activité et schème permettent d'aller plus loin que la seule idée de compétence, laquelle n'est pas assez analytique, On peut ainsi dire que le concept de compétence n'est pas un concept scientifique à lui tout seul.

Définition

Un schème est une forme d'organisation de l'activité, qui s'adresse à une classe de situations. Il comporte :

1 un but ou plusieurs
2 des règles d'action ; de prise d'information et de contrôle
3 des invariants opératoires : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte
4 des possibilités d'inférence

Ces caractères sont voisins de ceux des algorithmes, mais, à la différence des algorithmes, les schèmes n'aboutissent pas nécessairement en un nombre fini de pas à une solution du problème posé s'il en existe une, ou à la démonstration qu'il n'y a pas de solution.

Les algorithmes sont des schèmes mais les schèmes ne sont pas tous des algorithmes

Parmi les quatre propriétés qui permettent d'analyser les schèmes, et de caractériser leurs différences, la première propriété concerne l'intention, la seconde le déroulement temporel de l'activité (actions et prises d'information), la troisième les conceptualisations (souvent implicites, éventuellement explicites) qui organisent ce déroulement, la quatrième les calculs qui prennent place en cours de route (sous-buts et attentes, leçons tirées).

L'idée de règle est essentielle mais n'est pas suffisante : sans conceptualisation, au moins implicite, il n'y a pas de schème. En outre les deux composantes mentionnées ici, concept et théorème, évidemment complémentaires, ont un statut cognitif distinct. Les concepts-en-acte ne sont pas susceptibles d'être vrais ou faux, seulement d'être pertinents ou non. Les théorèmes en acte, eux, sont des propositions, et interviennent dans le « calcul » de l'activité : ils sont donc susceptibles de vérité ou de fausseté. Un théorème-en-acte faux reste un théorème-en- acte.

Trois problèmes de niveau différent

Franchissons un pas de plus dans l'analyse avec ces trois problèmes, qui demandent la même opération numérique (l'addition 7 + 5), et sont pourtant très inégalement réussis.

> Pierre avait 7 billes. Il en gagne 5. Combien en a-t-il maintenant ?
> Robert vient de perdre 5 billes ; Il en a maintenant 7. Combien en avait-il avant de jouer ?
> Thierry vient de jouer deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a perdu 7 billes. En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a gagné 5 billes. Que s'est-il passé à la première partie ?

Le problème Pierre est résolu par la quasi totalité des enfants dès 5 ou 6 ans (7 ans au plus tard).

Le problème Robert est résolu avec un décalage d'un ou deux ans.

Le problème Thierry laisse en échec la plupart des élèves à la fin de l'école élémentaire (10 ou 11 ans)

Comment cela est-il possible ?

Le problème Pierre correspond à l'une des deux classes de situations qui donnent à l'addition son premier sens : *l'augmentation connue d'un état initial connu.*

Une autre classe de situations joue un rôle prototypique également : *la réunion en un tout de deux paries connues.* Ce sont les premières situations d'addition saisies par l'enfant.

Le problème Robert correspond à une classe de situations déjà plus complexe en ce sens que, pour reconnaître un problème d'addition, il faut un petit raisonnement et un théorème-en-acte supplémentaires *: si on connaît l'état final et que la transformation directe est une perte, alors, pour trouver l'état initial, il faut ajouter cette perte à l'état final.* Le décalage d'un ou deux ans de la réussite correspond à cette connaissance supplémentaire.

C'est un théorème-en-acte. Comment le représenter sous sa forme générale ?

$$\textbf{Si}\quad \mathbf{F = T(I)}\quad \textbf{alors}\quad \mathbf{I = T^{-1}\,(F)}$$

Cette représentation est à la portée des enseignants de mathématiques, mais pas des élèves de 6 ou 7 ans, ni même de certains enseignants de l'école élémentaire.

Cependant, une autre représentation est possible, plus intuitive, qui fait reference aux états initial et final, et aux transformationq directe et réciproque :

état initial état final

$$I \quad \underset{+\,5}{\overset{-5}{\rightleftarrows}} \quad 7$$

Quant au problème Thierry, Il met en jeu deux parties successives (deux transformations dont l'une est connue) et leur composée, connue également. C'est un schéma relationnel très différent du schéma « état initial transformation état final » qui correspond aux deux problèmes Pierre et Robert ; en outre la transformation composée et la deuxième partie sont de signes contraires.

Comme on pouvait s 'y attendre, l'échec des enfants est au rendez-vous, et le fait que les deux transformations soient de signe contraire joue un rôle décisif dans cet échec.

Pour le montrer, je vais considérer plusieurs cas de figure et identifier les glissements de sens éventuellement faits par les élèves. En partant de l'exemple Thierry, on peut faire varier de diverses manières les informations pour la deuxième partie et pour la transformation composée ; on pourra ainsi comparer et interpréter les différences de réussite et d'échec selon les valeurs numériques, et notamment selon qu'elles sont ou non de même signe.

Glissements de sens

Exemple A

C'est le cas qui est échoué massivement ; les deux transformations sont de signe contraire.

Thierry vient de jouer deux parties de billes.
Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie.
A la seconde partie il a perdu 7 billes
En faisant ses comptes, il s'aperçoit que, en tout, il a gagné 15 billes.
Que s'est-il passé à la première partie ?

Exemple B

gagné 7 billes (deuxième partie)
gagné 15 billes (en tout)

Exemple C

Perdu 7 billes
Perdu 15 billes

Exemple D

Gagné 15 billes
Gagné 7 billes

Exemple E

Perdu 15 billes
Perdu 7 billes

Exemple F

perdu 15 billes
gagné 7 billes

L'exemple A est donc échoué massivement.

Par contre l'exemple B est réussi massivement. Le gain total est plus grand que le gain de la seconde partie ; rien ne s'oppose à ce que la première partie soit aussi un gain, égal à la différence.

L’exemple C se présente un peu de la même manière avec deux pertes, et une perte totale plus grande que la perte de la seconde partie.

L’exemple D ne peut pas être interprété de la même façon puisque le gain total est plus petit que le gain de la seconde partie. C’est à un autre glissement de sens que les élèves ont recours : un état initial de 15 et un état final de 7 ; la solution serait alors une perte, la différence entre 15 et 7.

L’exemple E peut être interprété d’une manière un peu analogue : si j’ai perdu moins en tout qu’à la seconde partie, la solution est un gain, égal à la différence.

