A MATEMÁTICA EXPLICA ALGUMA COISA?

Alexandre Silva Abido[1]
abido@ufmt.br

> Vale também recordar a força, a virtude e as consequências das coisas descobertas, o que em nada é tão manifesto quanto naquelas três descobertas que eram desconhecidas dos antigos e cujas origens, embora recentes, são obscuras e inglórias. Referimo-nos à imprensa, à pólvora e à bússola. Efetivamente essas três descobertas mudaram o aspecto e o estado das coisas em todo o mundo: a primeira nas letras, a segunda na arte militar e a terceira na navegação. Daí se seguiram inúmeras mudanças e essas foram de tal ordem que não consta que nenhum império, nenhuma seita, nenhum astro tenha tido maior poder e exercido maior influência sobre os assuntos humanos que esses três inventos mecânicos.
>
> (Francis Bacon, Novo Organum, Aforisma CXXIX)

Resumo
No ensino da Matemática, além dos problemas comuns à educação em geral, soma-se a preocupação com problemas específicos do ensino da Matemática. A tese principal desse artigo é que as dificuldades de ensinar Matemática residem no caráter e no conhecimento teórico da Matemática, isto é, concentram-se na noção de conceito teórico. Nem nossas teorias de cognição – que ensinam que pensar será exclusivamente um evento mental – nem nossas maneiras empiristas de ver o mundo ajudam neste problema. Oferecemos uma visão semiótica para abordar esses problemas de relação entre o concreto e o abstrato, entre o particular e o geral.

Palavras-chave: Cassirer, Conceito Teórico. Metacognição. Triplicidade do Significado da Compreensão.

Introdução

É uma experiência geral desde as grandes reformas do ensino da Matemática, no início do século XX, que a maior dificuldade na educação das ciências, particularmente na Matemática, se encontra no próprio caráter das ciências e do pensamento teórico e por isso não pode ser resolvida apenas por meio de métodos pedagógicos ou de decisões sócio-políticas.

Nas reformas de *Meran* de 1905, inspiradas nas consideradas palestras de Felix Klein (1849–1925), a importância da noção de função foi indicada como um ponto urgente e muito

[1] Doutor em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT). Docente da Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT) – *Campus* de Cuiabá, Mato Grosso, Brasil.

importante para a reforma do ensino da Matemática em todos os níveis, como também para as ciências empíricas e para a tecnologia. Hoje em dia, qualquer mecânico em uma concessionária de automóveis tem que ter a capacidade de entender representações gráficas (funções), que são apresentadas na tela de sofisticados aparelhos. No entanto, o ensino da Matemática nunca teve sucesso com isso.

As dificuldades do ensino da Matemática não consistem apenas da problemática educacional, mas, também, das dificuldades comuns a todas as áreas. Por exemplo, se são colocadas vinte, trinta ou quarenta crianças em uma sala de aula, claramente surgirão muitos problemas, entre eles, psicológicos, pedagógicos, de gestão, de organização, de motivação, mas, no ensino da Matemática, além dos problemas comuns à educação em geral, soma-se a preocupação com problemas específicos do ensino da Matemática.

A tese principal deste artigo é que as dificuldades de ensinar Matemática residem no caráter e no conhecimento teórico da Matemática, isto é, concentram-se na noção de *conceito teórico e nas explicações que a Matemática e as ciências exatas fornecem*.

Nesse sentido, é oportuno começarmos fazendo uma comparação entre *conceito empírico* e *conceito teórico*.

I.

Há muito tempo, discute-se na Educação Matemática o significado da expressão *entender uma determinada coisa*. Na época da reforma da chamada *Matemática Moderna*, esta discussão foi acentuada por educadores, como Stieg Mellin-Olsen e Richard R. Skemp, entre outros e, na década seguinte, com a chegada dos computadores, começou-se uma intensa discussão, no mesmo sentido, sobre a relação entre *prova formal* e *explicação* na Matemática.

Vamos começar a abordar essa temática com a obra de Richard R. Skemp.

Skemp tratou esse assunto no seu artigo *Relational Understanding and Instrumental Understanding*, publicado em 1978, e, mais extensivamente, no seu livro *Mathematics in the Primary School*, publicado dez anos mais tarde. Outros livros de Skemp, que trataram desse assunto, foram *The Psychology of Learning Mathematics*, publicado em 1971, que foi traduzido para holandês, húngaro, espanhol, japonês, chinês e grego e *Intelligence*, *Learning*, *and Action*, publicado em 1979, que apresenta um modo novo de pensar sobre inteligência humana e sua relação com o educando e a educação.

A respeito do significado do conceito de *compreensão*, Skemp escreveu:

> Há alguns anos, Stieg Mellin-Olsen, da Universidade de Bergen, trouxe ao meu conhecimento o fato que existem dois significados dessa palavra em uso corrente. Ele distingue estes significados chamando-os de *compreensão relacional* e *compreensão instrumental*. O primeiro, significa o que eu sempre entendi pela palavra compreensão, e provavelmente a maioria dos leitores deste artigo também, ou seja, conhecer tanto como fazer e porque fazer. Até recentemente eu não considerava *compreensão instrumental* como uma compreensão. No passado eu descrevi que tal compreensão era como *regras sem justificativas*, sem perceber que, para muitos alunos e seus professores, a posse de uma determinada regra e a habilidade de usá-la, era o que se entendia por *compreensão*. Suponha que um professor lembre sua classe de que a área de um retângulo é dada por $A = B \times H$. Um aluno diz não entender, e o professor dá-lhe a seguinte explicação: *A fórmula diz que para se obter a área de um retângulo, multiplica-se o comprimento pela largura*. *Oh, eu entendi*, diz o aluno, e continua a fazer o exercício. Agora, se fosse dito a ele: *Você pensa que entendeu, mas, realmente, você não entendeu*, o aluno não se convenceria. *Claro que eu entendi. Veja, eu tenho todas as respostas certas*. Esse aluno não ficaria satisfeito com a nossa desvalorização de sua realização. Com sua interpretação da palavra, ele realmente entende (SKEMP, 1978, 9).

