ESTUDO HISTÓRICO E EPISTEMOLÓGICO SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Cecilia Manoella Carvalho Almeida[1]

Luiz Marcio Santos Farias[2]

Resumo: Este artigo compõe uma pesquisa de mestrado que apresenta um modelo epistemológico de referência o qual tem a finalidade de guiar para uma compreensão de aspectos relacionados ao objeto de estudo em questão: a Probabilidade, num estudo histórico-epistemológico deste saber. Alicerçando-se na Teoria Antropológica do Didático foram realizadas duas análises sobre este saber: uma análise histórica que permite ver como foi desenvolvido o caráter multifacetado do conceito de Probabilidade através de significados atribuídos por alguns dos seus principais filósofos e uma análise com foco na apreciação epistemológica que pretende examinar as diferentes visões ou interpretações dadas ao seu conceito. Metodologicamente esta pesquisa contribui com o desenvolvimento de uma Engenharia de Formação quando revela aos professores do ensino médio, participantes da construção do modelo proposto, obstáculos inerentes à construção do conceito deste saber. Neste estudo, almejou-se lograr o entendimento da razão de ser do ensino de Probabilidade e das condições e/ou restrições que lhe são impostas para, assim, auxiliarmos professores do ensino médio a abordarem este componente curricular de forma mais significativa em suas salas de aulas.

Palavras-chave: História, Epistemologia, Probabilidade, Teoria Antropológica do Didático.

HISTORICAL AND EPISTEMOLOGICAL STUDY ON THE CONCEPT OF PROBABILITY: SOME CONSIDERATIONS

Abstract: This article compiles a master's research that presents an epistemological model of reference which has the purpose of guiding to an understanding of aspects related to the object of study in question: Probability, in a historical-epistemological study of this knowledge. Based on the anthropological theory of the didactic, two analyzes were carried out on this knowledge: a historical analysis that allows us to see how the multifaceted character of the concept of probability was developed through meanings attributed by some of its main philosophers and an analysis focused on the epistemological appreciation which seeks to examine the different views or interpretations given to its concept. Methodologically this research contributes to the development of a Training Engineering when it reveals to the high school teachers, participants in the construction of the proposed model, obstacles inherent to the construction of the concept of this knowledge. In this study, it was sought to achieve an understanding of the rationale of Probability teaching and the conditions and / or

[1] Mestra em Ensino, Filosofia e Historia das Ciências- PPGEFHC (UFBA). Professora de Matemática do Instituto Federal da Bahia (IFBA), Salvador, Bahia, Brasil.Rua Emidio dos Santos s/n, Campus Salvador, Barbalho, Salvador,Bahia,Brasil, CEP: 401301-015. E-mail: cecipatinho@yahoo.com.br

[2] Doutor em Didática da Matemática, Universidade de Montpellier- França. Professor de Matemática da UFBA, Departamento de ciência e tecnologias do Instituto de Humanidades, Artes & Ciências Professor Milton Santos (IHAC). Salvador, Bahia, Brasil. Rua Barão de Jeremoabo, PAF V - Sala 403. s/n. Ondina, Salvador, Bahia, Brasil, CEP:40170-115. E-mail: lmsfarias@ufba.br

restrictions imposed on it, in order to help high school teachers to approach this curricular component more significantly in their classrooms of classrooms.

Keywords: History, Epistemology, Probability, Anthropological Theory of Didactics.

INTRODUÇÃO

A história tem um papel importante no entendimento de qualquer assunto da natureza das ciências, pois, além de permitir uma melhor compreensão do mundo científico, propicia uma apreciação mais clara do assunto abordado, fazendo com que os estudantes argumentem, elaborem discussões acerca da temática e sejam críticos na construção de seu aprendizado.

O presente trabalho histórico-epistemológico sobre o conceito de Probabilidade tem como objetivo construir um modelo epistemológico de referência do conceito de Probabilidade a partir de um estudo histórico-epistemológico. Principalmente, no que tange a averiguar três aspectos: a influência do determinismo que dominava a sociedade na época da elaboração do conceito de Probabilidade; a predominância da equiprobabilidade; e a evolução da Probabilidade até a axiomatização realizada por Andrei Kolmogorov (1903-1987), que possibilitou a confrontação das diversas interpretações da Probabilidade.

Verifica-se, na história da matemática, que a Probabilidade tem uma concepção matemática e filosófica (KATZ, 2009; BOYER; MERZBACH, 2012). Matematicamente falando, neste contexto, nos referimos à Probabilidade no que toca à Teoria formalizada pelos axiomas de Kolmogorov. Já em relação a um ponto de vista filosófico, nos dirigimos às interpretações existentes na formação do seu conceito (clássica, frequentista, geométrica, subjetiva, entre outras). Daremos ênfase às interpretações: clássica e frequentista.

Neste artigo, essa associação (interpretação clássica e interpretação frequentista) faz-se pertinente e, quando apresentadas aos estudantes, estas diferentes interpretações possibilitam pensarmos num ensino do conceito de Probabilidade coerente com o que está posto nos documentos oficiais: a valorização de um aprendizado que propicie a confrontação da Probabilidade *a priori* (definida pela interpretação clássica); e da Probabilidade *a posteriori* (definida pela interpretação frequentista), fazendo com que os estudantes possam inferir, discutir e analisar resultados, debatendo possibilidades, ou seja, exercendo sua cidadania (BRASIL, 2000).

Particularmente, para nós, o ensino do conceito de Probabilidade no nível médio deveria abordar situações do dia a dia e sobre fenômenos aleatórios, permitindo que os estudantes sejam capazes de argumentar e fazer inferências sobre os eventos cotidianos.

Para tanto, buscaremos apresentar este desenvolvimento, norteados pela Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), a qual propõe analisar as praxeologias matemáticas apresentadas, no intuito de revelar a razão de ser da Probabilidade para o seu ensino nos dias de hoje.

