PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO: UMA INVESTIGAÇÃO AÇÃO EM CONTRASTE COM O CURRÍCULO

Leandro de Oliveira Souza[1]

Giselle Correa de Souza[2]

Marcia Leite Silveira[3]

Resumo: Documentos curriculares brasileiros recomendam a utilização de abordagens empíricas para simular problemas relacionados às probabilidades. Baseando-se nesta orientação, planejamos um curso para um grupo de alunos do Ensino Médio a fim de pesquisar e, assim, entender como o desenvolvimento de atividades de simulação possibilitariam uma melhor compreensão de conceitos de probabilidade. Com as reflexões verbalizadas pelos sujeitos durante o curso, percebeu-se que é preciso compreender o que os impede de contabilizar combinações aditivas inversas. Como pressuposto teórico-metodológico, utilizou-se a investigação ação. A coleta de dados ocorreu no decorrer das aulas ministradas, e a análise foi feita sobre material vídeo e audiogravado, cópia das anotações dos estudantes e registros das observações dos pesquisadores. Além desses dados, buscou-se avaliar atividades similares em uma coleção de livros didáticos do Ensino Fundamental. Os resultados apontam que conceitos matemáticos desenvolvidos nos exemplares podem influenciar concepções equivocadas nos discentes.

Palavras-chave: Probabilidade. Simulação. Abordagens Empíricas. Combinações. Investigação ação.

PROBABILITY IN ELEMENTARY SCHOOL: AN ACTION RESEARCH IN CONTRAST TO CURRICULUM

Abstract: Brazilian curricular documents recommend the use of empirical approaches to simulation problems related to probability. Based on this orientation, we developed a course for a group of high school students. The aim was to understand how a development of teaching activities allowed for students a better understanding of the concepts of probability. With reflections verbalized by them during the course, we realize that it is necessary to understand what prevents students to count the inverse of an additive combination. As a theoretical-methodological assumption action inquiry research was used. Data collection took place during the classes given, and an analysis was made of video and audio recorded material, record of student annotations and records of researchers' observations. In addition to

[1] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Cruzeiro do Sul; Professor da Universidade Federal de Uberlândia/Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal - UFU/ICENP, Ituiutaba, Minas Gerais, Brasil; leandrosouza@ufu.br

[2] Licencianda em Matemática pela Universidade Federal de Uberlândia/Instituto de Ciências Exatas e Naturais do Pontal - UFU/ICENP, Ituiutaba, Minas Gerais, Brasil; giselle@ufu.br

[3] Licenciada em Matemática; Mestranda em Ensino de Ciências e Matemática na Universidade Federal de Uberlândia - UFU, Ituiutaba, Minas Gerais, Brasil; marcialeite.itba@yahoo.com.br

these data, we search for similar activities in a collection of elementary school textbooks. The results shows that mathematical concepts developed by textbooks could determinate inferential misconceptions made by students.

Keywords: Curricular documents. Empirical approaches. Combinations. PNLD.

INTRODUÇÃO

O bloco de conteúdos Tratamento da Informação na Educação Matemática, apesar de poder ter sido incorporado aos outros três existentes (Números e operações, Espaço e forma, Grandezas e medidas), foi introduzido separadamente pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, p. 38) a fim de “evidenciar sua importância, em função de seu uso atual na sociedade”. À época em que o documento foi divulgado, conceitos relativos a noções estatísticas, de probabilidade e de combinatória integraram o bloco.

Os PCN orientavam que, em relação à Estatística, a finalidade do processo de ensino e aprendizagem deveria ser de auxiliar o aluno a construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando, além de tabelas e gráficos, também representações que costumam aparecer no seu dia a dia. Em referência à Combinatória, o objetivo das abordagens de sala de aula teria de ser levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvessem combinações, arranjos, permutações e, em particular, o princípio multiplicativo da contagem. Por último, fazendo ênfase à Probabilidade, o propósito dos PCN para o trabalho do professor era levar o aluno a compreender que grande parte dos acontecimentos do cotidiano é de natureza aleatória. Ao estudar tais fenômenos, o documento orienta que os estudantes deveriam ser levados a perceber que é possível identificar prováveis resultados dos acontecimentos. Além disso, por orientação dos PCN, as noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, também deveriam ser exploradas nas escolas. Isso em situações nas quais o aluno tivesse a oportunidade de realizar experimentos e observar eventos (em espaços equiprováveis).

Como os PCN abordam os conteúdos de Probabilidade, Estatística e Combinatória dentro do mesmo bloco, seria desejável que estes conceitos fossem apresentados à sociedade de forma entrelaçada, sem fragmentação e descontextualização (SANTANA; BORBA, 2010). Isso não ocorre, e a abordagem é refletida na baixa qualidade das atividades apresentadas nos livros didáticos (BRASIL, 2016). Inclusive, no guia do PNLD 2017, as tarefas de combinatória dos livros já têm sido contabilizadas no bloco de números e operações.

Entendemos que essa abordagem permitirá desarticular ainda mais a Combinatória dos conceitos de Probabilidade e Estatística.

Assim, há uma certa urgência de produção de materiais que subsidiem o trabalho docente, possibilitando a integração entre Combinatória, Probabilidade e Estatística; publicações de relatos nos quais se socializem situações didáticas que envolvam levantamento de possibilidades; processos de investigação estatística com foco na prática de sala de aula; e observação de experimentos, com seus respectivos registros e análises feitos por estudantes (LOPES, 2012).