Dans l’exemple F on ne peut interpréter l’énoncé ni comme dans les cas B et C (le tout plus grand que la partie), ni comme dans les cas D et E (la différence entre état final et état initial). Le glissement de sens n’est plus possible.

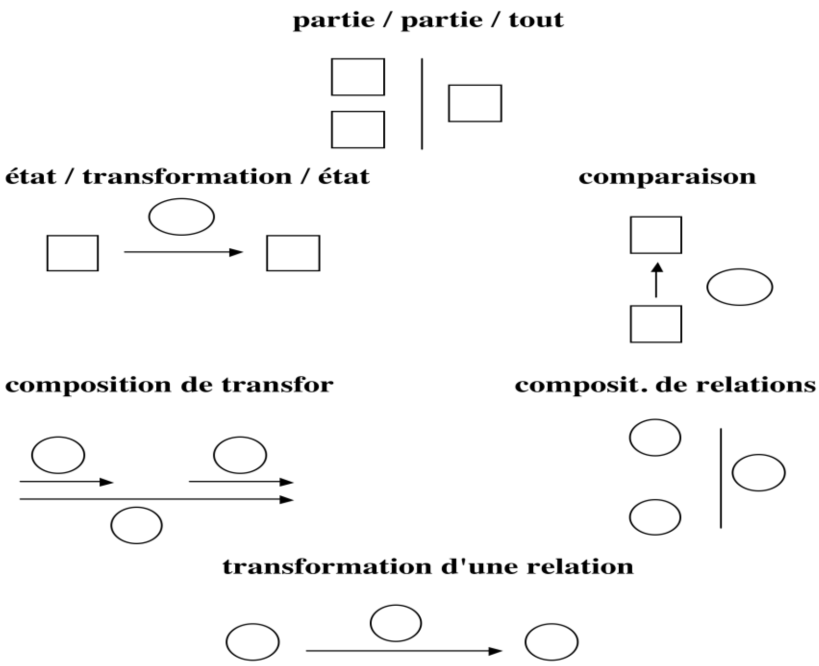
La pensée et le raisonnement, même implicites, ne sont pas toujours rationnels et objectifs : les glissements de sens sont souvent un moyen de traiter les situations nouvelles non prototypiques.

Or les occasions de rencontrer des situations nouvelles, dans les structures additives, sont nombreuses, comme le montre le tableau des six relations fondamentales schématisées ci-dessous : chacune peut engendrer une variété de cas de figure, rarement réductibles les uns aux autres :

Six cas distincts déjà pour la relation « état transformation état », selon qu’on cherche à calculer l’état final, la transformation ou l’état initial, et selon que la transformation est positive ou négative. Un nombre beaucoup plus grand encore pour la composition de transformations ou la transformation d’une relation.

Voir le tableau (Figure 1) des six relations additives fondamentales :

Figure 1 – Tableau des six relations additives fondamentales



Source : L'auteur.

En outre, il existe souvent plusieurs schèmes possibles, distincts l'un de l'autre, pour la même situation. Voici un exemple :

> André a joué deux parties de billes et il cherche à reconstituer combien il avait de billes avant de jouer ; il compte ses billes et trouve 63 billes. Il se souvient qu'il a gagné 16 billes à la première partie et perdu 8 à la seconde. Combien avait-il de billes avant de jouer ?

Schème 1 :

Partir de l'état final, rajouter ce qui a été perdu et soustraire ce qui a été gagné

63 + 8 = 71   71 - 16 = 55

Schème 2 :

Faire une hypothèse sur l'état initial, appliquer les deux transformations successives ; comparer le résultat ainsi obtenu à l'état final donné dans l'énoncé ; corriger l'hypothèse en fonction de l'écart entre les deux

hypothèse 50   50 + 16 = 66   66 – 8 = 58
constat de la différence avec 63   63 - 58 = 5
50 + 5 = 55

Schème 3 :

Composer les deux transformations pour trouver si, au total, André a perdu ou gagné des billes, et combien. Appliquer à l'état final la transformation réciproque de cette transformation composée

16 - 8 = 8   63 – 8 = 55

Les conceptualisations implicites ne sont pas identiques dans ces trois manières de procéder : l'inversion successive des transformations dans le premier schème ne suppose pas la combinaison des transformations, comme dans le schème 3.

Le schème 2 , quant à lui, exprime le fait que l'inversion des transformations ne va pas de soi, et que l'application des transformations directes permet d'avancer vers la solution en faisant une hypothèse révisable sur l'état initial.

Il est intéressant, à ce point de l'exposé, de résumer certaines parentés et différences entre **Piaget et Vygotski,** qui ont tous deux combattu le behaviorisme et accordé une grande importance à :

- **l'activité :** schème chez Piaget, activité chez Vygotski
- **la conceptualisation :** invariant opératoire chez Piaget, concepts quotidiens et concepts scientifiques chez Vygotski
- **la symbolisation :** la fonction symbolique chez Piaget, le langage et la signification des mots chez Vygotski
- **la conscience :** la conscience et l'abstraction réfléchissante chez Piagzt, la conscience et la métacognition chez Vygotski
- **l'interaction :** entre le sujet et l'pbjet chez Piaget, entre l'enfant et l'adulte chez Vygotski
- **le développement :** les stades et l'équilibration chez Piaget, la zone de proche développement chez Vygotski
- **l'imitation et l'intériorisation** chez Piaget, l'internalisation chez Vygotski.

C’est en m’inspirant de Piaget et de Vygotski, et en m’adressant à une discipline scolaire, les mathématiques, que j’ai défini un champ conceptuel :

Un champ conceptuel est un triplet de trois ensembles :

1 L’ensemble des situations dont la maîtrise progressive appelle une variété de concepts, de schèmes et de représentations symboliques en étroite connexion
2 L’ensemble des concepts qui contribuent à la maîtrise de ces situations
3 L’ensemble des formes langagières et symboliques qui permettent d’exprimer les objets de pensée et les conceptualisations implicites ou explicites dans ces situations

On peut ainsi indiquer, en résumant les idées, certains concepts organisateurs des structures additives

- Quantités discrètes et continues
- Mesure
- État/transformation
- Comparaison référé/référent
- Composition binaire (mesures, transformations, relations)
- Opération unaire
- Inversion
- Nombre naturel/nombre relatif
- Position/abscisse/valeur algébrique

auxquels on pourra ajouter certains concepts pertinents pour les structures multiplicatives

- Analyse dimensionnelle
- Espace vectoriel ; combinaison linéaire
- Dépendance, indépendance

Les structures multiplicatives, que nous allons évoquer brièvement maintenant, forment un réseau de situations et de concepts, essentiel pour l’analyse des mathématiques et de la physique.

