DIÁLOGOS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA COM OUTRAS TENDÊNCIAS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Saddo Ag Almouloud[1]

INTRODUÇÃO

Os fatores que interferem no ensino e na aprendizagem da matemática têm despertado o interesse de vários pesquisadores da área de Educação Matemática. As pesquisas desenvolvidas seguiram diferentes direções. Escolhemos discutir neste texto e de acordo com a temática da conferência 6 de LADIMA, algumas das noções e concepções de Didática da Matemática (DDM) desenvolvidas na escola francesa, e algumas articulações com constructos de outras tendências da Educação Matemática ou áreas afins.

Neste texto falaremos de forma sucinta das principais teorias e/ou constructos teóricos desenvolvidos no contexto da Didática da Matemática (DDM) de pensadores como: Guy Brousseau, Yves Chevallard, Régine Douady, Raymond Duval, entre outros:

- A Teoria das Situações Didáticas (Guy Brousseau)
- A Teoria Antropológica do Didático (Yves Chevallard)
- A Dialética Ferramenta-Objeto e jogos de quadros (Régine Douady)
- A noção de Contrato Didático (Guy Brousseau)
- A noção de registro de representação semiótica (Raymond Duval)
- A Teoria dos Campos Conceituais (Gérard Vergnaud)
- Gênese instrumental e Gênese documental
- Paradigmas e Espaço de Trabalho Geométrico

No que diz respeito aos aspectos metodológicos, focamos

- A metodologia de Engenharia Didática (Michele Artigue)
- A Engenharia de segunda geração (Marie-Jeanne Perrin-glorian)
- Engenharia do Percurso de Estudo e de Pesquisa – PEP (Yves Chevallard)
- Engenharia de formação (Marc Bailleul)

Apresentamos, como exemplo, alguns aspectos das pesquisas desenvolvidas em nosso grupo de pesquisa “Processos do Ensino e da Aprendizagem em Matemática - PEAMAT”.

TEORIAS E CONSTRUCTOS TEÓRICOS DA DDM

Fundamentos norteadores da Educação Matemática: Abordagem construtivista da aprendizagem

A abordagem construtivista privilegia um domínio específico de conhecimento: os saberes matemáticos e científicos. Do ponto de vista do ensino e da aprendizagem, três características diferenciam esses saberes dos de outros tipos:

a) a aquisição desses saberes foi historicamente longa, alternando fases de desenvolvimento progressivo e de devolução;

[1] PUC/SP-Brasil. Email: saddoag@gmail.com

b) eles constituem um conjunto de conhecimentos complexos, ramificados e em constante evolução;
c) esses saberes contribuíram, de modo fundamental, para o desenvolvimento de nossa civilização técnica e da mídia

As duas primeiras características mostram que a aquisição de saberes matemáticos e científicos não é espontânea, tendo em vista a complexidade, a constante evolução e a sedimentação dos conhecimentos envolvidos.

A abordagem construtivista, para a aquisição de conhecimentos, foi desenvolvida com o objetivo de estudar os processos de ensino e da aprendizagem de conceitos e noções matemáticas. Essa abordagem foi pensada a partir do modelo piagetiano de desenvolvimento da inteligência em relação à representação do mundo, explorando a ideia de que esse desenvolvimento se faz por *adaptação a situações novas para o sujeito*, ou seja, situações para as quais os conhecimentos e as competências disponíveis não se mostram suficientes.

O construtivismo piagetiano, baseado na noção de “equilibração”, corresponde a uma tentativa de descrever, de modo sistemático e detalhado, os mecanismos do desenvolvimento por adaptação. A “equilibração” é o processo pelo qual um esquema existente é transformado para adequá-lo a um novo objeto mais complexo.

No processo de equilibração, a construção de novos esquemas (e de um novo conhecimento) se faz pela desestabilização dos antigos e posterior reconstrução. A construção dos conhecimentos, como fenômeno de desenvolvimento, é uma reorganização de estruturas de nível inferior em superior.

Para Vigotsky, a relação ao outro é o motor do desenvolvimento cognitivo, ou seja, a aprendizagem em colaboração e de conflito sócio cognitivo. Ele foca a mediação de instrumentos de pensamento pela qual o homem transforma as relações sociais e ele mesmo se transforma. Para este autor,

> Um processo interpessoal transforma-se num processo intrapessoal. Cada função aparece duas vezes no desenvolvimento cultural da criança: primeiro a nível social, e em seguida, a nível individual: primeiro entre indivíduos (inter-psicológico) e, depois na criança (intrapsicológico). Todas as funções superiores começam como relações efetivas entre indivíduos humanos. (VIGOTSKY, 1998, p. 75)

Ele afirma que as funções mentais superiores são mediatizadas pela utilização da linguagem e que o desenvolvimento do espírito é governado:

- Pelo desenvolvimento do corpo humano;
- Pela apropriação da herança cultural, material atual;
- Pela interação entre indivíduos, e do indivíduo com o mundo físico.

A Teoria sócio histórica do desenvolvimento cognitivo postula que as interações sociais e culturais são centrais no processo de aprendizagem. Os indivíduos criam instrumentos psicológicos para aprender e controlar o seu comportamento.

Como contribuição essencial para os fundamentos da psicologia da educação, elencamos o contributo de Piaget e Vygotsky ao construtivismo, de forma sintética no quadro 1:

Quadro 1 – Comparação - Vygotsky e Piaget

Vygotsky	Piaget
• A aquisição dos conhecimentos é **apropriação** • É a significação social dos conhecimentos que prima • Papel da linguagem **primordial** • A aprendizagem **determina** o desenvolvimento • Metáfora do alpinismo	• A aquisição dos conhecimentos é uma **construção** • A significação dos conhecimentos que prima • O papel da linguagem **secundário** • O desenvolvimento **precede** a aprendizagem • Metáfora da maré alta
Pedagogia da mediação	**Pedagogia da descoberta**

Fonte: Construção nossa.

A partir dessas duas tendências, várias construções teóricas foram propostas. A diversidade de teorias e as especificidades de cada uma delas vêm confirmar a ideia de que uma única teoria, ou um único modelo, dificilmente dá conta de explicar e explicitar todos os fenômenos envolvidos nos processos do ensino e da aprendizagem de matemática. O pesquisador deve procurar conhecer bem as ideias principais das diversas teorias, de modo a poder identificar quais delas ele poderá usar para referenciar teoricamente sua pesquisa.

O livro ”Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers, Org. Bharath Sriraman e Lyn English, 2010, collection ADVANCES IN MATHEMATICS EDUCATION” traz à tona a discussão em torno das teorias da educação matemática. Na Figura 1, apresentamos, de forma sucinta, os objetivos dessa obra:

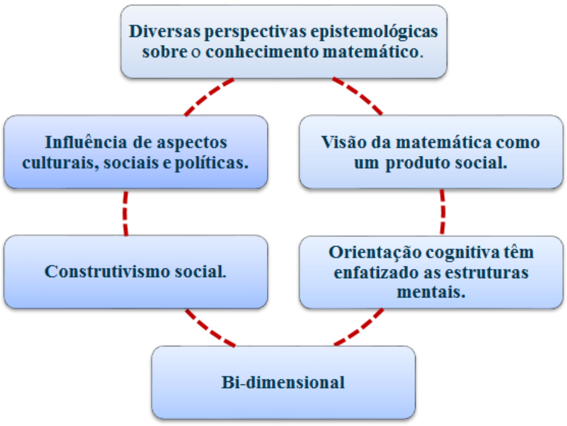
Figura 1 – PME 29 – Teoria da Educação Matemática

Fonte: Construção nossa.

Sriraman e English (2010) trazem algumas questões para reflexão acerca da Educação Matemática, sendo elas: A teoria em Educação Matemática existe? Quais são as mudanças na teoria, nas últimas décadas e o impacto sobre a Educação Matemática? Quais são as escolas europeias de pensamento sobre o desenvolvimento da teoria, especialmente da escola francesa? Quais são os rumos e possibilidades? Desenvolvemos as nossas teorias ou pedimos emprestado ou até mesmo adaptamos de outras disciplinas? Se precisarmos de uma teoria para tudo, como vamos lidar com múltiplas teorias, muitas vezes conflitantes? Por que diferentes nações ignoram uma ou outra teoria?

A análise de Lerman (2010) revela que uma grande variedade de teorias é utilizada por pesquisadores com uma preferência distinta para as teorias sociais sobre teorias cognitivas. A Figura 2 evidencia que há várias explicações plausíveis para a presença de múltiplas teorias de aprendizagem matemática.

Figura 1 – Explicação plausível - múltiplas teorias



Fonte: Construção própria.

No próximo tópico, apresentamos alguns constructos teóricos da Didática da Matemática mais usados em algumas investigações de pesquisadores brasileiros desse campo de estudo.

DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

A Didática da Matemática, que se desenvolveu na França a partir dos anos de 1970 no contexto marcado pela reforma da Matemática Moderna, pela criação dos IREM (Instituto de Pesquisa sobre Ensino da Matemática), e pelo sucesso das teorias psicológicas de Piaget sobre o desenvolvimento da inteligência e a aquisição de conceitos fundamentais, insistiu, em primeiro lugar, sobre os problemas de ensino de conceitos matemáticos em razão das exigências próprias ao saber matemático. Nesse sentido, recorreu-se à análise epistemológica e histórica. A intervenção de professores foi analisada em relação ao que eles deveriam introduzir e à maneira de introduzi-lo para a aquisição do conceito. No entanto, percebeu-se que não se deve se limitar ao estudo da classe, é preciso levar em consideração a organização do sistema educativo (programas, currículo, material pedagógico – livros didáticos... -, horários...).

Os avanços das pesquisas em Didática da Matemática materializaram o pensamento da constituição de uma área cientifica que investiga os processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. Partindo desse princípio, a Didática da Matemática é definida como sendo a ciência da educação cujo propósito é o estudo de fenômenos de ensino e de aprendizagem, mais especificamente, é o estudo de situações que visam à aquisição de conhecimentos/saberes matemáticos pelos alunos ou adultos em formação, tanto do ponto de vista das características dessas situações, quanto do tipo de aprendizagem que elas possibilitam. É importante observar nessa definição a distinção entre ensinar e aprender. Essa distinção permite refletir sobre a diferença entre os objetos de um ensino, as intenções do professor e a realidade dos conhecimentos adquiridos pelos alunos.

A Didática, como ciência, não é caracterizada somente pelo fato de propor um projeto de estudo científico de problemas de ensino da matemática. No início, os estudos didáticos consistiram em considerar como primeiro objeto a estudar - a questionar, a modelar e a problematizar segundo as regras da atividade cientifica - essencialmente o saber matemático, bem como a atividade matemática, não se preocupando com o aprendiz, nem com o professor. Para explicar os fatos do ensino, a didática postulava que o "mistério" está na matemática e não nos sujeitos que devem aprender ou ensinar a matemática.

A abordagem clássica estuda os problemas de transmissão e de aquisição de noções matemáticas. A problematização parecia se situar essencialmente nos aprendizes ou nos professores, no que diz respeito às suas capacidades cognitivas, suas concepções e preconcepções. A matemática e os aspectos cognitivos foram estudados de uma maneira estanque sem uma análise profunda de suas possíveis relações.

Nesse paradigma que dominava os estudos didáticos, pode-se considerar que o projeto inaugurado pela Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1986) criou uma *primeira ruptura* pondo a *matemática como a essência dos fenômenos didáticos*. O desejo de elaborar uma ciência cujo objetivo é estudar os fenômenos de ensino e de aprendizagem da matemática constitui a *segunda ruptura*, ruptura que levou os pesquisadores a explicitar modelos teóricos e a submeter esses modelos à lei de uma verdadeira "epistemologia experimental".