A interpretação que Skemp deu ao termo *compreensão relacional* despertou curiosidade por ficar dentro dos padrões da ciência Aristotélica. Mas o Aristotelismo é muito diferente do sentido que a ideia de *pensamento relacional* ganhou na ciência da modernidade desde os dias de Descartes, Leibniz e Newton. Sabe-se que, em geral, as leis da Natureza são representadas por funções, relações ou em termos de equações que não expressam uma teleologia na Natureza, como é o caso, por exemplo, da segunda lei de Newton que representa uma relação entre massa, força e aceleração, enquanto que para Aristóteles, a grande importância foi entender as causas e as metas da própria Natureza. Nesse sentido, a ciência moderna expressa ao máximo as metas do próprio homem oscilando entre um pensamento relacional, por um lado, e um puro instrumentalismo, por outro.

Na ciência, se descrevem apenas as regularidades observáveis e se tiram, por meio de deduções matemáticas, consequências dessas regularidades e relações por meio de representações simbólicas, ou seja, a ciência exata dos tempos modernos parece totalmente dedicada ao que Skemp chama de *Compreensão Instrumental* e o que ele acha, com toda a razão, insuficiente.

A situação é ainda pior na Matemática que sofreu de fato uma transformação revolucionária nos séculos XIX e XX e que ainda não apareceu. Para os próprios matemáticos, esse fato começou a se mostrar mais claramente somente quando David Hilbert publicou seus "Fundamentos da Geometria", em 1899. Como já diz o próprio título, trata-se de uma obra na lógica da Matemática, formalizando-a e ignorando o seu lado criativo.

Esse lado criativo da Matemática se mostra nos mais elementares exemplos de modelagem. Quando as crianças começam a representar fatos como *Paulo é mais alto que Maria e quando ela sobe em uma cadeira eles ficarão com a mesma altura* (em termos simbólicos, $P > M$; $M + C = P$, sendo que P representa Paulo, M representa Maria, C representa a cadeira e $M + C$ representa Maria sobre a cadeira), já há o pensamento relacional no sentido da álgebra, mas não no sentido de Skemp. Se um matemático começa a explicar fatos como $2 + 2 = 4$ em termos dos axiomas da aritmética, ou ainda, se ele começa a provar um fato intuitivo da geometria em termos de deduções formais, ele faz isso no intuito de ter a capacidade de prevenir o que acontecerá dadas determinadas condições ou premissas em toda generalidade. Esse matemático não pensará que suas descrições serão dedicadas a descobrir causas essenciais das coisas, nem ficará satisfeito em observar fatos isolados ou justificá-los por um raciocínio lógico. Buscar-se-á construir estruturas ou modelos formais que possam ser úteis na orientação dentro da realidade, mas raramente será possível descobrir causas ou razões, e, por isso, o pensamento relacional de Skemp torna-se muitas vezes uma esperança equivocada.

Diferentemente de Skemp, não acreditamos, então, que a *Compreensão Instrumental* deveria ser eliminada ou superada em favor de uma *Compreensão Relacional*. Provas matemáticas, por exemplo, consistem essencialmente em dois tipos de ações: computações e argumentações. Dessa forma, o importante é entender a complementaridade desses dois tipos de atividade em vez de eliminar uma em favor da outra, pois é óbvio que, por exemplo, numa situação complexa e difícil, a argumentação à base de uma ideia normalmente não é suficiente para completar a prova.

Parece óbvio então, que na Matemática precisamos desses dois tipos de atividades e, por isso, temos que procurar maneiras de empregar esses dois tipos de compreensão abordados por Skemp e, no entanto, para se encontrar essa complementaridade, precisamos de um terceiro elemento de mediação e, daí uma abordagem semiótica se faz necessária. A grosso modo, podemos descrever esse terceiro elemento como a construção de uma representação. Para um pintor, o retrato oferece a complementaridade de agir e de refletir. Para um cientista, um texto ou um experimento cumpre a mesma função. Precisamos sempre de ocasiões para perceber alguma coisa inesperada, para depois aproveitar dela.

A nossa conclusão, neste momento, é que existem três tipos de compreensão e não apenas dois, como foi indicado por Skemp. Em primeiro lugar, temos uma meta, mas não sabemos como alcançá-la; em segundo lugar, vamos construir representações ou modelos da situação, experimentar e observar o que acontece; e, em terceiro lugar, buscaremos aproveitar da nova situação.

Mas como chegamos nessa complementaridade do pensamento relacional e do pensamento instrumental? Por ensinar a aprender, a meta-aprendizagem é a resposta e, por isso, a construção de uma representação que mostra nossas atividades será útil.

Alguém que necessita de uma calculadora portátil para descobrir o valor de 10×2, dificilmente poderia ser descrito como um bom calculista. E o que se pode dizer sobre a menina na banca de jornal que tem que devolver a sobra dos jornais do dia anterior e precisa descobrir o valor deles, sendo necessário para isso somar 53 posições corretamente, falhando repetidamente em cada tentativa. Cada vez um erro acontece, até que ela explode em lágrimas. Um cliente, observando suas lutas por algum tempo, propõe-se ensinar uma maneira diferente. Vamos combinar as posições sempre em pacotes de 5 itens cada, e depois novamente. Assim, o primeiro passo reduz as 53 posições para 11e depois para 3 e o assunto está resolvido rapidamente. A menina brilha de felicidade.

Essa menina não só fez corretamente um cálculo, mas aprendeu algo sobre cálculos e sobre aritmética. Talvez, ela começará a refletir sobre o que faz um bom algoritmo, embora não o que levou o gênio Alan Turing dar uma definição executável da noção de algoritmo. Pensar não ocorre somente na cabeça, mas acontece em máquinas, textos, modelos, escritas e comunicação social.