Apoiados nos estudos de Coutinho (1994), Cordani (2001), Almeida (2005) e Araújo (2013), ressaltamos que, quando a probabilidade é apresentada aos alunos, de forma a evidenciar, prioritariamente, a abordagem de questões definidas sobre espaços amostrais equiprováveis, ou seja, baseados somente na interpretação clássica, limitamos os mesmos à realização do cálculo prévio da probabilidade de um evento, e, assim, não desenvolvemos nestes a habilidade de experimentar o caráter aleatório da probabilidade.

Desta forma, podemos construir um modelo epistemológico de referência quando trazemos à baila elementos da história e da epistemologia deste saber. Então, a fim de cumprirmos o objetivo proposto, observaremos a construção da Teoria das Probabilidades atrelada a sujeitos e momentos importantes de sua constituição.

Neste percurso, para um melhor entendimento de como a Teoria da Probabilidade foi formalizada e como surgiram interpretações variadas, a análise será voltada ao modo como os fatos surgiram, apontando-se elementos numa contextualização histórica.

Este estudo é parte integrante de uma pesquisa maior que tem por objetivo formular uma engenharia didática de formação com professores que se propõem à criação de um modelo epistemológico didático de referência para o ensino de Probabilidade, integrando as concepções: clássica e frequentista. Assim sendo, buscaremos nesta trajetória histórica e filosófica identificar o caráter multifacetado da Probabilidade em suas interpretações, em especial as interpretações mencionadas.

APORTE TEÓRICO

Com o propósito de fornecer subsídio à investigação aqui proposta sobre o ensino do conceito de Probabilidade, partimos de uma análise através das ferramentas teóricas e metodológicas da Teoria Antropológica do Didático (TAD) proposta por Yves Chevallard (1999), que tem o papel de situar a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais.

A TAD analisa as relações existentes entre o objeto, o saber e as instituições. Nesse juízo, contemplamos as relações institucionais e as relações pessoais que permitem a um saber matemático viver em determinada instituição. A TAD situa-se no programa epistemológico de investigação em didática da matemática (BOSCH; CHEVALLARD, 2006) quando analisa um fenômeno didático por meio de um modelo epistemológico do conhecimento matemático. Assim, com o intuito de dar subsídio à nossa pesquisa, a fim de analisarmos as organizações matemáticas (praxeologias) construídas para o saber Probabilidade, e de posse da TAD, neste artigo, faremos um recuo histórico que nos permitirá entender possíveis lacunas que estão postas nos documentos que norteiam o ensino do referido conteúdo.

Segundo Artaud (1998), uma breve investigação histórica possibilita entendermos a ecologia do saber probabilidade, como este saber vive e o que o produziu.

Fonseca, Bosch e Gascón (2014) afirmam que para a TAD, quando elaboramos um estudo sobre um problema didático, observamos uma interpretação da atividade matemática, ou ainda, um modelo de tal atividade em determinada instituição. A este modelo, que será descrito pela dimensão epistemológica deste problema, chamaremos de modelo epistemológico de referência (MER). Assim, verificamos que é possível construir um MER envolvendo um conceito de probabilidade que sirva de apoio a professores do Ensino Médio.

Assim partiremos da apreciação de elementos da história por meio de um olhar epistemológico da Probabilidade, a fim de construirmos um modelo epistemológico de referência sobre as diferentes formas de concepção e movimentos, destacando as dificuldades previstas no seu ensino.

ELEMENTOS DA HISTÓRIA DA PROBABILIDADE

Segundo Bennett (2003), desde a antiguidade, o homem se relaciona com o acaso. Documentos históricos apresentam relatos da era pré-cristã, na qual babilônios, gregos, egípcios e romanos usavam um osso chamado astrágalo para jogos de azar e em cerimônias religiosas. De acordo com Bennett (2003, p. 23),

> O astrágalo tem quatro longas faces planas totalmente diferentes, as únicas em que ele pousaria quando jogado, duas pequenas extremidades arredondadas. Das quatro faces planas, duas são estreitas e planas e duas são largas, com um lado largo ligeiramente convexo e o outro ligeiramente côncavo.

A autora relata também o surgimento de outros tabuleiros e jogos com ossos. A transição do astrágalo para os dados levou vários milênios; foram surgindo dados com duas, quatro, seis e até oito faces. Bennett (2003) descreve que desde os primórdios da civilização, as pessoas inventavam mecanismos simples com o objetivo de entender o acaso e os resultados de fenômenos aleatórios, com a finalidade de obter resultados favoráveis em jogos ou para tomadas de decisões mais sérias, como definir a escolha de quem vive e/ou de quem morre.

Encontramos na obra de Pichard (2001) dois pontos para justificar o porquê de a teoria da probabilidade ter partido dos jogos de azar e de se ter iniciado seus estudos tão tardiamente (a partir do século XVII). Segundo o teórico, havia uma concepção, por parte dos cientistas, da ausência de utilidade do estudo da teoria da probabilidade para os jogos. Além disso, as pessoas atribuíam os resultados dos sorteios ao "destino" ou à vontade divina. Outro ponto, nesse sentido, consistia na proibição dos jogos pela igreja católica, que conferia ao diabo a atitude de apostar e incitar a discórdia.

Com o avanço dos jogos, começa-se a pensar em um estabelecimento de regras para vencedores e perdedores e a observar os fenômenos aleatórios que estão por detrás das jogadas. Daí, de fato, a Probabilidade surge com estudos sobre a aleatoriedade dos jogos de azar na tentativa de melhorar resultados em eventos incertos.

Nesse percurso, a Teoria das Probabilidades é construída com a finalidade de estudar fenômenos ou experimentos aleatórios. Definimos, segundo Rathje e Zörnig (2012), que um experimento aleatório é um procedimento que tem resultados não determinísticos em determinadas situações. Um resultado é uma simples realização de um fenômeno em consideração e não necessariamente "números". Os autores ainda exemplificam:

> Se uma pessoa escolhe um dia ao acaso e, então, coloca uma moeda de ouro na água para ver se ela afunda ou não, o experimento não é um experimento aleatório ainda que o dia tenha sido escolhido ao acaso. Mas se ela lança a moeda e o interesse está no resultado, se sai cara ou coroa, então esse é um experimento aleatório, devido à natureza não determinística do resultado, seja o dia escolhido ao acaso ou não para a realização do experimento. (RATHJE; ZÖRNIG, 2012, p. 40).