O relato da pesquisa descrita neste artigo parte de uma situação didática com os elementos supracitados. Levantamos o pressuposto de que, se a probabilidade fosse abordada de maneira empírica por professores, relacionando conceitos de combinatória e estatística, seria possível que os discentes conseguissem compreender conceitos de aleatoriedade. A partir dessa hipótese, conduzimos uma investigação com o foco em entender como uma atividade de simulação de eventos aleatórios ajudaria estudantes do Ensino Médio a construir uma compreensão da Lei dos Grandes Números a partir de um experimento. Nesta investigação, contrastamos uma abordagem frequentista com a determinista (LOPES; SOUZA, 2016), ao longo da interação com os estudantes.

A metodologia empregada foi a investigação ação (COUTINHO et al., 2009). Neste método tivemos a oportunidade de questionar os estudantes – durante interação com eles sobre pontos em que dificuldades eram apresentadas. Percebemos, então, que ajudá-los a construir um conhecimento a partir da integração dos conceitos apresentados no bloco de conteúdos de Tratamento da Informação não era uma tarefa tão trivial. Relatamos algumas intervenções didáticas espontâneas desencadeadas no decorrer do curso por um dos formadores e discutiremos como os resultados nos levaram a nos preocupar com algumas abordagens que são advindas dos livros didáticos.

Esperamos que nossa análise estimule o desenvolvimento de pesquisas que visem compreender como algumas das situações didáticas elencadas fragmentam a linha de raciocínio dos estudantes. Os dados mostraram que a falta de compreensão de conceitos matemáticos de contagem influencia o raciocínio e o cálculo de probabilidades, levando estudantes a subestimá-los. Supomos que, além da fragmentação dos conceitos de Estatística, Probabilidade e Combinatória, a pobreza de contextos trabalhados no material didático do Ensino Fundamental tenha influência direta na interpretação de problemas estatísticos por parte dos alunos do Ensino Médio.

AS ORIENTAÇÕES CURRICULARES SOBRE O BLOCO TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997), o ensino de Estatística deveria ter o foco na formação de cidadãos críticos atuantes nas decisões pertinentes ao seu contexto social. Já faz muito tempo, desde que Lopes e Moran (1999) apontaram que as atividades propostas nos livros didáticos eram permeadas por uma concepção de ensino de Estatística e Probabilidade compartimentalizada. Notamos, ao analisar o Guia do PNLD (BRASIL, 2016), que os livros didáticos ainda hoje não estimulam a proatividade dos estudantes. Os livros os levam a consumir informações prontas e acabadas.

Existe uma dificuldade dos docentes em encontrar recursos para ensinar Estatística, além das deficiências adquiridas ao longo da formação inicial. Isso faz com que professores fiquem presos aos materiais que contém atividades prontas, utilizando-as como referência para a própria aprendizagem. Muitas vezes, os livros trazem apenas exercícios, que não estimulam o diálogo e também não desenvolvem habilidades de investigação nos estudantes. Na maioria, o processo de ensino de Estatística tem como centro o professor. Infelizmente boa parte das atividades propostas não articula ações que visem amplificar a autonomia dos alunos para delinear projetos. Atividades que envolvem planejamento, elaboração de ferramentas, coleta de dados e análise são ignoradas (SOUZA, 2016).

Os estudos de Loiola, Melo e Cordeiro (2015) e Souza (2016) apontam que existe uma escassez de estudos sobre como utilizar recursos didáticos para ensinar Estatística na formação desses docentes, o que também os leva a apoiar-se demasiadamente nos livros. Tornar evidente o resultado faz com que os usuários (professores e alunos) tenham uma visão limitada de como os conceitos probabilísticos e estatísticos se relacionam.

Grupos de pesquisa (BORBA et al., 2011) persistem argumentando que as abordagens no Ensino de Estatística precisam ser reformuladas. Esses grupos entendem que as mudanças curriculares precisam considerar qual é a função da Estatística e refletir sobre a amplitude dela, sem limitar-se à Estatística Descritiva. Há uma compreensão coletiva de que é preciso, desde a Educação Básica, estudar conceitos de Estatística Inferencial, abordando de forma conjunta, média, distribuição e variabilidade. Além disso, é preciso incentivar a investigação, por meio da coleta e da análise de dados, com proatividade, ação e reflexão em sala de aula. O ensino da Estatística deve permitir que estudantes e professores de todos os níveis de ensino percebam que todos podem e devem produzir conhecimentos novos.

UMA ANÁLISE DE ATIVIDADES DIDÁTICAS: COMBINAÇÃO E PROBABILIDADE

A Combinatória é uma ferramenta importante para cálculos de probabilidades. Se o sujeito não for capaz de raciocinar enumerando elementos de um conjunto, usará a ideia de probabilidade apenas em casos de experimentos muito elementares (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996). O raciocínio combinatório, de acordo com Borba, Rocha e Azevedo (2015), é um modo de pensar que se utiliza em situações nas quais se analisam determinados conjuntos, com objetivo de agrupar seus elementos. O agrupamento deve atender a critérios específicos de escolha ou ordenação, para enumerar o total de agrupamentos possíveis dentro do contexto de uma situação ou problema.

Estudar Combinatória (BORBA; ROCHA; AZEVEDO, 2015) implica debruçar-se sobre técnicas de contagem – direta e implícita – e buscar os agrupamentos possíveis, com base em elementos dados, que satisfaçam condições predeterminadas. A contagem nos problemas de Probabilidade e Combinatória vai além de uma mera enumeração de objetos expostos. O processo envolve contar possíveis maneiras de combinar os elementos, de modo que todas as combinações que atendem aos critérios preestabelecidos sejam consideradas.