Essentiel aussi pour apprécier la lenteur et la longue durée de leur développement chez les élèves de l’école élémentaire, du collège et du lycée ; et même chez les adultes, comme en témoigne l’histoire des mathématiques et de la physique.

C’est l’un des meilleurs exemples de « champ conceptuel ».

Avec les structures additives, une première conclusion s’impose : la relation entre nombre et grandeur est une relation dialectique

- Sans le concept de nombre, on ne comprendrait que peu de choses au concept de grandeur.
- Mais sans l’expérience des quantités d’objets ordinaires discrets et des grandeurs physiques, notamment spatiales, il n’y aurait pas de concept de nombre.
- L’expérience du nombre commence avec l’expérience des grandeurs.

LES CONCEPTUALISATIONS IDENTIFIABLES DANS L’ACTIVITE EN SITUATION : CONCEPTS ET THEOREMES EN ACTE ; EXEMPLES DANS LES STRUCTURES MULTIPLICATIVES

Comme les structures additives, les structures multiplicatives forment un réseau de situations et de concepts, essentiel pour analyser la longue durée du développement et de l'apprentissage des connaissances scolaires. C'est l'un des bons exemples de « champ conceptuel » concernant l'arithmétique ordinaire.

Identifions certains des concepts et théorèmes-en-acte mis en œuvre progressivement par les élèves.

Sans surprise les premières situations comprises par les élèves sont **des situations de proportion simple, dans lesquelles il faut effectuer une multiplication,** avec de petits nombres entiers :

> Par exemple la distribution de bonbons à 4 élèves, à raison de 6 chacun ; combien de bonbons faut-il en tout ?
> Ou bien encore le coût de 4 kg de poires à 6 euros le kg ; quel coût total ?

Dans les deux cas, on cherche f (4) connaissant 1 et f(1) = 6. C'est le cas le plus simple de recherche d'une quatrième proportionnelle.

1	**6**
4	**x**

Partition et quotition

Alors qu'il n'existe qu'une seule structure de données pour la multiplication, il en existe deux pour la division : la « partition » et la « quotition » dans la terminologie anglaise,

Partition

1	x
4	24

Quotition

1	6
x	24

Exemple de partition

> Jeanne achète 4 kg de poires pour 24 euros. Quel est le prix d'un kg ?

La division par 4 correspond à l'inférence : *le prix d'un kg, c'est 4 fois moins que le prix de 4 kg.*

On applique à une somme d'argent un opérateur scalaire, sans dimension, « *4 fois moins* ». On obtient une somme d'argent.

Exemple de quotition

> Robert veut acheter des poires à 6 euros le kg. Il dispose de 24 euros ; combien de kg peut-il acheter ?

La division de 24 par 6 correspond à l'application à une somme d'argent : de l'inverse du coefficient de proportionnalité : *On obtient des kg parce qu'on divise 24 euros par un quotient de dimensions : 6 euros par kg*

La conceptualisation de la quotition est sensiblement plus délicate que celle de la partition**.**

Une autre conceptualisation délicate : l'extension des raisonnements aux nombres plus petits que 1. Comparons les deux cas A et B :

Problème A

285 kg de liège à 0,70 euros le kg
Pour calculer le coût total, faut-il faire une multiplication ou une division ?

Problème B

0,70 tonne de béton à 285 euros la tonne
Pour calculer le coût total, faut-il faire une multiplication ou une division ?

Les élèves de collège n'hésitent guère pour le problème A : « *il faut faire une multiplication bien sûr* ». Ils hésitent beaucoup plus pour le problème B ; *certains élèves proposent même une division.*

Pourquoi ? La relation la plus naturellement recherchée pour raisonner est la relation scalaire

Pour le problème A , ce choix d ne soulève pas de difficulté :. comme 285 est plus grand que 1, il faut multiplier 0,70 par *285*, ce qui est conforme à l'idée des élèves que la multiplication fait plus grand.

Pour le problème B, il faudrait multiplier 285 par 0,70 ; mais comme 0,70 est plus petit que 1, on obtiendrait alors *une* somme plus petite ; c'est ce qui fait hésiter les élèves et conduit certains d'entre eux à penser qu'il ne faut pas faire une multiplication, justement parce que, dans leur esprit, la multiplication devrait faire plus grand ;

Ainsi le caractère croissant de la fonction : O,70 < 1 alors f (0,70) < f (1) fait obstacle au raisonnement proportionnel.

Cette erreur appelle plusieurs commentaires

Il n'est pas toujours vrai que la multiplication fasse plus grand et la division plus petit. Il n'est pas évident que la multiplication soit commutative lorsque l'on tient compte des dimensions des grandeurs et pas seulement de leurs valeurs numériques.

Les opérateurs sont parfois des scalaires, parfois des quotients de dimensions. On n'a donc pas à faire à des nombres seulement mais à des vecteurs, affectés d'une dimension.

Cela appelle un début d'analyse dimensionnelle, qu'on peut mettre symboliquement en évidence avec un tableau qui fasse la part des grandeurs différentes (une colonne pour les poids, une colonne pour les prix) et des relations différentes (verticale pour les relations scalaires, horizontale pour les rapports de proportionnalité entre grandeurs).

Autre exemple avec des données plus nombreuses

Monsieur Félix est un entrepreneur qui veut évaluer les coûts de fabrication pour un chantier de 25 maisons : 12 F4, 8 F5, 5 F6. Avant de soumettre une proposition pour les temps de fabrication et la main d'œuvre nécessaires pour des fondations en béton armé (des « semelles » dans le vocabulaire des maçons), il dispose des données suivantes :

Premières données

Les semelles doivent avoir une section de 25 X 50 (en cm). Le béton aura le dosage suivant :

Pour 1 m^3 de béton
250 Kg de ciment
580 Kg de sable
1500 kg de gravillons

Les prix sont respectivement
25 F les 50 kg de ciment
40 F la tonne de sable
43 F la tonne de gravillons

Ecrivez un ensemble de questions en utilisant les données dont vous disposez. Ecrivez vos questions en toutes lettres, ne faites aucun calcul.