Vale ainda destacar que, em relação à visão clássica sobre o saber matemático, a teoria das situações traz ainda uma nova ruptura epistemológica fundamental. Ela supõe, de fato, que os *conhecimentos matemáticos só podem ser compreendidos pelo intermédio de atividades que eles permitem realizar, ou seja, resolver.* A matemática é, antes de tudo, uma *atividade que se realiza em situação e contra um meio*. Além disso, trata-se de uma atividade *estruturada*, na qual se pode destacar diferentes fases: ação, formulação e validação, bem como a devolução e a institucionalização.

Nessa visão, a prioridade é dada à organização própria das noções científicas a adquirir. O trabalho de aprendizagem não vai mais ser analisado só em nível do sujeito, mas também ao nível de um grupo de sujeitos e de interações entre sujeitos de um grupo.

A noção prévia para bem compreender a Teoria da Situações Didática é a de "situação" ou exatamente de "conjunto de situações" que o professor deve organizar para permitir uma aprendizagem. Nesse sentido, Brousseau (1986) afirma que um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não) determinado por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis e provocando modificações de um conjunto de comportamentos dos alunos, modificação característica da aquisição de um conjunto de determinados conhecimentos. Cada uma dessas situações, bem como, o processo inteiro, coloca, então, em presença: 1) um saber; 2) sujeitos; 3) meios (*des milieux*) didáticos. A descrição do conjunto de situações pode ser substituída por modelos de alunos, de professor, de concepção da maneira de ensinar e por leis de evolução desses modelos..." (BROUSSEAU, 1986 *apud* PERRIN-GLORIAN, 1994, p. 102-103).

Essa noção de "conjunto de situações" permite aplicar a ideia piagetiana de desenvolvimento por "equilibração", e de aprendizagem, por adaptação do sujeito ao meio, mas, aqui, o meio (*milieu*) é tomado no sentido psicossocial: trata-se do meio institucional e relacional, da classe na qual a relação com o professor vai ser privilegiada, num primeiro momento (PERRIN-GLORIAN, 1994, p. 107).

A Teoria da Situações Didáticas dá ênfase à dimensão social e à dimensão histórica na aquisição dos conhecimentos. Os processos de aquisição dos conhecimentos não são mais encarados em nível dos sujeitos, mas em nível da classe: a aquisição deve resultar de um processo de adaptação dos sujeitos às situações que o professor organizou e nas quais as interações com os outros alunos vão ter um papel importante. Vários constructos teóricos foram desenvolvidos no contexto da TSD. Na Figura 3, apresentamos de forma não exaustiva, alguns dos constructos que fundamentam essa teoria.

Figura 2 – Alguns constructos da TSD

Fonte: Construção nossa.

Uma outra contribuição importante é a Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Yves Chevallard (1999). Essa teoria é uma contribuição importante para a Didática da Matemática, pois além de ser uma evolução do conceito de transposição didática, inserindo a didática no campo da antropologia, focaliza o estudo das **organizações praxeológicas didáticas** pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas.

A Didática da Matemática vista no campo da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva) considera o seguinte: *tudo é objeto*, fazendo a distinção dos tipos de objetos particulares: *as instituições, os indivíduos e as posições* que os indivíduos ocupam nas instituições. Ocupando essas posições, os indivíduos tornam-se os *sujeitos* das instituições. Os objetos possuem *inter-relações* hierárquicas que permitem entrever "*estruturas ecológicas entre os objetos*".

Como na TSD, na TAD, vários constructos teóricos também foram desenvolvidos no contexto dessa teoria. Na Figura 4, apresentamos de forma não exaustiva, alguns dos constructos desenvolvidos no contexto dessa teoria.

Figura 3 – Alguns constructos teóricos da TAD

Fonte: Construção nossa.

Um dos objetivos nesses últimos anos é investigar a formação de professores, mais especificamente, de professores *de* Matemática, bem como as questões metodológicas. Nesse sentido, são temas de investigação: Formação de professores, mais especificamente de professores de matemática: demandas institucionais e das Universidades; Processos de ensino e de aprendizagem de Alunos com Necessidades Educacionais Especiais e formação de professores envolvidos nesses processos; Engenharia didática de formação voltada para a formação de professores; Engenharia Didática de Segunda Geração, Engenharia Didática dos Domínios de Experiência, Engenharia dos Percursos de Estudo e Pesquisa (PER) etc.

TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS (VERGNAUD)

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida por Vergnaud (1990) e se apoia nos seguintes constructos: campo conceitual, esquema, situação, conceito, teorema em ato, conceito em ato.

Um campo conceitual é o "espaço de problemas ou situações-problema cujo tratamento envolve os conceitos e processos de vários tipos em estreita conexão" (VERGNAUD, 1990, p.134).

Os conceitos matemáticos traçam seus sentidos a partir de uma variedade de situações, mas cada situação geralmente não pode ser analisada com a ajuda de um único conceito. É a razão pela qual Vergnaud acha que devemos analisar o ensino-aprendizagem dos campos conceituais.

Figura 4 – Alguns constructos teóricos da TCC

Fonte: Construção nossa.

Na teoria dos campos conceituais, o comportamento cognitivo dos sujeitos em situação de aprendizagem é modelado por Vergnaud em termos de "*esquemas*". O esquema é "a organização invariante do tratamento de dado tipo de situações. É nos esquemas que devemos procurar os conhecimentos-em-ação do sujeito, ou seja, os elementos cognitivos que permitem a ação do aprendiz ser operatória" (VERGNAUD, 1990, p. 134, tradução nossa).

Quando os esquemas coordenam várias ações, eles se fixam sobre as propriedades comuns dessas ações de modo a ressaltar o que Vergnaud chama *invariantes operatórios*. O autor identifica três tipos de invariantes lógicos.

a) *Os invariantes de tipo "proposições"*: eles são susceptíveis de serem verdadeiros ou falsos, os *teoremas-em*-ação são invariantes desse tipo. O conceito de "*teorema-*

em-ação" designa as propriedades tomadas e utilizadas pelo aprendiz em situação de solução de problema sem que ele seja capaz de as explicar ou as justificar.

b) *Os invariantes de tipo "função proposicional"*: eles não são necessariamente verdadeiros ou falsos, mas são indispensáveis para a construção das proposições.

c) *Os invariantes de tipo "argumentos":* Na Matemática, os argumentos podem ser objetos materiais, personagens, números (3 + 4), relações ("maior que" é uma relação antissimétrica), e proposições (o enunciado "8 é um divisor de 24" é a recíproca de "24 é um múltiplo de 8").

DIALÉTICA FERRAMENTA-OBJETO – QUADROS (DOUADY, 1986)

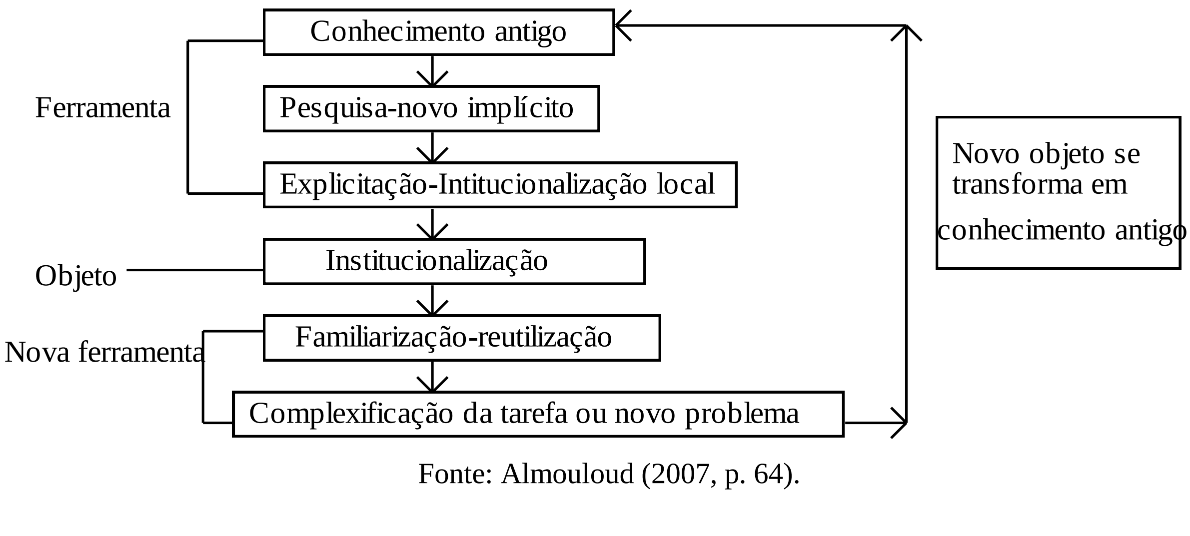
As noções de dialética ferramenta-objeto e de jogo de quadros foram introduzidas em Didática por Régine Douady como instrumentos poderosos de análise dos fenômenos de ensino-aprendizagem da Matemática. O que é "dialética ferramenta-objeto"? O que é quadro? O que é jogo de quadros?

Segundo Régine Douady (1986), uma noção tem o estatuto de ***ferramenta*** quando ela intervém na resolução de problema. Ela tem o estatuto de ***objeto*** quando, estando identificada, ela é o objeto da aprendizagem. Régine Douady distingue, assim, para um conceito matemático, o polo *ferramenta* e o polo *objeto*:

> Assim, digamos que um conceito é ferramenta quando focalizamos nosso interesse no uso que está sendo feito dele para resolver um problema. Uma mesma ferramenta pode ser adaptada para diferentes problemas. Por objeto, entendemos o objeto cultural colocado num edifício mais amplo que é o do saber sábio num dado momento reconhecido socialmente. (DOUADY, 1986, p. 9, apud ALMOULOUD, 2007, p. 62)

Podemos esquematizar o processo da dialética ferramenta-objeto da seguinte forma:

Figura 5 – Dialética ferramenta-objeto



Fonte: Almouloud (2007, p. 64).

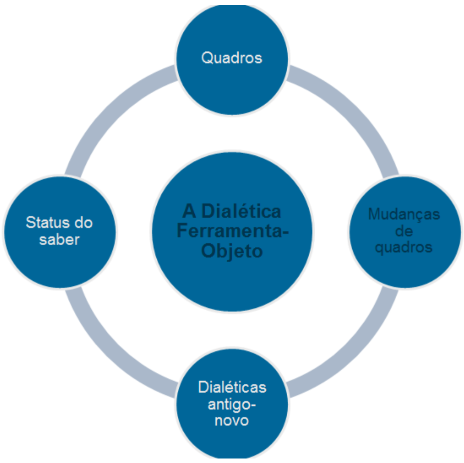
A noção de jogo de quadros foi introduzida por Régine Douady para tornar explícito que uma das características importantes da matemática é a capacidade de mudar de ponto de vista, de traduzir um problema de um quadro para outro, com a finalidade específica de acessar outras ferramentas de resolução, que aquelas inicialmente encaminhadas. A autora caracteriza um *quadro* do seguinte modo:

> Um quadro é constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e serem diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida. (DOUADY, 1986. p.389 apud ALMOULOUD, 1997, p. 64)

A autora admite que as imagens mentais têm um papel importante no funcionamento, como ferramenta, dos objetos do quadro. Acrescenta que dois quadros podem comportar os mesmos objetos e serem diferentes pelas imagens mentais e pela problemática desenvolvida.

