

LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE : PARADIGME, AVANCÉES ET PERSPECTIVES

Hamid Chaachoua¹

Marilena Bittar²

INTRODUCTION

L'objet de ce cours est de présenter les concepts clés et des grandes questions qui ont contribué au développement de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) depuis le début des années 90. Pour cela, nous avons choisi de décrire cette évolution à travers la notion de sensibilité des cadres théoriques. Artigue (2011) propose le terme de « sensibilité » pour traduire le mot « concerns » utilisé dans des projets de recherche européens³ dans le but de positionner des cadres théoriques les uns par rapport aux autres en fonction de leurs spécificités.

Elle considère que « chaque cadre théorique en didactique utilise un filtre conceptuel particulier pour découper et étudier ce qui peut être considéré comme un objet commun d'études » (ibid., p.32) et que les constructions théoriques se développent d'abord pour faire face à des besoins auxquels les outils conceptuels disponibles ne permettent pas d'apporter des réponses. Ainsi, on peut mieux comprendre l'évolution d'une théorie en identifiant les besoins auxquels elle cherche à répondre et les constructions qui leur permettent de le faire.

Dans la première partie nous présenterons les concepts de la TAD et les grandes lignes de son évolution depuis la transposition didactique jusqu'à l'émergence de l'approche praxéologique. Ensuite, dans la deuxième partie nous présenterons un exemple pour illustrer l'évolution de la TAD autour de la prise en compte de l'apprenant.

FONDEMENTS ET ÉVOLUTIONS DE LA THÉORIE ANTHROPOLOGIQUE DU DIDACTIQUE

Pour la TAD, nous retenons deux sensibilités identifiées par Artigue (2011) :

Sensibilité 1 : Centration sur la notion d'institution

« Sa centration sur la notion d'institution et la sensibilité qui en résulte aux questions de normes et valeurs institutionnelles ainsi qu'à la façon dont celles-ci façonnent les processus d'enseignement et d'apprentissage » (ibid., p. 37)

Sensibilité 2 : Relativité des connaissances mathématiques

« Le fait qu'elle considère la connaissance mathématique comme quelque chose de relatif, émergeant de pratiques humaines, et qu'elle soit donc sensible à tout ce qui, affectant ces pratiques, affecte les moyens d'accès, les contenus et les formes de cette connaissance » (ibid., p. 37).

¹ Univ. Grenoble Alpes, França/ CNRS, Grenoble INP, LIG.

² PPGEdumat, DDMat/ Univ. Federal do Mato Grosso do Sul, Brasil.

³ TELMA : Technology Enhanced Learning in Mathematics. Voir <http://telma.noe-kaleidoscope.org>. 4. ReMath (IST4-26751) : Representing Mathematics with Digital Media est un STREP (Strategic Targeted Research European Project) du 6e PRD dans le domaine IST (Information Society Technologies).

C'est autour de ces deux sensibilités que nous allons illustrer les fondements et l'évolution de la TAD.

Le thème central de la théorie telle qu'elle a été récemment élargie (CHEVALLARD, 1989) est celui des savoirs et des institutions. Ainsi, un savoir n'existe pas « in vacuo » dans un vide social : tout savoir apparaît, à un moment donné, dans une société donnée, comme ancré dans une ou des institutions. (CHEVALLARD, 1989). D'où les propositions : (1) tout savoir est savoir d'une institution, (2) un même objet de savoir peut vivre dans des institutions différentes (3) pour qu'un savoir puisse vivre dans une institution, il faut qu'il se soumette à un certain nombre de contraintes, ce qui implique notamment qu'il se modifie, sinon il ne peut pas se maintenir dans l'institution.

Ces trois propositions sont la base de deux approches⁴ : la transposition didactique et l'écologie des savoirs.

La transposition didactique étudie le processus qui permet à un savoir de passer d'une institution dans une autre institution d'enseignement. Ainsi, elle met en évidence le problème de la légitimation des objets de savoir enseignés et l'apparition systématique d'un écart entre un savoir enseigné et les références qui le légitiment, écart dû à des contraintes pesant sur le fonctionnement du système d'enseignement.

L'écologie des savoirs constitue un moyen de questionner le réel : Qu'est-ce qui existe, et pourquoi ? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi ? Et qu'est-ce qui pourrait exister ? Sous quelles conditions ? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions ?

Première évolution de la TAD

La TAD s'est construite comme un prolongement de ces deux approches et en introduisant des termes primitifs : Objet, Personne, Institutions et de Rapports personnel ou institutionnel.

Un objet O existe pour une personne X si existe un rapport personnel $R(X,O)$, de la personne X à l'objet O . Semblablement, l'objet O existe pour l'institution I si existe un rapport institutionnel, $RI(O)$, de I à O . Duale, on dira que X (ou I) connaît O s'il existe un rapport $R(X,O)$ de X à O (respectivement, un rapport $RI(O)$ de I à O). (CHEVALLARD, 1991, p. 161)

Le rapport institutionnel énonce ce qui se fait dans une institution I donnée avec l'objet O , comment cet objet y est mis en jeu. Pour chacun des sujets de I occupant une position p , il exprime qu'il existe un rapport institutionnel à l'objet O : $R_I(p, O)$. Ce rapport institutionnel constitue le système essentiel des conditions et des contraintes sous lesquelles se forme et évolue un second rapport : le rapport personnel d'un individu X à l'objet O .