Coutinho (1994) afirma que foi no século XIII que surgiram os primeiros escritos sobre a teoria da Probabilidade nas cartas de De Vetula. O principal nome neste rol foi o de Gerolamo Cardano (1501-1576), que desenvolveu estudos com combinações possíveis com um, dois ou três dados.

> Por exemplo, eu posso facilmente chegar a tirar um, três ou cinco que o dois, o quatro ou o seis. Os pares são colocados de acordo com esta igualdade se o dado é honesto ou caso contrário, eles são feitos maiores ou menores na proporção da lacuna para a verdadeira igualdade. (PICHARD, 2001, p. 17,

tradução nossa).

Nas análises de Cardano, vão surgindo pensamentos que levam a atribuir-se igual possibilidade, independentemente da face observada, ou seja, situações de equiprobabilidade na condução de uma definição formal para probabilidade objetiva (interpretação clássica). Cardano escreveu o *Liber de Ludo Aleae* (publicado após sua morte, em 1663), no qual conta, corretamente, as 36 possíveis sequências de dois dados e as 216 possíveis sequências de três dados, vindo a introduzir a sequência de probabilidade como uma frequência, muito questionado por matemáticos da época.

Também na Itália, outro renascentista desenvolveu estudos sobre sequências aleatórias: Galileu (1564-1642). Na sua obra *Sopra le scoperte dei dadi*, vários problemas sobre jogos de dados, inclusive alguns tratados por Cardano, são abordados. Sua curiosidade levanta discussões a respeito de uma teoria para explicar tais frequências.

Ao tratar de experimentos aleatórios, também buscamos uma definição para o conjunto de todos os possíveis resultados desse conjunto, expressão conhecida como espaço amostral.

De acordo com Pichard (2001), as publicações de Cardano e Galileu movimentaram pensamentos na Itália chegando à França. Surgiram os nomes de Pierre Fermat e Blaise Pascal. Chevalier de Méré apresenta a Pascal, em 1654, o seguinte problema:

> [...] em oito lançamentos de um dado, um jogador deve tentar tirar um; mas após três tentativas frustradas, o jogo parou. Então, como ele deveria ser indenizado? Pascal começou a escrever para Fermat e o conteúdo das suas correspondências deram início à teoria das probabilidades. (BOYER,MERZBACH, 2012, p. 260).

Segundo Coutinho (2007, p. 4),

> Esta nova apreensão do acaso, em situações de enumeração de possibilidades que podem ocorrer, marca o início das concepções probabilistas: ela se encontra explicitada na correspondência entre Pascal e Fermat, que data de 1654, mostrando que o acaso é “geometrizável”. Podemos dizer que com isso, Pascal e Fermat levavam em conta as regularidades macroscópicas observadas em jogos de azar (fenômeno reprodutível que tem intervenção do acaso) para a busca de um modelo matemático que as explicasse.

Essas correspondências foram publicadas anos depois, em 1657, por Christiaan Huygens, em seu tratado chamado *Ratiocinus in Aleae Ludo*, obra que, por meio século, foi referência na área da teoria das probabilidades. Huygens começa, a partir do princípio do seu tratado, a formalizar a noção de *esperança matemática*. Tal noção foi expressa por Pascal no *Tratado do triângulo aritmético*, sob o nome de "valor da possibilidade". Huygens acreditava que, embora nos jogos de puro azar os resultados fossem incertos, a possibilidade que um jogador tem de ganhar ou de perder possui um valor determinado. (PICHARD, 2001).

Sobre a extensão das contribuições aos jogos de azar, Leibniz (1646-1716) trouxe acréscimos à conceitualização da probabilidade nomeadamente com a associação dos graus de probabilidade a graus de certeza, conhecida como Probabilidade epistêmica. (ALMEIDA, 2005).

Seguindo uma ordem de apresentação de contribuições relevantes à teoria das Probabilidades, surgem, após o nome de Huygens, no século XVIII, os nomes de Pierre Rémond de Montmort, Jacques Bernoulli e Abraham De Moivre, entre 1708 e 1713, com a publicação de três livros importantes: *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard*, por Montmort, em 1708; *De Mensura Sortis*, à memória de De Moivre, em 1711; e o livro *Ars Conjectandi*, de J. Bernoulli, em 1713. Estes trabalhos tratam, em grande parte, dos mesmos problemas, isto é, encontrar as Probabilidades de ganhar em vários jogos de azar. Os métodos combinatórios, recursão, série, esperança e condicional são encontrados nas três obras, em maior ou menor grau.

A teoria das probabilidades voltou a ser questionada nas contribuições de Montmort (1678-1719), nomeadamente na obra *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hasard*, na qual o teórico aborda os problemas propostos, sugerindo novas análises sobre a obra de Cardano. Pichard (2001) afirma que Montmort recebeu aportes de Jean, Jacob e Nicolas Bernoulli para que consolidasse o pensamento combinatório em suas apreciações.

A família Bernoulli apresenta grandes contribuições no avanço da teoria das Probabilidades. No livro *Ars Conjectandi* (1713), Jacob Bernoulli (1654-1705) começou a discutir sobre o cálculo de Probabilidades na perspectiva de que as Probabilidades de que um erro dentro de um valor observado e do valor real deveria situar-se dentro de algum limite especificado e, em seguida, calculou o número de observações necessárias para elevar as Probabilidades àquela quantia (BERNSTEIN, 1998). Esta obra representa para o pensamento da época um avanço a uma nova perspectiva: a de definir o conceito de Probabilidade como resultado de experimentações futuras – origem da interpretação frequentista.