Uma *mudança de* quadro é um meio de obter formulações diferentes de um problema que, sem serem necessariamente equivalentes, permitem ter uma nova visão das dificuldades encontradas e disponibilizar a ferramenta e as técnicas que não transparecem na primeira formulação (DOUADY, 1986). E os *jogos de quadros* são, segundo a autora, mudanças de quadros provocadas pela iniciativa do docente, quando da ocasião de problemas convenientemente escolhidos, para fazer avançar as fases de pesquisa e evoluir as concepções dos alunos.

Figura 6: Alguns constructos da dialética ferramenta-objeto - quadro



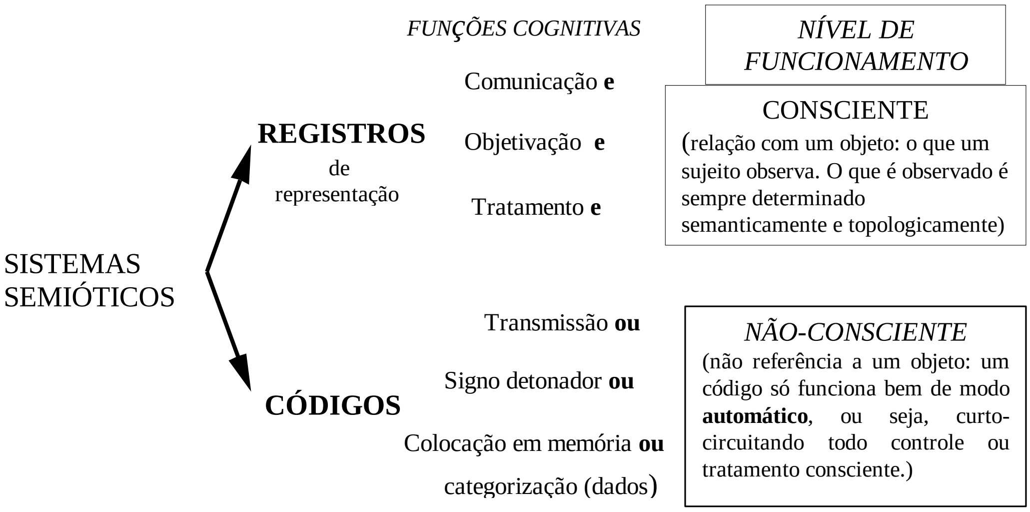
Fonte: Construção nossa.

TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA – TRRS

Um *registro* de representação é, segundo Duval (1999), um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais em nível do funcionamento cognitivo consciente.

Nesse sentido, os registros são diferentes dos códigos que são funcionalmente mais limitados que os registros. A diferença entre registros e códigos mostra a existência de dois níveis de funcionamento cognitivo; o nível consciente e o nível não-consciente, observando que todo conhecimento implica necessariamente a mobilização desses dois níveis.

Figura 7 – Sistema semiótico



Fonte: Duval (1999, p. 21 apud ALMOULOUD, 2007, p. 73).

Todos os códigos têm em comum a seguinte característica: eles não permitem determinar ou representar diretamente um conteúdo de conhecimento. O que é *codificado* deve ser *decodificado* para poder ser compreendido.

A noção de registro nos leva a salientar a importância de uma mudança de registro, mas, sobretudo a levar em consideração a necessidade de uma coordenação dos registros.

Uma mudança de registro tem vantagens do ponto de vista do tratamento. Ela facilita a compreensão ou a descoberta.

Quais tratamentos ou quais operações *são possíveis ou são privilegiadas por um registro?*

Os tratamentos dependem do registro de representação, *que esses tratamentos tenham tido ou não sua própria* validade *do ponto de vista matemático.*

Na figura 9, apresentamos alguns constructos desenvolvidos no contexto da TRRS.

Figura 8: Alguns constructos da TRRS

Fonte: Construção nossa.

Nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, Duval (1995) afirma que ela envolve três formas de processo cognitivo que preenchem especificas funções epistemológicas. Discutiremos aspectos na temática de pesquisa “Geometria”.

GÊNESE INSTRUMENTAL

Esta teoria foi desenvolvida por Rabardel (1995) e aprofundada por Trouche (2005). Podemos encontrar aplicações, próximas da que pretendemos utilizar, no trabalho de Henriques (2006) e Salazar (2009). Para abordá-la iniciamos pela definição de seus entes primitivos: artefato, ferramenta e instrumento. De acordo com Rabardel (1995 apud TROUCHE, 2005, p. 93):

> A palavra artefato designará um objeto técnico nu, independentemente de toda relação com um usuário (um artefato pode ser uma calculadora, uma notação, um compasso ou uma cesta). A palavra ferramenta designará um objeto técnico integrado ou suscetível de ser integrado por um usuário em seus gestos (escolares profissionais ou cotidianos). A palavra instrumento designará uma entidade mista composta do objeto técnico e dos modos de utilização construídos pelo usuário.

Para o autor, os instrumentos têm dupla utilização em atividades educativas. Para os alunos, influenciam a construção do saber e os processos de conceituação e, para os professores, são considerados como variáveis didáticas.

Segundo Salazar (2009, p.63), a abordagem instrumental de Rabardel descreve as relações que existem entre o sujeito, o artefato e os esquemas de utilização. Para a autora:

> **Sujeito**: refere-se ao indivíduo ou grupo de indivíduos que desenvolve a ação e/ou é escolhido.
> **Esquema de utilização**: Rabardel utiliza esse termo, que de acordo com Vergnaud (1996), “um esquema é uma organização invariante de comportamentos para classes de situações”. Além disso, é necessário procurar nos esquemas os elementos cognitivos que permitem que a ação do sujeito seja operatória.
> **Artefato**: um dispositivo que pode ser material – como, por exemplo, um lápis, um computador, entre outros objetos – ou simbólico, como por exemplo, uma figura, um gráfico, dentre outros, que são usados como meio da ação pelo sujeito. (SALAZAR, 2009, p.64)

Para Henriques (2006), a transformação de artefatos em instrumentos aparece então como o resultado de processos complexos que consideram o sujeito com suas competências cognitivas, o artefato e o objeto para o qual a ação é dirigida. Segundo o autor, a integração de tecnologias à atividade matemática conduz então à construção de esquemas de utilização, mais ou menos adaptados ou eficazes que são distribuídos em três categorias:

> Esquemas de uso correspondem às atividades relativas à gestão de características e propriedades particulares do artefato.
> Esquemas de ação instrumentada correspondem às atividades para as quais um artefato é um meio de realização.
> Esquemas de atividades coletivas instrumentadas – correspondem respectivamente aos usos simultâneos ou conjuntos de um instrumento no contexto de atividades partilhadas ou coletivas. (RABARDEL, 1995 apud HENRIQUES, 2006, p. 10).

Assim, para a análise de situações instrumentadas, Rabardel e Verillon (1995 apud HENRIQUES, 2006) desenvolveram um modelo chamado SAI – Situação da Atividade Instrumentada – que modelam as ligações entre o sujeito e o objeto tratado a fim de evidenciar as interações existentes nesse tipo de atividade. Identificam além das interações diretas sujeito-objeto, as interações sujeito-instrumento, instrumento-objeto e sujeito-objeto mediados pelo instrumento.

Para Verillon (1996 apud HENRIQUES, 2006), esse modelo permite analisar os processos que utilizam artefatos, explicando as duas dimensões do processo de gênese instrumental: a instrumentação orientada para a construção de esquemas de utilização, e a instrumentalização que se refere à emergência de propriedades funcionais e estruturais do artefato:

> A instrumentação refere-se à elaboração da relação [S-i] (sujeito-instrumento): o sujeito deve construir os esquemas, os procedimentos, as operações necessárias para utilizar o artefato. Ele pode, por exemplo, importar da situação de relações [S-i] construídas em outros contextos com outros artefatos ou, ao contrário, construir essas novas relações de maneira exploratória, ou ainda, os elaborar por imitação. A instrumentalização refere-se à construção de relações [i-O] (instrumento-objeto). O sujeito atribui ao instrumento uma possibilidade de agir sobre O e constrói as propriedades funcionais que permitem a atualização desta possibilidade de ação. Esta ação pode eventualmente ser diferente daquela prevista na origem por quem concebeu o artefato. (VERILLON 1996 apud HENRIQUES, 2006, p. 5).

Baseando-nos em Henriques (2006), o objeto O é, para nós, um objeto da matemática; o sujeito S é o professor em formação continuada e o instrumento I é advindo de alguma tecnologia: a modelagem para a instrumentação e instrumentalização descreverá a maneira que a presença do instrumento influi na construção de uma relação sujeito-objeto que aparecerá em todas as situações onde a tecnologia estará disponível.

Ainda de acordo com o autor, para cumprir certas tarefas com ajuda de um instrumento é necessário desenvolver algumas competências a respeito das técnicas instrumentadas (técnicas de utilização de novas ferramentas). Nesse sentido, é necessário analisar as limitações e potencialidades das ferramentas.

Em nossas pesquisas, queremos transformar as tecnologias (artefatos) em instrumentos compostos de um artefato (material ou simbólico) produzidos pelo sujeito e por um ou mais esquemas de utilização associados, resultantes de uma construção própria do sujeito autônomo ou de uma apropriação de um sistema de utilização social.

Figura 9 – Alguns constructos da Gênese instrumental

Fonte: Construção nossa.

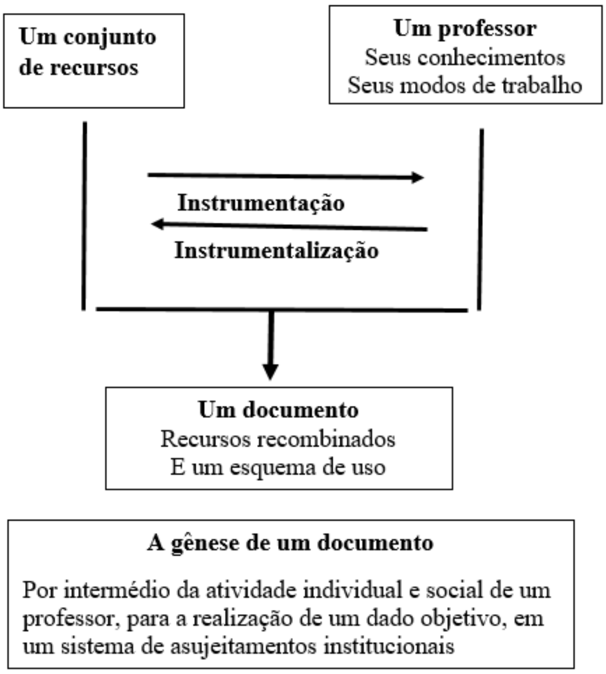
Sobre a gênese documental, Geudet e Trouche (2009, p. 4) fazem a distinção entre ferramenta e objeto, apoiando-se em Crozat (2007), que afirma que: "a noção de recurso é usada no sentido de recurso para construir documentos [...]. O documento é portador de uma intenção específica para um contexto de uso." Os autores ainda afirmam que, de acordo com Pédauque (2006): «Tudo pode tornar-se documento futuro». Nesta perspectiva, os recursos podem ser um material para um Professor, um documento.

Os autores esclarecem esta distinção recursos/documento a partir da abordagem instrumental de Rabardel que define um instrumento como provenientes de uma construção, a partir de um artefato por um usuário. Esta construção, ou gênese instrumental, baseia-se, para um determinado indivíduo, em um processo de apropriação e transformação do artefato, para realizar uma dada tarefa, por intermédio de uma variedade de contextos de uso. A construção de um instrumento é acompanhada do desenvolvimento de um esquema (VERGNAUD, 1996) de uso: um esquema é uma organização invariável de atividade, estruturada por invariantes operatórios que são forjadas a partir de uma variedade de contextos de uso.