Le rapport personnel d'un individu X à un objet O est l'ensemble des interactions, sans exception, que X peut entretenir avec O : le manipuler, l'utiliser, en parler, y rêver, Il précise la manière dont X connaît O . Pour Chevallard, la notion de rapport personnel est à la fois un concept englobant mais aussi unificateur des aspects fragmentaires sous lesquels on décrit communément la connaissance.

⁴ On peut parler de la théorie de la transposition didactique ou la théorie de l'écologie. Mais nous lui préférons ici le terme d'approche pour réserver le terme de la théorie à la TAD.

Un individu X ne peut avoir, à un objet de savoir donné, Os, qu'un rapport personnel, lequel est émergent d'un système de relations institutionnelles (telle la relation didactique), relations ternaires où l'individu X entre en relation avec l'objet de savoir Os et un ou des agents de l'institution I. De ce rapport personnel relève notamment tout ce qu'on croit ordinairement pouvoir dire - en termes de « savoir », de « savoir-faire », de « conceptions », de « compétences », de « maîtrise », de « images mentales », de « représentations », de « attitudes », de « fantasmes », etc...- de X à propos de Os. Tout ce qui peut être énoncé - à tort ou à raison, pertinemment ou non - doit être tenu (au mieux) pour un aspect du rapport personnel de X à Os. Le concept de rapport (personnel) apparaît comme englobant les aspects fragmentaires en lesquels on le dissocie ordinairement. (CHEVALLARD, 1989, pp. 226-227)

Dans ce cadre, l'apprentissage est une modification du rapport d'un individu X à O. Soit ce rapport commence « à exister » (s'il n'existait pas déjà), soit ce rapport se modifie (s'il existait déjà). Cet apprentissage change la personne (et non l'individu).

Le rapport institutionnel à l'objet O, d'une institution, constitue le système essentiel des conditions et des contraintes sous lesquelles se forme et évolue le rapport personnel d'un individu X à l'objet O quand il devient sujet de l'institution I. Ce rapport institutionnel dépend de la position p que la personne occupe dans I : élève ou professeur. On pourra alors parler de bon ou de mauvais sujet d'une institution relativement à cette contrainte.

Comme le soulignent Bosch et Chevallard (1999), la notion du rapport au savoir inscrit la didactique dans le terrain de l'anthropologie de la connaissance (ou anthropologie cognitive). Ainsi :

La connaissance – et le savoir comme une certaine forme d'organisation de connaissances – entre alors en scène avec la notion de rapport : un objet existe s'il existe un rapport à cet objet, c'est-à-dire si un sujet ou une institution le « (re)connaît » en tant qu'objet. Étant donné un objet (par exemple un objet de savoir) et une institution, la notion de rapport renvoie aux pratiques sociales qui se réalisent dans l'institution et qui mettent en jeu l'objet en question, soit donc à « ce qui se fait dans l'institution avec cet objet ». Connaître un objet c'est avoir à faire avec – et souvent avoir affaire à – cet objet. Le savoir mathématique, en tant que forme particulière de connaissance, est donc le fruit de l'action humaine institutionnelle : c'est quelque chose qui se produit, s'utilise, s'enseigne ou, plus généralement, se transpose dans des institutions. Mais le mathématique reste encore un terme primitif, hypostase de certaines pratiques institutionnelles – les pratiques sociales à mathématiques. Ce qui fait défaut, c'est l'élaboration d'une méthode d'analyse des pratiques institutionnelles qui en permette la description et l'étude des conditions de réalisation. Les derniers développements de la théorisation viennent combler ce manque. La notion clé qui apparaît alors est celle d'organisation praxéologique ou praxéologie. (BOSCH ; CHEVALLARD, 1999, p. 85)

Ainsi, pour décrire le rapport institutionnel qui contraint le rapport personnel d'un sujet à un objet de savoir, la théorie propose le modèle de praxéologie. Ce modèle a été donc introduit comme réponse à un besoin méthodologique, celui de décrire les rapports institutionnels.

L'approche praxéologique

Bosch et Chevallard (1999) ont proposé un modèle de praxéologie comme outil de description du rapport institutionnel.

Le rapport institutionnel à un objet, pour une position institutionnelle donnée, est façonné et refaçonné par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant cette position. C'est ainsi l'accomplissement des différentes tâches que la personne se voit conduite à réaliser tout au long de sa vie dans les différentes institutions dont elle est le sujet successivement ou simultanément qui conduira à faire émerger son rapport personnel à l'objet considéré. (BOSCH ; CHEVALLARD, 1999, p. 85)

La TAD considère que, en dernière instance, toute activité humaine consiste à accomplir une tâche t d'un certain type T , au moyen d'une technique τ , justifiée par une technologie θ qui permet en même temps de la penser, de la produire, et qui a son tour est justifiable par une théorie Θ . Elle part ainsi du postulat que toute activité humaine met en œuvre une organisation praxéologique que Chevallard (1999) nomme praxéologie, ou organisation praxéologique et qu'il note $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

On parle de praxéologie mathématique – ou d'organisation mathématique (OM) – lorsque les types de tâches T relèvent des mathématiques, de praxéologie didactique – ou d'organisation didactique – lorsque les types de tâches T sont des types de tâches d'étude.

Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation $[T, \tau, \theta, \Theta]$: le grec *praxis*, qui signifie « pratique », renvoie au bloc pratico-technique (ou praxique) $[T/\tau]$, et le grec *logos*, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au bloc technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. Chevallard (1999) désigne alors une praxéologie $[T, \tau, \theta, \Theta]$ tout entière comme étant une organisation de savoir.