Exemples de questions posées par les élèves

H longueur de semelle avec un mètre cube de béton ?

C prix d'un mètre cube de béton ?

G combien de ciment pour une tonne (1000 kg) de sable ?

D combien de ciment faut-il commander en tout ?

E ---------------- sable ----------------------------------- ?

F ---------------gravier ------------------------------- ?

Tableaux des données et questions

Table 1 – Quantités de matériaux

Semelle	Béton	Ciment	Sable	Gravier
		50		
				1000
H	1	250	580	1500
			G	1000
385		D	E	F

Source : L'auteur.

Table 2 – Prix des matériaux (en francs de l'époque)

Ciment	Sable	Gravier	Béton
25 pour 50 kg			
		43 la tonne	
			C pour 1 mètre cube
		40 la tonne	

Source : L'auteur.

Données nouvelles pour *la* suite de l'activité

Monsieur Félix évalue le coût moyen des armatures à 350 F pour un mètre cube de béton. Pour la main d'œuvre, il se base sur le fait que, en moyenne, deux ouvriers fabriquent 18 mètres linéaires de semelle en une journée de 8 heures ; pose du coffrage, des armatures, du béton, enlèvement du coffrage etc. La main d'œuvre revient, avec les charges sociales, à un coût horaire de 48 F

Ecrivez, sans faire de calculs, les questions nouvelles qu'on peut se poser.
Quelles grandeurs peut-on introduire dans les tableaux précédents ?
Quelles grandeurs demandent un autre type de tableau ?

Nouvelles questions

U longueur de semelle par ouvrier et par jour ?

Recherche de la valeur unitaire f (1,1)

N combien d'ouvriers pour fabriquer 130 m de semelle en 5 jours ?

S combien de semelle en 5 jours avec 10 ouvriers ?

T combien de jours pour 1400 m de semelle avec 10 ouvriers ?

Comme on a à faire à une fonction de deux variables, il faut cette fois un tableau à double entrée :

	OUVRIERS				
	1	2	N	7	10
JOURS					
1	U				
5			130		S
T					1400

Quelles conceptualisations sont-elles concernées par cette leçon, qui s’adressait à des élèves de l’Enseignement Professionnel ?

Pour la proportion simple

les propriétés d'isomorphisme de la fonction linéaire

$$f(x + x') = f(x) + f(x')$$
$$f(ax) = af(x)$$
$$f(ax + a'x') = af(x) + a'f(x')$$

le coefficient de proportionnalité

$$f(x) = kx$$

le produit en croix et la règle de trois

$$x' * f(x) = x * f(x')$$
$$f(x') = x' * f(x) / x$$

Pour la proportion double

Les propriétés de la proportion simple auxquelles s’ajoutent celles de la double linéarité notamment f (n1x1, n2x2) = n1n2 f(x1, x2).

A titre d’exemple, voici l’utilisation spontanée de ce dernier théorème par un élève de CM2.

***Situation** : Des enfants préparent leur séjour en classe de neige et calculent les denrées alimentaires qu’il faut prévoir.*

Pour le sucre, il faut compter 3, 5 kg de sucre pour 10 enfants pour 7 jours.
Il y a 50 enfants et le séjour est de 28 jours. Combien faut-il de sucre ?

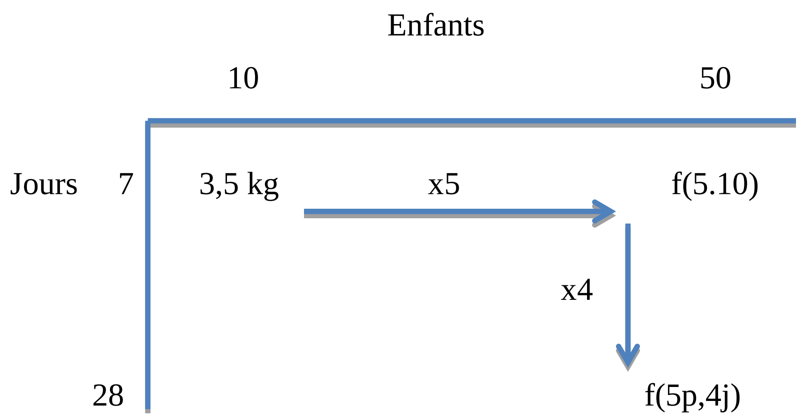
Un élève de CM2 (dernière classe de l’école élémentaire) intervient alors et déclare : « *5 fois plus, 4 fois plus ça fait 20 fois plus* ».

Comment représenter ce raisonnement ?

La forme algébrique est intéressante ; mais est-elle compréhensible par les enfants de 10 ans ?

$f(5p,4j) = 5.4\, f(p,j)$ 5 fois plus de personnes 4 fois plus de jours

On peut aussi utiliser une représentation graphique



RELATIONS ENTRE CONCEPTUALISATIONS DANS L’ACTION ET SIGNIFIANTS LANGAGIERS ET SYMBOLIQUES

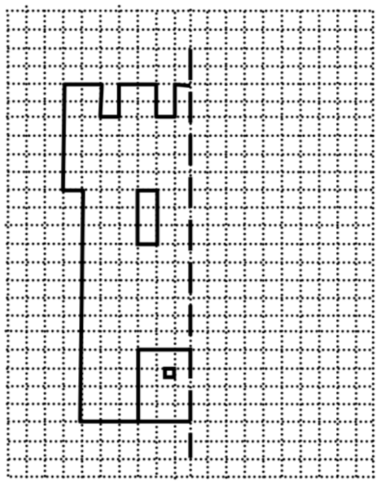
Dans cette partie de mon exposé, je me propose d’illustrer brièvement le fait que les niveaux différents de complexité de la connaissance concernent à la fois sa forme prédicative et sa forme opératoire ; de telle sorte que ni l’une ni l’autre ne se suffit à elle-même.

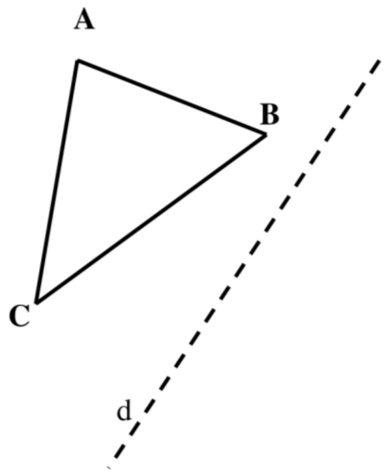
Je me propose également de souligner quelques propriétés de l’algèbre par rapport à l’arithmétique, et de faire valoir sa double fonction : prédicative et opératoire.