Isso nos traz de volta a questão da complementaridade de reflexão e de operação, que é tão importante à cognição matemática.

O ensino e a aprendizagem da Matemática superior estão muitas vezes limitados apenas às características descritivas, de forma que um aluno seja capaz de repetir a definição de um conceito, mas não consegue aplicá-lo. Vamos ilustrar tal fato por meio de um exemplo da álgebra linear.

Um estudante tinha como tarefa resolver exercícios que solicitavam identificar se um conjunto de pontos do $\Re^3$ constituía em um subespaço vetorial do $\Re^3$. Inicialmente, o estudante não conhecia as condições para que um conjunto de pontos W fosse um subespaço vetorial de V. Após serem apresentadas as referidas condições, o estudante conseguiu resolver todos os exercícios. No entanto, quando lhe fora feito um questionamento mais geral, no sentido de discutir se um conjunto W era ou não um subespaço vetorial de V, mas, que não possibilitava a aplicação das condições apresentadas, isto é, carecia-se de uma análise mais absoluta e fora da perspectiva teórica, houve um silêncio e não se obteve resposta.

Nosso diagnóstico é que aqui existe uma falha tanto do ensino quanto da aprendizagem. O professor, com receio de cair no abstrato, introduz o conceito de espaço vetorial por meio da apresentação de um exemplo concreto (particular), ou seja, do $\Re^3$. À base desse exemplo, o professor constrói, por processo de abstração, o conceito geral de espaço vetorial. Se o professor tivesse introduzido inicialmente tal conceito por meio do método axiomático, as características desse conceito seriam apresentadas sem estarem misturadas com as características contingentes e não essenciais. O perigo dos exemplos concretos é que sempre mostram muitas características que não se relacionam com o assunto. O aluno sempre tem dificuldades em distinguir entre as componentes de um conceito e as características dos objetos às quais se refere. Portanto, como o pensamento teórico é um pensamento em termos de conceitos, esta distinção se mostra fundamental.

Vamos considerar o conceito mais importante da Matemática e da ciência dos tempos modernos que tem dupla raiz: *o conceito de função*. Por um lado, esse conceito resulta da álgebra e está conectado com a ideia da construção mecânica e da metáfora da máquina. Descartes não só criou a geometria analítica de coordenadas e o método das funções coordenadas, mas percebeu que as técnicas algébricas existentes em seu tempo eram insuficientes, adotando todos os tipos de curvas geométricas como meio de construção e projetando instrumentos mecânicos, “novos compassos” como Descartes os chamou, para desenhar, por exemplo, curvas cônicas com exatidão. “Três novos compassos foram mencionados particularmente nas reflexões de

Descartes: um para trisseccionar o ângulo e dois para a resolução de certas equações cúbicas" (Bos, 2001, p. 237).

Como se diz, Newton havia criado a visão mecânica de mundo, bem como criou o primeiro paradigma da ciência moderna substituindo o Aristotelismo. Newton, ao descrever também o movimento mecânico, trabalhou com generalizações de fórmulas algébricas, como o teorema binomial e usou aproximações de série de Taylor das funções.

O natural mundo aristotélico foi o grande produtor e artífice, e a ciência aristotélica tem a intenção de descobrir os objetivos e causas da natureza. Nossa cultura cristã é dominada pela ideia de um Deus pessoal fora do mundo natural, e Newton acreditava que os seres humanos tinham que seguir o exemplo de Deus como o maior artífice. Essa personificação levou ao domínio do instrumentalismo na ciência. Construímos máquinas para servir nossos interesses e desejos, ao invés de tentar descobrir as causas e objetivos da própria natureza. Assim, a ciência e a Matemática tornam-se conectadas com a ideia de funcionalidade e funcionalismo. As pessoas dizem: uma máquina serve a alguma função, mas ela não explica nada. Em face de uma realidade demasiadamente complexa e seus ruídos aleatórios, tecnologia e método servem como um primeiro e indispensável compasso para a orientação científica e cognitiva.

Newton, em particular, tinha entendido isso (ver Prefácio da primeira edição da Principia) e ele deixou claro que é a epistemologia ou a metodologia, ao invés da ontologia, que determina o sucesso da ciência. O objetivo não é a simples idealização ou o aguçamento da percepção do mundo dos objetos, mas a tentativa de imitar Deus como "o mais perfeito artífice". Newton tinha famosamente dito: "*Hypotheses non fingo*!" para dar uma resposta àqueles que publicamente o desafiaram a dar uma explicação para as causas de gravidade, e não apenas aos princípios matemáticos da mecânica. Newton estava muito mais interessado em descobrir as relações entre causas e efeitos do que em compreender e explicar a causalidade, pois não precisamos nos preocupar sobre as causas ou motivos e interesses da Natureza, temos que seguir nossos próprios objetivos.

Conceitos teóricos se baseiam em abstrações reflexivas da ação, ao invés de serem idealizados como imagens abstratas das coisas e são empregados, em primeiro lugar, como instrumentos operatórios. Newton já tinha entendido isso e, dessa forma, optou por um conceito “metodológico” de matematização da filosofia natural, em vez de um filosófico, isto é, um ontológico (Lenhard & Otte, 2010, 306ff.).

Esse novo instrumento e entendimento positivo da Matemática e da ciência foi certamente favorecido pela invenção da imprensa, pois tornou possível examinar o que havia sido chamado de “intencionalidade coletiva” (John Searle, filósofo americano, autor de *Speech Acts*) e sistemas de crenças comuns ou pontos de vista recebidos. A proposição específica é que com a escrita, e mais especificamente com a imprensa, foi possível analisar o discurso de diferentes maneiras, dando à comunicação oral uma forma semipermanente; esse tipo de escrutínio aumentou a potencialidade para o conhecimento cumulativo, especialmente o conhecimento de um tipo abstrato, porque mudou a natureza da comunicação para além de cara para cara-contato, bem como o sistema para o armazenamento de informações.