Os autores consideram (Figura 11) que

> o professor, em seu trabalho de documentação, tem um conjunto de recursos-artefatos (manuais, software, sites), que permite produzir, para uma determinada tarefa, durante uma gênese documental, um documento-instrumento. Por exemplo, para uma tarefa do tipo "constituir um curso para introduzir uma determinada noção", a atividade é estruturada por um conjunto de regras de ação (busca de recursos em um conjunto mais ou menos estruturado, recombiná-los nesta ou naquela forma, integrá-los de uma maneira ou outra em um conjunto de recursos pessoal já organizado, explorar este novo recurso na classe, alimentá-lo de uma forma ou outra pelos efeitos observados, registrar tal ou tal fenômeno saliente, revisar de tal forma ou outra este recurso após o uso, etc.). (GEUDET & TROUCHE, 2009, p. 4)

Figura 10 – Representação esquemática de um processo de gênese documental



Fonte: Ghislaine Gueudet e Luc Trouche (2009, p. 5).

Um documento é uma entidade mista, com um componente material e um componente psicológico (um esquema de uso desses recursos para realizar uma determinada tarefa). Este primeiro ponto fundamental pode ser escrito de forma esquemática: “Documento = recurso + esquema de uso” (GUEUDET & TROUCHE, 2009, p. 5).

METODOLOGIAS DE PESQUISA NO CAMPO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

O desenvolvimento das diferentes teorias no contexto da Didática da Matemática foi acompanhado de construção de metodologias de pesquisa. Na escola de verão de Didática da Matemática de 2009, realizada em 2009, em Clermond-Ferrand, na França, foram apresentados estudos sobre a evolução e usos da noção de Engenharia didática. A discussão baseia-se, essencialmente, na Engenharia Didática Clássica (amplamente conhecida), denominada de Engenharia didática de 1ª Geração e na Engenharia didática de 2ª geração, de acordo com o ponto de vista de Marie-Jeanne Perrin-Glorian (2009), bem como na noção de engenharia do PEP (Percurso de Estudo e Pesquisa), de Chevallard (2009), e de Domínios de Experiência de Boero (2009). A síntese das pesquisas analisadas mostra os diferentes usos e concepções sobre esta metodologia, ora considerada metodologia de pesquisa científica, ora uma metodologia envolvendo vários processos e procedimentos para a formação profissional e/ou a elaboração de objetos de aprendizagem.

Figura 11 – Tipos de Engenharia

Fonte: Construção nossa.

Devido à temática de nossa intervenção, não dissertaremos sobre as diferentes engenharias. Referiremos a Brousseau (2008 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 81), que afirma que

> a engenharia didática consiste em determinar dispositivos de ensino comunicáveis e reprodutíveis. Ela evoca a existência de uma descrição, um estudo e justificações tão precisas e consistentes que possíveis das condições de utilização deste dispositivo. Existe uma engenharia didática muito ativa, que é fruto de uma avaliação respeitável, mas abstém-se, geralmente, de fornecer análises precisas e justificações que poderiam iluminar os utilizadores. (ALMOULOUD & SILVA, 2012, p. 23)

Ainda segundo Brousseau,

> a engenharia didática propriamente dita acompanha os dispositivos produzidos de um conjunto de estudos e análises que dão as características do produto de acordo com os conhecimentos científicos teóricos e experimentais do momento. Estes estudos podem não ser comunicados aos professores, mas são indispensáveis para a análise das observações das atividades de ensino efetivamente realizadas. (ALMOULOUD & SILVA, 2012, p. 23)

Brousseau (2008 apud CHEVALLARD, 2009b, p. 81-82)

> esclarece que no âmbito das investigações científicas, a engenharia didática, com finalidade fenomenotécnica, tem por objeto conciliar as obrigações normais de ensino e a reprodução e o estudo de fenômenos didáticos bem determinados. Este tipo de investigação pode ser empreendido apenas em organizações específicas complexas e precisas, em especial, ela é indispensável para estudar sistematicamente e experimentalmente modelos teóricos de dispositivos de aprendizagem e de ensino. (ALMOULOUD & SILVA, 2012, p. 23)

Para Chevallard (2009b), pode-se distinguir uma engenharia didática de investigação de uma engenharia didática de desenvolvimento. Apreende-se, em todos os casos, a existência de uma tensão entre dois polos, que o autor designará como a engenharia didática para o uso e a engenharia didática para o conhecimento.

NOSSAS INVESTIGAÇÕES

As investigações propostas por nosso grupo têm como eixo temático o estudo de processos de formação e desenvolvimento de conceitos segundo os paradigmas da Didática da Matemática. Partimos de uma interrogação sobre o que se passa em sala de aula, do ponto de vista do aluno, do professor e do ambiente no qual se desenrola o processo a ser estudado. Como exemplo, apresento nosso projeto de pesquisa intitulado "Processos do ensino e da aprendizagem de matemática em ambientes tecnológicos".

Esse projeto trata da interação de pesquisadores da PUC-Peru e PUC-SP para pesquisas a respeito de processos de ensino e de aprendizagem de matemática em ambientes tecnológicos. A iniciativa é desenvolvida de forma colaborativa pelos grupos de pesquisa "Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática - PEA-MAT", da PUC-SP, e "*Didactica de las Matemáticas* – DIMAT", que pertence ao *Instituto de Investigación para La Enseñanza de las Matemáticas* (IREM) da PUC-Peru, e tem por objetivo analisar tanto do ponto de vista teórico, quanto do prático, questões relativas à complexidade da inserção de ferramentas tecnológicas para o ensino e aprendizagem da Matemática, tanto na Escola Básica, quanto na Universidade.

Tentaremos responder, principalmente, às seguintes questões: *quais fatores influenciam o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática com a utilização de recursos alternativos como ambientes tecnológicos, tanto no Brasil como no Peru? Como os processos de aprendizagem se caracterizam em ambientes tecnológicos? Quais são as alternativas metodológicas para investigarmos os processos de aprendizagem nesses ambientes?* Para buscar respostas a estas questões, adotaremos pressupostos da Engenharia Didática de segunda geração e da Pesquisa-Ação como metodologia. Para coleta de dados, recorreremos a entrevistas individuais e observação, além de questionários semiestruturados e registro de produções dos participantes, com objetivo de identificar concepções de professores, dos dois países, a respeito dos conceitos matemáticos envolvidos (geometria, álgebra, combinatório e educação estatística). Paralelamente, buscamos identificar as concepções discentes, também nos dois países, a respeito dos mesmos objetos matemáticos pesquisados com os professores.

A partir de um diagnóstico, definimos os caminhos para uma proposta e para o desenvolvimento de uma formação continuada para os professores e, a partir dela, pretendemos que *estes* construam sequências didáticas, apliquem-nas aos seus alunos e analisem os resultados obtidos. Elaboramos a hipótese de que o uso de ambientes tecnológicos facilita a visualização e a percepção de propriedades as quais com outros recursos poderiam não ser evidenciadas. Buscamos conduzir os professores, em sua formação, inicial ou continuada, à utilização de ambientes computacionais como instrumentos para a construção de conjecturas e para a resolução de problemas que visem à aprendizagem da Matemática.

Objetivos desse projeto

De forma geral, pretendemos analisar tanto do ponto de vista teórico, quanto prático, questões relativas à complexidade da inserção de ferramentas tecnológicas no ensino para que sejam utilizadas, naturalmente, em processos de ensino e de aprendizagem da Matemática. Em outras palavras:

- Dar subsídios teóricos ao trabalho de professores e pesquisadores interessados na integração de pesquisas em Educação Matemática e de tecnologias em aulas de Matemática dos dois países.

- Produzir conhecimento na área de formação de professores de matemática, dos dois países, utilizando tecnologias como recurso de apoio (como instrumento, no sentido que explicitaremos mais adiante neste texto).
- Elaborar em conjunto uma sequência utilizando o Geogebra e/ou Cabri 3D para ensinar conteúdos matemáticos para ser aplicada com grupo de professores de Ensino Básico e Superior no Brasil e no Peru.
- Contribuir para os debates a respeito do papel das tecnologias na formação de professores nos dois países.

Escolhemos como temas norteadores a apreensão significativa de Geometria, Combinatória, Probabilidade e Álgebra, por meio de resolução de problemas considerando ainda como temas transversais: prova e demonstração; formação de professores; tecnologias da informação e comunicação; história da matemática aplicada à Educação Matemática e a formação e a evolução de conceitos em alunos.

O objetivo do uso de ambientes computacionais na educação é proporcionar ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimentos e à superação de dificuldades. Por isso, buscaremos estudar as condições de concepção e gestão de situações suscetíveis de evoluir e fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente, proporcionando a professores, do Peru e do Brasil, em formação inicial ou continuada, oportunidade de apropriação desses ambientes.

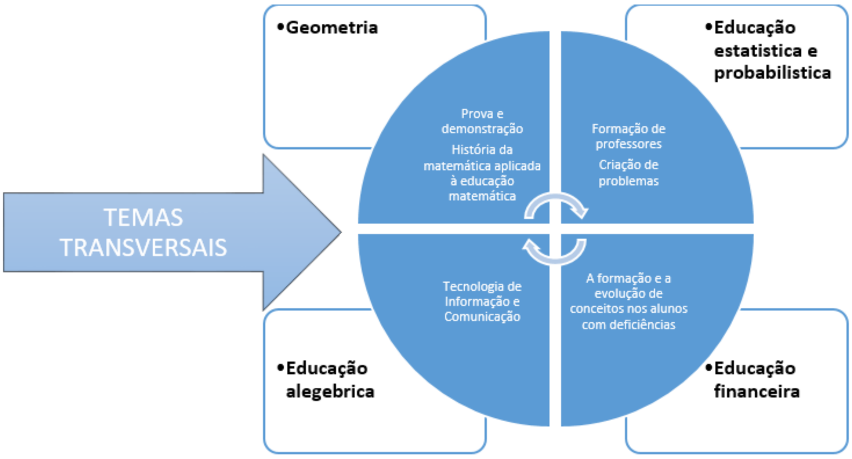
Procuraremos, particularmente, pesquisar a utilização de recursos tecnológicos e compreender sua utilização educacional nos baseando em pesquisas desenvolvidas na área de Educação Matemática e de Tecnologias de Comunicação aplicadas à educação no Brasil e no Peru, no sentido de trocar experiências e construir novas experiências conjuntas. Para isso, pretendíamos selecionar, analisar e elaborar material didático e propostas para a sala de aula que integrem tecnologias como Internet, softwares educativos, calculadora, ambientes de educação a distância, Web Quest, tablet etc. Também podemos assinalar como objetivos a serem alcançados ao longo do desenvolvimento do projeto:

- Utilizar tecnologias para o ensino e a aprendizagem de Matemática;
- Diagnosticar práticas docentes, quanto à utilização de tecnologias na organização de seus planos de aula;
- Diagnosticar se e como o livro didático remete à utilização de alguma tecnologia para a aprendizagem de Matemática;
- Destacar a importância de uma análise didática crítica da prática docente e da compreensão de aspectos éticos, políticos e sociais a respeito da utilização de tecnologias para o ensino;
- Possibilitar aos professores em formação continuada o aperfeiçoamento de seus conhecimentos teóricos e metodológicos a respeito da utilização de tecnologias em sala de aula, buscando a melhoria de suas práticas.
- Desenvolver objetos de aprendizagem que abrangem conteúdos de realidade aumentada para ipad ou tablet para o ensino de Matemática.
- Enriquecer a interação das aulas virtuais (videoconferências) utilizando simultaneamente lousas eletrônicas.

