

NOVAS PERSPECTIVAS TEÓRICAS SOBRE REPRESENTAÇÃO E COMUNICAÇÃO DE IDEIAS MATEMÁTICAS: CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Kécio Gonçalves Leite¹
kecioleite@unir.br

Resumo

Este artigo apresenta perspectivas teóricas referentes a representação e comunicação de ideias matemáticas, a partir da abordagem de contribuições de autores que têm tratado do tema com foco no papel da metáfora e suas relações com a cognição. Essas perspectivas podem gerar potenciais contribuições para a Filosofia da Matemática e para a Educação Matemática, decorrentes de uma possível nova abordagem filosófica e epistemológica a respeito da natureza do conhecimento matemático e de seu ensino. Em especial, são apresentadas as perspectivas teóricas de George Lakoff, Rafael Núñez e Michael Otte sobre o assunto, verificando-se, na sequência, possíveis contribuições para a Educação Matemática.

Palavras-Chave: Metáfora. Matemática. Comunicação.

Introdução

As relações entre linguagem, pensamento e conhecimento foram percebidas de diferentes formas ao longo da história do pensamento ocidental. Em geral, desde o advento da Idade Moderna, ideias matemáticas têm sido concebidas como universais, objetivas e exatas, estando sua natureza desvinculada das contingências da linguagem e das imperfeições da comunicação. No contexto escolar, estas noções modernas do que sejam a matemática e seus objetos geram situações de supervalorização do rigor e da busca pela verdade, legitimando-se a validade de *verdades matemáticas* como sendo assertivas transcendentais, portanto independentes de contextos, do tempo e do espaço.

No entanto, desde o final do século XIX e início do século XX, com o fracasso das tentativas de estabelecimento dos fundamentos definitivos da matemática, o advento da expansão do ensino e a consequente preocupação com a divulgação de ideias matemáticas em espaços escolares, novas perspectivas teóricas surgiram, atribuindo importância às relações entre matemática e linguagem. Entre as novas perspectivas emergentes que convergem para a constituição de uma nova Filosofia da Matemática, encontram-se aquelas relacionadas a teorias contemporâneas de metáfora.

¹ Doutor em Educação em Ciências e Matemática. Docente do Departamento de Educação Intercultural da Universidade Federal de Rondônia (UNIR).

Segundo estas novas perspectivas teóricas, objetos matemáticos, por serem abstrações, só podem ser concebidos e comunicados por meio de representações, sendo que representações sempre estão suscetíveis a formas contingentes de compreensão metafórica. A contingência se deve à ausência de limites definidos dos aspectos em que os distintos se assemelham, de modo que a escolha de critérios para a determinação da correspondência é totalmente indefinida.

A revalorização da metáfora em suas relações com o conhecimento está intimamente ligada a mudanças ocorridas no seio da Filosofia da Ciência e criou elementos suficientes para se questionar o paradigma da modernidade no que diz respeito aos modos de se conceber a matemática e conseqüentemente o seu ensino. Nesse sentido, as conseqüências epistemológicas geradas por uma abordagem da matemática na perspectiva da metáfora inevitavelmente geram uma reorientação de discussões no campo da Educação Matemática.

Esta nova abordagem da natureza da matemática reconhece o papel não só heurístico da metáfora, mas também seu *status* cognitivo, concebendo-a como instrumento de invenção capaz de fornecer aos sujeitos (matemáticos, educadores e estudantes) elementos de construção racional, que fogem aos paradigmas da modernidade. Nesta construção metafórica, o discurso não pode se desvincular de sua dimensão proposicional, mas a natureza de tal discurso deixa de ser apenas uma narrativa lógica, subvertendo a possibilidade de que a matemática descreve a realidade independentemente de formulações linguísticas. Nessa nova perspectiva epistemológica, a descrição, a representação e a explicação da realidade são tarefas criativas, que envolvem continuidades e descontinuidades que a linguagem literal por si só não é capaz de estabelecer, e, valendo-se de metáforas, tal processo criativo se desenvolve inevitavelmente ligado a processos contingentes.