Ao resolver problemas de Combinatória e determinar critérios para enumerar os dados, os estudantes cometem diferentes tipos de erros e, de acordo com Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), podem: trocar o tipo de modelo ou técnica necessária para resolver o problema; confundir os critérios das combinações, considerando a ordem dos objetos quando ela é irrelevante, e também o contrário (erros de ordem); não considerar a possibilidade de repetir os elementos quando é possível fazê-lo, e o contrário (erros de repetição); confundir os tipos de objetos; enumerar de modo não sistemático as soluções do problema, de forma que consigam encontrar algumas soluções para ele, mas não todas; dar uma resposta intuitiva, a partir do senso comum, sem justificativa; interpretar ou construir de maneira equivocada um diagrama de árvores; confundir os tipos de subconjuntos quando eles são distinguíveis ou indistinguíveis.

A maioria dos problemas na aprendizagem que envolvem conceitos de probabilidade (BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1997) está ligada à dificuldade com o raciocínio combinatório, provocada por erros de contagem. Consequentemente, ao estudar problemas relacionados à Probabilidade, de maneira empírica, representações estatísticas errôneas também serão evocadas.

Fizemos uma análise de como os livros didáticos dos anos finais da Educação Básica relacionam os conteúdos de Estatística Probabilidade e Combinatória do bloco Tratamento da Informação. Tomamos como referência o Guia do PNLD 2017 (BRASIL, 2016) e avaliamos algumas atividades que são muito parecidas com a que aplicamos junto aos alunos do Ensino Médio.

No Guia do PNLD dos anos finais do Ensino Fundamental, os conteúdos da Matemática são distribuídos em cinco campos de estudos: Números e Operações; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; Estatística e Probabilidade. É observado que, dentre as obras aprovadas, poucas equilibram os cincos campos. As outras tendem a valorizar apenas alguns dos campos sem relacioná-los entre si, e os mais desvalorizados são o de Grandezas e Medidas e o de Estatística e Probabilidade, que, em grande parte das coleções, são apresentados nos últimos capítulos de cada volume. Notamos, no guia, que a Combinatória tem sido um conteúdo considerado mais próximo da contagem, e por isso ela foi incluída no campo de Números e Operações.

Das onze coleções aprovadas, o estudo de Estatística e Probabilidade, na maior parte, é introduzido com foco na leitura e interpretação de tabelas e gráficos, que, no decorrer da evolução das séries, vão ganhando complexidade e variações. Em seguida, as atividades vão evoluindo para a coleta e a organização de dados; contudo, segundo o PNLD, essa evolução não é perceptível em boa parte das coleções.

As figuras 1 e 2 mostram exemplos de duas atividades que tratam de conceitos de Probabilidade e Combinatória nos livros didáticos. Ambas foram extraídas de uma coleção aprovada em 2017, e refletem atividades que são encontradas também em outras coleções. Na primeira tarefa (Figura 1), a Combinatória é apresentada em forma de exercício e não há relação com a Estatística ou a Probabilidade. Nota-se um esforço dos autores para relacionar a Combinatória com a Álgebra; contudo, o que se observa é uma atividade descontextualizada, que não contribui para construir conhecimentos. Depois de os alunos verificarem as combinações, o que fariam com elas? E com a equação? Nesse tipo de atividade, tem-se apenas um problema restrito a uma resposta simples, padronizada e direta.

Figura 1 – Atividade extraída de um livro didático do 7.º ano do Ensino Fundamental

Joana brincava com dois dados de cores diferentes quando os deixou cair, simultaneamente, no chão. Observou o par de números obtidos e notou que a soma deles era 8. Indicando os números por x e y, ache a equação correspondente a essa situação. Em seguida, determine todos os pares possíveis que podem ter saído nos dados.

Fonte: Bianchini (2015, p. 150).

Em outra atividade (Figura 2), conceitos de Probabilidade são contextualizados em uma atividade de jogos. Entretanto, da mesma forma que no exemplo da Figura 1, a atividade não passa de um exercício pronto, que não estimula o diálogo e também não auxilia a desenvolver habilidades de investigação nos estudantes. As combinações são apresentadas diretamente, de modo que os alunos teriam apenas o trabalho de contabilizá-las, perdendo o prazer da descoberta. Neste tipo de atividade há uma tentativa de diminuir o risco do fracasso por parte dos alunos e adiar temporariamente a frustração.

Figura 2 – Atividade extraída de um livro didático do 7.º ano do Ensino Fundamental

TRABALHANDO A INFORMAÇÃO i

Possibilidades e probabilidades

Hugo está jogando trilha com sua irmã. Para andar o número de casas necessárias e vencer o jogo na próxima rodada, ele precisa de uma soma de pelo menos 10 pontos ao lançar dois dados.

Qual é a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada?

Para calcular a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada, devemos inicialmente descobrir todas as possibilidades de soma de números que ele pode tirar nos dados.

Ao lançar dois dados, Hugo pode tirar os seguintes pares de números:

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Observe que há 36 pares diferentes de números, mas nem todos têm soma igual a 10 ou maior. Por isso, circulamos os pares de números que satisfazem essa condição. Então, entre as 36 possibilidades, há somente 6 pares cuja soma do números é igual a 10 ou maior.

Como há 6 possibilidades em 36 de Hugo obter uma soma igual a 10 ou maior, dizemos que a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada é:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Agora quem trabalha é você! FAÇA AS ATIVIDADES NO CADERNO

Considerando o problema de Hugo, responda às questões a seguir.

a) Supondo que Hugo precise obter nos dados uma soma igual a 8 ou maior, a probabilidade de ele ganhar o jogo aumenta? Justifique sua resposta.

b) Se a probabilidade de Hugo vencer o jogo na próxima rodada fosse de 100%, quantas casas ele precisaria andar?

Fonte: Bianchini (2015, p. 151).

As duas tarefas extraídas do livro são semelhantes à que desenvolvemos no decorrer do curso com os estudantes do Ensino Médio. Entretanto, buscamos, partindo de um jogo que visava estimular a investigação, deixar o processo de construção a cargo dos discentes.

