

LA COMPONENTE COGNITIVA DEL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO-MATEMÁTICO DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN

M. Magdalena Gea¹

Carmen Batanero²

Pedro Arteaga³

Antonio Estepa⁴

Resumen: El objetivo de este trabajo fue evaluar la componente cognitiva del conocimiento didáctico-matemático sobre la correlación y regresión de los futuros profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato españoles. La evaluación se realiza a partir del análisis que una muestra de 65 estudiantes que se preparan como profesores de matemáticas realizan de la idoneidad cognitiva de un proyecto estadístico, después de haber trabajado previamente con dicho proyecto. El proyecto está basado en datos reales sobre la relación de la esperanza de vida con diferentes indicadores del desarrollo humano, tomados del servidor de las Naciones Unidas y fue pensado para introducir las ideas de regresión y correlación en Bachillerato. El análisis de las producciones escritas de los participantes permite asignarles un nivel en cada uno de los indicadores de la idoneidad cognitiva, que extienden los propuestos en un trabajo previo. También sirve para identificar ejemplos de la componente cognitiva del conocimiento didáctico-matemático de los futuros profesores sobre la correlación y regresión.

Palabras clave: Conocimiento didáctico-matemático, componente cognitiva, correlación y regresión, evaluación.

THE COGNITIVE COMPONENT OF DIDACTIC-MATHEMATICAL KNOWLEDGE OF TEACHERS IN TRAINING ON CORRELATION AND REGRESSION

Abstract: The aim of this paper was to evaluate the cognitive component of Spanish prospective high school teachers about correlation and regression. The evaluation is based on the analysis of the cognitive suitability of a statistical project carried out by 65 students

¹ Doctora en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada. Profesora de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, España, mmgea@ugr.es.

² Doctora en Matemáticas, Universidad de Granada. Catedrática de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, España, batanero@ugr.es

³ Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada. Profesor de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España. Facultad de Ciencias de la Educación, Campus de Cartuja, 18071, Granada, España, parteaga@ugr.es

⁴ Doctor en Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Jaén. Catedrático de Didáctica de la Matemática, Universidad de Jaén, España. Facultad de Ciencias de la Educación, 23071, Jaén, España, aestepa@ujaen.es

preparing to become mathematics teachers, after having previously worked with that project. The project is based on real data from the relationships of life expectancy with different indicators of human development, taken from the UN web server, and is intended to introduce correlation and regression in high school. The analysis of the participants' written productions is used to assign a level in each indicator of cognitive suitability, which extends those proposed in a previous work. It also serves to identify examples of the cognitive component of teachers' knowledge about correlation and regression.

Keywords: Didactic-mathematical knowledge, cognitive component, correlation and regression, assessment.

INTRODUCCIÓN

La regresión y correlación son conceptos estadísticos fundamentales, no sólo porque constituyen la base de otros métodos estadísticos, sino por su utilidad en la modelización y predicción de fenómenos en ciencia, gestión y tecnología (BATANERO; BOROVCHNIK, 2016; GIL; GIBBS, 2017). Estos conceptos amplían los conocimientos de los estudiantes sobre la dependencia funcional, al permitirles describir relaciones de dependencia entre variables aleatorias.

En España, la regresión y correlación se estudian en el primer curso de dos modalidades de Bachillerato: *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales* (estudiantes de 16-17 años). Además, la construcción e interpretación de diagramas de dispersión se introduce un curso antes, en cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria (MECD, 2015).

La investigación didáctica sobre este tema describe numerosas dificultades de aprendizaje de la correlación, como no apreciar la correlación inversa, tener un sentido determinista (aceptar sólo la dependencia funcional) o local (juzgar la correlación usando sólo una parte de los datos), pensar que la correlación tiene la propiedad transitiva (CASTRO-SOTOS; VANHOOF; VAN DEN NOORTGATE; ONGHENA, 2009; EICHLER, ZAPATA-CARDONA, 2016) o identificar correlación con causalidad (BIEHLER; FRISCHEMEIER; READING; SHAUGHNESSY, 2018; ESTEPA, 2008; INZUNZA, 2016).

Una investigación destacada entre las relacionadas con la comprensión de la regresión es la de Estepa (2008), quien señala la importancia de comprender la diferencia entre variable dependiente e independiente. Estepa y Sánchez Cobo (2003) identifican la confusión de muchos estudiantes entre las dos rectas de regresión y sus dificultades en la interpretación de los coeficientes de regresión, y su relación con la pendiente de la recta y tipo de correlación.

Estas dificultades se repiten en otros estudios (CASEY, 2015; CASEY; NAGLE, 2016; DIERDORP; BAKKER; EIJKELHOF; VAN MAANEN, 2011; ESTEPA; SÁNCHEZ COBO, 2003) y se reproducen a veces en los libros de texto (GEA; LÓPEZ-MARTÍN; ROA, 2015).

Eisenhauer (2003) encuentra estudiantes que diferencian los casos en que debe aplicarse o no una recta de regresión que cruce el origen de coordenadas. Por otra parte, un error frecuente al interpretar la regresión, en una situación en que se realizan dos pruebas sucesivas sobre los mismos sujetos, es interpretar como efecto de un tratamiento el hecho de que cualquier valor atípico en la primera medida suele tender hacia el centro de la distribución en la segunda (efecto de regresión hacia la media; ver ENGEL; SEDLMEIER, 2011). Agnelli, Konic, Peparelli y Flores (2009) indican que algunas de estas dificultades pueden estar ligadas al estudio previo de la función lineal en contextos deterministas y su extensión a la regresión lineal sin las debidas precauciones.

Una buena enseñanza requiere que el profesorado reconozca los conocimientos previos requeridos, sea capaz de identificar los que se trabajan en las situaciones propuestas a los estudiantes y valore el aprendizaje que dichas situaciones posibilitan, la atención a la diversidad y los instrumentos de evaluación en un tema. Por ello, en este trabajo nos interesamos por el grado en que los futuros profesores muestran estas competencias, dentro de un taller formativo orientado también al desarrollo de las mismas, tema que no ha sido investigado con anterioridad. En las siguientes secciones se describen los fundamentos y metodología del estudio, se analizan sus resultados y se discuten las implicaciones de nuestro trabajo para la formación de profesores.