A emergência da valorização e do reconhecimento da metáfora na contemporaneidade, baseada em uma nova Filosofia da Ciência, possibilita um questionamento dos pressupostos tradicionais dos modos do fazer e do ensinar matemática. Um novo entendimento das formas de construção do conhecimento matemático emerge desta perspectiva, revelando que dentro da racionalidade científica se inserem elementos contextuais, vinculados a particularidades culturais, e, portanto, situadas no tempo e no espaço. Nesse sentido, associa-se a produção de objetos matemáticos e seu ensino à necessidade da representação e da comunicação, para as quais a linguagem figurada se mostra indispensável porque é fundamental na construção teórica e para a criação de novas ideias.

A redução da distância entre matemática e metáfora em perspectivas teóricas contemporâneas permite especular sobre possíveis implicações epistemológicas de uma abordagem metafórica da matemática. A seguir, buscar-se-á discutir tais implicações, a partir de uma abordagem de ideias de George Lakoff e Rafael Núñez sobre a perspectiva subjetiva da matemática enquanto construção humana, e a partir da discussão de ideias de Michael Otte sobre o papel da metáfora na matemática. Ao final, buscar-se-á estabelecer uma síntese das contribuições que estas novas perspectivas teóricas podem proporcionar para a Educação Matemática, considerando-se as principais ideias dos autores acima citados.

I. A estrutura metafórica da matemática segundo Lakoff e Núñez

No artigo *The metaphorical structure of mathematics: Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics*, de 1997, George Lakoff e Rafael Núñez introduziram a Teoria da Metáfora Conceitual no campo da Educação Matemática. Neste artigo, os autores se propuseram a discutir uma nova caracterização do que sejam ideias matemáticas, compreensão matemática, natureza conceitual da matemática, bem como a maneira como surge o pensamento matemático, tendo a utilização de metáforas como principal mecanismo básico subjacente. Implicitamente, os autores intentam contrapor, à concepção platônica de matemática, uma outra visão, que estabeleça uma dependência da existência da matemática em relação à mente das pessoas, consideradas individual e coletivamente. De acordo com o platonismo, os objetos matemáticos são reais, possuem existência completamente independente do conhecimento que deles se tenha e se situam fora do espaço e do tempo da existência física humana. Nesta perspectiva platônica, às pessoas não cabe “construir” nenhum objeto matemático, visto que estes já existem e já estão determinados, restando somente a possibilidade de descobri-los.

A partir da teoria da metáfora conceitual, Lakoff e Núñez se propõem a discutir a possibilidade de uma nova visão não-platônica sobre a natureza da matemática e seus objetos. O ponto de partida do artigo são os resultados alcançados pela ciência cognitiva na segunda metade do século XX, principalmente as descobertas sobre a mente realizadas na década de 1970 nas áreas da neurociência, psicologia, antropologia e linguística, as quais apontam para o fato de que o conhecimento que se tem do mundo exterior objetivo não passa de construções mentais produzidas pelo homem e a matemática não foge a essa regra. Segundo os autores do artigo, isso contraria a concepção de uma quantidade significativa de matemáticos dos séculos

XIX e XX, como Frege, Russell, Hilbert, Weierstrass e Gödel. Estes pressupõem, de uma perspectiva platônica, que a matemática não dependeria de mentes e ideias, mas sim de símbolos e de seus modelos teóricos de interpretação.

Para demonstrar como estes matemáticos que procuraram estabelecer os “fundamentos” da matemática dos séculos XIX e XX, aos quais se referem Lakoff e Núñez, concebiam a matemática de uma perspectiva platônica, é ilustrativo neste caso o conjunto de citações de Thom, Frege, Russell e Gödel que se encontram em Font (2001, p. 65-66):

Habida cuenta de todo, los matemáticos deberían tener el valor de sostener sus convicciones más profundas y afirmar, por tanto, que las formas matemáticas tienen existencia independiente de la mente que las está contemplando... A pesar de ello, en un instante dado cualquiera, la visión que tienen los matemáticos de este mundo de ideas es tan solo incompleta y fragmentaria (Thom, apud Font, 2001, p. 65).

(...) el número es un objeto de la psicología o un resultado de procesos psíquicos tanto como lo pueda ser, digamos, el mar del Norte. La objetividad del mar del Norte no viene afectada por el hecho de que dependa de nuestro arbitrio qué parte de toda la superficie de agua en la tierra delimitemos y cubramos bajo el nombre de “mar del Norte”. Éste no es motivo para querer estudiar este mar por vía psicológica (Frege, apud Font, 2001, p. 65).