Neste texto, pretendemos discutir a partir das evidências como o contexto do problema e o conceito matemático evocado têm papel fundamental nas inferências levantadas pelos sujeitos, ao argumentarem sobre o raciocínio empregado. Tarefas como as apresentadas nas Figuras 1 e 2, em nossa opinião, contrariam as diretivas do Guia PNLD, por inibir a emancipação da aprendizagem dos estudantes. Há uma orientação no guia que diz que o livro didático deve trazer ao processo de ensino e aprendizagem mais um elemento, o seu autor, que passaria a dialogar com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, o livro seria o portador de escolhas sobre:

> [...] o saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os estudantes consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade. Estabelece-se, assim, uma teia de relações que interligam quatro polos. Um deles é formado pelo autor e o livro didático; os outros três são compostos, respectivamente, pelo professor, pelo estudante e pela Matemática. (BRASIL, 2016, p.13)

Discutiremos um caso em que combinações inversas foram desprezadas pelos estudantes. Esse fato é recorrente nesse tipo de lição e exige intervenção do professor, para que os estudantes avancem na aprendizagem. Tomamos como ponto de partida a necessidade de propor aos alunos situações de aprendizagem em que eles arquitetem seus raciocínios como resposta pessoal a uma pergunta; não como resposta às exigências padronizadas e simplificadas do livro ou a um desejo do professor.

METODOLOGIA

Para discutir a questão geradora desta pesquisa: “O que causa entraves, por parte dos estudantes, ao raciocinar estimando probabilidades a partir de combinações?”, nos embasamos em um curso que teve duração de 40 horas e foco na formação de conceitos de Probabilidade e Programação. Os sujeitos da pesquisa foram 18 alunos do 1.° ano do curso técnico em Informática integrado ao Ensino Médio de uma escola federal no município de Ituiutaba - MG. A escolha dos sujeitos se deu por dois critérios: o bom aproveitamento em uma avaliação de conteúdos sobre o desenvolvimento de algoritmos em linguagem natural e lógica de programação; e a responsabilidade e o envolvimento com as atividades diárias do curso. Estes critérios foram utilizados para assegurar que os alunos participassem até o fim do projeto. Os alunos e os responsáveis foram esclarecidos de que, além de participarem de um curso de extensão, os estudantes também estariam participando de uma pesquisa.

As atividades de extensão e investigação foram planejadas e conduzidas por dois pesquisadores. A coleta de dados foi feita por meio de vídeo e audiogravação, anotação em diário de campo e produção escrita dos alunos. Enquanto um dos pesquisadores conduzia a aula, o outro realizava anotações.

O planejamento de cada nova tarefa era feito após a análise dos dados coletados no encontro anterior. Essa forma de organizar as atividades deu-se porque o foco da análise estava sobre o raciocínio dos alunos. Embora houvesse evidências descritas na teoria sobre como os estudantes se comportariam, levamos em consideração a dificuldade em homogeneizar o desenvolvimento do raciocínio de cada sujeito; por isso fizemos uma análise sobre as reflexões verbalizadas por cada discente em diferentes momentos. Analisamos aqui as atividades desenvolvidas nos dois primeiros encontros. Nomeamos cada um dos grupos por G1, G2, G3, G4 e G5.

No primeiro encontro foi planejado que os estudantes, organizados em grupos, participariam de um jogo de azar com dados – conhecido como *Craps* (que explicaremos adiante) (DEITEL; DEITEL, 2010); anotariam os resultados da soma de dois dados (de seis faces cada) e também os "vencedores" e "perdedores" em cada rodada; e relatariam suas observações gerais sobre a atividade.

Embora na primeira semana, durante a interação na atividade, alguns discentes tenham levantado hipóteses relacionadas às regras, às probabilidades, às combinações, etc., ao final percebemos que os alunos não compreendiam as probabilidades que determinavam os resultados do jogo. Supomos que compreender profundamente conceitos de probabilidade seria necessário para que os sujeitos, ao final, realizassem outras experimentações. Sendo assim, para o segundo encontro, preparamos uma atividade que teve por foco desmistificar as crenças sobre sorte e azar. Escolhemos uma estratégia na qual os discentes foram levados a refletir sobre combinações possíveis de serem feitas ao somar dois dados. Para tal, houve momentos de interações deles com a professora pesquisadora e, também, dos estudantes entre si. Apesar de existir um planejamento inicial, as respostas dadas aos estímulos da docente guiaram a condução da tarefa.

ENCONTROS SEMANAIS – JOGANDO *CRAPS*

O jogo de azar *Craps* previamente havia sido codificado em sala de aula com alunos do curso de graduação de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas; a condução foi feita pela segunda autora do texto, que no momento atuava como professora da turma. Durante a execução da atividade foi percebido que a maioria dos estudantes tinha dificuldade em compreender como as diferentes combinações das somas das faces dos dados levavam aos resultados obtidos (ganhar, perder ou continuar); parecia que eles não haviam estudado probabilidade na Educação Básica.

Começamos a refletir sobre a aprendizagem de probabilidade, o uso de recursos tecnológicos, programação e simulações no Ensino Técnico integrado ao Ensino Médio. A segunda autora deste artigo, durante a investigação, atuava como professora de Laboratório de Programação I na turma do primeiro ano do Curso Técnico em Informática integrado ao Ensino Médio e era aluna do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia (UFU/ICENP).

Percebemos então a possibilidade de trabalhar com estes discentes, utilizando técnicas de programação, o conteúdo de probabilidade; mas ainda precisaríamos entender como eles compreendiam tais conceitos. Aproveitamos a oportunidade para convidar os alunos a participarem de um projeto de extensão. As aulas ocorreram em períodos de uma hora e meia, cada, durante 8 semanas.