MARCO TEÓRICO

Son muy numerosos los trabajos que analizan diferentes componentes del conocimiento del profesor para enseñar matemáticas (véase, por ejemplo, BROWN; MCNAMARA, 2011; DAWSON; JAWORSKI; WOOD, 2013; EVEN; BALL, 2009; HILL; BALL, SCHILLING, 2008; KRAINER, 2014; LLINARES, 2018). En este trabajo nos basamos en el modelo de conocimiento didáctico matemático (CDM) del profesor, propuesto por Godino y colaboradores (GODINO, 2013; GODINO; GIACOMONE; BATANERO; FONT, 2017; PINO-FAN; GODINO, 2015). Dicho modelo caracteriza los conocimientos del profesor a partir de la dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión meta-

matemática. En la dimensión didáctica del CDM, que es nuestro centro de interés, se tiene en cuenta seis facetas (PINO-FAN; GODINO, 2015):

1. Faceta epistémica o conocimiento especializado de la matemática que tiene que enseñar el profesor.
2. Faceta cognitiva o conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes, relacionados con su aprendizaje y comprensión del tema.
3. Faceta afectiva o conocimiento de los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales en relación con el contenido.
4. Faceta interaccional o conocimiento de las interacciones que se suscitan en el aula y la forma de promoverlas.
5. Faceta mediacional o conocimiento de los recursos educativos, materiales, textos, etc. que pueden contribuir a mejorar la comprensión de los estudiantes.
6. Faceta ecológica, que incluye el currículo, relación con otros temas o asignaturas y los factores sociales, políticos, económicos, etc. que influyen en la gestión del aprendizaje de los estudiantes.

Cada una de estas facetas se relaciona con el correspondiente componente de la idoneidad didáctica (GODINO, 2013; GODINO; RIVAS; ARTEAGA; LASA; WILHELMI, 2014), que los autores introducen para diseñar o evaluar situaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. La teoría de idoneidad didáctica ha sido ampliamente utilizada en la investigación educativa para evaluar programas didácticos y situaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, a través de sus diversas componentes (por ejemplo, en ARTEAGA; BATANERO; GEA, 2017; GODINO; BATANERO; RIVAS; ARTEAGA, 2013).

En concreto, nos centramos en la *idoneidad cognitiva* es decir, el grado en que los contenidos enseñados o pretendidos para un objeto matemático son asequibles a los alumnos, así como la extensión en que los alumnos adquieren los significados pretendidos por el profesor para los objetos matemáticos enseñados. Godino (2013) indica que la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio implica que los contenidos trabajados se encuentran en la zona de desarrollo potencial de los estudiantes. Será importante para alcanzarla, asegurar que los estudiantes tienen los conocimientos previos necesarios para comprender el tema y planificar los medios que el profesor ha de proporcionar para lograr dicho aprendizaje. Además, se necesita una evaluación adecuada que permita cerciorarse de que se consigue el aprendizaje o en qué grado se ha conseguido y que permita al profesor solucionar posibles dificultades o errores de los estudiantes.

Para valorar la idoneidad cognitiva de un proceso de aprendizaje, Godino (2013) propone una serie de indicadores que se describen en la Sección 4. En nuestro estudio se

pedirá a los participantes utilizar dichos indicadores para valorar la idoneidad cognitiva de un proyecto estadístico, que se centra específicamente en la correlación y regresión, y que ha sido previamente implementado en el aula con los mismos participantes. Dicho trabajo de análisis, por parte de los futuros profesores, permite evaluar la faceta cognitiva de su conocimiento de un tema, según Godino (2013).

ANTECEDENTES

Aunque, como se ha indicado en la Sección 2, muchas investigaciones señalan la necesidad de evaluar el conocimiento matemático del profesorado, pocas han analizado los componentes del conocimiento de los profesores sobre correlación y regresión. Sobre la dimensión matemática de este conocimiento, el primer trabajo fue realizado por Batanero, Godino y Estepa (1998), quienes realizaron una experiencia de enseñanza de la correlación y regresión con una muestra de 22 futuros profesores de educación primaria. Entre otras dificultades, citan la no identificación de la correlación inversa, y la confusión entre la variable dependiente e independiente en la regresión. También encuentran estrategias incorrectas en la interpretación de los diagramas de dispersión, por ejemplo, usar sólo parte de los datos.

Casey y Wasserman (2015) analizan el conocimiento de 19 profesores en ejercicio sobre la enseñanza del ajuste informal de una recta de regresión, aunque su trabajo no tiene como finalidad evaluar el conocimiento de los profesores, sino solo identificar el conocimiento que les sería necesario en la enseñanza del tema. Además, incluyen la inferencia estadística, tema que nosotros no consideramos.

Quintas, Ferreira y Oliveira (2015) analizan la dimensión didáctica del conocimiento de dos profesoras de secundaria, con amplia experiencia, mientras explican la correlación y regresión en un curso de secundaria, utilizando el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008). Describen ejemplos del uso, por estas profesoras, del conocimiento didáctico sobre la enseñanza y del conocimiento didáctico sobre el estudiante. Se observan errores en el conocimiento matemático por parte de las profesoras; más concretamente, ninguna de ellas es consciente de la existencia de dos rectas diferentes de regresión, ya que piden a los estudiantes usar siempre la recta de regresión de Y sobre X , independientemente de cuál sea la variable que se quiere predecir.

Aunque los trabajos citados fundamentan el nuestro y aportan puntos de comparación, ninguno realiza un estudio de evaluación con futuros profesores de secundaria y bachillerato, lo que será un punto original en nuestro trabajo. Nos apoyamos también en el estudio de Arteaga et al. (2017), quienes utilizan el análisis de la idoneidad mediacional de un proyecto estadístico realizado por futuros profesores de educación primaria para valorar la faceta mediacional de su conocimiento. Nosotros utilizaremos el mismo método para evaluar la faceta cognitiva del conocimiento de los participantes en el presente estudio.

METODOLOGÍA

Muestra participante

El estudio se desarrolló con 65 estudiantes que se preparaban para ser futuros profesores de matemáticas, dentro del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, obligatorio en España para aquellos que desean seguir la carrera docente. Sólo el 56% de ellos eran licenciados en Matemáticas o Estadística y el resto había finalizado ingeniería, arquitectura u otras carreras de ciencias. Todos habían cursado una o más asignaturas de estadística y el 57% tenían experiencia de enseñanza. Los estudiantes estuvieron divididos en dos grupos de aproximadamente el mismo tamaño, que trabajaron con el mismo profesor y método.