Forme opératoire et forme prédicative

Concernant la forme opératoire, voici deux exemples de situations susceptibles d’être proposées, principalement à l’école élémentaire pour le premier et au collège pour le second.

Figure 2 – Niveau de complexité pour le dessin d'objet symétrique





Source : L'auteur.

On apprécie aisément que la construction par le dessin du triangle symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d en pointillés est plus complexe que le dessin de la seconde moitié de la forteresse.

Pour la forteresse, on dispose du papier quadrillé et de la procédure relativement simple « un pas à droite si on a un pas à gauche sur le dessin de la demi-forteresse déjà dessinée » , ou « un pas à gauche si on a un pas à droite » ; « un pas en descendant si on a un pas en descendant », ou « un pas en montant si on a un pas en montant » Ou plusieurs pas le cas échéant. En outre l'axe de symétrie est vertical.

Pour le triangle ABC, il faut des instruments (l'équerre graduée éventuellement, la règle et le compas le plus souvent) et la maitrise de certaines propriétés de la symétrie orthogonale (concernant les distances à la droite d par exemple).

Concernant la forme prédicative, il suffit d'énoncer en portugais et en français certaines des propriétés et relations susceptibles d'être énoncées par l'enseignant pour comprendre que les élèves de collège, de sixième (11 à 12 ans) à coup sûr, mais aussi de quatrième (13 à 14 ans), auront des difficultés pour les formuler eux-mêmes, et même pour les comprendre, surtout les dernières.

Forme prédicative en portugais

1 – A fortaleza é simétrica (enuncia a propriedade de um objeto concreto desenhado, a fortaleza)
2 – O triângulo A'B'C' é simétrico ao triângulo ABC em relação à reta *d* (também enuncia a propriedade de um objet concreto, o triângulo A´B´C´, mas o predicado traz também outros objets : o Triângulo ABC e a reta)
3 – A simetria mantém os comprimentos e os ângulos (fala de um novo objeto, a simetria, objeto abstrato que resulta d uma construção teórica nova, uma vez que não é uma fortaleza, nem um triângulo, nem uma reta. Não desenhamos o objeto simetria)
4 – A simetria é uma isometria (exprime uma relação entre dois tipos deobjetos abstratos, as simetriase as isometrias)

Forme prédicative en français

1 – La forteresse est symétrique (énonce la propriété d’un objet concret dessiné, la forteresse)
2 – Le triangle A'B'C' est symétrique du triangle ABC par rapport à la droite d (aussi énonce la propriété d’un objet concret, le triangle A’B’C', mais le prédicat met en jeu deux autres objets : le triangle ABC, et la droite)
3 – La symétrie conserve les longueurs et les angles (parle d’un nouvel objet, la symétrie, objet abstrait, qui résulte d’une construction théorique nouvelle puisque ce n’est ni une forteresse, ni un triangle, ni une droite. On ne dessine pas l’objet symétrie)
4 – La symétrie est une isométrie (exprime une relation entre deux sortes d’objets abstrait, les symétries et les isométries)

Le deuxième énoncé est déjà plus délicat que le premier : il exprime une relation à trois termes alors que le premier énonce une propriété applicable à un terme seulement. Le troisième énoncé présente une nouvelle difficulté, celle de transformer le prédicat des deux premiers énoncés en un substantif, ce qui fait de lui un nouvel objet de pensée, qui a lui-même des propriétés, celles de conserver les longueurs et de conserver les angles. Un autre saut cognitif est franchi avec le quatrième énoncé puisque les propriétés de conservation sont à leur tour transformées en un nouvel objet, le concept d’isométrie, dont les symétries orthogonales ne sont qu’une sous-classe. Il faut donc être prudent avant d’affirmer, avec Vygotski, que le concept c’est la signification du mot.

Parlons maintenant d’algèbre

La première remarque intéressante est que, tout en s’appuyant sur les connaissances d’arithmétique, l’algèbre représente un important détour formel. On peut ainsi caractériser les différences entre l’arithmétique et l’algèbre de la manière suivante :

Tableau 1 – Différences entre l’arithmétique et l’algèbre

Arithmétique	Algèbre
inconnues intermédiaires	extraction des relations pertinentes
choix intuitif des données	expression formelle des énoncés et des opérations
opérations dans le bon ordre	algorithme
contrôlées par le sens	contrôle : règles et modèle adéquat

Source : L'auteur.

Un nouveau concept devient nécessaire, celui de script-algorithme, dont voici un des exemples les plus simples :

$3x + 14 = 35$
$3x + 14 - 14 = 35 - 14$
$3x = 21$
$3x / 3 = 21 / 3$
$x = 7$

Cet algorithme comporte plusieurs opérations élémentaires d'arithmétique que j'ai laissées visibles, volontairement. Même avec ces opérations bien visibles, les élèves ont du mal à apprécier le sens de l'algèbre, problème sur lequel butent beaucoup d'élèves de collège.

On peut traduire cette interrogation en termes de compétences par rapport à l'algèbre. Citer plusieurs compétences nouvelles, très significatives de la rupture d'avec l'arithmétique, et de niveau très différent :

1- Savoir quoi faire devant une équation donnée
   atteindre un certain but , respecter les règles
2- Savoir mettre un problème en équation
   extraire les relations pertinentes, contrôler leur indépendance
3- Identifier des objets mathématiques nouveaux
   équation et inconnue, fonction et variable
4- Reconnaître certaines fonctions originales de l'algèbre
   résoudre des problèmes malaisés ; prouver une relation

Ces compétences impliquent des niveaux de conceptualisation très différents

1 et 2 reposent sur des schèmes : « le sens c'est les schemes » selon Piaget
3 repose sur des conceptualisations explicites
4 est métacognitive

Comme pour les champs conceptuels vus plus haut (structures additives et structures multiplicatives), les algorithmes enseignés au collège se situent à des niveaux de complexité contrastés selon la complexité relative des équations à résoudre. On distingue souvent les niveaux suivants

$a + x = b$
$ax = b$
$ax + b = c$
$ax + b = cx + d$
$ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$

Une autre question surgit : est-ce que les élèves utilisent les algorithmes enseignés ou se rabattent-ils sur des schèmes personnels ?