On dit que $[T, t, \theta, \Theta]$ est une praxéologie ponctuelle pour signifier qu'il s'agit d'une praxéologie relative un unique type de tâches. Constatons qu'on ne rencontre que rarement les praxéologies ponctuelles. Ce constat, amène aux notions de niveaux de *détermination mathématiques* et de *codétermination mathématiques et de codétermination didactique*.

Niveaux de détermination mathématique

Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond à plusieurs technologies θ_j , dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles plusieurs techniques τ_{ij} correspondant à autant de types de tâches T_{ij} . Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisation locales, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations régionales, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ . Au-delà, Chevallard (1998) nomme organisation globale le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k .

La segmentation des savoirs mathématiques dans un curriculum d'étude au sein d'une institution est organisée en plusieurs niveaux. Le niveau thème est autour d'une technologie, ce qui amène à considérer des organisations mathématiques locales. L'étude d'un thème conduit à le considérer dans ses relations avec l'organisation mathématique régionale, c'est le niveau secteur, et avec l'organisation mathématique globale, c'est le niveau domaine. Celui-ci est plongé dans la discipline dans son ensemble. Un thème est étudié à partir de plusieurs organisations mathématiques ponctuelles, c'est le niveau sujet, que le thème amalgame.

La mise en place d'une organisation mathématique ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ ne se rencontre par exemple qu'exceptionnellement dans les cours d'études réels : il n'existe guère de thèmes d'étude θ qui ne renvoient qu'à un type de tâches T . Cette abstraction existe sans doute un peu plus pour l'élève parce que, dans l'état actuel des choses, celui-ci est évalué en priorité à propos de types de tâches T dont chacun définit pour lui un sujet d'études à part entière, quasi indépendants des autres. Mais pour le professeur, déjà, l'unité de compte – non bien sûr l'unité minimale – est plus vaste : c'est autour d'une technologie θ , qui prend alors le statut de thème d'études, que se regroupe pour lui un ensemble de types de tâches T_i ($i \in I$) à chacun desquels, selon la tradition en vigueur dans le cours d'études, la technologie θ permettra d'associer une technique t_i . L'organisation mathématique que le professeur vise à mettre en place dans la classe n'a plus alors la structure atomique qu'exhibe la formule $[T/\tau/q/\Theta]$: c'est un amalgame de telles organisations ponctuelles, que l'on notera $[T_i/\tau_i/\theta/Q]_{i \in I}$ et qu'on appelle organisation (mathématique) locale. Et c'est d'une telle organisation locale que l'élève devra alors extraire, en les reconstruisant avec ses camarades d'étude sous la direction du professeur (ou, faute de mieux, pour son propre compte), les organisations ponctuelles sur lesquelles sa maîtrise sera préférentiellement évaluée. Le professeur, quant à lui, doit gérer un phénomène analogue, mais à un niveau supérieur : l'organisation locale $[T_i/\tau_i/\theta/Q]_{i \in I}$ correspondant au thème d'études doit être extraite d'une organisation plus vaste, qu'on dira régionale, et qu'on peut regarder formellement comme le fruit de l'amalgamation d'organisations locales admettant la même théorie Q , $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/Q_j]_{i \in I, j \in J}$. Ce niveau, celui du secteur d'études, n'est au reste nullement terminal. On constate en effet, en général, l'existence de niveaux supérieurs de détermination (d'une organisation) mathématique : l'amalgamation de plusieurs organisations régionales $[T_{kji}/\tau_{kji}/\theta_j/Q_j]_{i \in I, j \in J, k \in K}$ conduit ainsi à une organisation globale, identifiable à un domaine d'études ; et l'ensemble de ces domaines est amalgamé en une commune discipline – pour nous, « les mathématiques. (CHEVALLARD, 2002, p. 42)

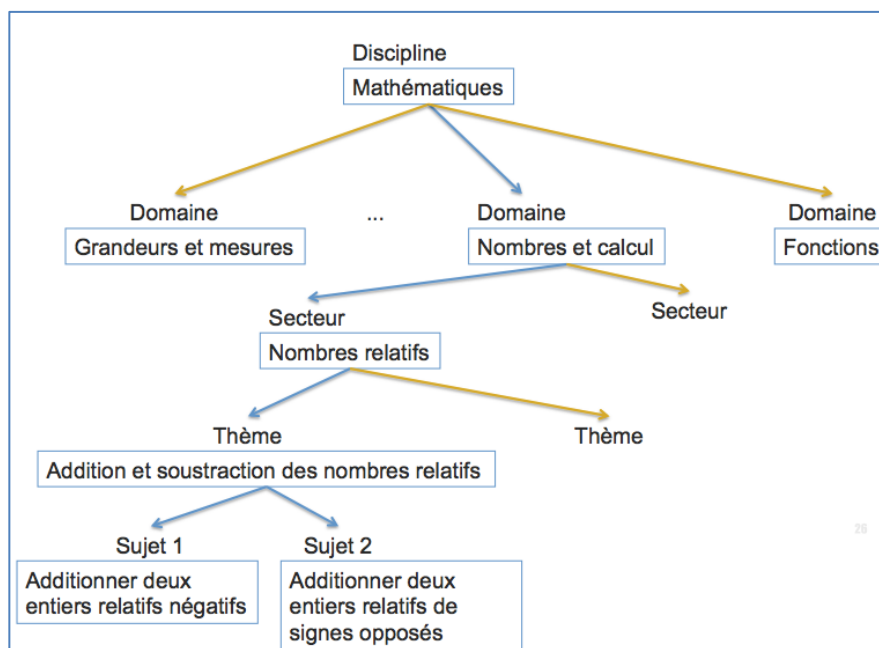
Les différents niveaux de codétermination didactique énoncés ici constituent en effet des conditions et des contraintes d'existence d'une organisation mathématique locale.