Material y método

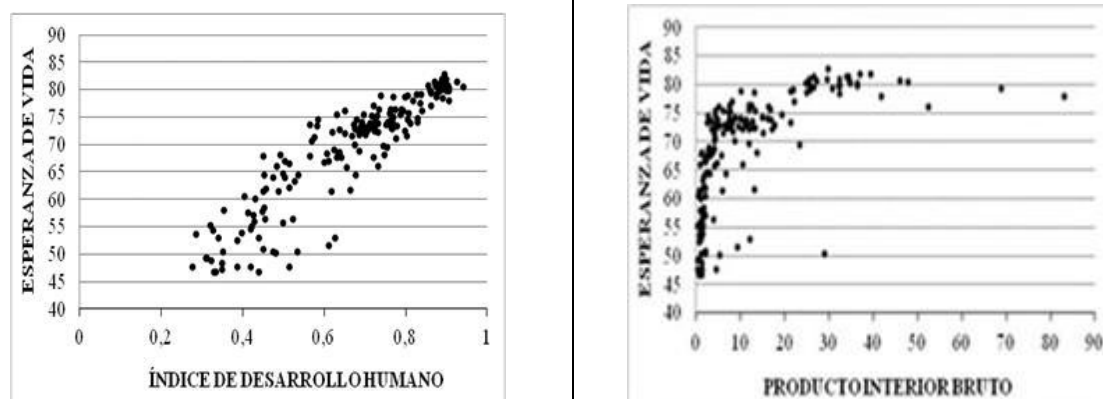
La evaluación se llevó a cabo como parte de un taller formativo realizado dentro de una asignatura de Innovación docente en Matemáticas, en tres sesiones de dos horas cada una. Las dos primeras sesiones estaban dirigidas a desarrollar y evaluar el conocimiento matemático sobre la correlación y regresión de los participantes. En la tercera sesión, dedicada a desarrollar su conocimiento didáctico, los estudiantes analizaron la idoneidad didáctica del proyecto trabajado en las dos sesiones anteriores; en este trabajo sólo analizamos su análisis de la idoneidad cognitiva del proyecto.

Dicho proyecto estadístico giraba alrededor de una pregunta de investigación (¿Cuáles son los factores que más influyen en la esperanza de vida al nacer en un país?), que permitió plantear diferentes tareas. Los datos del proyecto se tomaron de los utilizados en la elaboración de los Informes sobre Desarrollo Humano por las Naciones Unidas, que están

disponibles en su servidor (<http://hdr.undp.org/en/data>). Más detalles sobre el proyecto se describen en Batanero, Gea, Díaz y Cañadas (2014).

Figura 1 – Tareas en el taller previo a la toma de datos

En las gráficas siguientes se representan los diagramas de dispersión de la esperanza de vida al nacer en función de ocho variables explicativas¹:



Utilizando cada una de estas gráficas, resuelve las siguientes tareas:

1. Asigna a cada gráfica una puntuación entre 0 (si no hay relación) y 1 (máxima intensidad de la relación) según la intensidad de esta relación. Asigna también un signo (+ o -) según la relación sea directa o inversa.
2. Ordena las ocho variables explicativas del proyecto, según su potencia (mayor a menor) para predecir mejor la esperanza de vida.
3. Indica cuáles de las variables explicativas tienen una relación causal con la esperanza de vida y explica por qué.
4. ¿Podríamos, para alguna de estas variables, hallar una función matemática para predecir, aproximadamente, la esperanza de vida a partir de la otra variable? Indica para cada gráfica un tipo de función que podría usarse con esta finalidad.

Las variables utilizadas en el proyecto son indicadores internacionales de desarrollo humano y se seleccionaron teniendo en cuenta los resultados de la investigación previa sobre comprensión de la correlación y regresión y los factores que inciden en la dificultad de estas tareas (descritos, entre otros trabajos, en Estepa, 2008 o Engel y Sedlmeier, 2011). No se limitó la dependencia entre las variables a la regresión lineal, sino que se tomaron otros modelos de ajuste con funciones que se estudian en la Educación Secundaria. Igualmente se brindó la posibilidad de observar el signo positivo y negativo y los diferentes grados de intensidad en la correlación. Por otro lado, se utilizaron relaciones que pueden ser explicadas por causa y efecto, y otras debidas a interdependencia o dependencia indirecta. Finalmente, se consideraron variables en que la correlación observada en los datos contradice o confirma las posibles expectativas de los participantes.

Al comienzo del taller, el formador de profesores discutió con los futuros profesores el significado de las diferentes variables y la forma en que se recogen los datos. Se analizó en

profundidad el significado de la variable esperanza de vida (variable dependiente en el proyecto) a través de la interpretación de diferentes representaciones gráficas (histograma, diagrama de frecuencias porcentuales acumuladas y gráfico de caja) y estadísticos de la misma. Una vez comprendido su significado, se fue dando a los participantes, sucesivamente, cada una de las tareas del taller que aparecen resumidas en la Figura 1, en un formulario con espacio suficiente para incluir la solución. Se proporcionaron un total de ocho diagramas de dispersión, representando la variable esperanza de vida en función de cada una de las ocho variables explicativas. Además, se compartió con los futuros profesores una hoja Excel con todos los datos del proyecto.

Cada participante respondió las tareas por escrito, individualmente, teniendo para ello un tiempo suficiente. Una vez recogidas las respuestas a la tarea, se debatieron las soluciones, con el fin de resolver posibles dificultades y desarrollar el conocimiento matemático sobre correlación y regresión de los participantes. Finalizada la recogida de datos, se dio la posibilidad, mediante el uso de Excel, para calcular las funciones de ajuste en la tarea 4, realizar nuevos análisis de correlación y regresión con otras variables y usar recursos de Internet, antes de pasar a la tercera sesión, donde se realizó la evaluación que se analiza en este trabajo y que se describe a continuación.

Análisis de datos

De acuerdo a Godino (2013), el análisis de la idoneidad cognitiva de un proceso de instrucción permite desarrollar la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemático del profesor (GODINO; GIACOMONE; BATANERO; FONT, 2017; PINO-FAN; GODINO, 2015). En nuestra experiencia, el proyecto se desarrolló con los futuros profesores (y no con alumnos de Bachillerato), de modo que el análisis de la idoneidad cognitiva se realiza en base a dicha experiencia o al conocimiento que tienen los futuros profesores de las características del alumnado de Bachillerato.

Para analizar la idoneidad cognitiva del proyecto, se proporcionó a los participantes la pauta presentada en la Tabla 1, y se les pidió responder por escrito a cada uno de los indicadores (preguntas), para lo cual era necesario que previamente identificasen los contenidos matemáticos trabajados en el proyecto. Dicha tarea de reflexión es específica del trabajo del profesor, quien ha de ser capaz de valorar la idoneidad de cualquier actividad planteada a sus estudiantes.

Tabla 1 – Pauta de análisis de idoneidad cognitiva

Componentes	Preguntas indicadoras de cada componente
Conocimientos previos	I1. ¿Qué conocimientos iniciales son necesarios para el estudio del tema? ¿Se estudian en los cursos anteriores?
Atención a la diversidad	I2. ¿Se puede conseguir el aprendizaje de los contenidos incluidos en el proyecto en alumnos de Bachillerato?
Aprendizaje	I3. ¿Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo? ¿Cuáles?
	I4. ¿Las respuestas de los alumnos a las tareas del proyecto, permitirían evaluar el aprendizaje del alumno?
	I5. ¿Sería necesario ampliar la evaluación con otras tareas? ¿De qué tipo?