Além de todos os já citados, é nosso objetivo também contribuir para a formação de alunos, tanto na construção de conhecimentos, quanto de seu aprimoramento a fim de auxiliá-los na elaboração de estratégias adequadas para resolução de problemas em sala de aula. Acreditamos que as transformações que ocorrerão na prática dos professores devem influenciar de maneira positiva as ações de formação vivenciadas por seus alunos.

Apresentamos, no quadro 1, a distribuição das temáticas de pesquisa por equipes compostas por pesquisadores do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática. Lembramos no quadro abaixo os temas eleitos para nossa investigação.

Figura 12 – Temas de Pesquisa distribuídos por Equipes

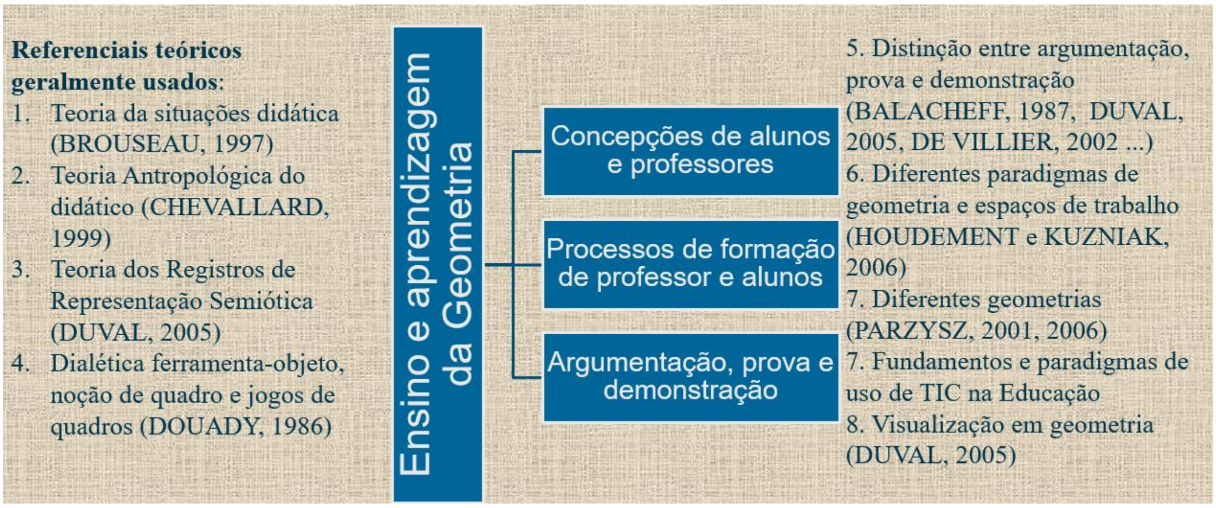


Fonte: Construção nossa.

Pesquisas relacionadas com o ensino e aprendizagem de geometria

Os fenômenos do ensino e da aprendizagem de geometria foram investigados apoiando-se, entre outras teorias, na TSD, TAD e TRRS. Apresentamos na Figura 14, as temáticas investigadas e os referenciais teóricos geralmente usados para analisar os achados oriundos do estudo de fatores que interferem nos processos de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos e/ou paramatemáticos envolvidos nessas temáticas.

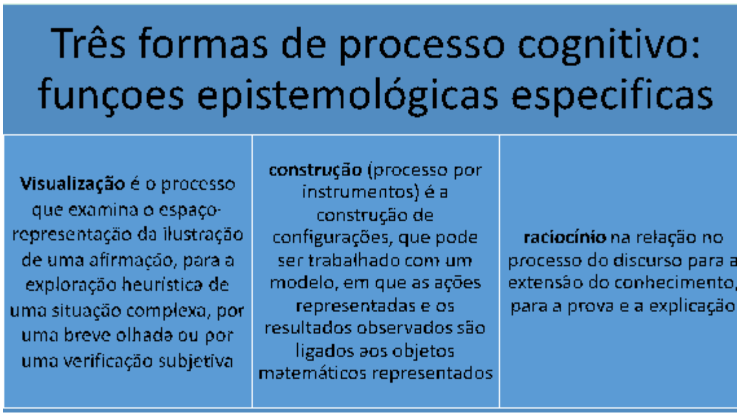
Figura 13 – Constructos teóricos usados no estudo de processos do ensino e da aprendizagem da geometria



Fonte: Construção nossa.

Nos processos de ensino e de aprendizagem da geometria, Duval (1995) afirma que ela envolve três formas de processo cognitivo que preenchem especificas funções epistemológicas:

Figura 14: Processo cognitivo no ensino e aprendizagem da geometria



Fonte: Construção nossa.

Segundo ainda o autor, essas três espécies de processos cognitivos são entrelaçadas em sua sinergia e cognitivamente necessários para a proficiência da geometria. Por outro lado, a heurística dos problemas de geometria se refere a um registro espacial que dá lugar às formas de interpretações autônomas. Para essas interpretações, Duval (1995) distingue três tipos de apreensões:

1. **sequencial**: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura;
2. **perceptiva:** é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
3. **discursiva**: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, pois as mergulha numa rede semântica de propriedades do objeto;
4. **operatória:** é uma apreensão centrada sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e a reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

A resolução de problemas de geometria e a entrada na forma de raciocínio que essa resolução exige dependem da tomada de consciência da distinção das formas de apreensão da figura.

A apreensão operatória das figuras depende das modificações que a figura pode sofrer, que são classificadas por Duval (1995) como:

1. **modificação "mereológico"**: a figura pode se separar em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, uma relação da parte e do todo;
2. **modificação ótica**: é a transformação de uma figura em outra chamada sua imagem;
3. **modificação posicional**: é o deslocamento em relação a um referencial.

São associados a essas apreensões três tipos de problemas:

1. Nível 1: aqueles em que há congruência operatória da figura e um tratamento matemático, neste caso uma apreensão discursiva explicita não é necessária.
2. Nível 2: aqueles em que a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência da figura ou porque é explicitamente pedido como justificativa.

3. Nível 3: aqueles que exigem mais que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos tais como o raciocínio disjuntivo, o raciocínio por contraposição

PROVA E DEMONSTRAÇÃO

Atualmente, existe uma preocupação com o resgate de atividades matemáticas que proporcionem o desenvolvimento do raciocínio dedutivo. Nessa direção, os PCN (1998) do ensino fundamental enfatizam a importância da demonstração em matemática**,** procurando orientar a concretização de um teorema com posterior *demonstração* formal, privilegiando as conjecturas e as relações que as vinculam com o discurso teórico, bem como, no que diz respeito aos sistemas de representação plana das figuras espaciais e as principais funções do desenho. A demonstração em matemática é um dos saberes indicados nos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino fundamental e do ensino médio como parte integrante do currículo da escola básica, mas que ainda não possui, no Brasil, um número de pesquisas suficiente para a compreensão de seus mecanismos utilizados na formação dos conceitos matemáticos.

Boero (1996) discute o processo mental subjacente à produção de afirmações e provas por alunos de 8ª série. Nessa pesquisa, o problema consiste em mostrar que a maioria dos alunos de 8ª série pode produzir teoremas (conjecturas e provas) se eles forem colocados sob condições de implementar um processo com as seguintes características:

- durante a produção da conjectura, o estudante progressivamente trabalha sua hipótese através de uma atividade argumentativa intensa misturada funcionalmente com a justificação da plausibilidade de suas escolhas;
- durante o estágio seguinte da prova, o estudante se relaciona com esse processo de maneira coerente, organizando algumas justificativas ("argumentos") produzidas durante a construção da afirmação de acordo com uma corrente lógica.

Além de trabalhos que procuram melhor compreender o raciocínio lógico, deparamos-nos com outros que buscam uma melhor compreensão do que vem a ser uma prova matemática. Usualmente, consideramos a *demonstração* como um procedimento de validação que caracteriza a matemática e a distingue das ciências experimentais, além de ocupar um lugar de destaque nessa disciplina. Adotamos a distinção entre explicação, prova e demonstração segundo Balacheff (1982).

A *explicação* situa-se no nível do sujeito locutor com a finalidade de comunicar ao outro o caráter de verdade de um enunciado matemático. A explicação, reconhecida como convincente por uma comunidade, adquire um estatuto social, constituindo-se uma prova para esta comunidade, seja a proposição "verdadeira" ou não. Quando a prova se refere a um enunciado matemático, o autor a chama, somente neste caso, de demonstração.

As *provas* são explicações aceitas por outros num determinado momento, podendo ter o estatuto de prova para determinado grupo social, mas não para um outro. As demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- são as únicas aceitas pelos matemáticos;
- respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;
- trabalham sobre objetos matemáticos com um estatuto teórico, não pertencentes ao mundo

> sensível, embora a ele façam referência.

Balacheff (2004) discute diversas perspectivas de prova matemática no processo de ensino e aprendizagem e questiona se seria possível um consenso a respeito de prova em matemática, confrontando as colocações de De Villiers (i) e Hanna e Janke (ii) (apud BALACHEFF, 2004, p.13) a respeito das funções da prova:

> (i) verificação, explicação, sistematização, descoberta e comunicação
> (ii) construção de uma teoria empírica, exploração do significado de uma definição ou das conseqüências de uma hipótese, absorvendo um fato novo numa nova estrutura e permitindo uma nova percepção.

O autor destaca, ainda, perspectivas radicalmente diferentes de epistemologias de provas matemáticas que fazem uma grande diferença, como, por exemplo, prova como tipo de comprovação universal e exemplar ou início de uma natureza idiossincrática no núcleo da matemática, ou como instrumento necessário da matemática, ou, ainda, como algo que adquire seu significado das aplicações ou como um campo autônomo da matemática. A falta de clareza dessas diferenças pode se tornar obstáculo nas pesquisas, contribuindo para gerar uma situação de impasse para o pesquisador.

No entanto, Balacheff (2004, p.13) destaca que existem pontos em comum nas epistemologias de prova matemática que podem facilitar a busca de alguns elementos comuns a essa prova como:

> (i) reconhecimento de que a origem da racionalidade matemática, ao menos sob a perspectiva da aprendizagem, é construída sobre e contra um tipo de racionalidade baseada no "senso comum", apoiada numa cultura histórica, moral e de adesões religiosas, em práticas sociais e profissionais de uma comunidade; (ii) a existência de uma profunda relação entre argumentação e prova a natureza da qual é o objeto de um debate ou pelo menos deve ser transformado num problema; (iii) a prova deveria ser considerada à luz da teoria e da prática; (iv) reconhecimento de que a matemática como um conteúdo gera dificuldades específicas para serem superadas ou, ao contrário, para ser construída com o surgimento de um significado de prova matemática; (v) o professor desempenha um papel chave tanto como um animador acidental ou como um facilitador necessário. (tradução nossa)

O autor (2004, p.13) ainda completa: "Entre todos esses aspectos, surpreendentemente, um não aparece: a relação entre prova e linguagem, provar e redigir uma prova" (nossa tradução).