Ils y sont parfois obligés : par exemple, Il n'y a pas d'algorithme pour mettre en équation les problèmes formulés en langage naturel ; les élèves ont alors recours à des schèmes personnels, y compris lorsqu'on leur fait des suggestions à ce sujet.

La puissance de l'algèbre tient en partie au fait qu'elle est une forme de la connaissance mathématique exceptionnelle : à la fois prédicative et opératoire : en effet, elle permet à la fois d'énoncer des objets, des propriétés et des relations (moyennement certaines précautions) et en même temps de traiter ces énoncés pour avancer vers des solutions. C'est ce que Descartes a réussi à montrer, de manière exemplaire et pour la première fois, avec son traité de Géométrie algébrique de 1636.

On peut dire les choses autrement, notamment en distinguant le côté outil et le côté objet de l'algèbre.

Côté outil de l'algèbre

résolution de problèmes qui seraient délicats par l'arithmétique

formules de géométrie, de physique, de comptabilité, d’économie
algorithmes de traitement

Côté objet

Equation et inconnue
Fonction, variable, paramètre
Nombres relatifs, rationnels, réels
Monômes, polynômes, système

On sait par exemple que certains mathématiciens, jusqu’au 19ème siècle, ont dénié le statut de nombre aux nombres négatifs. Ils n’en voyaient que le côté *« outil commode de calcul »*.

Inévitablement de nombreux élèves de collège ont des réticences avec les nombres négatifs : par exemple s’ils parviennent à une solution négative après un traitement algébrique, ils s’exclament « *je me suis trompé ! »*.

Il est donc utile de rechercher des situations pour lesquelles des solutions négatives peuvent avoir du sens.

Un premier exemple simple

La température extérieure est de 2 degrés au-dessus de zéro à 9 heures du matin. Elle a augmenté de 11 degrés depuis 3 heures du matin. Quelle était la température à 3 heures du matin ?

Un deuxième exemple plus sophistiqué

Robert a joué aux billes le matin et l’après-midi. Il a gagné 18 billes l’après-midi. Mais en faisant ses comptes à la fin, il s’aperçoit qu’il a 5 billes de moins que ce qu’il avait le matin avant de commencer à jouer. Que s’est-il passé le matin ?

Pour ce dernier problème, deux mises en équation sont possibles, inégalement accessibles aux élèves à la fin du collège.

$x + 18 = -5$ mais il est bien délicat de raisonner directement ainsi

$35 + x + 18 = 35 – 5$

Que faire ?

Rechercher des situations dont la solution algébrique négative peut être interprétée :

soit comme une **transformation négative** (perte, dépense…)
soit comme une **relation négative** (dette, de moins que…)
soit comme une **abscisse ou une ordonnée négative**

En tout état de cause il faut essayer d’éviter les formulations qui indiqueraient d’emblée que le nombre recherché serait négatif. Préférer une forme plu neutre, par exemple :

A-t-il fait un bénéfice ou une perte ? et de combien ?

En résumé, conceptions et symboles sont des instances cognitives distinctes : on ne doit pas confondre conceptualisation et symbolisation, même si les symboles apportent une certaine contribution à la conceptualisation.

Quelles qualités possibles des signifiants langagiers et symboliques peut-on trouver importantes ?

- Stabilité et économie (résumé de l'information)
- le cas échéant proximité sémantique entre signifiants, signifiés et invariants opératoires
- Opérationnalité : inférences et calculs

PRINCIPES D'INCERTITUDE ET DÉVELOPPEMENT DE LA RATIONALITÉ

Les mathématiques jouent un rôle important dans la formation de la rationalité. On a même parfois tendance à leur accorder un rôle principal et privilégié, comme les modèles mathématiques de la physique tendent parfois à se présenter : on attribue ainsi aux modèles une rationalité qu'on refuse à l'observation et aux découvertes empiriques, pourtant décisives dans les sciences.

Il est utile de reprendre la question à partir du développement de l'enfant qui, sans connaître les mathématiques, se forme progressivement des représentations rationnelles des situations dans lesquelles il vit et se développe.

Distinguons trois grands catégories de situations :

- **Situations aléatoires :** on ne peut pas prévoir les événements singuliers.
- **Situations régulières :** on peut prévoir les événements singuliers, mais on n'a pas accès aux processus qui engendrent cette régularité.
- **Situations nécessaires :** on peut prévoir et on a accès aux processus ; mais on ne dispose pas de toutes les catégories conceptuelles pertinentes pour saisir l'information, prévoir ou agir.

Exemples prototypiques

Aléatoire : dés , loterie , météorologie
Régulier : saisons, marées, cycle lunaire
Nécessaire : orientation dans l'espace, volume, géométrie euclidienne

On peut imaginer des situations aléatoires, régulières ou nécessaires pour expérimenter avec des enfants ou des adultes

Aleatoire

Deux lampes s'allument selon la loi probabiliste : deux fois la lampe verte pour une fois la lampe rouge**.**

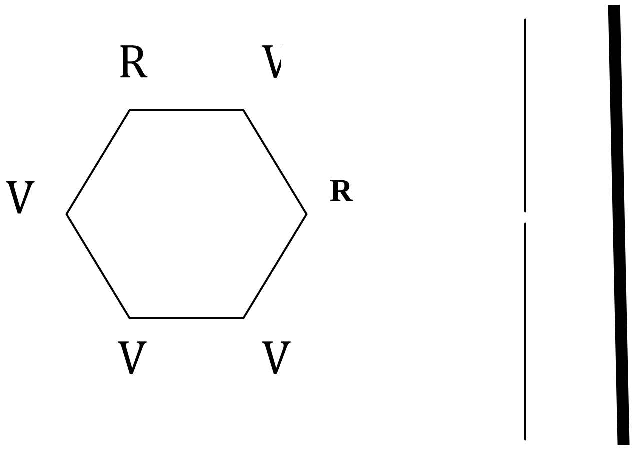
Résultat : les sujets s'ajustent progressivement à la proportion 2 sur 3 et 1 sur 3, alors qu'ils auraient intérêt à prédire toujours « vert ».

Regulier Voici deux exemples de séries régulières

Relativement simple **RVVRVVRVV…**
Plus complexe **RVRVVVRVRVVVRVRVVV…**

Necessaire

Exemple de situation nécessaire avec cette dernière règle de succession : le petit trou laisse projeter les lumières sur le second écran dans l'ordre RVVVRV ; c'est la rotation dans un seul sens de l'hexagone qui donne à cette régularité sa propriété de relation nécessaire.