Cognição e comunicação dependem muito dos meios e da mídia. Ambos mudaram profundamente com a invenção do alfabeto fonético, na antiguidade, e com a invenção da imprensa durante o século XV. Vários pesquisadores têm investigado o impacto da alfabetização sobre o pensamento humano, e não é por acaso que os grandes passos no desenvolvimento do que hoje chamamos de ‘ciência’ foram consequência da introdução de grandes mudanças nos canais de comunicação na Babilônia (a escrita), na Grécia Antiga (o alfabeto), e na Europa Ocidental (a imprensa).

A imprensa transformou o próprio conhecimento em um objeto de reflexão. A Álgebra simbólica, que é dificilmente imaginável sem a imprensa, trouxe a possibilidade de introduzir o mesmo objeto ainda desconhecido para a atividade cognitiva e torná-lo um objeto de investigação por meio do estabelecimento de possíveis relações com as coisas já conhecidas. A imprensa não apenas estimulou um interesse geral em novos métodos de pesquisa e invenção, como criou ceticismo e levou as pessoas a encontrarem a verdade por meio do estudo do mundo natural e de comparações do conhecimento. Ela diminuiu a influência da magia, incentivando o homem a chegar às explicações científicas da Natureza (Thomas,1971). Em resumo: o texto impresso como função comunicativa versus como representação objetiva fornece dois aspectos no desenvolvimento do conhecimento, que se tornaram tão decisivos como complementares em sua influência sobre a dinâmica do conhecimento matemático.

Já em 1620, Francis Bacon (1561-1626) escreveu que a imprensa, a pólvora e o compasso foram as três invenções que “mudaram a aparência e o estado de todo o mundo”. Parece interessante, no entanto, como Elizabeth Eisenstein observa, que “embora muitos estudiosos concordem com a opinião de Bacon, muito poucos tenham tentado seguir seu conselho e tomar nota da força, do efeito e das consequências da invenção de Gutenberg” (Eisenstein, 1979, p. 4).

Embora a imprensa tenha tido efeitos sociais mais amplos, não antes da Revolução Industrial a nova física do Renascimento mostrou, desde o início, uma tendência de se transformar numa forma matemática e de buscar formas matemáticas, ao invés de um sentido ou de uma essência das coisas, o que seria dificilmente imaginável sem a invenção da imprensa. Ela ajudou trazer a convicção de Galileu de que o “grande livro da Natureza” estava escrito em letras matemáticas, em termos de círculos, triângulos, cônicas e outras figuras geométricas que, por sua vez, levaram não só a uma nova concepção de ciência, mas também a novas considerações por filósofos políticos como Thomas Hobbes (1588-1679).

Aprendemos com Newton que a tecnologia é a base da aplicação da Matemática para o mundo empírico. Por trás dessa visão, está escondida uma verdade geral: domínio ou realização pressupõe “que se tem o hábito de pensar e combinar diretamente dos meios de trabalho, de imaginar uma obra apenas dentro dos limites dos instrumentos usados, e nunca aproximando um trabalho de um tópico ou de um efeito imaginado que não esteja ligado aos meios”, como diz Paul Valéry (ver Otte, 2008, p. 71f).

No filme “Finding Forrester” (Encontrando Forrester), há uma bela cena que mostra exatamente o que isso poderia significar. A história é a seguinte: Jamal Wallace (Robert Brown) é um jovem adolescente que ganha uma bolsa de estudos em uma escola de elite de Manhattan, devido ao seu desempenho nos testes e, também, por jogar muito bem basquete. Ele conhece William Forrester (Sean Connery), um famoso e recluso escritor com quem desenvolve uma profunda amizade e que procura incentivá-lo para ser um escritor também. Jamal precisa disso, pois as exigências da nova escola são grandes. Forrester manda o jovem se sentar em frente de uma máquina de escrever e simplesmente começar. Mas como, o jovem exclama, não sei o que escrever. Forrester responde em voz alta e forte: “Escreva, não pense! A primeira chave é escrever sem pensar! Você escreve primeiro o seu projeto com o seu coração e sem pensar muito e, em segundo, você escreve com a cabeça”.

O que importa então é fazer as coisas e, por isso, temos que entender e dominar os meios da produção de conhecimentos. Somente depois dos primeiros passos, temos que ter experiência e bom senso de refletir, de selecionar e de rearranjar. A própria produção provê oportunidades de ver, mais claramente, o que está em pauta, permitindo que se tome novos rumos e se ganhe novas perspectivas sobre as coisas.

Agora o meio mais importante para a ciência ou para a Matemática são teorias e tudo tem que ser julgado a partir de uma perspectiva teórica, exatamente como escrever um texto ou pintar um quadro, onde as palavras e as frases ou as cores e as linhas podem ser medidas e julgadas apenas em o contexto do texto ou da imagem e seus harmônicos. Para entender a complementaridade dos conceitos teóricos, deve-se considerá-los exatamente como as cores e as linhas de pintura em seu contexto teórico. Neste contexto, o empirismo bruto do senso comum constitui o primeiro obstáculo no ensino e na aprendizagem.

II.

Vista a partir do objetivo de aprendizagem e criatividade, a primeira pergunta é: como pode o passado ter efeitos no presente? A resposta reside na natureza dos sinais, porque, por um lado, eles têm uma certa estabilidade e durabilidade e, por outro, seus sentidos e significados são contínuos. Todos os objetos existentes são simplesmente coisas sem qualquer significado. Portanto, tudo o que é real em um sentido inteligível é uma relação entre coisas ou um *continuum*. A pergunta "*o que isso realmente significa?*" pode ser sempre respondida de várias maneiras. A interpretação de um texto não é senão um outro texto, e assim por diante. Para entender algo temos que contá-lo sempre de formas novas. Significados não são completamente determinados e fixos, eles não estão sujeitos a critérios de identidade nítida como os objetos existentes, mesmo porque eles dependem de redundância. Algo que não podemos colocar em relação a qualquer outra coisa não tem qualquer significado para nós. E o significado de uma informação muda conforme o contexto, é relativo ou relacional.