Una vez recogidas las respuestas, se asignó a cada una un nivel, atendiendo al conocimiento mostrado en la aplicación del indicador (el nivel 0 se refiere a la no respuesta). Estos niveles desarrollan los tres propuestos por Arteaga et al. (2017) para evaluar la faceta mediacional del conocimiento sobre gráficos estadísticos de futuros profesores de educación primaria, y son los siguientes, comunes a todos los indicadores:

- N1. Se responde a la pregunta, aunque el participante se limita a copiar casi literalmente el indicador sin vincularlo con el proceso didáctico analizado.
- N2. Se responde a la pregunta, aplicado el indicador, pero no se centra específicamente en el proyecto desarrollado, sino en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos. También consideramos en esta categoría el caso en que el futuro profesor aplica una parte del indicador correctamente y otra parte de la aplicación es incorrecta.
- N3. Se aplica el indicador a contenidos matemáticos del proyecto, pero el futuro profesor se centra en un aspecto no recogido por el indicador.
- N4. Se hace una aplicación correcta del indicador, utilizando contenidos matemáticos del trabajo en el proyecto, en forma consistente con la pregunta, y se razona mediante un único ejemplo.
- N5. Se aplica correcta y consistentemente el indicador, utilizando contenidos matemáticos y razonando mediante dos o más ejemplos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En lo que sigue se presentan los resultados en cada uno de los tres componentes que se muestran en la Tabla 1. Para cada uno se describe, en primer lugar, las respuestas esperadas en cada uno de los indicadores y, a continuación, ejemplos de valoraciones de los participantes en cada uno de los niveles de aplicación de los indicadores, finalmente se sintetizan y discuten los resultados para cada componente.

Conocimientos previos y atención a la diversidad

Para valorar estas componentes, se plantearon tres indicadores, en forma de preguntas, que se describen a continuación.

I1 ¿Qué conocimientos iniciales son necesarios para el estudio del tema? ¿Se estudian en los cursos anteriores? En respuesta a estas preguntas, se espera que el futuro profesor identifique los conocimientos previos requeridos para iniciarse en el estudio de la correlación y regresión. Estos conocimientos serían los básicos de estadística descriptiva, como variable estadística, valores, frecuencias y distribución. Debería conocerse los gráficos estadísticos elementales (saberlos leer e interpretar), estar familiarizado con las medidas de posición central y dispersión, reconociendo también la más adecuada en una situación problemática. Asimismo, serían necesarios conocimientos de otros bloques de contenido de las matemáticas, por ejemplo, el concepto de función (variable dependiente e independiente, dominio y recorrido), la función lineal (ecuación, pendiente y ordenada en el origen), funciones polinómicas, exponenciales, potenciales y logarítmicas, sus parámetros y expresiones algebraicas e interpretación de su representación gráfica. Todos estos contenidos se han estudiado a lo largo de la Educación Secundaria, y se recuerdan en el Bachillerato.

I2 ¿Se puede conseguir el aprendizaje de los contenidos incluidos en el proyecto en alumnos de Bachillerato? Para responder, los futuros profesores debieran primero identificar cuáles son los contenidos que se necesitaron para completar los cuatro tipos de problemas planteados en el proyecto y todos ellos trabajados durante primer curso de Bachillerato:

- La interpretación de la representación gráfica de datos bidimensionales, en diagramas de dispersión, que requiere conocer la representación en coordenadas cartesianas y la de funciones sencillas.
- El análisis de la posible relación entre variables. En las preguntas 1 y 2 de las actividades propuestas (Figura 1) se persigue que los estudiantes diferencien entre dependencia funcional, independencia y correlación. Mediante la interpretación de diagramas de dispersión, se pretende que distingan la dependencia directa de la inversa (a partir de la tendencia de la nube de puntos), que asocien la mayor o menor dispersión de la nube de puntos con la intensidad de la correlación, y que den una estimación intuitiva del coeficiente de correlación.
- Predecir una variable en función de otra. Para justificar la búsqueda de un modelo matemático de ajuste a los datos, la pregunta 2 (Figura 1) propone ordenar las variables independientes en función del poder de predicción sobre la dependiente. De este modo, aparece una propiedad que relaciona correlación y regresión: que el cuadrado del coeficiente de correlación (coeficiente de determinación en el ajuste lineal) mide la proporción de varianza explicada por el modelo de regresión lineal. Esta propiedad solo se institucionaliza una vez realizada la actividad, y aparece posteriormente cuando, con ayuda de Excel, los futuros profesores proponen el modelo que mejor se ajuste a los datos. Además, la pregunta 4 pide indicar un modelo de ajuste.

Como se observa en la Figura 1, en el caso del Índice de desarrollo humano, se podría a priori deducir que una recta iría bien como modelo. El estudiante podría dar la ecuación general de la recta $y = a + bx$, sugiriendo que b sería la pendiente (indicando si es positiva o

negativa), y a la ordenada en el origen. Para el Producto Interior Bruto, se podría pensar en una parábola o una función logarítmica, y dar su expresión aproximada. Los estudiantes también pudieron utilizar Excel para completar la tarea, comprender el significado del cuadrado del coeficiente de correlación como medida de bondad de ajuste, e interpretar la expresión algebraica de diferentes familias de funciones: lineal, exponencial, logarítmica y parabólica.

En resumen, las actividades propuestas en el proyecto (Figura 1) permitieron trabajar los contenidos que marca la normativa curricular (MECD, 2015). Además, se responde a uno de los criterios de evaluación sugeridos en las mismas:

Interpretar la posible relación entre dos variables y cuantificar la relación lineal entre ellas mediante el coeficiente de correlación, valorando la pertinencia de ajustar una recta de regresión y de realizar predicciones a partir de ella, evaluando la fiabilidad de las mismas en un contexto de resolución de problemas relacionados con fenómenos económicos y sociales. (MECD, 2015, p. 385).

I3 ¿Se incluyen actividades de ampliación y de refuerzo? ¿Cuáles?

En el proyecto se incluyeron actividades que pueden considerarse de refuerzo, como pedir al estudiante que elija otra variable del fichero como variable dependiente y que estudie su relación con el resto de variables del fichero, haciendo uso de Excel en el ajuste de los datos. Igualmente se sugirió al estudiante visitar el servidor de las Naciones Unidas y analizar otras que puedan explicar la esperanza de vida; tarea que es de ampliación y permite al estudiante plantear nuevos problemas de correlación y regresión, según su interés.

Ejemplos de aplicación de los indicadores

Mostramos a continuación ejemplos de respuestas a los tres indicadores anteriormente analizados en los niveles 2 a 5, pues el nivel 0 (no responde) y el nivel 1 (transcribe el indicador) no aportan información.