Il existe évidemment d'autres sources d'incertitude : principalement **l'interférence avec l'action d'autrui** ou de déterminants extérieurs. Il est donc utile de distinguer :

Situations productives : seule l'action propre du sujet détermine les effets et les variations
Situations passives : l'action propre n'a pas d'effet ; les seuls déterminants sont extérieurs (typiquement l'astronomie)
Situations interactives : les variations dépendent à la fois de déterminants extérieurs et de l'action propre.

Ces trois catégories pourraient être réinterprétées avec les trois catégories princeps vues plus haut : aléatoire, régulier, nécessaire. Mais il est important de les distinguer pour elles-mêmes, car elles jouent un rôle dans la construction de la rationalité par l'enfant.

Une approche développementale conduit en effet à ne pas les confondre. Les enfants agissent et peuvent ainsi expérimenter ; dans les situations productives, ils n'observent pas d'autres variations que celles engendrées par leur action propre. On peut donc considérer que la rationalité se développe de manière privilégiée dans les situations nécessaires et productives.

Par contre c'est dans les situations interactives et aléatoires qu'on peut situer l'impact le plus original de la théorie des jeux.

On peut aussi situer dans la case du milieu la rationalité qui se développe avec l'étude des saisons et l'astronomie, qui ont joué un rôle très important dans l'histoire des sciences.

Tableau 2 – Relations entre catégories de situations

	Nécessaires	**Régulières**	**Aléatoires**
Productives	Base et début de la rationalité		
Passives		Saisons astronomie	
Interactives			Théorie des jeux

Source : L'auteur.

La construction de la rationalité

Le premier champ d'expérience du bébé et du jeune enfant qui soit de l'ordre du nécessaire est l'espace.

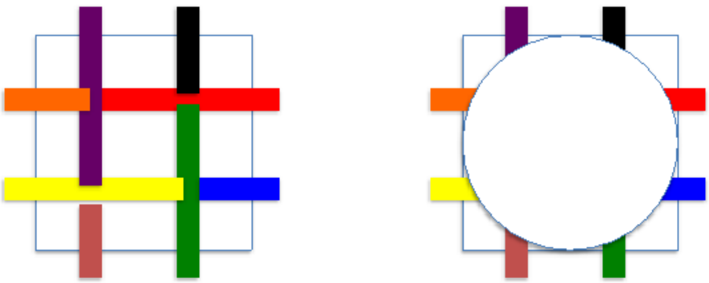
C'est aussi un champ d'expérience essentiel pour l'adulte. D'où l'importance de la géométrie dans l'histoire des sciences, comme domaine propre de conceptualisation, et comme source de modèles.

Restons-en au bébé et au jeune enfant et considérons les situations qui peuvent façonner leurs premières représentations calculables :

- les déplacements et les positions du sujet dans un espace circonscrit
- la manipulation d'objets matériels ayant certaines propriétés.

Une illustration de la construction du nécessaire

Figure 3 – Dispositif de barres encastrées



Source : L'auteur.

On présente individuellement à des enfants de 4 à 8 ans un dispositif de barres encastrées les unes dans les autres, ; et on leur demande de libérer la barre rouge qui, comme on le voit sur la figure de gauche, est bloquée par la barre noire, au-dessus, et par la barre verte (au-dessous). La barre verte est elle-même bloquée par la barre jaune ; mais pas par la barre bleue (qui s'arrête au bord de la barre verte. Comme on le voit sur la figure, la barre jaune est elle-même bloquée par la barre marron foncé, mais pas par la barre marron clair. Et la barre marron foncé est enfin bloquée par la barre orange.

De telle sorte qu'il faudrait essayer de tirer plusieurs barres dans un certain ordre pour libérer la barre rouge.

Nous avions envisagé de présenter le même dispositif, avec la même consigne de tirer la barre rouge, avec un écran cachant les relations entre barres (figure de droite). Mais nous nous contenterons d'évoquer les principales observations faites lorsque le dispositif est visible.

Parlons des actions essayées : tirer la barre noire pour essayer de libérer la barre rouge ne pose guère de problème ; par contre essayer de tirer la barre verte fait difficulté puisqu'elle est, elle `même, bloquée part la barre jaune, et que les enfants ne cherchent guère les raisons de ce blocage : ils s'acharnent à essayer de tirer alternativement la barre verte et la barre rouge, sans succès évidemment.

Le premier algorithme observé est celui d'une petite fille de 4 ans et demi qui découvre le blocage par la barre jaune. Elle se contente d'abord de cette découverte et revient vers la barre rouge ; en vain ! Elle a alors l'idée de remonter, à partir de la barre jaune, vers la barre marron foncé puis vers la barre orange. Elle a donc découvert quez la relation de blocage n'est pas symétrique et qu'il est sans effet de tirer alternativement la barre qui bloque et la barre bloquée.

C'est seulement vers 7 ans et plus que certains enfants découvriront un algorithme plus rapide en raisonnant transitivement avec l'inférence : « il faut tire x pour tirer y et il faut tirer z pour tire x » alors « il faut tire z pour tirer y ».

On observe plusieurs autres façons d'enchainer les actions :

- en tournant autour du dispositif et en essayant de tirer les barres dans l'ordre de la rotation ;
- en essayant de tirer les barres sans véritable règle, ou en tenant compte de la connexité sans apercevoir l'antisymétrie…
- Enfin certains enfants se refusent à toute tentative, et parfois dessinent une boite sans aucune barre à l'intérieur, bien qu'elles soient dûment visibles.