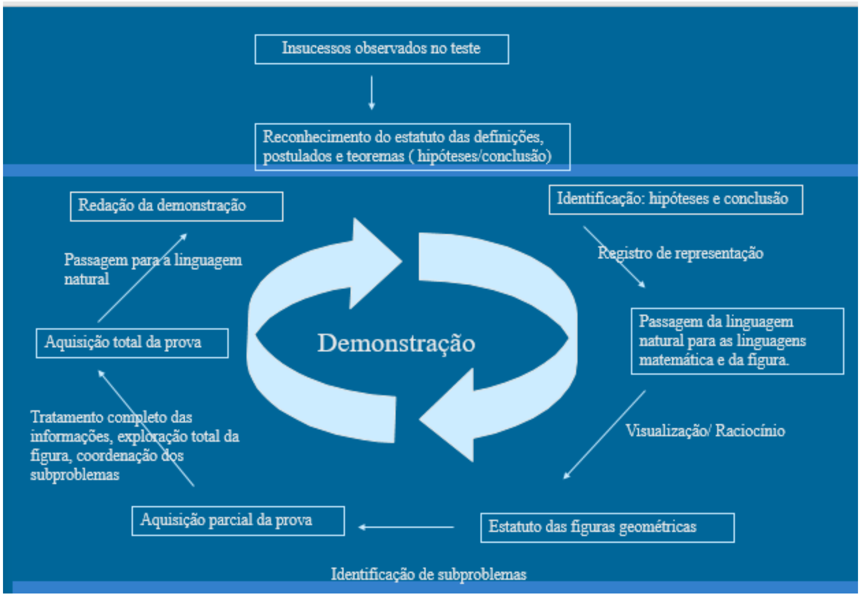
De Villiers (2002) comenta que é costume no ensino da matemática fazer uma abordagem onde as demonstrações aparecem como um recurso para eliminar as dúvidas. Mas ele alerta que a demonstração tem outras funções em matemática:

i) **Verificação**: convencimento próprio e dos outros a respeito da veracidade de uma afirmação;
ii) **Explicação**: compreensão do por que uma afirmação é verdadeira;
iii) **Descoberta**: de novas teorias, conjecturas ou resultados a partir da tentativa de se demonstrar uma conjectura;
iv) **Comunicação**: negociação do significado de objetos matemáticos;
v) **Desafio intelectual**: satisfação pessoal pelo êxito na demonstração de um teorema;
vi) **Sistematização**: organização de resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos e teoremas.

Analisando as causas do fracasso no ensino-aprendizagem da demonstração em matemática, Duval (1995) diz que ela envolve uma atividade cognitiva específica e que sua aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. Ela é um modo de processamento cognitivo autônomo com características especificas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio, como a indução, a argumentação, a interpretação. De um lado, ela articula os enunciados em função do estatuto que lhe é reconhecido e não em função de seu significado, por outro lado, ela se faz em progressão por substituição de enunciados e não pelo encadeamento. A aprendizagem da demonstração, para Duval, consiste primeiramente na conscientização de que se trata de discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. A tomada de consciência do que é uma demonstração somente ocorre numa articulação de dois registros, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural. Essa tomada de consciência surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso.

Sem dúvida alguma, as discussões a respeito de provas e demonstrações são inúmeras e extensas, uma vez que o tema pode ser abordado sob diversas óticas. No entanto, podemos destacar que a prova matemática está relacionada a um processo de validação de um fato matemático e que o registro de uma demonstração deve ser apoiado em fatos matemáticos comprovados e que o conjunto organizado desses fatos deve comprovar de forma irrefutável algum tipo de proposição matemática. O encadeamento lógico dos argumentos matemáticos deve convencer qualquer leitor da veracidade da proposição matemática em questão, ficando, a mesma, portanto, demonstrada.

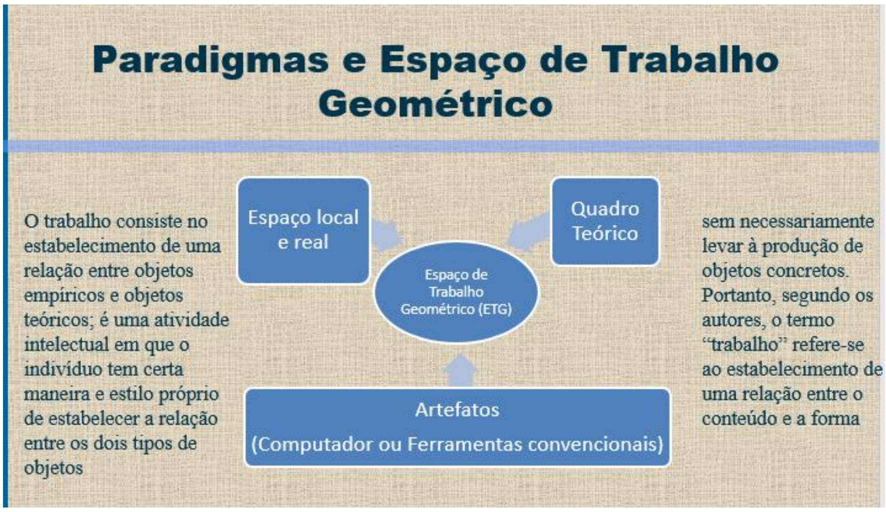
Figura 15 – Uma proposta de organização de processos de ensino e de aprendizagem de provas e demonstração



Fonte: Almouloud e Mello (2000, p.10).

Em nossas investigações sobre o ensino e a aprendizagem da geometria, apoiamo-nos em alguns constructos desenvolvidos no contexto dos paradigmas e espaços de trabalho geométrico (KUZNIAK, 2011), que descrevemos de forma sucinta na Figura 17.

Figura 16 – Paradigmas e Espaço de Trabalho Geométrico



Fonte: Construção nossa.

EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA E EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Discutimos aspectos relativos à Educação Financeira que, em articulação com a Educação Estatística, permitem o desenvolvimento de pensamento crítico e curiosidade científica nos alunos desde o início da sua escolaridade. Tal alargamento do espectro da pesquisa se justifica também pelos resultados de pesquisas nacionais e internacionais no campo da Educação Matemática, e que apontam para a necessidade de se investir em estudos nesse âmbito. Citamos, particularmente, pesquisas desenvolvidas em consonância com os objetivos de entidades como a Associação Internacional para Educação Estatística (*International Association for Statistical Education – IASE*) e a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico – OCDE.

No que se refere à primeira delas, a página de apresentação na internet define sua missão da seguinte maneira:

> IASE provides an international community for people who believe in the value of statistics education, who wish to improve statistics education across all educational levels and in the workplace, and to develop the understanding and use of statistics and probability in societies worldwide. (IASE, 2015, p. 2)

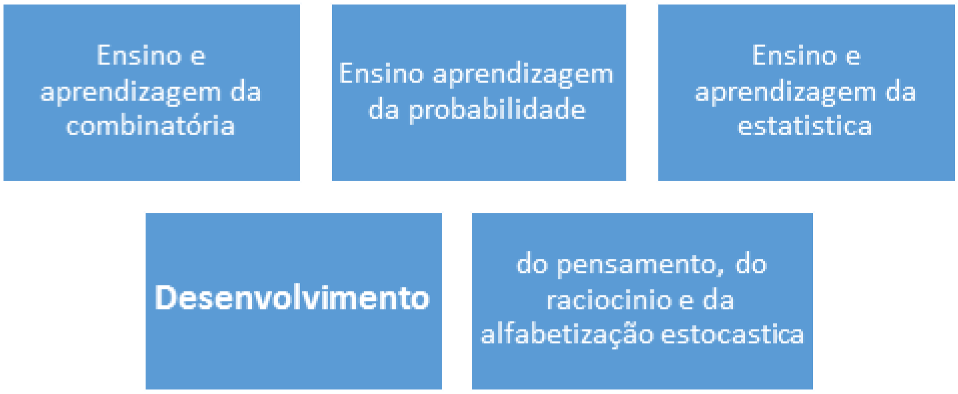
Quanto à OCDE, em sua alínea referente à Educação Financeira, o projeto de implementação especifica o principal objetivo:

> The final objective of the program is to seek to provide alternatives or ways to improve financial education and literacy standards through the development of common financial literacy principles. The importance of financial education to helping consumers make appropriate decisions with respect to pensions and insurance was also underlined in the responses to the questionnaires sent to the delegates of the Insurance Committee last summer. (OCDE, s/data)

No Brasil, a preocupação com a formação para a cidadania com a contribuição de conteúdos relativos à Estatística está presente não apenas nos Parâmetros Curriculares

Nacionais (BRASIL, 1997, 1998, 2000), mas também nas diversas propostas curriculares estaduais e municipais. No que se refere à Educação Financeira, assistimos ao esforço para sua implementação particularmente a partir da promulgação da ENEF (Estratégia Nacional para Educação Financeira – DECRETO Nº 7.397, DE 22 DE DEZEMBRO DE 2010).

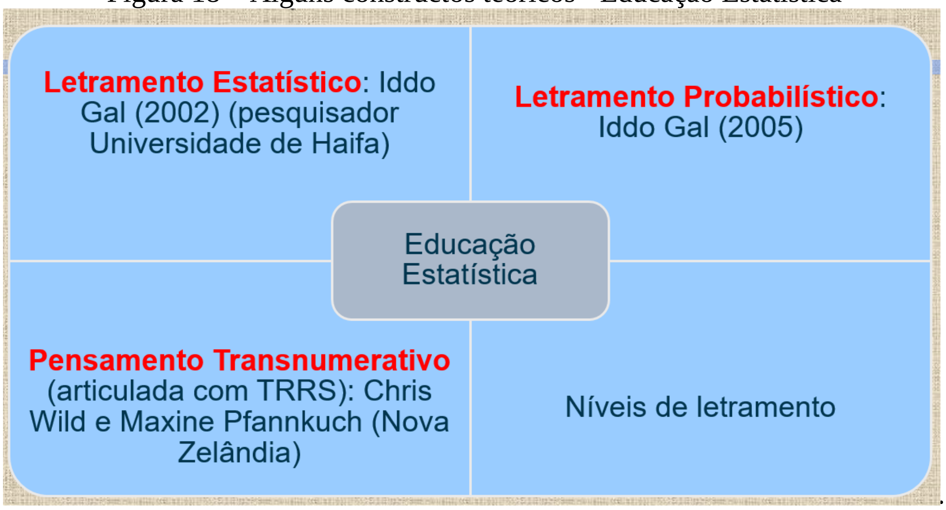
Figura 17 – Principais enfoques de Educação Estocástica



Fonte: Construção nossa.

A construção, a análise e a experimentação das situações de formação, tanto dos professores como de seus respectivos alunos, apoiam-se na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996), na TAD (CHEVALLARD, 1999) e em outros constructos teóricos oriundos de pesquisas da Educação Estocástica, que elencamos de forma sucinta na Figura 19.

Figura 18 – Alguns constructos teóricos - Educação Estatística

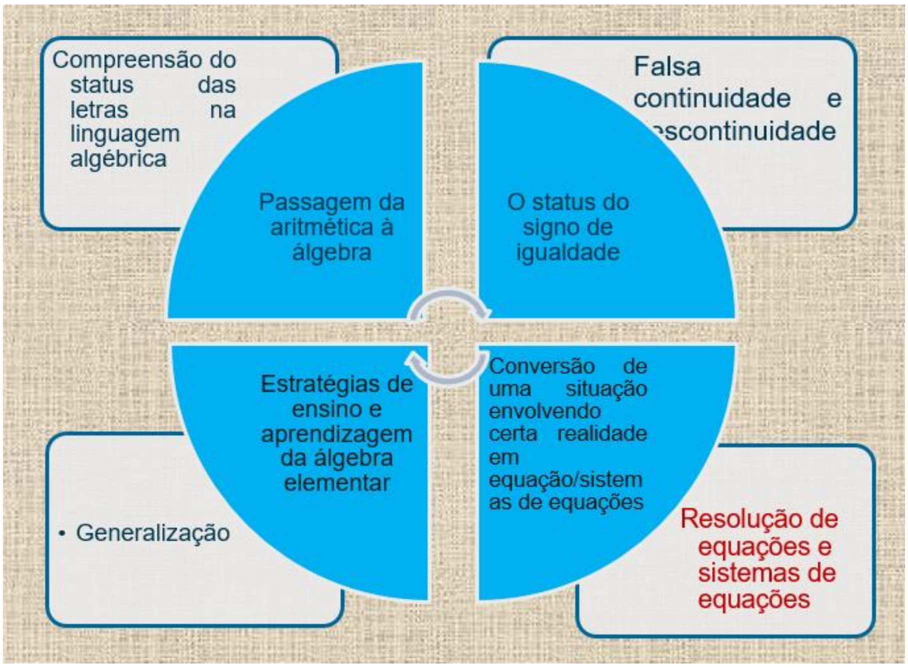


Fonte: Construção nossa.