Nivel 2. En este nivel se sitúa a los estudiantes que aplican parte del indicador correctamente, mientras que otra parte se omite o se responde de modo impreciso al no referirse al proyecto, haciendo uso de aspectos no estrictamente matemáticos.

En el indicador I1 (conocimientos previos), los futuros profesores aplican sólo parte del indicador, pues no valoran si los contenidos iniciales se tratan en cursos anteriores.

Es necesario que los alumnos sepan interpretar los gráficos, o los conceptos sobre los que

vamos a trabajar, como moda, mediana, media, percentil,... (MA; Indicador I1).

Las respuestas de los futuros profesores al indicador I2 (¿se puede conseguir el aprendizaje de los contenidos?) se encuentran generalmente en este nivel. Los futuros profesores no suelen centrarse en el proyecto cuando responden, como por ejemplo ChC, que se centra en general en el Bachillerato; en otros casos, indican aspectos anecdóticos, como GM, que considera el proyecto como una actividad lúdica. También encontramos respuestas imprecisas, como por ejemplo, la que aporta AP.

Sí, en Bachillerato se profundiza más, también se estudia contraste de hipótesis y temas más avanzados. La capacidad de aprendizaje de alumnos de Bachiller abarca este tema. (ChC; indicador I2).

Sí, puesto que de esta manera más lúdica, los contenidos mejor. (GM; indicador I2).

Sí se pueden conseguir. Quizá no se pueda conseguir una comprensión total de lo que significa correlación y lo que representa la recta de regresión, pero sí la idea intuitiva. (AP; indicador I2).

En menor medida encontramos respuestas imprecisas en la aplicación del indicador I3 (actividades de ampliación y refuerzo), como por ejemplo AR, quien no hace referencia a actividades propias del proyecto.

Se incluyen actividades donde el propio alumno se pone el límite, así que ayudamos a que cada alumno llegue hasta donde pueda o quiera. (AR; indicador I3).

Nivel 3. Se aplica en forma correcta el indicador, pero el futuro profesor se centra en otros aspectos y no en la pregunta específica formulada. Encontramos un único participante en este nivel de aplicación en el indicador I3, quien se centra más bien en conceptos y no en actividades de ampliación o refuerzo:

Sí, ya que tú estás impartiendo la correlación lineal y hay nube de puntos que se ajustan mejor a otro tipo de funciones. (JFM; indicador I3).

Nivel 4. El futuro profesor hace una aplicación correcta y consistente del indicador, aunque razona mediante un único ejemplo. En la aplicación del indicador I1, no consideramos como contenidos previos los específicos de la correlación y regresión, citados en este indicador por algunos participantes, entre ellos, el coeficiente de correlación o la recta de regresión. Así es que, en estos casos, consideramos que sólo se indica un contenido previo, entre todos los que se incluyen en la respuesta.

Son necesarios conocimientos de regresión, nube de puntos, funciones. En teoría deberían darse estos conceptos al final de la E.S.O, pero creo que en la mayoría de los casos no da tiempo de explicarlo (ATL; indicador I1).

En la valoración del indicador I2, los participantes se centran en la potencialidad del proyecto para el aprendizaje de la correlación y regresión, únicamente por trabajar con datos reales (como indica MAU) o por las ventajas que posee la metodología por proyectos (como indica JMA). Para el indicador I3 es habitual encontrar respuestas en que el futuro profesor indica únicamente una actividad de las denominadas “de refuerzo”, como DG, que indica la actividad de analizar la dependencia de otras variables.

Claro, a través de este proyecto, los contenidos relacionados con regresión y correlación quedan bastante claros, al practicar con ejemplos reales. (MAU; indicador I2).

Sí, puesto que con la ayuda del profesor pueden comprender la utilidad y el funcionamiento de la correlación y regresión. (JMA; indicador I2).

Sí, tomando otro conjunto de datos rehacer la actividad, estudiando los resultados (DG; indicador I3).

Nivel 5. Se hace una aplicación correcta y consistente del indicador mediante dos o más ejemplos. Son frecuentes estas respuestas en el indicador I1.

La estadística descriptiva, funciones, regresión y correlación... Sí se suelen estudiar en 3º y 4º E.S.O (AJD; indicador I1).

Sí, y para ello es preciso partir de tareas iniciales que den una idea de los conocimientos de partida de los alumnos y, a partir de ahí, profundizar en el contexto y en la dificultad de las tareas. Es fundamental para el aprendizaje, que los alumnos perciban, como en el caso del proyecto, la aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana. (HB; indicador I2).

Sí. La tarea de repetir el ejercicio con otras variables, o bien, intentar ajustes de funciones diferentes en función del coeficiente de correlación óptimo (ATL; indicador I3).

En la Tabla 2 observamos el alto índice de respuesta en los niveles 4 y 5, sobre todo en los indicadores I1 (reconocer conocimientos previos para el estudio del tema y considerar si se trabajan en Secundaria) e I3 (actividades que atiendan a la diversidad de alumnado: ampliación y refuerzo). Para el indicador I2, como explicamos anteriormente, los futuros profesores no precisan aspectos propios del proyecto, observando una tendencia por matizar aspectos relativos a la madurez del estudiante o su base matemática. Los resultados superan los de Arteaga et al. (2017) con profesores de Educación Primaria, que suelen estar a nivel 1 o 2.

Tabla 2 – Frecuencia (y porcentaje) de participantes según nivel de valoración de conocimientos previos y atención a la diversidad

	I1	I2	I3
N0			1(1,6)
N1		3(4,8)	5(8,1)
N2	14(22,6)	34(54,8)	10(16,1)
N3			1(1,6)
N4	9(14,5)	13(21)	27(43,5)
N5	39(62,9)	12(19,4)	18(29)
Total	62(100)	62(100)	62(100)

Además, en la Tabla 3 se recogen los contenidos que los futuros profesores consideran necesarios, previo al estudio del tema (indicador I1). La representación gráfica y el estudio de funciones son los contenidos más citados por los futuros profesores, junto a las diferentes medidas de una variable (centralización, dispersión y posición). En menor medida encontramos futuros profesores que consideran las características de una variable unidimensional y su distribución. Todos ellos son necesarios en la actividad, que han sido bien reconocidos por los participantes y bien discriminados, en general, de los contenidos de correlación y regresión (sólo un 10% de los futuros profesores consideran estos contenidos como previos).