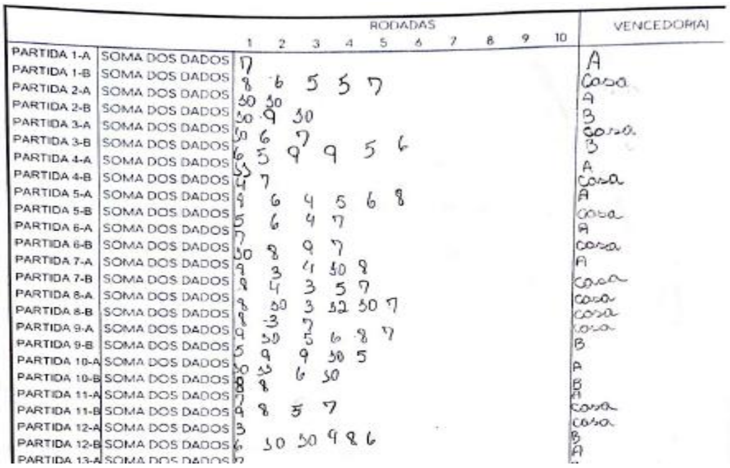
Foi planejado que, por meio de uma abordagem frequentista (LOPES; SOUZA, 2016), os discentes, previamente selecionados, seriam informados sobre as regras do jogo e receberiam dois dados para que pudessem jogar. Deveriam anotar, a cada vez que os dados fossem rolados, a soma das faces superiores e, ao fim de cada rodada, se o estudante ganhou ou perdeu.

O jogo, conhecido popularmente como Craps, possui algumas regras que o caracterizam como jogo de azar (consideramos jogos de azar aqueles em que há mais chances de um jogador perder do que ganhar):

> Você lança dois dados de 6 faces. Depois que os dados pararam de rolar, a soma dos pontos nas faces viradas para cima é calculada. Se a soma for 7 ou 11 no primeiro lance, você ganha. Se a soma for 2, 3 ou 12 no primeiro lance (chamado "craps"), você perde (isto é, a "casa" ganha). Se a soma for 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 no primeiro lance, essa soma torna-se sua "pontuação". Para ganhar, você deve continuar a rolar os dados até "fazer sua pontuação" (isto é, obter um valor igual à sua pontuação). Você perde se obtiver um 7 antes de fazer sua pontuação. (DEITEL; DEITEL, 2010, p. 168)

No primeiro encontro, a pedido da professora, os alunos se dividiram em grupos de três e quatro componentes, formando cinco grupos no total. Sentados no chão, receberam dois dados, uma folha para anotação dos resultados (Figura 3) e orientação – verbal e escrita – sobre o jogo em forma de algoritmo (Quadro 1). Um dos alunos deveria representar a "casa" e os demais eram os "jogadores". As partidas ocorriam sempre em duplas – a casa contra um dos jogadores. Consideramos partida um ciclo completo de rodadas, ou seja, um jogador ganhou ou perdeu.

Figura 3 – Recorte da anotação feita por um dos grupos de 40 partidas do jogo (A ganhou 11, B ganhou 11 e a casa, 18 vezes)



		RODADAS 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	VENCEDOR(A)
PARTIDA 1-A	SOMA DOS DADOS	7										A
PARTIDA 1-B	SOMA DOS DADOS	8	6	5	5	7						Casa
PARTIDA 2-A	SOMA DOS DADOS	10	10									A
PARTIDA 2-B	SOMA DOS DADOS	10	9	10								B
PARTIDA 3-A	SOMA DOS DADOS	10	6	7								casa
PARTIDA 3-B	SOMA DOS DADOS	6	5	9	9	5	6					B
PARTIDA 4-A	SOMA DOS DADOS	11										A
PARTIDA 4-B	SOMA DOS DADOS	4	7									casa
PARTIDA 5-A	SOMA DOS DADOS	9	6	4	5	6	8					A
PARTIDA 5-B	SOMA DOS DADOS	5	6	4	7							casa
PARTIDA 6-A	SOMA DOS DADOS	7										A
PARTIDA 6-B	SOMA DOS DADOS	10	8	9	7							casa
PARTIDA 7-A	SOMA DOS DADOS	9	3	4	10	8						A
PARTIDA 7-B	SOMA DOS DADOS	8	4	3	5	7						casa
PARTIDA 8-A	SOMA DOS DADOS	8	10	3	12	10	7					casa
PARTIDA 8-B	SOMA DOS DADOS	8	3	7								casa
PARTIDA 9-A	SOMA DOS DADOS	9	10	5	6	8	7					casa
PARTIDA 9-B	SOMA DOS DADOS	5	9	9	10	5						B
PARTIDA 10-A	SOMA DOS DADOS	10	11	6	10							A
PARTIDA 10-B	SOMA DOS DADOS	8	8									B
PARTIDA 11-A	SOMA DOS DADOS	7										A
PARTIDA 11-B	SOMA DOS DADOS	9	8	5	7							casa
PARTIDA 12-A	SOMA DOS DADOS	3										casa
PARTIDA 12-B	SOMA DOS DADOS	6	10	10	9	8	6					B
PARTIDA 13-A	SOMA DOS DADOS	7										A

Fonte: Acervo dos autores.

Antes de iniciar o jogo, a primeira autora passou pelos grupos para certificar-se de que os estudantes haviam compreendido as regras. Após tirarem as dúvidas, eles começaram a jogar e pareciam não refletir sobre as combinações ou probabilidades ocultas.