L'identification de ces niveaux de détermination présente plusieurs intérêts que nous présentons ci-dessous.

a) Expliciter et rendre compte de la structuration d'un curriculum d'une institution

Considérons l'exemple des praxéologies ponctuelles autour des types de tâches « Additionner deux entiers relatifs négatifs » et « Additionner deux entiers relatifs de signes opposés » en France. Elles relèvent d'un même thème « Addition et soustraction des nombres relatifs » qui relève du secteur « Nombre relatifs », du domaine « Nombre et calcul » qui relève enfin de la discipline « Mathématiques » (cf. Figure 1). Soulignons que cette structuration n'est pas absolue, elle dépend de chaque institution et du temps.

Figure 1 – Niveaux de détermination mathématique autour des nombres relatifs en France



Source : Les auteurs.

b) Mettre en évidence des problèmes ou des phénomènes d'un curriculum donné

A partir de la structuration ci-dessus on peut mettre en évidence des problèmes ou incohérences du curriculum au niveau de son articulation à partir des questions : Quelles organisations didactiques permettent d'articuler les questions ponctuelles étudiées dans chaque thème ? D'articuler les différents thèmes étudiés dans chaque secteur ? ...

De même, on peut mettre en évidence des phénomènes de l'atomisation du curriculum. Par exemple :

- Étude de questions ponctuelles et isolées
- Manque de flexibilité des techniques employées
- Absence d'une structuration du curriculum aux niveaux supérieurs au thème
- Manque de lien entre les secteurs d'un même domaine : nombres, algèbre, fonctions (cas de la France)

c) Mettre en évidence des problèmes ou des phénomènes liés à la profession

Cette structuration permet d'analyser des pratiques des enseignants quant à la mise en œuvre du curriculum. Ainsi, comme le souligne Chevallard (2002, p. 43)

[...] dans l'opération de détermination des organisations mathématiques qu'ils tenteront de mettre en place dans les classes, les professeurs tendent à ne se repérer que sur les niveaux de plus grande spécificité, *sujets* et *thèmes* ... D'une manière générale, son souci ne se portera guère sur les *secteurs* ou les *domaines*, niveaux de moindre spécificité.

Ceci a comme conséquence une absence de motivation des types de tâches étudiés car les types de tâches motivantes se trouvent dans les niveaux supérieurs de détermination : secteurs et domaines.

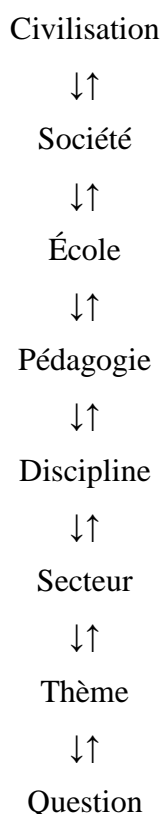
Praxéologies didactiques et Niveaux de (co-)détermination

Les questions précédentes renvoient à la notion de *praxéologie didactique* qui a pour objet la *mise en place*, dans un système didactique (une classe par exemple) une organisation mathématique. Chevallard (2002) introduit la notion de niveau de codétermination comme une échelle pour repérer les conditions et contraintes qui pèsent sur la diffusion des savoirs et qui permettent de mettre en relation les différents niveaux de détermination et en prenant en compte d'autres niveaux supérieurs qu'il faut rajouter : Pédagogie, Ecole, Société et Civilisation.

À la hiérarchie présentée jusqu'ici on doit en effet rajouter plusieurs niveaux supplémentaires, représentés sur le schéma ci-après, où chaque niveau se réfère à une réalité (la société, l'École, les mathématiques, etc.) qui n'est nullement un donné, mais un construit historique. Chaque niveau concourt à déterminer l'écologie des organisations mathématiques et des organisations didactiques par les points d'appui qu'il offre et les contraintes qu'il impose. (CHEVALLARD, 2002, p. 51)

Cette nouvelle échelle est présentée dans la figure 2.

Figure 2 – Echelle de codétermination (D'après Chevallard, 2002)



Source : Chevallard (2002).

Le niveau de référence de cette échelle est la discipline où siègent les conditions spécifiques de l'enseignement d'un contenu disciplinaire. Mais ce niveau vit en interaction constante avec les niveaux supérieurs et inférieurs. Le niveau de

la pédagogie comprend les conditions qui affectent la diffusion de toutes les disciplines, celui de l'école où on trouve ce qui fait la spécificité de l'enseignement et l'apprentissage scolaire d'une discipline, puis les niveaux plus génériques qui sont ceux de la société et de la civilisation. Les sous niveaux du secteur, domaine, thème et question font référence aux différentes divisions qui structurent les organisations mathématiques enseignées de manière variée selon les institutions d'enseignement considérées (par l'influence, en particulier, des niveaux supérieurs de l'échelle), et qui introduisent des rapprochements ou, au contraire, des distinctions. (BOSCH, 2010, p. 19)

L'identification de ces niveaux de co-détermination permet donc de mieux comprendre les conditions et contraintes institutionnelles qui pèsent sur les systèmes didactiques et permet aux chercheurs d'élaborer des infrastructures mathématiques *alternatives mais viables* dans l'institution et des praxéologies didactiques alternatives associées aux OM.