EDUCAÇÃO ALGÉBRICA: ESTUDO DE PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA ELEMENTAR

A Aprendizagem de álgebra se desenvolve em várias direções, contribuindo, por um lado, para o domínio de objetos de álgebra: letras com um status de número, de incógnita ou de variável, fórmulas, equações, inequações, sistemas e, por outro lado, para a constituição da álgebra como ferramenta para a atividade matemática. Na Figura 18, apresentamos alguns aspectos fundamentais na compreensão da álgebra elementar.

Figura 19 – Alguns enfoques sobre a Educação algébrica



Fonte: Construção nossa.

Além dos constructoss teóricos oriundos da Didática da Matemática, nossos projetos de pesquisa sobre a Educação Algébrica se apoiam também sobre os “Estágios globais do desenvolvimento cognitivo” e os “Ciclos locais de desenvolvimento cognitivo” que sintetizamos nos quadros 2 e 3:

Quadro 1 – Estágios globais do desenvolvimento cognitivo

Estágios de Piaget	Níveis de van Hiele	Modos SOLO	Modos de Bruner
Sensório motor Pré-operacional Operacional concreto Operacional formal	I - Reconhecimento II – Análise III – Ordenação IV – Dedução V - Rigor	Sensório motor Icônico Simbólico concreto Formal Pós-formal	Enativa Icônico Simbólico

Fonte: Pegg e Tall (2010, p.175) (tradução e adaptação nossa).

Quadro 2 – Ciclos locais de desenvolvimento cognitivo

SOLO (Biggs e Collis)	Davis	APÓS (Dubinsky)	Gray e Tall
Uni-estrutural Multi-estrutrual Relacional Uni-estrutural	Procedimento (VMS) Processo Integrado Entidade	Ação Processo Objeto Esquema	[Objetos de base] Procedimento Processo Procept

Fonte: Pegg e Tall (2010, p. 182, tradução nossa).

Tall (1999, p.111) afirma que com base na teoria da construção cognitiva de Piaget com crianças pequenas, Dubinsky propôs a teoria APOS (ação- processo-objeto- esquema) que tem como objetivo descrever como as ações se tornam interiorizadas nos processos, e em seguida encapsuladas como objetos mentais que tomam o seu lugar em esquemas cognitivos mais sofisticados.

Nesse sentido, para Tall (1999), o trabalho de Dubinsky e seus colegas tem sido concentrado em matemática no nível de graduação, nomeadamente no desenvolvimento de práticas adequadas de trabalho e sequências de aprendizagem numa ampla variedade de áreas matemáticas específicas, incluindo matemática discreta, lógica, cálculo, álgebra linear e teoria de grupos.

Pegg e Tall (2005) fazem uma distinção entre dois tipos de teoria do crescimento cognitivo, as estruturas globais de crescimento (longo prazo) e as estruturas locais de crescimento cognitivo.

O modelo tem como foco as respostas dos alunos, em que essas são interpretadas nos ambientes de aprendizagem por uma abordagem social. O modelo ainda é operacionalizado localmente através de um ciclo de três níveis: uni-estrutural, multi-estrutural e relacional (UMR). Esses níveis são diferenciados da seguinte forma:

- Uni-estrutural – resposta usa apenas uma parte dos dados;
- Multi-estrutural – resposta usa duas ou mais partes dos dados sem relacioná-los;
- Relacional – usa todos os dados disponíveis, dá ao conjunto uma estrutura coerente.

De acordo com Pegg e Tall (2005), um exemplo importante na construção do conceito é a simbolização de ações. As ações mudam o foco de objetos já conhecidos para ações como objetos mentais manipuláveis. E afirmam ainda que este ciclo de construção mental já foi descrito como: Processo de ação, objeto (DUBINSKY, 1991); Interiorização, condensação, reificação (SFARD, 1991); Procedimento, processo e procept (GRAY & TALL, 1991, 1994).

TIC E PROCESSOS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

Um dos objetivos das TIC na Educação é proporcionar ao aluno condições favoráveis à aquisição de conhecimentos e superação de dificuldades de aprendizagem. Para alcançar esse objetivo, precisa-se formar os professores para ter condições de enfrentar os novos desafios provocados pela integração de TIC na Educação, e capazes de:

1. Propor situações suscetíveis de evoluir e de fazer evoluir o aluno segundo uma dialética conveniente;
2. Identificar variáveis didáticas pertinentes sobre as quais poderemos organizar um salto informacional (BROUSSEAU, 1986);
3. *Fazer evoluir as concepções errôneas* dos alunos de forma a se apropriar das situações de aprendizagem e participar efetivamente da construção de conhecimentos/saberes nelas envolvidas.

Goulart e Bacon (2016, p.256) afirmam, a respeito da integração das TIC, que entre as várias dimensões que interferem nessa integração das TIC nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática se destacam as dimensões epistemológica, semiótica, cognitiva, institucional e a dimensão do professor, já que ele é o ator central da integração.

A introdução das TIC é apreendida por meio de um olhar global sobre os dispositivos de formação. A integração de TIC no campo da Educação Matemática evidencia a necessidade de explicitar os modelos subjacentes de aprendizagem.

O conjunto do processo didático é questionado pela presença da mídia ou das mídias que, por sua limitação técnica, por sua capacidade de virtualização, por suas potencialidades na dinâmica da comunicação, vão agir como verdadeiro ator da formação. O modelo didático deve ser, então, reformatado para que a mídia tenha lugar na triangulação anterior.

No que diz respeito ao professor, os trabalhos da sociologia das mídias e os usos nos alertam para os processos de inovação e de resistência dos atores profissionais. O dispositivo midiatizado é frequentemente objeto de uma longa apropriação/instrumentação que, às vezes, encontra-se no centro da prática de ensino. Por outro lado, o professor seleciona e transpõe os saberes por meio de um ou vários dispositivos midiáticos que, em contrapartida, influem em sua escolha**.**

O aluno não pode entrar em relação direta com o saber a não ser pela mediação de ferramentas técnicas colocadas à sua disposição. Assim, a atividade cognitiva é uma atividade técnica midiatizada antes de ser cognitiva.

Uma outra dimensão que levamos em consideração no uso de TIC é a gênese instrumental que já discutimos anteriormente.

FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Quando pensamos em formação continuada de professores para a utilização de tecnologias para o ensino, duas ideias surgem: formar um docente que utilize tecnologias em suas práticas e que possa se formar por meio de tecnologias.

Assim, no primeiro caso, o professor deve, antes de tudo, buscar respostas, entre outras, para as seguintes indagações:

- Qual ambiente computacional utilizar?
- O ambiente escolhido permite:
  - a construção de situações nas quais as variáveis didáticas são controláveis?
  - a identificação e a interpretação dos erros e as condições de seu aparecimento? (obstáculos e erros).
  - construir modelos dos processos errôneos dos alunos?
  - construir situações didáticas em que esses processos sejam desequilibrados?
- O uso desse ambiente permitirá alcançar os objetivos didáticos fixados?

Entendemos que a análise didática das respostas dessas questões ajudará o professor na construção de situações-problema que atendam aos objetivos do ensino e da aprendizagem que se pretende.

Entendemos que o saber, enquanto construção pessoal, não ocorre apenas de forma cognitiva, é necessário que o sujeito se identifique com o que aprende para que possa dar um sentido próprio para a relação que constrói com o saber. Aprender assume um sentido ativo para o indivíduo e está vinculado ao momento e à situação em que ocorre a aprendizagem. Dessa forma, o objeto de análise – quando se estudam os processos de aprendizagem – deve ser as relações em que os sujeitos se envolvem com os saberes. Ou seja, questionar esse conjunto de relações com o saber é se interessar pelo processo no qual o sujeito se integra ao seu meio.

No segundo caso, quando a aprendizagem ocorre em ambientes virtuais, outros tipos de relação com os saberes surgem e temos que construir significados para as informações contidas nesses ambientes de aprendizagem. Nesse sentido, procuraremos responder as seguintes questões:

- Quais fatores influenciam o processo de ensino e de aprendizagem da Geometria com a utilização de recursos alternativos como tecnologias da informação e comunicação?
- Quais ações desenvolver com professores para lhes proporcionar uma apreensão significativa dos problemas que envolvem a utilização desses recursos?
- Quais fatores devem nortear a formação inicial e continuada de professores, no que diz respeito ao uso desses recursos?

A formação dos professores, segundo André (2001), tem a preocupação com aspectos pontuais. Muitas são as questões existentes sobre o tema. Alguns documentos oficiais confirmam a necessidade de pesquisas nessa área, pela distância existente entre o que se deseja que seja o ensino e como ele é efetivado.

Nos Referenciais para formação de professores é visto que:

> [...] apesar do empenho de muitos e do avanço das experiências já realizadas, há uma enorme distância – e não apenas no Brasil – entre o conhecimento e a atuação da maioria dos professores em exercício e as novas concepções de trabalho do professor que esses movimentos vêm produzindo. Trata-se, portanto, não apenas de realizar melhor a formação, mas, de realizá-la de uma maneira diferente. Tais mudanças exigem, dentre outras questões, que os professores reconstruam suas práticas e para isso, é preciso “construir pontes” entre a realidade de seu trabalho e o que se tem como meta. (BRASIL, 1999, p. 16)

Essa afirmação, por fazer alusão a professores em exercício, refere-se a um tipo especial de formação, a continuada, que é considerada hoje imprescindível para o professor que está em sala de aula, tanto para atualização de seus conhecimentos e técnicas na área específica que leciona, quanto para desenvolvimento de competências e atitudes. Além disso, sugere que a concepção de formação de professor seja questionada, porque pode ser concebida de diferentes maneiras, considerando os objetivos, os conteúdos e os métodos.

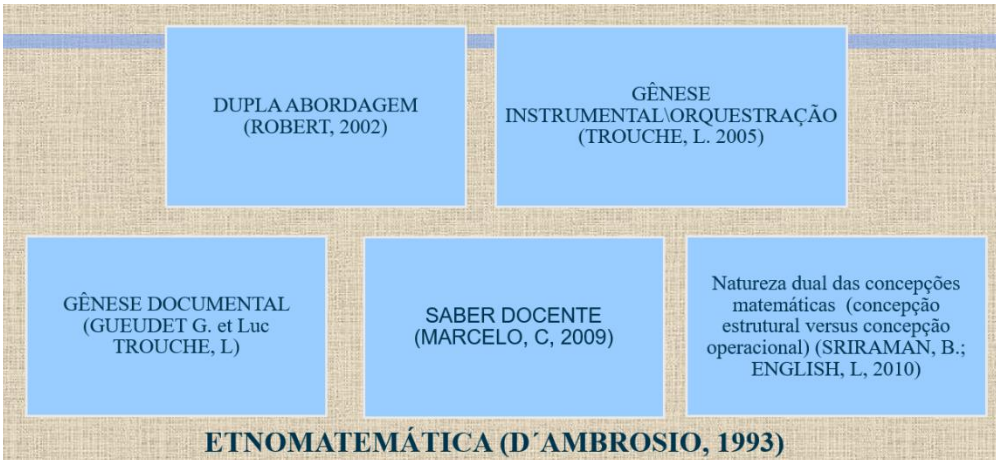
ARTICULAÇÃO DE TEORIAS DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA E DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

As Figuras de 21 a 23 apresentam as teorias e os constructos teóricos que tentamos articular nas diferentes pesquisas levadas a cabo e/ou em andamento.