Tabla 3 – Frecuencia (y porcentaje) de conceptos indicados en el reconocimiento de conocimientos previos

Conceptos	Total
Variable estadística unidimensional	27(17)
Medidas de centralización y dispersión	50(31,4)
Coordenadas cartesianas. Representación de funciones	58(36,5)
Correlación	10(6,3)
Regresión	14(8,8)
Total	(100)

También podemos observar (Tabla 3) que, al contrario que en otras investigaciones en que se pide identificar objetos matemáticos en la tarea (por ejemplo, GÓMEZ; BATANERO; CONTRERAS, 2014 y ORTIZ; MOHAMED, 2013), no se incluyen objetos no matemáticos u objetos no presentes en el proyecto.

Aprendizaje

Tras el análisis, por los futuros profesores, de los conocimientos previos para el estudio del tema y de la adecuación del proyecto para atender a la diversidad del alumnado,

un aspecto importante de la idoneidad cognitiva del mismo es valorar el aprendizaje del estudiante. Para ello, el futuro profesor deberá considerar aspectos relativos a la evaluación de los contenidos que se implementan y la adecuación de las tareas de evaluación. A continuación, se describen las preguntas que se plantearon al respecto:

14. ¿Las respuestas de los alumnos a las tareas del proyecto, permitirían evaluar el aprendizaje del alumno? Se pide al futuro profesor que valore si las respuestas de los estudiantes en el desarrollo del proyecto permiten una adecuada evaluación de su aprendizaje. Esperamos que se indique que el análisis de las soluciones a las tareas planteadas en el proyecto permite evaluar el conocimiento final de los estudiantes. Puesto que no se ha realizado una evaluación inicial con ningún instrumento específico de evaluación, formalmente no se puede evaluar el aprendizaje; no obstante, en el supuesto de que el proyecto se utilice para contextualizar e iniciar el estudio de la correlación y regresión, tema nuevo para los estudiantes de Bachillerato, los datos recogidos permitirían evaluar dicho aprendizaje en los estudiantes, principalmente, por la riqueza en argumentación que poseen las situaciones problema que se plantean.

15 ¿Sería necesario ampliar la evaluación con otras tareas? ¿De qué tipo? En el proyecto no se trabajan todos los contenidos matemáticos relacionados con la correlación y regresión y muchas propiedades utilizadas implícitamente a lo largo del proyecto tampoco se evalúan formalmente. Por ejemplo, no se evalúa si los alumnos asocian el sentido de la correlación con la pendiente de la recta de regresión (creciente o decreciente) o con el signo del coeficiente de correlación, a pesar de que en el debate sobre las soluciones al proyecto estas propiedades emerjan. En este sentido, esperamos que los futuros profesores indiquen que sería necesario completar la evaluación con algunas preguntas de tipo teórico, como por ejemplo, describir el significado de los coeficientes a y b en la ecuación de la recta de regresión: $y = a + bx$, o bien pedirles, que formulen la recta de regresión de X en función de Y para evaluar si los estudiantes discriminan las dos líneas de regresión, y por ende, los conceptos de variable dependiente e independiente. También podrían proponer ejercicios de cálculo de los diferentes coeficientes, o de representación de datos bivariantes en un diagrama de dispersión, así como otras actividades de traducción entre representaciones.

Ejemplos de aplicación de los indicadores

Presentamos a continuación ejemplos de respuestas de los futuros profesores al aplicar los indicadores I3 e I4 en los niveles 2 a 5. El nivel 0 (no respuesta) y el nivel 1 (transcribe el indicador) no aportan información.

Nivel 2. Encontramos este nivel de respuesta en la valoración del indicador I4 (el proyecto permite evaluar el aprendizaje), que algunos futuros profesores completan con la valoración del siguiente indicador I5 (nuevas tareas de evaluación). Así, por ejemplo, ME muestra la necesidad de añadir tareas a la evaluación y no responde sobre la posibilidad de evaluar el aprendizaje con las tareas del proyecto. En otros casos, encontramos respuestas muy generales, que no refieren aspectos del proyecto, como por ejemplo PA.

Sí, pero al ser un trabajo diseñado para hacer en grupo, habría que ampliar la evaluación con tareas individuales para comprobar que todos los miembros del grupo han alcanzado los objetivos de aprendizaje. (ME; indicador I4).

Sí, permite valorar los posibles errores o dificultades que ha tenido el alumno. (PA; indicador I4).

También la valoración del indicador I5 (nuevas tareas de evaluación) se encuentra generalmente en este nivel, ya que no se suelen argumentar las respuestas con aspectos específicos del proyecto o se proponen como nuevas tareas de evaluación algunas de las incluidas en el propio proyecto, como ocurre con ChC, que expresa la necesidad de incluir tareas relacionadas con la vida real, aspecto contemplado en el proyecto. Otros futuros profesores, como CM, contestan que sí es necesario ampliar la evaluación con otras tareas, pero no indican cuáles.

Sí, tareas relacionadas con la vida real, como estaturas, edades... Realizar un pequeño examen. (ChC; indicador I5).

Sí, por ejemplo tareas de ampliación, o en un contexto más personal para que los alumnos se motiven e impliquen más en la materia. (CM; indicador I5).

Nivel 3. Se hace una aplicación correcta pero centrada en puntos no recogidos por el indicador. Encontramos sólo dos respuestas en este nivel al valorar el indicador I4, donde los futuros profesores se refieren a los conceptos que se evalúan, sin centrarse en la adecuación de las tareas que se plantean para evaluarlos:

Sí, ya que estás evaluando su conocimiento de parámetros estadísticos, las rectas de regresión, etc. (JFM; indicador I4).

Nivel 4. El futuro profesor aplica correcta y consistentemente el indicador, dando un único ejemplo. En el indicador I4, por ejemplo, JMA se refiere a las potencialidades de las tareas para detectar errores y dificultades de los estudiantes en cuanto a los conocimientos previos y los que se pretenden desarrollar con el proyecto. En el indicador I5, por lo general, los futuros profesores proponen un único tipo de actividad para añadir, como por ejemplo DG, o se refieren a un único aspecto del proyecto, como por ejemplo ATL, quien considera la necesidad de pedir a los alumnos definiciones formales de los conceptos.

Sí, puesto que son bastante completas y permiten ver claramente errores y dificultades relacionadas con los nuevos contenidos y los correspondientes a conocimientos previos (JMA; indicador I4).

Sí, alguna más de ampliación en las que se trabaje con la ecuación de regresión más claramente, como ver el cálculo ya que en el proyecto no se refleja (DG; indicador I5).

Creo que sería necesario poner alguna tarea más conceptual donde se pueda deducir el grado de conocimientos del alumno sobre los puntos de los que trata el tema, aunque el proyecto que se ha realizado es bastante completo (ATL; indicador I5).

Nivel 5. Se hace una aplicación correcta y consistente del indicador mediante dos o más ejemplos. Encontramos este nivel mayoritariamente en el indicador I4 y también el I5:

Sí, ya que tienen que interpretar, no calcular, y por tanto se puede saber si han entendido correctamente el concepto, ya que si fuese sólo calcularlo quizás lo hacen de forma automática sin entender para qué sirve (EGO; indicador I4).