De là on identifie un autre besoin : l'élaboration d'un Modèle Praxéologique de Référence que nous présentons ci-dessous.

Modèle Praxéologique de Référence

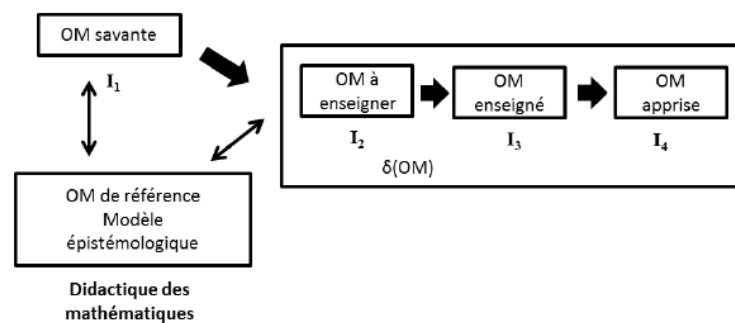
Bosch et Gascon (2004) précisent que l'organisation mathématique à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum mathématique qui est obtenu à partir des programmes et des manuels. L'identification de ces OM à enseigner passe par la caractérisation du type de tâches institutionnel qui est une « re » construction du chercheur à partir de l'analyse des manuels et des programmes.

Du point de vue de la transposition didactique, Bosch et Gascón (2004) avancent deux postulats :

- On ne peut comprendre ni expliquer l'OM apprise sans comprendre et expliquer les OM des étapes antérieures
- L'unité d'analyse des processus didactiques doit contenir une organisation didactique qui permette de mettre en place, au moins, une OM locale

D'où la nécessité de l'ajout d'un modèle épistémologique « praxéologie de référence » qu'on note MPR⁵ permettant de caractériser et analyser des praxéologies à enseigner

Figure 3 – Schéma des processus didactiques (Op. cité, p. 117)



Source: Bosch et Gascón, 2004, p. 117.

⁵ Dans cette présentation, je ne ferai pas de distinction entre modèle épistémologique de référence (MER) et modèle praxéologique de référence (MPR).

L'OM à enseigner constitue un modèle praxéologique du curriculum de mathématiques. La base empirique pour élaborer ce modèle se trouve dans les documents curriculaires (programmes officiels) et dans les manuels. Son influence sur $\delta(OM)$ est centrale bien que ni le professeur ni l'institution scolaire ne dispose explicitement de ce modèle mais uniquement de matériaux praxéologiques plus ou moins bien articulés entre eux.

Mais cette influence ne peut être adéquatement interprétée si nous ne disposons pas d'un point de vue épistémologique. Ce point de vue est fourni par une OM de référence dont la description se fait généralement à partir des OM savantes légitimant le processus d'enseignement. L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. Elle ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniement. (Op. cité, p.117)

L'élaboration d'un modèle praxéologique de référence est devenue une étape incontournable de la plupart des travaux qui s'inscrivent dans la TAD. Le MPR est lui même un résultat en didactique et aussi un outil pour conduire des analyses didactiques.

EVOLUTION DE LA PRISE EN COMPTE DE L'APPRENANT DANS LA TAD

Dans cette partie, nous allons illustrer l'évolution de la prise en compte de l'apprenant et plus spécifiquement la modélisation des connaissances de l'apprenant dans la TAD. Cette présentation s'appuie exclusivement sur une recherche menée par Croset et Chaachoua (2016).

Contexte de la recherche

Nos travaux de recherche dans le cadre du projet Aplusix⁶ (CHAACHOUA et al. 2012) se sont orientés dès 2002 sur la modélisation didactique et informatique des connaissances des élèves en algèbre dans l'enseignement secondaire. Une première modélisation a été faite en s'appuyant sur la Théorie des Champs Conceptuels (VERGNAUD, 1991) et plus particulièrement sur le modèle CK ϕ (BALACHEFF, 1995) pour décrire, représenter et diagnostiquer les connaissances des élèves dans l'environnement informatique Aplusix (CHAACHOUA ; BITTAR ; NICAUD, 2006). Le choix du modèle CK ϕ est une réponse à un besoin de représentation informatique. Pour la représentation du domaine de connaissance de l'algèbre nous l'avons modélisé à l'aide d'un MPR comme réponse à un besoin : décrire les attentes institutionnelles, produire des cartes d'exercices adaptées à une institution donnée, mieux informer le diagnostic des connaissances des élèves.

Cependant, nous avons été devant un verrou scientifique : disposer de deux modèles de représentation de connaissances au sein d'un EIAH, présente un coût informatique important. D'où un besoin : disposer d'un même modèle pour décrire les attentes d'une institution I et les activités de l'élève en tant que sujet de I. Or, la TAD nous propose le modèle praxéologique pour décrire l'organisation du savoir au sein d'une institution, les activités des sujets attendues par l'institution. Notre travail a consisté à intégrer dans cette approche les comportements non attendues par l'institution, en particulier les erreurs des

⁶ <http://applusix.imag.fr/>

élèves, ce qui nous a conduit à l'introduction de la notion de praxéologie personnelle (CROSET ; CHAACHOUA, 2016). Pour rendre ce modèle compatible avec une implémentation informatique nous avons développé une formalisation qui est à l'origine du cadre T4TEL (CHAACHOUA et al., 2013) que nous ne présenterons pas ici.

Dans la suite, nous allons illustrer l'évolution de la prise en compte de l'apprenant dans la TAD afin de répondre à deux questions : (1) Comment la TAD prend en charge les connaissances de l'apprenant ? Peut-on prendre en compte les connaissances non conformes aux attentes institutionnelles (y compris erronées) ?