A essência do pensamento científico em geral, consiste, como afirmou certa vez Max Born, na descoberta de que as relações podem ser controladas, bem como comunicadas, enquanto fenômenos ou as coisas não. O mesmo acontece com relação aos dados que parecem falar por si mesmos, comunicando o seu significado. Por exemplo, a informação de que 7.000

pessoas foram mortas por acidentes de trânsito em um determinado país durante um determinado período de tempo leva a um significado fundamentalmente diferente se for complementada com informações adicionais de que o respectivo número tem variado entre 10.000 e 15.000 durante períodos anteriores, em comparação com as informações que estes números sempre foram menores que 2.000.

Dessa maneira, significados são criados por meio da reflexão e do pensamento relacional e dependem da memória e do recolhimento ou retrospecção, enquanto o pensamento instrumental pode começar como um mero ato de vontade e por tentativa e erro. O indivíduo instrumentista diz: A prática faz o perfeito!

Vamos dar um exemplo muito famoso da importância da redundância e a presença do passado para o significado. Em sua obra *La recherche du temps perdu* (A Busca do Tempo Perdido), Marcel Proust descreveu um episódio de lembrança ou memória involuntária, em que pistas encontradas na vida cotidiana evocam lembranças do passado, sem esforço consciente. O exemplo mais famoso de memória involuntária de Proust é conhecido como o "*Episódio da Madeleine*".

O *Episódio de Madeleine* diz:

> Mal o líquido quente misturado com as migalhas tocou meu paladar que um calafrio percorreu-me e eu parei, a intenção sobre algo extraordinário que estava acontecendo comigo. Um prazer requintado invadiu os meus sentidos, algo isolado, individual, sem sugestão da sua origem, e ao mesmo tempo as vicissitudes da vida haviam se tornado indiferente a mim, seus desastres inócuos, a sua brevidade ilusória – esta nova sensação de ter tido em mim o efeito que o amor tem de encher-me com uma essência preciosa, ou melhor, essa essência não estava em mim, era eu. [...] de onde ela veio? o que isso significa? Como eu poderia aproveitar e apreendê-la? [...] e de repente a memória se revelou. O gosto era aquele do pedaço de Madeleine que nas manhãs de domingo em Combray (pois naquelas manhãs eu não saía antes da missa), quando fui para dizer bom dia a ela em seu quarto, minha tia Léonie costumava me dar, mergulhando-as primeiro em seu próprio copo de chá ou tisana. A visão da Madeleine não tinha recordado quase nada a minha mente antes de eu saborear isso. E todos da minha xícara de chá.

Gilles Deleuze, em sua obra "Proust e Sign", acreditava que o enfoque de Proust não era a memória e o passado, mas que o narrador estava aprendendo o uso de "sinais" para compreender e comunicar a realidade definitiva, tornando-se um artista.

Assim, realidade, por um lado, é composta de diferentes coisas e sinais ou significados existentes, por outro lado, são reais no sentido da abertura de possibilidades e, portanto, tem que ser entendida por uma perspectiva dinâmica e de desenvolvimento. Todo o desenvolvimento baseia-se na interação de símbolos e das coisas, de continuidade (significado) e do acaso. Peirce enfatizou isso muito tempo antes que a teoria da evolução ser criada e publicada por Charles Darwin, O acaso tem sempre um papel como a continuidade, porque, como mostra o episódio da Madeleine, as distinções entre signos e objetos não são completamente determinadas. Um objeto, como o pequeno pedaço de Madeleine, torna-se, através da repetição, um signo.

Significados dependem, como dissemos, de redundância. Universais são, portanto, mais bem entendidos, não como abstrações no sentido platônico comum, mas como relações, porque sempre que somos levados a reconhece-las como mais importantes.

III.

Conhecimento artístico e científico é sempre formal, ou seja, dado em termos de formas, e exige renúncia de uma reificação imediata dos seus componentes individuais. Teorias ou obras de arte não são uma duplicação da realidade e deveriam, antes de tudo, ser entendidas como elementos de um contexto estrutural, de um estilo, ou como certo tipo de atividade, apenas mediada pelo entendimento intrínseco. Somente depois, podemos aprender com elas alguma coisa para a "vida real", aplicando-as em novas distinções e perspectivas adquiridas por meio delas.

Parece que, por meio da teoria ou da obra de arte como uma forma, como uma realidade em si própria, uma nova liberdade é adquirida e novas opções de visão da realidade são abertas. Não existe uma aplicação literal de uma teoria, ou seja, teorias ou obras de arte são metáforas. Por exemplo, fala-se, em termos pedagógicos, que o método axiomático representa economia de pensamento. No entanto, isso também tem seus perigos, pois poderia seduzir pessoas a tirarem conclusões precoces e "lógicas", que dão resultados aparentemente válidos, mas que são baseados em uma análise insuficiente da situação real.

Por isso, para aprender Matemática é preciso aceitar o conhecimento matemático simultâneo como tarefa própria e também ver seu valor ou seu significado nas possíveis aplicações.

Um texto matemático ou uma obra de arte é, por um lado, um objeto, isto é, ele é governado por determinação e rigorosa necessidade, de tal forma que nem uma única palavra ou fórmula possa ser alterada e, por outro lado, é uma representação e, como tal, está aberta a uma gama quase ilimitada de interpretações. Parece que, por meio da teoria ou da obra de arte como uma forma, como uma realidade em si própria, uma liberdade nova surge, como se novas opções de ver sejam abertas, mas que, no final, são de caráter essencialmente metafórico. Não há uma aplicação literal de uma teoria, mas interpretar uma teoria, ou um produto artístico, pode mudar, transitoriamente ou permanentemente, a nossa maneira de ver o mundo e de agir dentro dele. Assim, textos e teorias são meios e objetos ao mesmo tempo. Meios e objetos são totalmente diferenciáveis por seus respectivos momentos de atividade cognitiva individual, dessa forma, eles desempenham um papel completamente simétrico para o desenvolvimento da cognição. Esta complementaridade da diferença e da unidade entre meios e objetos implicou no surgimento e no dinamismo da Matemática Pura no século XIX.