A obra citada está dividida em quatro partes: na primeira, há uma inserção de notas e comentários acerca do trabalho de Huygens; na segunda, o autor propõe soluções baseadas no cálculo de esperança matemática, por progressões geométricas infinitas; a terceira parte trata sobre permutações e combinações; e na quarta parte, apresenta questões, em aberto, as quais geraram discussões a respeito da lei dos grandes números.

Nesse sentido, Jacques Bernoulli propicia debates que, mais tarde, foram formalizados por Pierre Simon Laplace em seu *Ensaio filosófico sobre as probabilidades*, dando origem à, hoje, chamada interpretação clássica. Bernoulli e Leibniz discutiram suas ideias e apontaram em seus respectivos trabalhos uma nova interpretação para a teoria da Probabilidade, estudando a relação entre a Probabilidade de um evento sobre uma experiência aleatória e uma frequência relativa. Laplace vai chamar o resultado obtido de Teorema de ouro, e depois, de Lei dos grandes números.

Bernoulli, além de ter tratado da teoria das Probabilidades, não só trazendo uma teoria geral de permutações, combinações e o teorema binomial descoberto por Pascal, tratou dos chamados números de Bernoulli, que surgiram de uma fórmula de recorrência para números inteiros, com uma parte ilustrando a teoria das Probabilidades e a Lei dos grandes números.

A lei aludida forneceu fundamentação teórica para técnicas desenvolvidas na obtenção de estimativas em cálculos de Probabilidades de eventos. Segundo Magalhães (2013, p. 324),

> Em um certo espaço de probabilidade, considere um experimento em que o evento A tem probabilidade P(A) = p. A intuição, frequentemente aceita, indica que em um grande número de repetições do experimento, a frequência relativa de ocorrência de A se aproxima de p. Isto é, $\frac{n_A}{n} \approx p$, em que n_A é a frequência de A e n o total de repetições.

Magalhães (2013, p. 324) ressalta que, só foi possível colocar em bases sólidas, vários dos conceitos, intuitivamente aceitos, devido à formalização axiomática de Kolmogorov, em 1934. E, que, “para experimentos aleatórios, a noção intuitiva de Probabilidade, como frequência relativa para um grande número de repetições, torna-se um resultado matemático rigoroso, através da aplicação de um caso especial da Lei dos Grandes Números”. (MAGALHÃES, 2013, p. 324).

A lei dos grandes números foi discutida e sofreu contribuições, também, a partir dos estudos de Markov e dos axiomas de Kolmogorov, propiciando uma definição mais rigorosa e não intuitiva.

Pierre Simon Laplace (1749-1827) surgiu, então, como propulsor da visão clássica da Probabilidade, ao propor a definição de Probabilidade de um evento como o número de resultados favoráveis de todos os casos possíveis, acrescentando: "mas isso pressupõe os diversos casos igualmente possíveis." (LAPLACE, 2010, p. 46). Esta acepção é chamada pelo estudioso de primeiro princípio, na obra clássica *Ensaio filosófico sobre as Probabilidades*. Partindo dessa ideia, o matemático retrata a teoria da Probabilidade em dez princípios, chamados de princípios gerais do cálculo das Probabilidades.

O princípio nº 1 refere-se à definição de Probabilidade como a relação entre o número de casos favoráveis e número de todos os casos possíveis. O princípio nº 2 complementa o primeiro, estabelecendo, para casos que não sejam igualmente possíveis, que a Probabilidade seja calculada a partir das somas das possibilidades de cada caso favorável. O princípio nº 3 assevera que, se os eventos são independentes uns dos outros, a Probabilidade da existência de seu conjunto é o produto de suas Probabilidades individuais. O princípio nº 4 afiança que: quando dois eventos dependem um do outro, a Probabilidade do evento composto é o produto da probabilidade do primeiro evento pela Probabilidade de que, tendo ocorrido o primeiro, o outro ocorrerá. No princípio nº 5, encontra-se o seguinte:

> [...] se forem calculadas *a priori*, a Probabilidade do evento ocorrido e aquela de um evento composto desse e de um outro que se espera, a segunda Probabilidade dividida pela primeira será a Probabilidade do evento esperado, inferida do evento observado. (LAPLACE, 2010, p. 53).

Assim, para cada um dos princípios descritos por Laplace, são levantadas situações que justificam o primeiro princípio, com exemplos, e desta forma são apresentados os dez princípios. O matemático demonstra o que inicialmente chamava de teoria do acaso, como teoria da Probabilidade.

Além disso, Laplace discute seus princípios levantando vantagens quanto à análise de Probabilidades na investigação das leis dos fenômenos naturais, cujas causas são desconhecidas, e ainda propõe que sejam aplicados às ciências morais, tratando de Probabilidades em julgamentos, testemunhos etc.

No livro referido de Laplace, também é possível verificar um tópico sobre os métodos analíticos para o cálculo de Probabilidade, no qual é feita uma análise associada às equações lineares e aos cálculos de diferenciais. O autor argumenta:

> Frequentemente somos conduzidos a expressões que contêm um número tão grande de termos e fatores que as substituições numéricas tornam-se impraticáveis. É o que ocorre nas questões de probabilidade, quando se considera um grande número de eventos. Entretanto, é importante, nesses casos, ter o valor numérico das fórmulas para se conhecer com qual probabilidade são indicados os resultados que os eventos produzem ao se multiplicarem. É importante, sobretudo, dispor da lei segundo a qual essa probabilidade se aproxima sem cessar da certeza que ela atingiria quando o número dos eventos se tornasse infinito. (LAPLACE, 2010, p. 80).