Sí, ampliaría con tareas que incluya un poco de más cálculo. No sólo que sepan interpretar los conceptos; sino cómo llegar por ejemplo a obtener el coeficiente de correlación o la recta de regresión para interpretarla posteriormente (MC; indicador I5).

En la Tabla 4 observamos el alto índice de respuesta en el nivel 2, sobre todo en la valoración del indicador I5, aunque los resultados, de nuevo, mejoran los de Arteaga et al. (2017). Por consecuencia, las respuestas muestran un grado razonable de desarrollo de la competencia del profesor para proponer o valorar pruebas de evaluación del conocimiento de los estudiantes.

Tabla 4 – Frecuencia (y porcentaje) de participantes según nivel de valoración del aprendizaje

	I4	I5
N0		1(1,6)
N1	3(4,8)	
N2	29(46,8)	34(54,8)
N3	2(3,2)	
N4	3(4,8)	20(32,3)

N5	25(40,3)	7(11,3)
Total	62(100)	62(100)

Síntesis de conocimientos

Para resumir los conocimientos didácticos de los futuros profesores de la muestra en la faceta cognitiva, se han calculado las puntuaciones medias obtenidas en cada uno de los indicadores descritos anteriormente (Tabla 5).

Tabla 5 – Medias y desviaciones típicas en los indicadores de la idoneidad cognitiva

Indicador	Contenido	Media	D. Típica
I1	Conocimientos iniciales	4,2	1,2
I2	Aprendizaje factible	3	1,3
I3	Atención a la diversidad	3,6	1,4
I4	Evaluación factible	3,3	1,5
I5	Ampliación tareas evaluación	3	1,2
Total		3,4	1,4

Los resultados también son razonablemente buenos, pues la puntuación media global (3,4) supera a la media teórica (2,5), y es mejor que en el trabajo de Arteaga et al, (2017), donde sólo llegaron a una puntuación media de 1,55 en la evaluación de la faceta mediacional. Lo más sencillo para los participantes en nuestro estudio fue identificar qué conocimientos previos se requieren por parte de los estudiantes para trabajar la enseñanza de la correlación y regresión (I1), así como que el proyecto permite tener en cuenta la diversidad de estudiantes (I3). En este componente de la idoneidad, ningún indicador tiene puntuaciones inferiores a 3, dando muestra del adecuado conocimiento didáctico de los futuros profesores en el componente cognitivo del tema.

Tabla 6 – Ejemplos de conocimientos didácticos de los futuros profesores (Faceta cognitiva)

Ejemplos de conocimientos	
Conocimientos previos	<p>2.1. Reconoce que para iniciar el tema se requiere un conocimiento de la estadística descriptiva unidimensional (tablas, gráficos y resúmenes de estadísticos), la representación en coordenadas cartesianas y las funciones elementales.</p> <p>2.2. Recuerda que todos estos conceptos han sido aprendidos en la Educación Secundaria, y están contenidos en el currículo de ese nivel educativo.</p>
Atención a la diversidad	<p>2.3. Reconoce en el proyecto actividades de ampliación y refuerzo, como análisis de nuevas variables o trabajo con applets.</p> <p>2.4. Es capaz de proponer variantes de las tareas del proyecto que permitan la atención a la diversidad y el refuerzo del aprendizaje; por ejemplo, utilizar diferentes funciones de ajuste a los mismos datos, o proponer otros proyectos similares, entre otras.</p>
Aprendizaje	<p>2.5. Evalúa la dificultad prevista de los contenidos incluidos en el proyecto. Reconoce si los contenidos son asequibles a los alumnos de Bachillerato.</p> <p>2.6. Reconoce que las respuestas escritas a las tareas propuestas permiten evaluar el aprendizaje del estudiante; por ejemplo, su comprensión e interpretación de gráficos y medidas de posición central, diagramas de dispersión, sentido e intensidad de la correlación, etc.</p> <p>2.7. Reconoce posibles conflictos de aprendizaje que podrían observarse por medio de las tareas propuestas; por ejemplo, confusión entre correlación y causalidad, confusión de la variable dependiente e independiente, interpretación incorrecta del coeficiente de correlación, ordenación incorrecta de coeficientes de correlación.</p> <p>2.8. Propone tareas complementarias de evaluación del conocimiento sobre la correlación y la regresión; por ejemplo, tareas de cálculo de los distintos coeficientes, de definición de conceptos, o de justificación de propiedades.</p>

Así, por ejemplo, algunos futuros profesores han reconocido como conocimientos previos requeridos la estadística descriptiva unidimensional; han recordado cómo estos conceptos se incluyen en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria; han identificado las actividades de ampliación y refuerzo como actividades que permiten la atención a la diversidad; evalúan la dificultad prevista de las tareas, en relación a los estudiantes a quienes van dirigidas; y reconocen modos de evaluación en el proyecto, proponiendo otros complementarios, tanto conceptuales como de cálculo.

Completamos el análisis mostrando, en la Tabla 6, ejemplos de conocimientos didácticos específicos de la correlación y regresión en su faceta cognitiva, mostrados en las respuestas de los futuros profesores que fueron clasificadas en los niveles 4 y 5. Dicha tabla muestra aspectos concretos de la faceta cognitiva del conocimiento didáctico-matemático de la correlación y regresión, que debería adquirir todo profesor responsable de impartir el tema. Por tanto, puede ser un primer paso para construir un modelo de la faceta cognitiva del conocimiento del profesor sobre este tema.

CONCLUSIONES

En este trabajo nos interesamos por evaluar la componente cognitiva del conocimiento didáctico-matemático en un grupo de futuros profesores, utilizando para ello las respuestas en el análisis de la idoneidad cognitiva de un proyecto estadístico, una vez que los futuros profesores trabajaron previamente con dicho proyecto.

El dispositivo didáctico implementado para la formación de los profesores en este tema resultó adecuado, tanto para motivar a estos participantes como para evaluar y desarrollar diferentes aspectos de su conocimiento didáctico-matemático. En primer lugar, el trabajo con el proyecto les permitió avanzar en su conocimiento matemático de la correlación y regresión, y el hecho de recorrer todas las etapas de un proceso de investigación para responder a una pregunta de interés para ellos (¿Qué factores influyen en la esperanza de vida?) les llevó a trabajar con interés los aspectos matemáticos del mismo.

La posterior evaluación de la idoneidad didáctica del proyecto propició su reflexión sobre los diferentes aspectos que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y que se pueden mejorar y tomar consciencia de los diferentes tipos de conocimiento que debe adquirir un profesor de matemáticas. En particular, su análisis de la idoneidad cognitiva les permitió comprender el valor del análisis a posteriori de experiencias de enseñanza, para asegurar el aprendizaje de los estudiantes, su evaluación y atención a la diversidad.