Afirmamos que essa complementaridade pode ser melhor entendida a partir do ponto de vista da cognição como atividade semiótica, porque a atividade semiótica é, ao mesmo tempo, construtiva e reflexiva. Textos que escrevemos no passado permitem, por exemplo, uma interação entre o nosso ego de ontem e o nosso ego de hoje. Atividade semiótica é orientada para metas e, simultaneamente, auto-organizadas ou autotélicas, porque é uma realidade que tem suas próprias leis e exigências.

A base sistemática da auto-organização é que, obviamente, não existe, fora de uma ordem emergente, quaisquer informações úteis ou superiores em relação às opções construtivas e requisitos de ordem. Não há, por exemplo, na nossa sociedade qualquer instituição que poderia prescrever incontestavelmente reivindicações de conhecimento superior ao conhecimento científico. O oposto da auto-organização é a teleologia, precisamente porque esta é o caso em que há uma instituição externa que possua mais informações.

Tomemos o exemplo da pintura. A imagem é, certamente, um produto teleológico, porque é uma realização da imaginação de alguém, a qual também mostra propriedades altamente auto-organizadas. Criação de uma obra de arte não é apenas a execução mecânica de acordo com alguma ideia pré-concebida ou plano mestre pré-fabricado. No processo de sua realização, ocorre um aumento da sensibilidade a erros ideológicos, intuições falsas e outras interferências do artista. A cor errada, uma direção mal escolhida do pincel, uma má distribuição geral de cores e figuras, uma figura delineada distraidamente, por um lado, podem comprometer a estrutura de ordem obtida a qualquer momento, para que, no processo de pintura a controvérsia entre a execução direta dá uma ideia e, por outro lado, a distribuição casual e contingente de linhas ou cores é cada vez mais substituída pela experiência que só a própria imagem proporcionará as pistas necessárias de como continuar e completar o trabalho à mão.

É o retrato, mais do que o pintor ou o conteúdo representado, que dá as regras sobre o processo criativo. Esforço direto, diz Peirce, “pode conseguir quase nada” (Peirce, CP 6,301) e o mesmo é verdade em relação ao comportamento acidental ou casual simples.

Então, pensar, aprender, pintar são essencialmente atividades semióticas que são orientadas, desenvolvidas e levadas a níveis mais altos pela lógica e pela coerência de seus próprios produtos. O texto impresso permite a cooperação do nosso ego de ontem com o nosso ego de hoje.

IV.

O ponto crucial, como já vimos, é a complementaridade dos dois tipos de pensamento que Skemp detectou. Kant, apesar de apresentar uma versão construtiva da Matemática, já sabia da importância dessa complementaridade. Kant, que exprimiu em sua *Crítica da Razão Pura* (Kant, 1787) a essência da noção da ciência dos tempos clássicos da modernidade, fala das *duas fontes* de nosso conhecimento, concluindo que conceitos sem intuições são vazios enquanto intuições sem conceitos são cegas.

Kant escreveu:

> Nosso conhecimento surge de duas fontes básicas da mente; a primeira recebe as concepções (receptividade das impressões), e a segunda é a capacidade de reconhecer um objeto por meio dessas concepções (espontaneidade dos conceitos); a primeira nos dá um objeto, a segunda nos permite pesá-lo em relação àquela concepção. Intuição e conceitos são assim os elementos de todo o nosso conhecimento, de modo que nem conceitos sem as correspondentes intuições, nem intuições sem conceitos podem produzir conhecimento [...]. Sem o sensorial, nenhum objeto se daria para nós e, sem a razão, nenhum poderia ser pensado. Pensamentos sem conteúdo são vazios, intuições sem conceitos são cegas (KANT, 1787, B 75).

Kant fundamentou sua diferenciação entre ciência discursiva e conhecimento intuitivo pelo processo complementar do pensamento que podemos descrever em termos de uma autoexperiência bem simples. Quando tentamos entender um objeto novo e ainda desconhecido, a nossa primeira iniciativa é deixar o objeto atuar por si só (passividade e receptividade do pensamento). Por outro lado, vamos relacionar cada nova informação, cada novo objeto e cada nova concepção com os conhecimentos que já dispomos. Trata-se de integrar cada fato novo no próprio sistema de conhecimentos e experiências (atividade e operatividade do pensamento). Explicar um fato novo, afinal de contas, significa interpretá-lo no contexto das coisas já conhecidas e explicadas.

Tentamos, nessa linha, aprender um novo conceito, explicá-lo ou introduzi-lo no conhecimento por meio de uma definição. Isto significa encontrarmos uma definição para o conceito que o defina por si só e não por outros conceitos. De outra forma não teríamos condições de aprender o novo e adaptar-nos ao desconhecido, porque restaria apenas um único padrão de medida: saber se os novos conceitos e ideias permitem se reduzir ou não aos antigos. A demonstração aristotélica foi reducionista e, na Educação e na Didática, imita-se essa maneira de explicar o novo e o avançado pelo familiar e elementar.

Por isso, existe uma ruptura entre demonstração e descoberta de novas verdades como entre intuições e conceitos. Na intuição, ou na experiência, o novo entra como uma entidade sem significado, como uma surpresa.

Algo que não possua relação alguma com os fatos conhecidos que já detemos não pode também ser por nós entendido. Significação pressupõe uma redundância de nossas experiências cognitivas, ou seja, ter significado implica ser acessível de uma segunda ou múltiplas maneiras. Algo que só existe absolutamente isolado e fechado em si próprio, e para o qual não temos acesso ou que não possui relações com outras coisas, não pode ser interpretado e não existe para nós. Esses fatos simples e fundamentais foram reunidos, no começo do século XIX, no conceito de *círculo hermenêutico da compreensão do significado de um texto* ou do pensamento dialético.