Após a publicação de Laplace, os estudos acerca da teoria da Probabilidade aumentaram e geraram indagações a respeito de seu determinismo. De acordo com Coutinho (1994), no início do século XX, foi gradativamente verificada uma mudança qualitativa em relação às interpretações do acaso. Jules Henri Poincaré (1854-1912) evidenciou o limite do determinismo de Laplace e trouxe à baila observações sobre a natureza do acaso, como no seguinte exemplo: "Se um cone repousa sobre sua ponta, nós sabemos que ele vai tombar, mas não sabemos para que lado; nos parece que somente o acaso vai decidir" (POINCARÉ, 1912 *apud* COUTINHO, 1994, p. 23). Ele chega a considerar todas as variáveis aleatórias envolvidas ao acaso.

Encontramos em Henry (2001) a citação da obra *Calcul de Probabilités* de Henry Poincaré, que alega o seguinte:

> A definição completa de probabilidade é uma espécie de petição de princípio: como reconhecer que todos os casos são igualmente prováveis? Uma definição matemática aqui não é possível; devemos, em cada aplicação, fazer convenções, dizer que consideramos tais e tais casos como igualmente prováveis. Estas convenções não são inteiramente arbitrárias, mas escapam do espírito do matemático que não terá que examiná-las, uma vez que são admitidos. Assim, todo problema de probabilidade oferece dois períodos de estudo: o primeiro, metafísico, por assim dizer, que legitima esta ou aquela convenção; o segundo, matemático, que aplica a essas convenções as regras de cálculo. (HENRY, 2001, p. 64-65, tradução nossa).

Nesse campo argumentativo, para precisar o acaso, Poincaré classifica o acidente do equilíbrio do cone de repouso na sua ponta, referindo-se às causas regulares da sua simetria perfeita e não a um objeto de probabilidade. O estudioso compara o acaso a causas que nos escapam devido a uma desproporção entre as causas ínfimas e seus efeitos macroscópicos (COUTINHO, 2001, p. 26).

Quanto às contribuições à teoria das Probabilidades, aparecem também os trabalhos de Emile Borel e John Maynard Keynes. Ambos apresentam um olhar sobre a Probabilidade subjetiva na Teoria de Medidas. Faz-se importante citar também a Teoria Frequencial de Von Mises, em que se propõe construir uma axiomática para a teoria da Probabilidade com base em duas condições axiomáticas: o axioma da convergência e o axioma da aleatoriedade; quando uma sequência satisfaz ambas as condições, é denominada de coletivo. Von Mises considera que a Probabilidade só existe quando aplicada a coletivos, sendo definida através dos limites das frequências relativas. Popper (2006, p. 82) demonstra uma definição de coletivo:

> Um coletivo é, grosseiramente falando, uma sequência de eventos ou

> ocorrências, suscetível, em princípio, de continuidade indefinida, como, por exemplo, uma sequência de lançamentos, feita com um dado supostamente indestrutível. Cada um desses eventos apresenta certo caráter ou propriedade; por exemplo, o lançamento pode fazer com que apareça o número cinco e, assim, tem a propriedade cinco.

Von Mises é considerado um dos propulsores da teoria frequentista. Neste movimento, surge Thomas Bayes, que despertou um novo olhar à Probabilidade, em um ensaio publicado, após a sua morte, com as definições de Probabilidade *a priori* e de Probabilidade *a posteriori*. Coutinho (1994) extrai de Henry (1994) considerações a respeito da obra de Bayes:

> Considerando a probabilidade de um evento como uma medida física, sem informação sobre esta, ele postula a priori a repartição uniforme de seus valores possíveis, deixando para reajustar a posteriori. Ele introduz assim duas noções de probabilidade: a primeira, que buscamos estimar, é objetiva, a segunda apreciando o valor possível da precedente, colocada a priori, é subjetiva. (HENRY, 1994, p. 25 *apud* COUTINHO, 1994, p. 15).

Ainda segundo Coutinho (1994, p. 27),

> O difícil caráter subjetivo da probabilidade, definido por Bayes, vem, muitas vezes, reforçar a concepção errônea de que a probabilidade de um evento depende das informações sobre esse evento, ou seja, das informações obtidas pelo observador (observações diferentes geram probabilidades para um mesmo evento).

Emile Borel (1871-1956), por seu turno, é responsável por uma comunicação estreita entre a Teoria das Probabilidades e a Teoria de Medidas. A probabilidade, nesse contexto, é concebida como uma medição. Na obra *Le Hasard*, de 1914, Borel introduz uma axiomática ao cálculo de Probabilidades; a noção de Probabilidade foi estendida para espaços inacabados. O matemático tece considerações expressivas sobre a lei fraca dos grandes números, ponderando ainda: "em suas diversas obras sobre o assunto, retoma numerosas contribuições epistemológicas sobre a noção de Probabilidade, assim como discorre sobre inúmeras aplicações". (COUTINHO, 1994, p. 24).

Andrei Nikolaevich Kolmogorov, em 1933, deu início à teoria moderna das Probabilidades, na qual apresentou um conjunto de axiomas matemáticos rigorosos e abstratos da Teoria da Probabilidade baseada na Teoria dos Conjuntos, reduzindo a Teoria das Probabilidades à Teoria da Integração. Encontramos em Magalhães (2013, p. 11) que:

> Uma função P, definida na σ - álgebra F de subconjuntos de Ω e com valores em (0,1), é uma probabilidade se satisfaz os Axiomas de Kolmogorov:

1. P(Ω) = 1;
2. Para todo subconjunto A∈ F, P(A)≥ 0;
3. Para toda sequência $A_1, A_2 ...$ ∈ F, mutuamente exclusivos, temos
   $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_1) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_1)$.

Almeida (2005) relata, em seu artigo, a ausência da predominância da visão determinista de Laplace e traz a questão da complexidade da natureza e da falta de conhecimento, ou de capacidade cognitiva, que foi fortemente abalada com as "revoluções científicas" na Física, especialmente na mecânica quântica. Almeida (2005) discute ainda que, para além do aprofundamento de vertentes lógicas (crença racional) e subjetivistas (crença pessoal), consolidou-se uma base de aceitação do indeterminismo, incluindo a posição de Karl Popper, relativamente à sua interpretação da Probabilidade baseada na teoria que propôs: a teoria de propensão.