El número 2 debe ser de todos modos una entidad, que rendiría una entidad ontológica, aunque no este en ningún espíritu (...) La aritmética debe ser descubierta en el mismo sentido que Colón descubrió las islas occidentales y nosotros no creamos los números ni él creó a los indios (Russell, apud Font, 2001, p. 65).

Por otro lado, la segunda alternativa, en la que existen proposiciones matemáticas absolutamente indecibles, parece refutar la concepción de que la matemática (en cualquier sentido) es sólo nuestra propia creación. Pues el creador conoce necesariamente todas las propiedades de sus criaturas, ya que ellas no pueden tener más propiedades que aquellas que él les ha dado. Así, esta alternativa parece implicar que los objetos y hechos matemáticos, o al menos algo en ellos, existen objetiva e independientemente de nuestros actos mentales y decisiones (Gödel, apud Font, 2001, p. 65-66).

Lakoff e Núñez classificam de *matemática livre da mente* a concepção destes matemáticos, sugerindo que ela é o resultado de uma tradição que pressupõe a universalidade da matemática e da razão, como entes livres de qualquer influência do tempo, do contexto, da realidade social e, portanto, da cultura. Nesse sentido, os autores discorrem acerca da necessidade de se trazer a matemática de volta para o *encarnamento* da mente humana, entendendo que a mente é base necessária para se construir a matemática e destacando que

matemática com base mental não é apenas matemática livre da mente com algumas análises cognitivas acrescentadas. Em vez disso, é a introdução de alterações no próprio pensamento matemático, não só na educação matemática ou no estudo da cognição matemática (Lakoff & Núñez, 1997, p. 21).

Para Lakoff e Núñez, há uma ligação íntima entre nossa compreensão do que seja a matemática e nossa concepção de razão. Nesse sentido, como a tradição dominante na filosofia ocidental sempre concebeu a razão como algo puramente abstrato, transcendental, livre da cultura, não emotivo, universal, descontextualizado e formal, a matemática, sendo vista nesta tradição como o melhor exemplo da razão, conseqüentemente também foi vista como tendo estas propriedades. Assim, a tentativa de dar bases puramente formais para a matemática foi um produto natural desta tradição filosófica.

Nesse sentido, segundo os autores, quando matemáticos tais como Frege, Russell, Hilbert, Weierstrass e Gödel, além de outros, procuraram elaborar a filosofia matemática dos séculos XIX e XX, pensando estarem inventando as “fundações” da matemática, parecia razoável pensar, por exemplo, em provas apenas como sequências de símbolos a serem satisfeitas em um modelo formal. Não se pensou na necessidade de narrativas matemáticas para a expressão de ideias, para o que a linguagem e a comunicação ocupariam um papel fundamental. Além disso, a aparente utilidade das equações para reger e descrever o universo físico, algo muito louvado e apreciado desde o nascimento da ciência moderna, conduziu à ideia de que de alguma forma a matemática pertencia a uma realidade externa objetiva, atemporal e imutável, como sendo algo inerente mesmo à natureza. É ilustrativa desta concepção tradicional a ideia de Galileu Galilei, segundo a qual a natureza estaria escrita em caracteres matemáticos.

A abordagem da matemática na perspectiva da teoria da metáfora conceitual pressupõe justamente o contrário, isto é, aponta para uma dependência essencial da matemática em relação a particularidades contextuais e culturais, concebendo-a principalmente como produto da mente humana. Deste modo, para Lakoff e Núñez, a matemática “não está no mundo”, ou não pertence a uma realidade externa, mas é um produto do sistema conceitual humano.

Um exemplo utilizado pelos autores para ilustrar o fato de que a matemática não trata de coisas do mundo externo e, portanto, não pertence ao mundo exterior, é a expressão “dois mais dois é igual a quatro”. A questão é: dois e dois são realmente quatro? Se em uma sala com duas cadeiras forem acrescentadas outras duas cadeiras, não se poderá negar que na sala encontrar-se-ão quatro cadeiras. Mas, para os autores, isso não significa que “ $2 + 2 = 4$ ” está