Méthodologie

Pour répondre à ces questions, Croset et Chaachoua (2016) ont étudié comment les chercheurs dont des travaux s'inscrivent dans la TAD décrivent le rapport personnel. Pour cela, ils ont choisi deux équipes : l'équipe parisienne de recherche en didactique des mathématiques et l'équipe grenobloise. Elles sont caractérisées par le fait que plusieurs travaux conduits s'inscrivent dans la TAD et peuvent éventuellement emprunter des outils issus d'autres cadres théoriques s'ils en ressentent le besoin.

Les auteurs ont choisi comme matériaux d'analyse : les thèses de ces deux équipes et des articles qui ont nourri des réflexions théoriques chez les doctorants ou des articles de réflexion et de synthèse interrogeant un cadre théorique.

Les travaux de thèse examinés sont ceux qui se réfèrent explicitement au rapport institutionnel et personnel des années 90 à nos jours. 21 thèses ont été ainsi identifiées selon ce critère dont 12 dirigées à Grenoble et 9 à Paris. Les thèses ont été analysées à partir des indicateurs suivants :

- Utilisation du modèle praxéologique pour décrire le rapport institutionnel ou non.
- Utilisation d'outils autres que le modèle praxéologique pour décrire le rapport institutionnel.
- Utilisation de la notion de conception pour décrire le rapport personnel.
- Utilisation de la notion de technique (en référence à la TAD ou non) pour décrire le rapport personnel.
- Utilisation du modèle praxéologique pour décrire le rapport personnel.
- Utilisation d'autres outils pour décrire le rapport personnel
- Prise en compte de l'erreur de l'apprenant ; si l'étude la prend en compte, description de comment elle le fait.

Résultats

Trois périodes ont ainsi été repérées : celle où les rapports institutionnels $RI(p, O)$ et personnels $RP(X, O)|I$ ne sont pas encore décrits par le modèle praxéologique, celle où le rapport institutionnel $RI(p, O)$ est modélisé par la praxéologie et, enfin, celle, actuelle, où émerge l'utilisation de composantes du modèle praxéologique pour décrire à la fois les rapports institutionnels et le rapport personnel $RP(X, O)|I$. (CROSET ; CHAACHOUA, 2016)

Période 1 (Avant 1999)

La prise en compte de la connaissance d'un élève dans la TAD a été faite dès les débuts de son développement à l'aide de la notion de rapport au savoir. Les travaux sélectionnés pour l'analyse de cette période sont ceux d'Assude (1992), Grugeon (1995), Bronner (1997) et Chaachoua (1997). Ces auteurs se sont intéressés à l'étude de rapports

institutionnels, de rapports personnels des élèves ou des enseignants ainsi qu'à leur conformité au rapport institutionnel.

Dans sa thèse, Assude (1992) étudie l'écart entre ce que l'élève est censé apprendre et ce qu'il a effectivement appris. Dans les termes de la TAD, il s'agit d'évaluer l'écart du rapport personnel au rapport institutionnel pour l'élève relativement à l'objet étudié. Pour l'auteur les notions de conception ou de représentation ne recouvrent que partiellement le rapport personnel d'un sujet.

Le terme de conception (ou de représentation) renvoie en effet à une réalité supposée qui tout à la fois, excède le rapport personnel et s'inscrit en lui sans l'épuiser. Car l'étude des conceptions, en vérité, ne s'intéresse qu'à une partie du rapport personnel des sujets. (ASSUDE, 1992, p. 4)

Cette première période est marquée par une utilisation de la TAD qui questionne l'assujettissement des sujets à une ou plusieurs institutions.

À un niveau « macro », ce questionnement permet de mettre en évidence des contraintes qu'exerce le rapport institutionnel sur le rapport personnel. Il révèle, par exemple, les continuités et discontinuités éventuelles entre les institutions de rattachement du sujet. Cet assujettissement permet aussi d'expliquer des contradictions dans les productions des sujets. À un niveau plus local d'ingénierie didactique entre autres, un outillage didactique et épistémologique provenant des autres théories est exploité, que ce soit pour décrire les connaissances de l'apprenant, les spécificités du domaine d'étude mais aussi pour l'analyse institutionnelle même. (CROSET ; CHAACHOUA, 2016, p. 171)

L'erreur était intégrée dans le cadre théorique de la théorie des situations didactiques (TSD) et de la théorie des champs conceptuels (TCC) et donc non prise en compte dans la TAD.

Période 2 (1999 – 2006)

La deuxième période se situe après l'introduction de la praxéologie comme modèle pour décrire le rapport institutionnel, rapport qui contraint le rapport personnel d'un sujet à un objet de savoir. L'apprenant est alors étudié pour mieux comprendre les institutions auxquelles il est assujetti et faire évoluer ou tester de nouvelles praxéologies scolaires. Pour le rapport personnel il est également décrit par la praxéologie quand il est conforme au rapport institutionnel. Dans le cas où il n'y a pas conformité, les travaux continuent d'utiliser d'autres cadres ou d'autres concepts extérieurs à la TAD. Par exemple, suite à l'encadrement de la thèse de Bergé (2004), M. Artigue (2011) précise :

[...] au-delà des notions d'institution et de rapport institutionnel et personnel déjà exploitées dans les autres recherches, l'outillage de la TAD est présent cette fois à travers l'usage systématique de la notion de praxéologie mathématique (CHEVALLARD, 1999, 2002). Mais encore une fois, cela se combine avec une approche sensible à un sujet apprenant qui n'est pas simplement perçu comme un révélateur des fonctionnements et dysfonctionnements des systèmes didactiques auquel il est assujetti mais étudié pour lui-même. (ARTIGUE, 2011, p. 35)

Période 3 (Depuis 2006)

La troisième période est caractérisée par l'utilisation du modèle praxéologique pour la description du rapport personnel, y compris, parfois, quand celui-ci n'est pas conforme au rapport institutionnel. L'apprentissage est alors revendiqué par les utilisateurs de la TAD et l'apprenant est étudié pour lui-même, avec, en particulier ses connaissances erronées. Nous l'illustrons à travers 3 exemples cités par Croset et Chaachoua (2016).