A ausência de ferramentas matemáticas suficientes, permitiu que, por muito tempo, não se calculassem espaços de Probabilidade sobre sequências infinitas. Podemos compreender nesse aspecto, as origens e a evolução das práticas teóricas ou didáticas, os motivos que levaram, de Laplace a Kolmogorov, à separação dos campos semânticos e sintáticos. Assim sendo, a história, por meio de uma reflexão epistemológica, permite-nos situar as dificuldades teóricas e/ou didáticas relacionadas à introdução em sala da aula, do conceito de Probabilidade (PICHARD, 2013), possibilitando-nos outro olhar sobre este tema, como versaremos a seguir.

UM OLHAR EPISTEMOLÓGICO SOBRE A PROBABILIDADE

O conceito de Probabilidade é um assunto amplo que possibilita discussão e debates de cunho filosófico, epistemológico, ontológico, psicológico e até mesmo teológico. Além disso, está presente em diversas áreas do conhecimento, a exemplo da Estatística, Física, Química, Biologia, Economia etc. A Probabilidade também se situa na determinação de qualquer ação de base aleatória, indeterminista. Nesse campo, muitas são as suas definições, as suas interpretações.

Concordamos com Kasner e Newman (1976) no sentido de que sabemos muito pouco ou quase nada a respeito dos fenômenos que nos cercam. Dessa maneira, muitos de nossos julgamentos são baseados na Probabilidade. Para um estudo epistemológico da Probabilidade, nos deteremos em analisar a concepção deste saber em um viés epistemológico. Antecipadamente, salientamos que a Teoria da Probabilidade é contemplada por diversas visões, interpretações. Neste momento, apresentaremos aqui as principais interpretações da Probabilidade, com base nos autores mais referenciados em estudos sobre o tema, buscando, com isso, apresentar o caráter multifacetado da teoria em pauta.

A filosofia das Probabilidades é uma filosofia anglo-saxônica e analítica, de inspiração científica, que foi desenvolvida paralelamente ao positivismo lógico no início do século XX. Almeida (2005) aponta que, a partir do século aludido, essas interpretações se deram devido às mudanças ocorridas na física, com as "revoluções científicas" na mecânica quântica. A visão determinista deixa de ser predominante e dá lugar ao indeterminismo e à tensão entre estas novas interpretações da Probabilidade.

Popper (2006) pondera a respeito da Probabilidade a partir de dois objetivos: o primeiro, de proporcionar fundamentos novos para o cálculo de Probabilidades desenvolvendo a Teoria da Probabilidade, como a teoria de frequência de Von Mises; e o segundo, de elucidar as relações entre Probabilidade e experiência. Nesse contexto, através da interpretação clássica, Popper (2006) apresenta duas classes de interpretações: as subjetivas e as objetivas. Segundo o autor, uma interpretação subjetiva trata o grau de Probabilidade em termos de medidas de sentimentos, de certeza ou incerteza, um grau de crença racional. Já a interpretação objetiva, considera todo enunciado de Probabilidade numérica, em termos de enunciado, acerca da frequência relativa com que o evento se manifesta.

Popper (2006) ainda levanta dois problemas referentes à interpretação dos enunciados de Probabilidade: aqueles que não enunciam uma Probabilidade em termos de números, e aqueles que a enunciam como Probabilidade numérica. Freire Jr. (2004) discorre em seu artigo "Popper, probabilidade e mecânica quântica" sobre como Karl Popper gerou contribuições para a teoria quântica e à teoria das Probabilidades, como fica explícito a seguir:

> A principal contribuição intelectual especificamente popperiana para a controvérsia foi a recusa tanto da interpretação *frequentista* quanto da interpretação *subjetivista* como válidas, no âmbito das ciências físicas, para os enunciados probabilísticos. Recusando essas alternativas, Popper propôs a adoção, para esses enunciados, de uma interpretação em termos de *propensões*. (FREIRE JR., 2004, p. 3).

A interpretação proposta por Guilles (2000) começa, já no primeiro capítulo, afirmando que a Teoria das Probabilidades tem dois aspectos: um matemático e outro filosófico, e apresenta as quatro principais correntes atuais de interpretação:

> - Teoria lógica, que identifica probabilidade com o grau de crença racional,

> presume-se que dada uma mesma evidência, todos os seres humanos racionais terão o mesmo grau de crença em uma hipótese ou previsão.
>
> - Teoria subjetiva, que identifica a probabilidade com o grau de crença de um indivíduo em particular, aqui não se assume mais que todos os seres humanos racionais, diante de uma mesma evidência, tenham o mesmo grau de crença numa hipótese ou previsão, diferentes opiniões são permitidas.
>
> - Teoria frequentista, que define a probabilidade de um acontecimento como a frequência-limite com que esse resultado aparece em uma longa série de eventos semelhantes.
>
> - Teoria da propensão, ou pelo menos uma de suas versões, leva a probabilidade a ser uma propensão inerente a um conjunto de condições repetíveis. Dizer que a probabilidade de um determinado resultado é p é reivindicar que as condições repetíveis têm uma propensão tal que, se fossem repetidas um grande número de vezes, elas produziriam uma frequência de resultado próximo a p. (GUILLES, 2000, p. 1, tradução nossa).

Decorre que, nem todos os filósofos e/ou defensores de uma determinada interpretação particular da Probabilidade, admitem somente como válida. Popper refutava a ideia de uma Probabilidade objetiva, e a considerava ineficiente para o cálculo de Probabilidades. Com isso, o autor dá origem à teoria da propensão. Muitos outros estudiosos da época, ao fundarem a teoria subjetiva, acreditavam que a mesma seria capaz de responder todas as questões propostas. Isso não quer dizer que uma tem mais valor do que a outra, mas justifica a ideia de que a probabilidade não pode ser entendida ou, principalmente, não pode ser assim ensinada, isto é, ser lecionada considerando-se apenas uma de suas interpretações.