On observe ainsi plusieurs manières de procéder, c'est-à-dire plusieurs schèmes, dénommés ci-dessous selon leur caractéristique principale. Seuls les deux derniers peuvent prétendre au statut d'algorithmes ;

Boîte noire - tirer rouge puis au hasard
Ordre spatial - tirer rouge puis continuer en tournant dans l'ordre
Connexité - tirer rouge, puis noir, puis marron foncé
Antisymétrie de la relation - tirer vert, tirer rouge, puis jaune pour tirer vert
Transitivité de la règle - examiner le dispositif avant de commencer

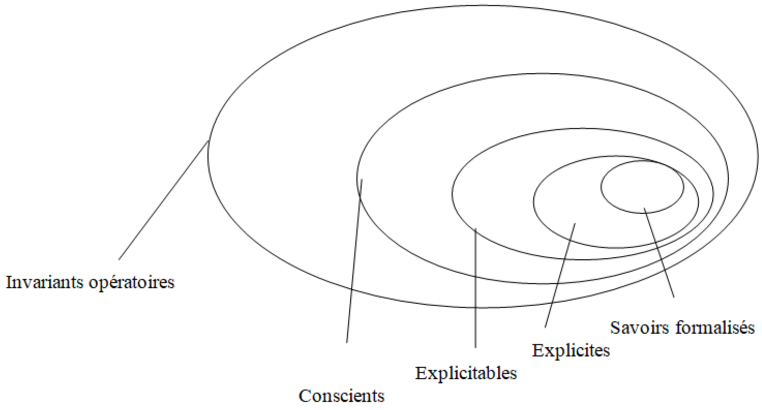
Ainsi schèmes et algorithmes font partie de la même famille, s'adressent les uns et les autres à des classes de situations, sont composées de la même manière par les quatre composantes :

- un but ou plusieurs,
- des règles d'action ; de prise d'information et de contrôle ;
- des invariants opératoires : concepts-en-acte et théorèmes-en-acte
- des possibilités d'inférence.

Les algorithmes sont des schèmes mais les schèmes ne sont pas tous des algorithmes, faute d'aboutir en un nombre fini de pas.

Le rôle de la conscience et de l'explicitation sont aussi un moyen de rendre compte des différents niveaux de conceptualisation possibles dans l'activité rationnelle, depuis les invariants opératoires présents dans les schèmes mais éventuellement peu conscients, jusqu'aux énoncés et démonstrations formalisés de la science contemporaine. (Schéma ci-dessous) :

Figure 4 - Niveaux de conceptualisation



Source : L'auteur.

REFERENCES ET LECTURES COMPLEMENTAIRES

Bachelard G. *La philosophie du non*. Paris : PUF, 1940.

Bachelard G. *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin, 1947.

Bruner J. S. *Savoir faire, savoir dire :* le développement de l'enfant. Paris : PUF, 1983.

Bruner J.S. *Culture et modes de pensée*. Paris : Retz, 2000.

Douady R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 7, n°2, p. 5-31, 1986.

Mayen P. « le processus d'adaptation pragmatique dans la coordination d'une relation de service ». In : K. Kostulski & A. Trognon (dir.), *Communication interactive dans les groupes de travail*. Nancy : presses universitaires de Nancy, p. 205-234, 1998.

Mayen P. Interactions tutorales au travail et négociations formatives. *Recherche et formation pour les professions de l'éducation*, n°35, p. 59-73. PUF, 2000.

Pagoni M. *Approche pragmatique de la conceptualisation des valeurs morales pendant l'adolescence :* analyse cognitivo-discursive d'une situation d'argumentation entre adolescents. Thèse de doctorat en Sciences de l'Education, Université Paris 5 René Descartes, 1994.

Pastré P. La conceptualisation dans l'action : bilan et nouvelles perspectives. *Education permanente*, N°139 (« Apprendre des situations »), p. 13-35, 1999.

Pastré P. Le rôle des schèmes et des concepts dans la formation des compétences. *Performances Humaines et techniques*, n°71, p. 21-28, 1994.

Piaget J. La formation du symbole chez l'enfant. Neuchatel, Delachaux et Niestlé, 1964.

Piaget J. La prise de conscience. Paris : Presses Universitaires de France, 1974.

Piaget, J. *Biologie et connaissance*. Paris, Presses Universitaires de France.

Piaget, J. *Introduction à l'épistémologie génétique.* Paris : Presses Universitaires de France, 1949.

Piaget, J., Inhelder, B. (1966). *L'image mentale chez l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France, 1974.

Revault d'Allonnes, G. Le mécanisme de la pensée : les schèmes mentaux. *Revue philosophique*, XC ; fac similé dans *Psychologie française*, 2000, 45, 1920.

Vergnaud G. Au fond de l'action, la conceptualisation. In J.M. Barbier (dir.), S*avoirs théoriques,* s*avoirs d'action*. Paris : PUF, p 275-292, 1996.

Vergnaud G. L'enfant, la mathématique et la réalité. Berne : Peter Lang, 1981.

Vergnaud G. Récopé M. De Revault d'Allonnes à une conception du schème aujourd'hui. *Psychologie Française*, 45, 1, pp 35-50, 2000.

Vergnaud G. Some of Piaget's fundamental ideas concerning didactics, *Prospects*, 26-1, 183-194, 1996.

Vygotski L. S. *Pensée et langage*. Paris, Editions Sociales. (traduction de Françoise Sève), 1934/1985.

Vygotski L. S. Thought and Language. Cambridge MIT Press, 1962.

BIBLIOGRAPHIE complémentaire en espagnol et en portugais

Moreira M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a investigação nesta área. Universidad federal do Rio Grande do Sul, 2004.

Vergnaud G, Durand C. Estructuras additivas y compleji dad psicogenetica. In Coll. C. (ed.). *Psicologia genetica y aprendizajes escolares*. Madrid : siglo xxi de espana editores, p. 105-128, 1983.

Vergnaud G, Halbwachs F., Rouchier A. Estructura de la materia ensenada, historia de las ciencias, y desarrollo conceptual del alumno. In Coll C. (ed.), *psicologia genetica y education*, oikos-tau-barcelona, p.115-128, 1981.

Vergnaud G. A criança, a matemática e a realidade. Curitiba : UFPR, 2009.

Vergnaud G. A gênese dos campos conceituais. In : E.P. Grossi (Ed.) Porque ainda há quem não aprende ? A teoria. Petrópolis, vozes, 2003.

Vergnaud G. Actividad y conocimiento operatorie. In : coll. C. (ed.). *Psicologia genetica y aprendizajes escolares*, Madrid, siglo xxi de espana editores, p. 91-104, 1983.

Vergnaud G. *El nino las matematicas y la realidad*. Mexico : trillas, 1991.

Vergnaud G. *Forma operatória e forma predicativa do conhecimento* : o valor da experiência na formação de competências. Araucarias, 1-2, 69-89, 2002.

Vergnaud G. Lev Vygotski, pedagogo e pensador do nosso tempo. Porto Alegre ; geempa, 2004.

Vergnaud G. Problemas aditivos y multiplicativos. In : C. Chamorro (ed). D*ificultades del aprendizaje de las matematicas*. Madrid : ministerio de educacion, cultura y deporte, 2002.