Combinado a isso, ao invés da abstração empírica, apareceu uma nova noção de conceito matemático e científico baseada na *abstração reflexiva*.

Essa nova noção de conceito deveu-se ao instrumentalismo da ciência moderna e ao seu caráter ativo e construtivo. Foi Kant, acima de tudo, que deu uma clara expressão epistemológica para esse fato. Portanto, sua *Crítica da Razão Pura* é a mais importante obra filosófica depois de Platão e de Aristóteles. A *Revolução Copernicana* da epistemologia de Kant não é senão a codificação da perspectiva epistemológica da ciência newtoniana (Hahn, 1988). O que é novo em

Newton, em comparação com o ideal aristotélico de ciência, é, antes de tudo, o construtivismo e a sua busca de convicção individual à base da consciência das próprias atividades construtivas e da experiência de seus efeitos, resultando na importância da intuição e da experiência particular. Não é sempre possível, e nem é exigido, dar motivos de uma convicção ou causas de um fato. Muitos fatos aparentemente não têm explicação e, muitas vezes, a ciência tem que se contentar em constatar e descrever as coisas como elas são. As provas matemáticas são, como disse Kant, sempre intuitivas e apodíticas.

Mas ainda falta algo nesse quadro da epistemologia kantiana. O construtivismo ou o instrumentalismo não são suficientes para dar justiça à obra de Kant. Ele se perguntava também como as "duas fontes" de nosso conhecimento se juntam e, além disso, era claro para ele que não existe conhecimento sem um sujeito humano que conhece. Kant acreditava no Iluminismo e nas suas metas educativas e esclarecedoras.

Um conhecimento, um conceito, uma teoria, ou até uma obra de arte, existe para servir:

1. À intuição e à mente do sujeito
2. A um objeto, uma aplicação ou a uma finalidade objetiva
3. À própria ideia (teoria, obra etc.)

Isto é o que chamamos de *triplicidade do significado da compreensão*. Vamos descrever esses três significados:

a) *Compreensão instrumental*: É um tipo de compreensão que Skemp desconsiderava *a priori* por considerar *regra sem justificativa*, ou seja, é adquirida quando se considera uma determinada regra e pela habilidade de usá-la. O fato de Cardano conhecer as regras de calcular com os números imaginários, sem qualquer entendimento a respeito deles, é um exemplo dessa compreensão. É como se a pessoa fosse uma máquina que segue conceitos como instrumentos para operar, seja logicamente ou por meio de cálculos.

b) *Compreensão relacional ou aristotélica*: É um tipo de compreensão que, como afirma Skemp, significa o que sempre entendemos pela palavra compreensão, ou seja, conhecer como fazer e porque fazer. Na realidade, é concretizar, reduzindo a um contexto de uma tradição e de um entendimento tradicional e habituado.

c) *Compreensão por meio de uma nova perspectiva teórica*: É um tipo de compreensão que possibilita a abertura, a expansão do pensamento relacional, que era somente linear, para outras dimensões, ou seja, grande parte do significado do conceito teórico fica dentro do desenvolvimento da teoria e não apenas nos cálculos ou ilustrações. Esse tipo de compreensão não nos faz correr riscos de um pensamento relacional reducionista, que implica em mediocrizar uma teoria, pelo contrário, torna-a muito fértil e produtiva.

Essa *triplicidade* se encontra na definição de um signo segundo Charles S. Peirce (1839-1914). Em contraste com os tradicionais modelos semióticos, Peirce define um signo como qualquer coisa que representa alguma coisa (chamada o seu objeto) de tal modo a gerar outro signo (seu interpretante ou significação). Um signo não representa seu objeto em todos os pormenores "[...] mas em referência a usar uma espécie de ideia, que eu tenho algumas vezes chamado de a base do *representamen.* A palavra ideia deve ser aqui entendida em uma espécie de sentido platônico, muito familiar na conversação do dia a dia" (PEIRCE, CP 2.228 e 4.536).

Ernst Cassirer (1874-1945), o mais proeminente dos filósofos do movimento neo-kantiano do século XX, afirma:

> A Lógica Aristotélica, em seus princípios gerais, é uma verdadeira expressão e o espelho da metafísica aristotélica. Somente no contexto com a crença em que esta última se assenta é que se pode entender em seus motivos peculiares. A concepção da natureza e da ordem de apresentação determina a concepção das formas fundamentais do pensamento. [...] As funções essenciais do pensamento, neste contexto da ciência aristotélica, são apenas de comparar e diferenciar sensorialmente um conjunto dado. Reflexão, que passa aqui e ali entre os objetos, a fim de determinar as características essenciais nas quais eles concordam, leva por si mesma à abstração. A abstração levanta a clara consciência dessas características, puras, por si só, isentas de qualquer mistura de elementos dissimilares. Assim, o mérito peculiar dessa interpretação parece ser que nunca se destrói ou coloca em perigo a unidade da visão comum do mundo. O conceito não aparece como algo estranho à realidade sensível, mas faz parte dessa realidade, é uma seleção do que é imediatamente nele contido. Neste contexto, os conceitos das ciências matemáticas exatas aparecem no mesmo plano que os conceitos das ciências descritivas, que estão preocupadas apenas com uma superficial ordenação e classificação do que é dado. Assim, como nós formamos o conceito de uma árvore, selecionando a partir da totalidade de carvalhos, faias e bétulas, o grupo de propriedades em comum, assim, exatamente da mesma maneira, formamos o conceito de uma figura plana retangular, isolando as propriedades comuns que se encontram no quadrado, no romboide, no losango, no trapézio simétrico e assimétrico e que podem ser imediatamente vistas e apontadas. [...]. Portanto, se nós chamamos o número de propriedades de um conceito da magnitude do seu conteúdo, este valor aumenta à medida que descem dos conceitos mais elevados para a parte inferior e, assim, diminui o número de espécies subordinadas ao conceito, ao passo que, quando subimos para o gênero mais elevado, este conteúdo vai diminuir à medida que o número de espécies é maior. Essa extensão crescente do conceito corresponde a uma diminuição progressiva do conteúdo, de modo que, finalmente, os conceitos mais gerais já não possuem qualquer conteúdo definitivo.