Dans sa thèse Pilet (2012) caractérise les OM apprises des élèves afin de mettre en place des parcours différenciés. La caractérisation de ces OM apprises permet d'identifier les technologies dominantes mobilisées qui apportent des explications sur les techniques utilisées par les élèves qu'elles soient attendues, erronées ou inadaptées.

Un autre exemple est celui de la thèse de Dhieb (2009) où il utilise le modèle praxéologique pour décrire le rapport personnel. Il s'agit d'élargir l'utilisation de ce modèle au sujet en parlant d' « organisation personnelle » :

Cette modélisation constitue un élargissement du champ d'application du modèle des organisations qui est plutôt utilisé pour les savoirs : on parle habituellement d'organisations mathématiques et d'organisations didactiques. Nous voulons ainsi rendre fonctionnel le modèle des organisations au niveau des connaissances. (DHIEB, 2009, p. 45)

Dans sa thèse Nguyen (2006) a rattaché l'analyse de l'erreur à des praxéologies en mettant en évidence les phénomènes suivants :

- L'utilisation d'une technique scientifiquement valide peut conduire à des erreurs.
- Certaines erreurs peuvent être dues à une non-maîtrise de techniques indispensables à la résolution de certaines tâches rencontrées lors de la mise en œuvre d'une technique valide.
- Les erreurs peuvent aussi provenir de l'utilisation de techniques valides sur un champ plus restreint, étendues « abusivement », ou de la mise en œuvre d'une technique scientifiquement valide, mais non adéquate institutionnellement.

Cette catégorisation a été faite pour hiérarchiser les erreurs en relation avec la non-maîtrise de la technique. Ainsi, la première catégorie regroupe les erreurs considérées comme moins importantes pour la maîtrise de la technique. Par exemple les erreurs de calculs numériques qui interviennent dans une technique de résolution des équations du second degré relèvent de la première catégorie et sont considérées moins importantes que les erreurs relatives à la factorisation qui est une étape importante de la technique de résolution des équations du second degré.

Dans l'étude de Nguyen (2006) l'erreur est considérée comme un dysfonctionnement d'une technique institutionnelle. A la suite de cette thèse, Croset & Chaachoua (2010) ont cherché à interpréter l'erreur comme élément constituant d'une technique personnelle de l'élève Celle-ci peut être valide ou non mathématiquement, conforme ou non aux attentes institutionnelles. Ce point de vue a été développé dans le travail de thèse de Croset (2009) puis dans la note de synthèse de l'HDR de Chaachoua (2010) en introduisant la notion de praxéologie personnelle que nous présentons dans le paragraphe suivant. Nous voyons l'émergence d'une troisième période propice à la prise en compte du sujet cognitif et en particulier de l'erreur comme un objet d'étude en tant que tel dans la TAD.

Définition du modèle de praxéologie personnelle

Nous reprenons la définition telle qu'elle a été décrite dans Croset et Chaachoua (2016) :

Nous appelons praxéologie personnelle le quadruplet d'organisation praxéologique de l'activité d'un sujet institutionnel constitué de quatre composantes.

– Un type de tâches personnel est l'ensemble des tâches que le sujet perçoit comme similaires, provoquant chez lui l'application d'une technique. Si deux types de tâches personnels sont distincts, alors nécessairement leurs techniques personnelles respectives sont distinctes. Le découpage en types de tâches personnel ne correspond donc pas nécessairement à celui de l'institution.

– Une technique personnelle utilisée par l'élève permet de résoudre un seul type de tâches personnel. Elle peut être erronée, correcte, légitimée par l'institution de référence ou non. Elle doit présenter une certaine stabilité dans son utilisation pour être considérée comme technique de résolution : elle n'acquiert sa légitimité pour un élève donné que si elle est régulièrement utilisée par cet élève. Nous évitons ainsi de considérer comme une technique personnelle, des erreurs d'étourderie ou de dérapage ponctuel.

– Une technologie personnelle, explicite ou non, gouverne et légitime l'utilisation de praxis personnelles. Souvent un simple déficit technologique institutionnel peut être à même d'expliquer des techniques personnelles erronées. Mais il est parfois des situations où une technologie qui avait sa légitimité pour répondre à certains types de tâches se trouve être généralisée et la technique qu'elle légitimait utilisée en dehors de sa portée. (CROSET ; CHAACHOUA, 2016, p. 180)

Nous voyons que le modèle de praxéologie personnelle prolonge l'utilisation du quadruplet praxéologique en prenant en charge cette fois-ci la description des erreurs tant au niveau des techniques que des technologies de l'apprenant.