no mundo. A razão para isso é que a categoria *cadeira* é algo criado pelo sistema conceitual humano que pressupõe o agrupamento de coisas a serem contadas. Embora tais coisas, enquanto objetos e corpos, sejam naturalmente diferentes entre si, não estejam agrupados por si próprios e não possuam números que lhes sejam atribuídos em si mesmos, os seres humanos os agrupam ao contar, dando origem a categorias metafóricas que objetivamente não existem. Neste caso em particular, a categoria *cadeira* é tratada como uma entidade discreta, ou substância de uma espécie uniforme, e isso é resultado das experiências humanas com objetos físicos. Tais experiências fornecem a base para uma variedade de metáforas ontológicas, que possibilitam conceber objetos, formas e ideias como entidades ou substâncias discretas, para deste modo ser possível agrupá-las, quantificá-las e operar sobre elas. Portanto, tais agrupamentos não existem objetivamente no mundo. As cadeiras agrupadas no exemplo poderiam ser uma poltrona, um tamborete, uma cadeira de balanço, um reclinador, isto é, poderiam ser de diferentes tipos, como são as coisas naturalmente no universo. Assim, tais grupos são de natureza abstrata, e a categoria “cadeira” não existe objetivamente no mundo, embora seja tratada pelo sistema conceitual humano como uma essência pertencente ao mundo. Os autores concluem, então, que, a exemplo da expressão $2+2=4$, a matemática não trata de coisas existentes no mundo.

Tal como com outras essências abstratas, as essências matemáticas são construídas através de perspectivas metafóricas e atribuídas ao mundo tão naturalmente como se atribui cores aos objetos e corpos. Assim, para Lakoff e Núñez, a matemática, por tratar de essências, torna-se abstrata, uma vez que essências não existem mais objetivamente no mundo do que cores. As essências são criadas pelos sistemas conceituais humanos, e, embora atribuídas ao mundo objetivo, possuem natureza completamente abstrata.

Em sua concepção de metáfora, Lakoff e Núñez (1997) expõem a ideia de que a compreensão dos conceitos matemáticos se dá por um processo de simplificação, com redução do abstrato ao concreto, a partir de um conjunto de metáforas conceituais oriundas do nosso sistema sensorio-motor e de nossas experiências corporais. Neste sentido, metáforas conceituais forneceriam a estrutura fundamental a partir da qual a matemática seria permanentemente criada e partilhada por aqueles que a praticam, ensinam e aprendem.

Um exemplo de como utilizamos metáforas conceituais na matemática, segundo Lakoff e Núñez (1997), se dá na criação, durante a compreensão de um conceito matemático, do que eles denominam “agentes matemáticos”. Segundo os autores,

Um agente matemático é um ator metafórico idealizado, quer dizer, um ator idealizado no domínio-fonte de uma metáfora, caracterizando algum aspecto da matemática. Por exemplo, quando a adição é conceitualizada como sendo a inserção de objetos em uma coleção, o agente matemático é o que faz a coleção. Neste caso, o agente não faz nada mais do que colecionar objetos; nós chamamos tal agente um *Coletor*. Semelhantemente, quando a adição é conceitualizada como dar passos de um certo comprimento em uma determinada direção, o que faz o movimento é um agente matemático metafórico, e correspondentemente, nós o chamamos um *Viajante* (Lakoff & Núñez, 1997, p. 33).

De posse da premissa de que tudo o que se entende por essências é um produto das mentes humanas, criado a partir dos seus sistemas conceituais, compreende-se, segundo Lakoff e Núñez, porque o enorme e sistemático esforço dos matemáticos dos séculos XIX e XX pelo estabelecimento dos últimos fundamentos da matemática não avançou muito. O motivo, segundo os autores, é que o grande número de trabalhos desenvolvidos sobre o assunto no período assentou-se sobre a teoria dos conjuntos e a lógica, considerando-as como algo “puramente matemático”, isto é, livres das interferências das mentes humanas. A teoria dos conjuntos foi vista como uma forma de modelar o mundo, considerado este como sendo composto por objetos discretos, com propriedades discretas e com permanentes relações. A lógica, por sua vez, foi considerada não em termos de raciocínio, mas em termos de manipulação de símbolos cujas regras eram autodeterminadas dentro de uma estrutura autossuficiente. Nesta perspectiva, as relações e propriedades dos objetos matemáticos são verdades que podem ser demonstradas a partir de uma prova lógica envolvendo apenas axiomas, isto é, verdades captadas intuitivamente, de modo que o que realmente interessa a fim de se verificar a verdade de teorias matemáticas é a demonstração lógica a partir destes axiomas.