> A pirâmide conceitual que moldamos alcança seu ápice na representação abstrata de “algo” que inclui todo conteúdo possível intelectual, mas que ao mesmo tempo é totalmente desprovido de qualquer conteúdo específico.
> Nesse ponto, a tradicional teoria do conceito causa as primeiras dúvidas sobre a sua validade universal e sua aplicabilidade. Se o objetivo final deste método de dar forma aos conceitos está inteiramente vazio, o processo inteiro que conduz a ele deve despertar suspeito. [...] O conceito perderia todo o valor se isso significasse apenas a negligência dos casos particulares a partir da qual começa, e a aniquilação de sua peculiaridade (Cassirer, 1910, p. 4-7).

O fato de que todos os esforços para uma nova Filosofia da Ciência e da Lógica, que mantivesse a noção aristotélica tradicional do conceito, não tiveram sucesso, convenceu Cassirer que o que está em jogo é a noção de conceito. Assim Cassirer prossegue: *Toda tentativa de transformar a Lógica deve concentrar-se, acima de tudo, sobre um ponto: todas as críticas da Lógica formal são concentradas na crítica da doutrina geral da construção de conceitos (formação de conceito)* (Cassirer, 1910, p. 3).

Tal perspectiva é sugerida quando já não se pergunta mais “o que é um conceito”, mas “quais são as funções que ele desempenha”. Por exemplo, o conceito de função é o conceito fundamental da Matemática e da Física clássica e uma determinação da funcionalidade se apresenta como tarefa essencial.

Cassirer, em suas reflexões sobre o desenvolvimento histórico do conceito do conceito, contrastou a imagem da ciência aristotélica com a Matemática da Modernidade desde século XVII e afirma:

> “Em sua crítica à lógica da escola de Wolff, Lambert salientou que foi mérito exclusivo dos conceitos gerais da matemática de não cancelar as determinações dos casos especiais, mas em todo o rigor retê-los. Quando um matemático faz sua fórmula mais geral, isto significa não apenas que deve reter só uns casos mais especiais, mas também possa deduzi-los a partir da fórmula universal. A possibilidade de dedução não é encontrada no caso dos conceitos escolásticos, uma vez que estes, de acordo com a fórmula tradicional, são formados por negligenciar o particular e, portanto, a reprodução dos momentos particulares do conceito parece ser excluída. Assim, a abstração é muito fácil para o “filósofo”, mas por outro lado, a determinação do particular é muito mais difícil, pois no processo de abstração todas as particularidades foram deixadas para trás de tal forma que ele não pode recuperá-los [...] Essa observação simples contém, de fato, o germe de uma distinção de grande importância. O ideal de um conceito científico aqui aparece em oposição à apresentação esquemática por uma palavra simples. O verdadeiro conceito não ignora as peculiaridades e particularidades que detém ao abrigo do mesmo, mas procura mostrar a necessidade da ocorrência e conexão de apenas essas particularidades. O que dá é uma regra universal para a conexão dos elementos próprios. Assim, podemos avançar a partir de uma fórmula matemática geral, por exemplo, a partir da fórmula de uma curva de segunda ordem, para as formas geométricas especiais do círculo, da elipse etc, considerando certo parâmetro que ocorre com eles e que lhes permitem variar por uma série contínua de potências. Aqui, o conceito mais universal mostra-se também o mais rico em conteúdo, que o tiver pode deduzir dele todas as relações matemáticas que dizem respeito aos problemas específicos, enquanto, por outro lado, ele tem esses problemas

> não tão isolados, mas com ligação contínua uns com os outros, assim nas suas ligações sistemáticas mais profundas. O caso concreto não é excluído, mas é fixo e mantido como um passo perfeitamente determinado em um processo geral de mudança. É evidente que o novo traço característico do conceito não é a "universalidade" de uma apresentação, mas a validade universal de um princípio de ordem em série" (Cassirer, 1910, p. 24-25).

Em resumo, poder-se-ia dizer que Cassirer descreveu exatamente a transformação da compreensão no sentido apresentado por Skemp, mas ele não indicou como essa transformação ocorreu na História da Matemática.

Referências

BOS, H., 2001. *Redefining Geometrical Exactness*. N.Y.: Springer.

CASSIRER, E., 1910. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff*. Berlin: Bruno Cassirer.

EISENSTEIN, E., 1979. *The Printing Press as an Agent of Change*. Cambrige University Press.

HAHN, R., 1988. *Kant's Newtonian Revolution in Philosophy*. Southern: Illinois, University Press Carbondale.

KANT, I., 1787. *Critique of Pure Reason*. Preface to the Second Edition.

LENHARD, J. & OTTE, M., 2010. *Two Types of Mathematization*. In Bart Van Kerkhove, Jonas De Vuyst, and Jean Paul Van Bendegem, Philosophical Perspectives on Mathematical Practice. (pp. 301-330). London: College Publications.

OTTE, M., 2008. Metaphor and Contingency. In: Radford, L.; Schubring, G. ; Seeger, F. (Orgs.). *Semiotics in Mathematics Education*: Epistemology, History, Classroom and Culture. Rotterdam: Sense Publisher.

PEIRCE, C. S.

CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiss, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (quoted by no. of volume and paragraph)

SKEMP, R. R., 1976. Relational understanding and instrumental understanding**.** In: *Mathematics Teaching***,** 81, 20–26.

THOMAS, K., 1971. *Religion and the Decline of Magic*, London, 1971.