Figura 20 – Teorias e constructos da Didática da Matemática

Fonte: Construção nossa.

Figura 21 – Constructos teóricos da Didática da Matemática e outros aportes teóricos



Fonte: Construção nossa.

Figura 22 – Constructos teóricos sobre formação de professores e TIC

Fonte: Construção nossa.

A respeito da formação de professores, Marcelo (1998) centra-se no denominado paradigma do *pensamento do professor*, e suas considerações são tecidas em torno do tema *aprender a ensinar*. Dois são os tópicos que o autor procura observar no desenvolvimento profissional de professores; um sobre os processos pelos quais os docentes geram conhecimento e, o outro, sobre os tipos de conhecimentos que eles adquirem. Segundo o autor, a recente preocupação em analisar processos de mudança e inovação surge com as pesquisas centradas no processo de aprender a ensinar do professor. O próprio autor (MARCELO, 2009, p. 112) faz reflexões sobre a identidade profissional e suas implicações na atuação docente e discute o que entende por identidade docente, apresentando-a como uma "realidade que evolui e se desenvolve, tanto pessoal como coletivamente", acrescenta ainda que "a identidade não é algo que se possua, mas sim algo que se desenvolve durante a vida".

Assim, as mudanças necessárias devem ocorrer, de acordo com Schön (1983), Pacheco e Flores (1999), por meio da reflexão-na-ação, em que o profissional explicita as compreensões tácitas (que ele não consegue, em geral, verbalizar), revê as incertezas e, se necessário, faz os devidos acertos. Em um grupo de trabalho, é importante que cada sujeito esteja consciente da importância de sua reflexão para uma ação/reflexão coletiva.

PERSPECTIVAS METODOLÓGICAS

As Figuras 24 e 25 apresentam, de forma sucinta, os tipos de metodologia de pesquisa que norteiam nossas investigações.

Figura 23 – Tipo de metodologia de pesquisa e de análise de dados

Fonte: Construção nossa.

Figura 24 – Metodologias de pesquisa de DDM e de EDM

Fonte: Construção nossa.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

O presente texto tem por objetivo tecer reflexões acerca do *"Diálogos da Didática da Matemática com* outras *tendências da Educação Matemática".* As discussões que apresentamos não tinham a pretensão de esgotar todos os diálogos entre a Didática da Matemática com outras tendências teóricas da Educação, mas representam um exemplo do que acontece em diferentes pesquisas em Educação Matemática no Brasil. Este texto, apesar de suas limitações, traz à luz alguns fundamentos teóricos da Educação Matemática, no contexto de diferentes pesquisas, que dialogam e/ou complementam alguns constructos teóricos da Didática da Matemática na análise e interpretação de fatores que interferem nos processos de ensino e da aprendizagem de conceitos matemáticos. Espera-se que este estudo, apesar de não exaustivo, permita obter uma visão sobre possíveis diálogos entre teorias da Educação Matemática (ou de educação) relacionadas ao ensino e à aprendizagem de matemática e a Didática da Matemática. A diversidade de teorias e as especificidades de cada uma delas vêm confirmar a ideia de que uma única tendência teórica, ou um único modelo, dificilmente dá conta de explicar e explicitar todos os fenômenos envolvidos nos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos. O pesquisador deve procurar conhecer bem as ideias principais das diversas teorias, de modo a poder identificar quais delas poderá usar para referenciar teoricamente sua pesquisa.

Como perspectiva, sugerimos um estudo mais amplo cujo objetivo seria investigar os referenciais teóricos que sustentam pesquisas brasileiras na área da Educação Matemática *versus* Didática da Matemática, mais especificamente fazer uma metassíntese qualitativa a partir de categorias que seriam construídas a partir de fichamentos dessas investigações. Um dos objetivos seria identificar/analisar possíveis semelhanças, diferenças e complementaridades dos referenciais teóricos mais utilizados.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. Ag. *Fundamentos da didática da matemática*. Editora UFPR, Curitiba. 2010. 218p.

ALMOULOUD, S. Ag e MELLO, E. G. S. *Iniciação à demonstração apreendendo conceitos geométricos,* 23ª Reunião da ANPEd, 2000. Disponível em: http://23reuniao.anped.org.br/trabtit2.htm#gt19. Acessado em 30/03/2017.

ARDOUIN, T. *Ingénierie de formation*: Analyser, concevoir, réaliser, évaluer. Collection: Fonctions de l'entreprise, Dunod, 2003.

ARTAUD, M., Introduction à l'approche écologique du didactique, L'écologie des organisation mathématiques et didactiques. In C. Comitictal. (*eds*) *Actes de la IXè école d'été de didactique des mathématiques*, Houlgate, p. 101-119, 1997.

BAILLEUL, M.; THEMINES, J. F. L'ingénierie de la formation, in Vergnioux A. (coord.) (2013). *Traité d'ingénierie de la formation*. Problématiques, orientations, méthodes. Paris: L'Harmattan, Savoir et formation, 310p, 2013.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Ecología de la modelización matemática: Restricciones transpositivas en las instituciones universitárias. *Communication au 2e congrès TAD*, Uzès, 2007.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Ecología de la Modelización Matemática: los Recorridos de Estudio e Investigación - *III International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic*, 2010.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v.15, n.1, p.1-28, 2013.

BOERO, P. *Les Domaines D'experience*: lier le travail scolaire a l'experience de eleves. 1999.

BOSCH, M.; GASCON, J. Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. *XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*. Agosto de 2001.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; GASCÓN, J. Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2006.

BOSCH, Marianna. *Un Punto de Vista Antropológico*: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. p. 15-28. Espanha, 2001.

BROUSSEAU, G. *La théorie des situations didactiques Le cours de Montréal 1997*. Disponível em www.guy-brousseau.com, acesso em 12 jun 2012.

________________. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. Editora Ática. São Paulo. 2008. 128p.

CHEVALLARD, Yves. *Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER*. Lyon, 2009.

___________________. *La notion de PER: problèmes et avancées.* Toulouse, 2009.

GATTI, B. A.; BARRETTO, E. S. S. *Professores do Brasil:* Impasses e desafios. Brasília, UNESCO, 2009, 294p.

CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique.* Du savoir savant au savoir enseigné, Grenoble: La pensée Sauvage éditions (2ème édition), 1991.

CHEVALLARD, Y. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques:* L´approche antropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 1999.

CHEVALLARD, Y. *Le développement actuel de la TAD:* pistes et jalons. IIe congrès international sur la TAD qui se tiendra à Uzès du 31 octobre au 3 novembre 2007.

CHEVALLARD, Y. *La TAD face au professeur de mathématiques.* UMR ADEF. Toulouse - França, 2009.

CHEVALLARD, Y. *La Transposición didáctica:* Del saber sábio al saber enseñado. Terceira Edição. Buenos Aires: Editora Aique Educación, 2013.

D´AMBROSIO, U. - "Ethnomatematics and its place in the History of Pedagogy of Mathematics" - For the Learning of Mahthematics - 5#1 D´Ambrosio, U. - "Etnomatemática: Um Programa" - Educação Matemática em Revista - SBEM (1993) nº 1, 5 – 11, 1985.

FERREIRA, M. B. C. *Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas*. Tese de doutorado em Educação Matemática ´PUC/SP, 2016.

FONSECA BON, C. *Discontinuidades Matemáticas Y Didácticas entre la Enseñanza Secundaria Y la Enseñanza Universitária.* Tesis Doctoral Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Vigo, Espanha, 2004.

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, v. 4, n. 2, p. 129-159, 2001.

GASCÓN, J. *Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico:* El caso del álgebra elemental. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa, p. 203-231, 2011.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica, 2014.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Vers de nouveaux syst`emes documentaires des professeurs de math´ematiques?. I. Bloch et F. Conne. Nouvelles perspectives en didactique des math´ematiques. *Cours de la XIVe ´ecole d'été de didactique des mathématiques*, La Pens´ee Sauvage, p. 109-133, 2009. Disponível em https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00459440, acessado em 13/03/2017.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés Le cas des mathématiques Éducation et didactique, v. 2, n. 3, 2008.

HOUDEMENT, C.; KUZNIAK, A. *Paradigmes Géométriques et enseingnement de la géométrie. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, volume 11, p. 175-193, 2006.

_____. Elementary geometry split into different geometrical paradigms. *In Proceedings of European Research in Mathematics Education III*. Working Group **7**, 2003. Disponível em <http://ermeweb.free.fr/CERME3/Groups/TG7/TG7_Houdement_cerme3.pdf> Acesso em 24 de julho de 2011.

_____. *Paradigmes Geometriques*. Petit x, n. 5, p. 5-21, 1998-1999.

LUCAS, C. O., FONSECA BON, C. GASCÓN, J. CASAS, J. M. Aspetos da rigidez e atomização da matemática escolar nos sistemas de ensino de Portugal e da Espanha: análise de um questionário, *São Paulo, v.16, n.1, p.1-24, 2014.*

MARCELO, Carlos. Pesquisa sobre formação de professores: conhecimento sobre aprender a ensinar. Tradução de Lólio L. de Oliveira. *Revista Brasileira de Educação*, São Paulo, n. 9, p. 51-75, 1998. ANPEd.

MARCELO, Carlos. A identidade docente: constantes e desafios. *Revista Brasileira de Pesquisa sobre Formação Docente*, Belo Horizonte, v.01, n.01, p.109-131, ago/dez, 2009 (disponível em HTTP://formaçãodocente.autenticaeditora.com.br acesso em 02/07/2010)

KUZNIAK, A. L'Espace de Travail Mathématique et ses gêneses. *Annals de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 16, p. 9-24. IREM de STRASBURG, 2011.

LERMAN, S. Theories of Mathematics Education: Is Plurality Problem? *In Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education*, p.97-117, Springer, 2010.

MARCELO, C. A identidade docente: constantes e desafios. *Revista brasileira de pesquisa sobre formação docente*, v. 1, nº 1, p. 109-13, Belo Horizonte, 2009.

PACHECO, J. A.; FLORES, M. A. *Formação e avaliação de professores*. Porto, Portugal, Porto editora, 1999.

PEGG, J.; TALL, D. The Fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. In *Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education*, p. 171-207, Springer, 2010.

PRADO, E. A. *Alunos completaram um curso de extensão em álgebra e suas concepções sobre base de um espaço vetorial*. 2010.186f. Dissertação (mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

ROBERT, A.; ROGALSKI, J. Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, vol 2, n°4,

pp. 505-528, 2002.

SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In *Educational Studies in Mathematics* p.1-36. Kuwer Academic Publishers, Netherlands,1991.

SIMON, M. A.; TZUR, R. *Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning:* An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. Mathematical Thinking and Learning, p.91-104. 2004.

SCHÖN, D. A. *The reflective practitioner: how professionals think in action*. USA: Basic Books, 1983

SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. Surveying Theories and Philosophies of Mathematics Education. In Theories of Mathematics Education Advances in Mathematics Education, p.3-32, Springer, 2010.

TALL, D. Reflections on APOS theory in elementary an Advanced Mathematical Thinking. Plublished in O. Zaslavsky. Proceeding og the 23rd conference of PME, p. 111-118. Haifa, Israel.1999.

TROUCHE, L. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v.25/1, n.73, p. 91-138, 2005.

VERGNAUD, G., *La théorie des champs conceptuels*, RDM n° 6 vol 10 n° 2.3 1991

VYGOTSKY, L. S.*Pensamento e Linguagem.* São Paulo: Martins Fontes, 1998.