Enquanto a professora passava nos grupos, interagindo com os discentes, o primeiro autor fazia anotações. Ele percebeu que um dos grupos, após a sétima rodada, verbalizou o termo "probabilidade". Nas interações com cada grupo, a segunda autora fazia questionamentos, com o objetivo de levá-los a refletir sobre combinações e probabilidades. Entretanto, notamos que, sem a intervenção, os sujeitos não refletiam e começavam a ficar desestimulados com o jogo. Foram feitas perguntas do tipo: *"Qual número está saindo mais?"; "Qual número está saindo menos?"*; *"Como eu faço para formar o 8?"*; *"Quem está ganhando mais? A casa? Os jogadores?"*; *"Quais as combinações possíveis?"*.

Quadro 1 – Representação do algoritmo escrito para os alunos no quadro

1.Lance dois dados	5.Se soma igual a 4, 5, 6, 8, 9 ou 10	8.2 Some os pontos das faces viradas para cima
2.Some os pontos das faces viradas para cima	5.1 Soma é sua pontuação	9.Se soma igual sua pontuação
3.Se soma igual a 7 ou 11	6.Lance dois dados	9.1 Jogador vence
3.1 Jogador vence	7.Some os pontos das faces viradas para cima	10.Se soma igual a 7
4.Se soma igual a 2, 3 ou 12	8.Enquanto soma diferente de sua pontuação ou soma diferente de 7	10.1 Jogador perde
4.1 Jogador perde	8.1 Lance dois dados	

Fonte: Acervo dos autores.

Cada equipe jogou, no total, 40 ou 60 partidas, dependendo da quantidade de integrantes de cada grupo. Foram 20 destinadas a cada um dos jogadores contra a casa. Assim que todos finalizaram a anotação dos resultados, a autora pediu que um relatório sobre a atividade fosse escrito. Neste há relatos sobre o que influenciava a vitória ou a derrota da casa; quais valores saíam com maior frequência e quais saíam com menor frequência; quais combinações geravam os valores mais frequentes; e o número total de vitórias da casa e de cada um dos jogadores.

> Primeiramente a casa possui mais chances de ganhar, porque participa de todas as rodadas e os jogadores participam apenas da metade. Primeira rodada → as chances de ganhar são de 8 em 36, de perder são de 4 em 36 e de tirar um número que dê pontuação são de 24 em 36. Na segunda rodada → as chances de perder são de 6 em 36 se você tirou um número que dê pontuação. E as chances de você ganhar depende do número que você tirou na primeira rodada. (Trecho escrito por G1)

O relatório demonstra que os alunos conseguiram identificar as combinações de cada soma para que obtivessem as chances de ganhar, perder ou continuar na primeira rodada. Percebemos a ligação realizada entre conceitos de probabilidade e a atividade empírica; e, por isso, acreditamos que pelo menos um elemento do trio tenha tido contato prévio com assuntos relacionados à probabilidade.

> Rodadas ganhas de primeira → 4 de 40. Rodadas perdidas de primeira → 2 de 40. Números que mais saíram na primeira rodada → 8 e 5. Vezes que o 8

> e o 5 se repetiram depois da primeira rodada → 8 - 4 vezes / 5 - 1 vez. (Trecho escrito por G1)

Apesar de ser esperado que as faces dos dados somadas dessem a combinação 7 em um número maior de vezes, o valor não foi citado pelos discentes como um dos que mais apareceram.

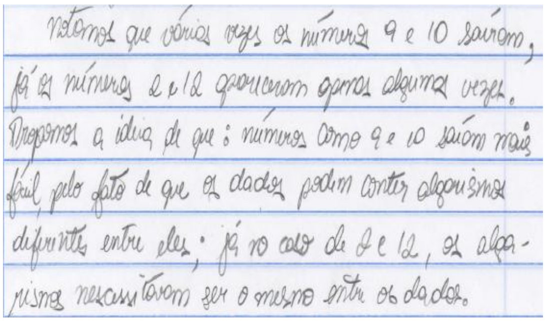
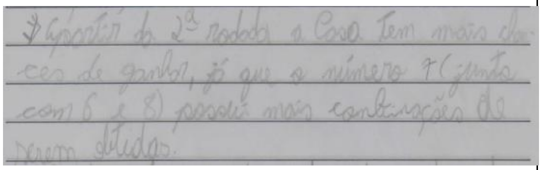
Três dos cinco grupos escreveram sobre as chances de ganhar, perder ou continuar a jogar na primeira rodada - 8/36; 4/36; e 24/36, respectivamente. Entretanto, um dos grupos, durante a fase de escrita do relatório, apresentou uma observação diferente para colocar as chances de se ganhar ou perder no jogo (informações sobre a continuidade do jogo não foram escritas).

> Na soma de todas as partidas: A = 11, B = 11 e CASA = 18. Na soma das partidas de A: CASA = 9 e A = 11. Na soma das partidas de B: CASA = 9 e B = 11. Foram 40 partidas ao todo. Os jogadores A e B obtiveram o mesmo tanto de acerto cada um. Juntando os ganhos dos jogadores foram 22 acertos. Então os jogadores tiveram 55% de chance de ganhar e a casa 45% de ganhar. (Trecho escrito por G2)

Os sujeitos, para chegar aos valores percentuais, somaram os ganhos dos jogadores (11+11 = 22) e da casa (9+9 = 18); e com os resultados fizeram uma relação com a quantidade total de partidas (40). Assim, chegaram ao valor de 55% (22/40 = 0,55) de "chance de ganhar" para os jogadores e de 45% (18/40 = 0,45) para a casa. Com a construção definida pelo grupo B, entendemos que os integrantes associaram aos conceitos de probabilidade uma abordagem frequentista que está relacionada com a estatística.