De acordo com Araújo e Igliori (2013), para a educação matemática são três as interpretações proeminentes: a interpretação clássica, a interpretação frequentista e a interpretação subjetiva. Este artigo compõe parte de um trabalho no qual o enfoque será dado às duas primeiras interpretações mencionadas da Probabilidade.

Scheemaecker (2009) apresenta um estudo filosófico afirmando que o conceito de Probabilidade é fundamentalmente dual. Uma parte do conceito de Probabilidade se preocupa com o grau de crença de certas proposições, como um conceito epistêmico, de fato, e faz referência à interpretação clássica da Probabilidade. A outra parte do conceito de Probabilidade é associada aos fenômenos estatísticos, à frequência de repetição de um evento que podemos realmente observar e a um olhar sobre a interpretação frequentista. Scheemaecker (2009) evidencia que, para a teoria frequentista, a Probabilidade é um conceito empírico, e que esta teoria é diametralmente oposta às teorias epistêmicas. O destaque nesta teoria, é que a mesma possibilita fornecer uma fundação rigorosa da noção empírica da Probabilidade.

Conforme Almeida (2005), a interpretação clássica vem a ser uma das primeiras definições propostas, apesar de sua construção ter sido efetivada no século XVII, a partir das ideias de Pascal, Bernoulli, Huygens e outros. Também conhecida como Probabilidade subjetiva, foi no século XIX que ocorreu a axiomatização da Probabilidade, na ocasião em que Laplace apresentou sua obra *Ensaio Filosófico sobre probabilidades* (1814), conduzindo as ideias rumo a uma compreensão matemática da Probabilidade como objeto – ao defini-la pela razão entre o número de casos favoráveis pelo número total de casos possíveis. Assim,

> A teoria dos acasos consiste em reduzir todos os eventos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, de forma tal que estejamos igualmente indecisos sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao evento cuja probabilidade é desejada. A relação entre esse número e aquele de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, que corresponde assim a uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e o denominador o número de todos os casos possíveis. (LAPLACE, 1814 *apud* LAPLACE, 2010, p. 46).

Esta acepção mostra claramente o caráter determinista de Laplace e limita a hipótese de equiprobabilidade[3]. Conforme descrevemos anteriormente, esta linha de pensamento surgiu desde os estudos de Pascal e Fermat, com a resolução do problema do jogo interrompido proposto por Chevalier de Meré[4]. A significação clássica ou laplaciana, apesar de utilizada somente em eventos elementares equiprováveis, é bastante usada para o cálculo de problemas de contagem em análise combinatória.

A interpretação frequentista é oriunda do cálculo das frequências relativas. Segundo Katz (2009), Jacob Bernoulli, em seu estudo sobre o assunto, há mais de 20 anos, queria poder quantificar o risco em situações em que era impossível enumerar todas as possibilidades. Para isso, ele propôs verificar Probabilidades *a posteriori*, apreciando os resultados observados em muitos casos semelhantes, ou seja, considerando algumas estatísticas.

Verificamos em Katz (2009), que o objetivo do teorema de Bernoulli era ratificar que,

> [...] à medida que o número de observações aumenta, a probabilidade de obter a relação verdadeira entre o número de casos em que algum evento pode acontecer e não acontecer, de modo que essa probabilidade possa eventualmente exceder qualquer grau de certeza. (KATZ, 2009, p. 645,

---

[3] O termo equiprobabilidade é utilizado na teoria da probabilidade para expressar uma situação onde todos os resultados possíveis do evento têm a mesma chance de ocorrer.

[4] Chevalier de Meré propõe o jogo a Pascal informando que o jogo seria finalizado ao se ter um vencedor de 6 partidas, mas foi interrompido quando um jogador tinha 5 vitórias e o outro tinha 3. Como dividir a aposta?

> tradução nossa).

Mas, apesar deste aporte quanto à consideração de Bernoulli, o mesmo não teve sua obra publicada imediatamente, pois suas experimentações só podiam dizer o quão provável era que as frequências observadas se aproximassem de uma dada probabilidade. (KATZ, 2009).

Por outro lado, Von Mises contribuiu com o conceito em questão, segundo Cordani (2001, p. 75), ao definir que:

> A Probabilidade de um evento é tomada como limite da frequência relativa, considerando repetições infinitas de experimentos, sob as mesmas condições (daí o nome frequentista que esta teoria também possui). No entanto, a observação empírica é finita e esta teoria seria aplicável àquelas sequências finitas cujo comportamento se aproxima da idealização da sequência infinita. [...].

A interpretação da Probabilidade através da frequência relativa é realizada por experiência e, desta forma, podemos inferir a sua aproximação com a interpretação clássica, chamada de Probabilidade *a posteriori*. Sua apresentação permite, hoje, que no ensino de Probabilidade esta seja apresentada aos alunos por intermédio de sequências didáticas desenvolvidas a partir de situações reais, reforçando a presença da aleatoriedade e do caráter subjetivo do seu conceito.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Conforme havíamos exposto, este artigo propõe-se a apresentar um modelo epistemológico de referência constituído através de elementos da história e da filosofia da Probabilidade, a fim de fornecer ao leitor um panorama sobre as múltiplas interpretações deste saber, e também para que possamos entender os caminhos trilhados pelo modelo epistemológico dominante. Ele representa parte de uma pesquisa de mestrado concluída que objetivou revelar um estudo histórico-epistemológico para o ensino deste componente curricular. Estudo este que reforçou a hipótese aqui trabalhada: a de que há predominância do determinismo da matemática, o que dificulta a apresentação de situações construídas por eventos não determinísticos, isto é, ocorrências que envolvem situações reais do cotidiano.

Observamos que, apesar de ter sido desenvolvida, de fato, a partir do século XVII, a Probabilidade foi elaborada na tentativa de se resolver problemas sobre a aleatoriedade desde tempos remotos. Nesse aspecto, até hoje vivenciamos em sala de aula dificuldades sobre como lidar com problemas e/ou fenômenos didáticos relacionados a tomadas de decisões acerca do acaso.