Por supuesto, sería necesario completar, tanto el proyecto trabajado con los futuros profesores, para adaptarlo al aprendizaje de otros contenidos estadísticos, como la pauta de evaluación utilizada de la idoneidad cognitiva, para tener en cuenta otros puntos, como los posibles errores de los estudiantes o sus diferentes estrategias en la resolución de las tareas. Todos estos son aspectos a tener en cuenta para continuar la investigación sobre el tema.

AGRADECIMIENTOS

Proyecto EDU2013-41141-P (AEI-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

- AGNELLI, H.; KONIC, P.; PEPARELLI, N. Z.; FLORES, P. La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. **UNION**, Buenos Aires, v. 17, n.1, pp. 52-61. 2009.
- ARTEAGA, P.; BATANERO, C.; GEA, M. M. La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre Estadística: un estudio de evaluación exploratorio. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v.1, n.1, pp. 54-75. 2017.
- BATANERO, C.; BOROVCNIK, M. **Statistics and probability in high school**. Rotterdam: Sense Publishers, 2016.
- BATANERO, C.; GEA, M. M.; DÍAZ, C.; CAÑADAS, G. R. (2014, July). Building high school pre-service teachers' knowledge to teach correlation and regression. En Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9), **Proceedings**. Flagstaff, Estados Unidos. International Association for Statistics Education, 2014. Disponible en: https://iase-web.org/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_1A3_BATANERO.pdf. Acceso en: 3 de Abril de 2017.
- BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ESTEPA, A. Building the meaning of statistical association through data analysis activities. En 22 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Proceedings**. Stellenbosch, South Africa: Universidad de Stellenbosch, 1998. p. 221-236.
- BIEHLER R.; FRISCHEMEIER D.; READING C.; SHAUGHNESSY J.M. Reasoning About Data. En: BEN-ZVI D.; MAKAR K.; GARFIELD J. (Ed) **International Handbook of Research in Statistics Education**. Nueva York: Springer. 2018. Pp. 139-192.
- BROWN, T.; MCNAMARA, O. **Becoming a mathematics teacher: Identity and identifications** Nueva York: Springer. 2011.
- CASEY, S. A. Examining student conceptions of covariation: A focus on the line of best fit. **Journal of Statistics Education**, v. 23, n.1. 2015, Disponible en <http://ww2.amstat.org/publications/jse/v23n1/casey.pdf>. Acceso en: 3 de Abril de 2017.
- CASEY, S. A.; NAGLE, C. Students' use of slope conceptualizations when reasoning about the line of best fit. **Educational Studies in Mathematics**, Limerick, v. 92, n.2, pp. 163–177. 2016.
- CASEY, S. A.; WASSERMAN, N. H. Teachers' knowledge about informal line of best fit. **Statistics Education Research Journal**, Nueva Zelanda, v. 14, n. 1, p. 8-35, 2015.
- CASTRO-SOTOS, A. E.; VANHOOF, S.; VAN DEN NOORTGATE, W.; ONGHENA, P. The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. **Statistics Education Research Journal**, Nueva Zelanda, v.8, n.2, pp. 33-55. 2009.
- EICHLER, A.; ZAPATA-CARDONA, L. **Empirical research in statistics education**. Nueva-York Springer, 2016.

DAWSON, A. J.; JAWORSKI, B.; WOOD, T. **Mathematics teacher education: Critical international perspectives**. Dordrecht ; Routledge. 2013.

DIERDORP, A.; BAKKER, A.; EIJKELHOF, H.; VAN MAANEN, J. Authentic practices as contexts for learning to draw inferences beyond correlated data. **Mathematical Thinking and Learning**, Queensland, v.13, n.1, pp. 132-151. 2011.

EISENHAUER, J. G. Regression through the origin. **Teaching Statistics**, Nottingham, v.25, n.3, pp. 76-80. 2003.

ENGEL, J.; SEDLMEIER, P. Correlation and regression in the training of teachers. En: C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Ed.). **Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study** New York: Springer. 2011, pp. 247-258.

ESTEPA, A. Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona, v. 26, n. 2, p. 257-270, 2008.

ESTEPA, A.; SÁNCHEZ-COBO, F. Evaluación de la comprensión de la correlación y regresión a partir de la resolución de problemas. **Statistics Education Research Journal**, Nueva Zelanda, v. 2, n. 1, p. 54-68, 2003.

GEA, M. M.; LÓPEZ-MARTÍN, M.; ROA, R. Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato. **Avances de Investigación en Educación Matemática**, Barcelona, v.8, n.1, pp. 29-49. 2015.

GIL, E.; GIBBS, A. L. Promoting modeling and covariational reasoning among secondary school students in the context of big data. **Statistics Education Research Journal**, Nueva Zelanda, v.16, n.2, pp. 163-190. 2017.

GODINO, J. D. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**, Costa Rica, v.11, n. 1, pp. 111-132. 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **Revemat**, Santa Catarina, v. 8, n.1, pp. 46-74. 2013.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V. Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 31(57), 90-113. 2017.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, París, v. 34 n. 2, pp. 167-200. 2014.

GÓMEZ, E.; BATANERO, C.; CONTRERAS, J. M. Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 28(48). p. 209-229. 2014.

HILL, H. C.; BALL, D. L.; SCHILLING, S. G. Unpacking pedagogical content knowledge:

Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. **Journal for Research in Mathematics Education**, Alexandria, Estados Unidos, v.39, n.2, pp. 372-400. 2008.

INZUNZA, S. (2016). Análisis de datos bivariados en un ambiente basado en applets y software dinámico. **Educación matemática**, México, v. 28, n.3, pp. 61-90.

KRAINER, K. Teachers as stakeholders in mathematics education research. **The Mathematics Enthusiast**, Montana, Canadá, v.11, n.1, pp. 49-60. 2014.

LLINARES, S. Mathematics teacher's knowledge, knowledge-based reasoning, and contexts. **Journal of Mathematics Teacher Education** 21(1), 1-3. 2018.

MECD, MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE. **Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato**. Madrid: Autor, 2015.

ORTIZ J. J. O.; MOHAMED, N. Componentes del conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. **Investigación en Educación Matemática**, Salamanca, v. XVII, pp. 432-438. 2013.

PINO-FAN, L.; GODINO, J. D. Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del professor **Paradigma**, Caracas, v.36, n.1, pp. 87-109. 2015.

QUINTAS, S.; FERREIRA, R.; OLIVEIRA, H. O conhecimento didático de estatística de duas professoras de matemática sobre dados bivariados. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 51, p. 284-306, 2015.

Recebido em 20 nov 2018; Aceito após revisão em 18 dez 2018.