Percebemos também que dois dos quatro grupos (Quadro 2) não contabilizaram o inverso para estimar as probabilidades de ocorrência de cada evento. É possível observar, na coluna à esquerda, que um grupo considerou que algumas combinações poderiam ser formadas com algarismos diferentes, e outras, não. Esse grupo de estudantes não identificou qual soma poderia ser formada por um maior número de combinações e pautou-se na observação das frequências (visão frequentista) (LOPES; SOUZA, 2016). No relato de outro grupo, à direita, é possível notar que os alunos perceberam quais seriam as somas de maior ocorrência, mas igualaram as possibilidades de as somas 6, 7 e 8 ocorrerem.

Quadro 2 – Relatório dos Grupos 1 e 2, respectivamente, após primeira tarefa

“Notamos que várias vezes os números 9 e 10 saíram, já os números 2 e 12 apareceram apenas algumas vezes. Propomos a ideia de que: números 9 e 10 saíam mais fácil pelo fato de que os dados podem conter algarismos diferentes entre eles; já no caso de 2 e 12, os algarismos necessitavam ser o mesmo entre os dados.”  Notamos que várias vezes os números 9 e 10 saíram, já os números 2 e 12 apareceram apenas algumas vezes. Propomos a idéia de que: números como 9 e 10 saíam mais fácil pelo fato de que os dados podem conter algarismos diferentes entre eles; já no caso de 2 e 12, os alga-rismos necessitavam ser o mesmo entre os dados.	“A partir da 2.ª rodada a casa tem mais chances de ganhar, já que o número 7 (junto com 6 e 8) possui mais combinações de serem obtidos.”  A partir da 2ª rodada a casa tem mais chances de ganhar, já que o número 7 (junto com 6 e 8) possui mais combinações de serem obtidos.

Fonte: Acervo pessoal.

Pela nossa experiência, quando observamos a execução de um jogo de soma das faces dos dados, em outros momentos, verificamos que a afirmação dada na coluna à direita tem relação com o fato de os sujeitos não considerarem o inverso das combinações. Nesses casos, a enumeração pelos sujeitos é subestimada, assim como, consequentemente, a probabilidade de algumas somas ocorrerem. Por exemplo, as somas 6 e 7, respectivamente, sem repetição dos algarismos, poderiam ocorrer das seguintes formas: 1+5, 2+4 ou 3+3; e 1+6, 2+5 ou 3+4. Ou seja, três ocorrências para cada soma. Esse é o erro de ordem que relatamos neste artigo, os alunos não consideraram o inverso das somas: 5+1 ou 4+2; e 6+1, 5+2 e 4+3. Quando percebem que subestimaram as combinações, ainda costumam questionar por que o inverso de 3+3, por exemplo, não é contabilizado. Argumentam que isso igualaria a possibilidade de ocorrências das somas 6, 7 e 8 – nesse caso, superestimam o espaço amostral.

Dos relatos dos quatro grupos formados, dois foram feitos a partir das observações empíricas. Notamos, nos outros dois relatos, que os grupos parecem ter percebido todas as possibilidades de ocorrência de cada soma. No entanto, como se trata do relato de um grupo, não conseguimos confirmar se todos os estudantes que o compunham compreenderam o relato.

Durante o planejamento das atividades para a semana dois, levamos em consideração – por meio das observações e interações feitas em sala e das gravações em áudio e vídeo –

que seria necessário planejar uma aula para levar os discentes a compreender que as combinações e as possibilidades de cada evento ocorrer eram diferentes.

No encontro, os discentes foram organizados em duplas, e cada uma recebeu um par de dados. Com o propósito de que os estudantes relembrassem as regras, a segunda autora as escreveu na lousa.

Depois de nos certificarmos de que os alunos haviam realmente compreendido para qual situação as somas os levariam, a autora fez uma intervenção, questionando os discentes se o jogo "é um jogo de sorte". Ao que os estudantes responderam: "sim", "não", "é mandinga", "é macumba". Poucos foram os que deram a segunda resposta (não). Então, a professora perguntou aos estudantes quais as combinações que levariam à soma 7; e alguns começaram a verbalizar as possibilidades. Um deles questionou: "O inverso conta?"; e isso gerou dúvida nos demais.

Nesse momento, o questionamento não era esperado pela pesquisadora. Havíamos planejado que no decorrer das aulas as respostas não deveriam ser dadas, dessa maneira o objetivo era perceber qual linha de raciocínio os alunos desenvolveriam.

A pergunta do estudante obrigou a professora a criar estratégias sem planejamento para que a turma compreendesse que a combinação inversa influenciava nos resultados. Para isso, pediu que cinco alunos ficassem na frente da sala em fila, como se estivessem em um banco. Depois mudou a ordem dos sujeitos e perguntou: "É a mesma coisa?"; eles continuaram oscilando suas respostas acerca do inverso. Percebemos que as reflexões dos discentes estavam acontecendo no entorno da soma; para eles, 4 + 3 e 3 + 4 eram a mesma coisa (em relação à soma dos dados). Poucos argumentaram que as combinações eram diferentes.

Outra tentativa da professora foi entregar canetas e lápis (em quantidades diferentes) a um grupo e pedir para que eles somassem o total de objetos. Após esta atividade, pediu que todos entregassem os itens para apenas uma estudante; perguntou se havia mudado algo na quantidade de elementos. Eles responderam que, para cada indivíduo do grupo, sim, mas o total, não. O primeiro autor, que observava a aula, percebeu que a professora ficou sem estratégias no momento; o que foi confirmado (posteriormente) quando ambos os pesquisadores discutiam sobre as estratégias.