Apresentamos aqui também, a necessidade, demonstrada ao longo dos anos, de se definir a probabilidade; além da forte influência da premissa de que para desenvolvermos um cálculo de probabilidades, calculamos os possíveis espaços amostrais pelos teoremas de análise combinatória, limitando nossa apreciação no tocante a acontecimentos equiprováveis sob espaços amostrais reduzidos.

Na análise do movimento histórico da probabilidade, pudemos verificar a variedade de suas interpretações, as quais foram refletidas e destinadas à construção de importantes teoremas que utilizamos cotidianamente. Hoje, a probabilidade é usada em várias áreas do conhecimento: Física, Biologia, Economia etc., inclusive quando aplicada à Estatística.

Enfatizamos também, que apenas com Kolmogorov foi possível fazer uma axiomatização da probabilidade; a interpretação clássica da probabilidade não dispunha de ferramentas para expressar a noção de aleatoriedade e trabalhar com conjuntos infinitos, com a definição da razão do número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis, que só faz sentido se todos esses casos têm a mesma chance de ocorrer. Situações estas, que são resolvidas por cálculo utilizando-se técnicas de contagem, o que torna a aderência do ensino de probabilidade ao de análise combinatória.

Nesta pesquisa, procuramos ainda explanar alguns elementos da história e da epistemologia da Probabilidade, que decorrem sobre qualquer dos principais feitos que compõem esta teoria. Na busca de uma razão de ser para o ensino do conceito de Probabilidade, verificamos que o desenvolvimento da Probabilidade se dá sem referência à Estatística, fruto talvez da configuração do ensino atual. O que podemos inferir é que a exploração de situações didáticas com uso da frequência relativa associada ao cálculo de Probabilidade, permitem uma melhor aproximação destes saberes.

A busca da convergência das interpretações da probabilidade, clássica e frequentista, resultam em mostrar aos alunos que é possível estudar o conceito de probabilidade sem nos limitarmos à equiprobabilidade. Isso faz com que aproximemos a estatística da probabilidade – trabalho que pode ser de grande valia para professores em turmas do ensino médio, onde se tem como finalidade desenvolver nos estudantes um entendimento sobre os fenômenos aleatórios cotidianos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. B de. **O Problema epistemológico da Probabilidade e a contribuição de Karl Popper para o respectivo debate**. 2005. 63 f. Trabalho realizado no âmbito da disciplina de Filosofia da Ciência do Curso de Mestrado de Filosofia e História de Ciência e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2005.

ARAÚJO, P. C. **Uma combinação de métodos de pesquisa em educação matemática**: método bayesiano de dados difusos. 2013. 257 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013.

ARTAUD, M. Conditions et contraentes de l’ existence des mathematiques dans l’enseignement general. **IUFM d'Aix-Marseille**, France, n. 50, p. 23-38, 1998.

BENNETT, D. J. **Aleatoriedade**. São Paulo: Editora Martins Fontes, 2003.

BERNSTEIN, P. L. **Desafio aos deuses**: a fascinante história do risco. 16 ed. Editora Campus, 1998.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La Sensibilité de l´activité mathematique aux ostensifs**. 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf>. Acesso em: 15 set. 2016.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** – Matemática. Brasília: MEC, 2000.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Marseille, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CORDANI, L. K. **O ensino de estatística na Universidade e a controvérsia sobre os fundamentos da inferência**. 2001. 154 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista-** Estudo Epistemológico e Didático. 1994. 151 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

______. Introduction aux Situations Aléatories dès le collège: de la modelisation à la simulation d´expériences de Bernoulli dans l`environnement informatique Cabri-Geométre II. 2001. 338 f. Thèse (Doctorat em Didactique des Mathématiques) – Université Joseph Fourier, Grenoble, 2001.

______. Conceitos probabilísticos:quais contextos a história aponta? **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v.2, p.50-67,2007.

FONSECA, C.; GASCÓN, J.; LUCAS, C. O. Desarrollo de un Modelo Epistemológico de Referencia en torno a la Modelización Funcional. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, n. 17, p. 289-318, 2014.

FREIRE JR., O. **Popper, probabilidade e mecânica quântica**. Porto Alegre: Episteme, 2004.

GUILLES, D. **Philosophical Theories of Probability**. New York: Editora Routledge, 2000.

HENRY, M. Modelisation d`une situation aléatoire. In: ______ (Coord.). **Autour de la modélisation em Probabilités**. France: Presses universitaires de Franche-Comté, 2001.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática e Imaginação**: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos. 2. ed. Rio de Janeiro: Biblioteca da Cultura Científica, Editores Zahar, 1976.

KATZ, V. A History of Mathematics. 3. ed. Editora Pearson, 2009.

LAPLACE, P. S. **Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades**. Tradução, introdução e notas Pedro Leite de Santana. Rio de Janeiro: Editora Contraponto, PUC-Rio, 2010.

MAGALHÃES, N. M. **Probabilidade e Variáveis Aleatórias**. São Paulo: Editora Edusp, 2013.

PICHARD, J. F. Les Probabilités au tournant du XVIII siècle. In: HENRY, M. (Coord.). **Autour de la modélisation em Probabilités**. France: Presses universitaires de Franche-Comté, 2001.

POPPER, K. **Conjecturas e refutações**. Tradução Benedita Bettencourt. Coimbra: Livraria Almedina, 2006.

RATHJE, P. N.; ZÖRNIG, P. **Teoria da Probabilidade**. Brasília: Universidade de Brasília, Editora UNB, 2012.

SCHEEMAECKER, X. de. **Les fondements philosophiques du concept de probabilité**. Bruxelles: Université libre de Bruxelles, Editora ULB, 2015.

Recebido em 20 nov 2018; Aceito após revisão em 7 jan 2019.