CONCLUSION

Dans ce cours, nous avons présenté la théorie anthropologique de la didactique et illustré son évolution pour faire face à des besoins comme le font les constructions théoriques. Nous n'avons pas pu aborder d'autres évolutions et avancés de la TAD comme les notions de Parcours d'Etude et de Recherche (PER) ou Activités d'Etude et de Recherche (AER) (CHEVALLARD, 2007), les modèles épistémologiques de références dominant, les ostensifs / non-ostensifs (CHEVALLARD, 1994 ; BOSCH ; CHEVALLARD, 1999).

La notion de « sensibilité clés » nous semble pertinente pour comprendre le développement et l'évolution d'un cadre théorique de façon interne et dans ses articulations avec d'autres cadres théoriques.

Pour conclure nous rejoignons Artigue (2011, p. 48) : « c'est un travail qu'il faut mener avec une grande ouverture d'esprit, en restant attentif à la difficulté qu'il y a à partager des connaissances théoriques qui sont encore très contextualisées même lorsqu'elles sont présentées comme des savoirs ».

REFERENCES

- ARTIGUE, M. La théorie anthropologique du didactique : rapports et articulations possibles avec d'autres approches. In A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs comme outils de connaissance et d'action. Actes du Second Congrès de la Théorie Anthropologique du Didactique*, Uzès, octobre 2007, IUFM de Montpellier, 2011.
- ASSUDE, T. *Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique, écologie de l'objet « racine carré » et analyse du curriculum*. Thèse de doctorat, Grenoble, France, 1992.
- BALACHEFF, N. Conception, connaissance et concept. In Grenier D., Séminaire *Didactique et Technologies cognitives en mathématiques*, Grenoble : IMAG, p. pages 219-244, 1995.
- BERGE A. *Un estudio de la evolución del pensamiento matemático : el ejemplo de la conceptualización del conjunto de los números reales y de la noción de completitud en la enseñanza universitaria*. Thèse de doctorat en cotutelle Argentine- France, Université de Buenos Aires et Université de Paris, Argentine-France, 2004.
- BOSCH, M. L'écologie des parcours d'étude et de recherche au secondaire. In G. Gueudet, G. Aldon, J. Douaire, J. Traglova (Eds.). *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques : quels effets des ressources ? Actes des Journées mathématiques de l'INRP*. Lyon, Francia : Éditions de l'INRP, 2010.
- BOSCH, M. ; GASCON, J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *Balises pour la didactique des mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 1-15, 2004.
- BOSH, M. ; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensé Sauvage-Éditions, v. 19, n. 1, p. 77 – 124, 1999.
- BRONNER A. *Etude didactique des nombres réels : i-décimalité et racines carrées*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1997.
- CHAACHOUA H. *Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace*. Étude d'un cas : la vie des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1997.
- CHAACHOUA, H. FERRATON, G., DESMOULINS, C. Utilisation du modèle praxéologique de référence dans un EIAH. In *Actes du 4e congrès pour la Théorie Anthropologique du Didactique*. Toulouse, 2013.
- CHAACHOUA, H. La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Etude de cas : la modélisation des connaissances des élèves. HDR. Grenoble : Université Joseph Fourier, 2010.
- CHAACHOUA, H. ; BITTAR, M. ; NICAUD, J. Student's modelling with a lattice of conceptions in the domain of linear equations and inequations. In *Actes PME30*. Prague, 2006.
- CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 12/1, p. 73-112. éd. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.
- CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221–266. 1999.
- CHEVALLARD, Y. Le concept de rapport au savoir, Rapport personnel, rapport institutionnel, *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique 108 Grenoble*,

1989.

CHEVALLARD, Y. Organisations didactiques : Les cadres généraux. *Notice du Dictionnaire de Didactique des Mathématiques 1997-1998 pour la formation des élèves professeurs de mathématiques*, 1998.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. Cours 3 - Structures & Fonctions. Actes de la XI^{ème} Ecole d'été de didactique des mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage, 2002.

CHEVALLARD, Y. Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. *Actes du Séminaire Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis*, p. 190- 200, 1994.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la TAD. In Ruiz-Higuera L., Estepa A., Javier García F. (Eds). *Sociedad, escuela y matemáticas*. aportaciones de la teoría antropológica de la didáctica. Jaén : Publicaciones de la Universidad de Jaén, p. 705-746, 2007.

CROSET, M. C ; CHAACHOUA, H. Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 36-2. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2016.

CROSET, M. *Modélisation des connaissances des élèves au sein d'un logiciel éducatif d'algèbre*. Etude des erreurs stables inter-élèves et intra-élève en termes de praxis-en-acte. Grenoble : Thèse d'université. Université Joseph Fourier. Grenoble, 2009.

CROSET, M. ; CHAACHOUA, H. Modélisation des connaissances des élèves en termes de Praxis-en-Acte. *Actes du 3^e congrès pour la Théorie Anthropologique du didactique*. Sant Hilari Sacalm, Espagne, 2010.

DHIEB, M. *Contribution à l'introduction des probabilités au collège : rapports d'élèves à quelques notions probabilistes*, Thèse de doctorat en cotutelle France – Tunisie, Université Paris Descartes et Université de Tunis, France – Tunisie, 2009. <https://halshs.archives-ouvertes.fr/tel-00507751/document>.

GRUGEON, B. *Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire*. Etude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. Thèse de Doctorat, Université Paris VII, Paris, France, 1995. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01252058>.

NGUYEN, Q. *Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Viet-Nam et en France*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2006.

PILET, J. *Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation*. Thèse de doctorat, Paris, France, 2012. <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784039>.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, n. 2/3, p. 133-169, 1991.