Para resolver essa problemática, em outros momentos, com outros grupos em formação, o primeiro autor utilizou-se dos próprios dados. Quando percebia a dificuldade de enumerar as combinações, pedia para que os sujeitos as montassem, mostrando-as nos dados. Depois de algum tempo isso parecia dar certo. Nesse caso relatado, o jogo era outro (SOUZA;

LOPES, 2011): os jogadores comparavam a ocorrência de cada soma por várias representações – gráfica, tabular, cartesiana, diagrama de árvores e por combinações; além disso, faziam simulações. Embora a dificuldade dos sujeitos de considerar o inverso fosse percebida, nunca houve uma reflexão sobre o porquê. O problema sempre foi tratado como uma prática rotineira docente. Acreditamos que refletir sobre os exemplos de problemas dados nos livros didáticos também possa ajudar a analisar melhor a situação.

Para compreender como os estudantes raciocinam sobre esse tipo de problema, é necessário ouvi-los para intervir, e também planejar e executar mais experimentos. Os estudantes não são facilmente convencidos de que a soma 2+5 é uma combinação diferente da soma 5+2.

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Cabe ao professor planejar atividades que supram as deficiências do livro didático adotado, visando à construção do pensamento probabilístico; promovendo situações que interliguem os conteúdos de Combinatória, Estatística e Probabilidade; e contribuindo para a formação do cidadão crítico.

Dessa forma, acreditamos que somente por meio de atividades nas quais os alunos possam manipular objetos, realizar experimentos, verificar as possibilidades e as chances e interagir com colegas e com o professor, eles serão realmente capazes de construir o conhecimento, tornando-se parte relevante no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos referentes à Probabilidade.

A coleção de livros analisada é direcionada para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental; e a pesquisa foi realizada com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Desta forma, esperávamos que a minoria da turma verbalizasse o termo “sorte” durante a execução do jogo e que as possibilidades de combinação entre as faces dos dados fossem facilmente encontradas. Entretanto, não foi simples construir, com os discentes, conceitos necessários para a simulação.

Presumimos que a dificuldade, percebida nos discentes para entender as possibilidades de combinações das faces dos dados após o jogo, possa ocorrer por serem as atividades propostas pelos livros didáticos produzidas artificialmente – com foco direto em um único conceito. Além disso, não há uma relação entre as diferentes seções; e a ação, a investigação e o contexto não são priorizados.

Com relação ao jogo desenvolvido com os estudantes, entendemos ser de extrema importância que se crie ambientes de interação e investigação nas escolas. Nestes ambientes, é prioritário que as indagações dos alunos tenham por foco o objeto a ser estudado, para isso ele precisará de estímulos e atividades que o convidem a raciocinar. Contudo, a investigação conduzida pelo professor, principalmente aquele em formação inicial, deve manter o foco na sua própria prática, embasando-a teoricamente, de modo que, ele possa refletir sobre como a condução e organização dos objetos a serem estudados interferem na aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C.; GODINO, J.; NAVARRO-PELAYO, V. Combinatorial reasoning and its assessment. In: GAL, I.; GARFIELD, J. (Ed.). **The assessment challenge in statistics education.** Amsterdam: IOS Press, 1997. p. 239-252.

BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**: Ensino Fundamental. 8. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

BORBA, R. et al. Educação Estatística no Ensino Básico: currículo, pesquisa e prática em sala de aula. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, Recife, v. 2, n. 2, 2011.

BORBA, R.; ROCHA, C.; AZEVEDO, J. Estudos em Raciocínio Combinatório: investigações e práticas de ensino na Educação Básica. **Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, vol. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BRASIL. **Ministério da Educação. PNLD 2017**: Matemática - Ensino Fundamental anos finais. Brasília: Ministério da Educação / Secretária de Educação Básica, 2016.

BRASIL. **Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

COUTINHO, C. et al. Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. **Revista Psicologia, Educação e Cultura**, Braga, v. 13, n. 2, p. 455-479, 2009.

DEITEL, P.; DEITEL, H. **Java – como programar**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2010.

LOIOLA, S.; MELO, V.; CORDEIRO, N. O ensino de estatística no ensino básico: uma análise qualitativa do professor. **Essentia**, Sobral, v. 16, n. 2, p. 115-150, jan./jun. 2015.

LOPES, C. A Educação Estocástica na infância. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 1, p. 160-174, maio 2012.

LOPES, C.; MORAN, R. A Estatística e a Probabilidade através das atividades propostas em alguns livros didáticos brasileiros recomendados para o Ensino Fundamental. In: CONFERÊNCIA INTERNACIONAL: EXPERIÊNCIAS E PERSPECTIVAS DO ENSINO

DE ESTATÍSTICA - DESAFIOS PARA O SÉCULO XXI, 1., 1999, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC, 1999. p. 167-74.

LOPES, C.; SOUZA, L. Aspectos filosóficos, psicológicos e políticos no estudo da Probabilidade e da Estatística na Educação Básica. **Educação Matemática Revista**, São Paulo, v. 18, n. 3, p. 1465-1489, 2016.

NAVARRO-PELAYO, V.; BATANERO, C.; GODINO, J. Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. **Educación Matemática**, México, v. 8, n. 1, p. 26-39, 1996.

SANTANA, M.; BORBA, R. Como a probabilidade tem sido abordada nos livros didáticos de Matemática de anos iniciais de escolarização. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010. p. 1-11.

SOUZA, L. Formação de professores para o ensino de probabilidade: simulação conectando ideias estatísticas. **VIDYA**, Santa Maria, v. 36, n. 2, p. 377-395, jul./dez. 2016.

SOUZA, L.; LOPES, C. O Ensino de Estocástica por meio de simulação virtual. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife, PE. **Anais...** Porto Alegre: CIAEM, 2011.

Recebido em 15 nov 2018; Aceito após revisão em 15 fev 2019.