Segundo Lakoff e Núñez, dois motivos justificam as razões filosóficas para as concepções de matemáticos tais como Hilbert e Russell. O primeiro motivo se deve à maneira tradicional de se conceber o mundo, sendo este sempre visto como constituído por objetos discretos em permanentes relações. Desta perspectiva, tem-se que propriedades seriam modeladas por conjuntos de objetos, e as relações seriam modeladas por n -uplas de objetos, sendo que as essências seriam modeladas por conjuntos de propriedades, e os tipos seriam modelados por conjuntos. O segundo motivo reside na tradição de se considerar as provas matemáticas como o melhor exemplo da razão humana, não sendo tecnicamente vistas como entidades psicológicas dentro de alguma teoria da mente, mas simplesmente como sequências de séries de símbolos.

Aqui, a concepção de Frege é ilustrativa, pois ele considerou que, para que a matemática se livrasse das armadilhas da mente humana, os símbolos e os significados das provas matemáticas deveriam também ser independentes das mentes humanas. Assim, Frege alegou que o significado poderia ser reduzido a verdade e referência, e que estas poderiam ser modeladas por sistemas de símbolos e conjuntos, embora ele soubesse, segundo Lakoff e Núñez, que os símbolos a serem utilizados nas provas matemáticas não fossem completamente destituídos de um sentido, uma vez que possuíam interpretações previamente convencionadas.

Como se sabe, o projeto de Frege falhou parcialmente e, portanto, sua tentativa de determinar os últimos fundamentos da matemática também fracassou. A contraditoriedade da teoria dos conjuntos de Frege surgiu com o Paradoxo de Russell. Em termos gerais, esse paradoxo se enuncia da seguinte forma: Seja C o conjunto de todos os conjuntos que não se contêm a si mesmos. Então, se C não se contém a si mesmo, C é elemento de C . Isto é um paradoxo, pois C não contém C se e somente se C é elemento de C . No entanto, na teoria de Frege, C corresponde ao conceito “não recai no conceito da sua definição”, o que configura uma contradição uma vez que implica dizer que existe um conjunto definido por um conceito, que recai no conceito da sua definição apenas no caso de não recai.

Além da contradição surgida com o paradoxo de Russell, a *prova da incompletude* de Gödel, segundo Lakoff e Núñez, foi a mais famosa e devastadora indicação do fracasso das ideias de Frege e seus adeptos, isso porque, os sistemas lógico e simbólico fregeanos deveriam ser válidos para todos os conjuntos de axiomas da matemática. No entanto, Gödel mostrou que para qualquer conjunto finito de axiomas que podem ser listados ou especificados através de regras, haverá uma infinidade de verdades que não podem ser provadas, de modo que a completude de uma teoria axiomática não pode ser alcançada e não há garantia de que não surjam eventuais inconsistências. A consistência só poderia ser demonstrada a partir de uma teoria mais geral, a qual necessitaria de outra ainda mais ampla *ad infinitum*.

Embora as tentativas de estabelecer os fundamentos de uma matemática com existência própria, livre das mentes humanas e pertencente ao mundo exterior tenham falhado, como no caso de Frege, foi somente a partir dos anos 1940 que, segundo Lakoff e Núñez, alguns matemáticos começaram a manifestar dúvidas sobre o objetivo último das fundações da matemática, sublinhando o fato de que a matemática pode muito bem ser uma atividade

humana criativa, social e original, como a língua ou a música. Mas, tais ideias permaneceram em um nível especulativo e não se tornaram matérias realmente interessantes para a comunidade matemática.

Segundo os autores do artigo, foi somente no início dos anos 1980 que a questão de como a matemática poderia estruturar aspectos do universo físico foi questionada seriamente, tendo tal discussão se iniciado com o matemático Saunders MacLane, que concluiu que a existência de uma matemática pertencente ao mundo externo era uma impossibilidade. MacLane questionou os motivos de existirem os ramos da matemática, observando que não há nada nas fundamentações da filosofia que poderia eventualmente explicar porque é que existem tantas ramificações, tais como a teoria dos números, a geometria, a topologia, a teoria das probabilidades, e assim por diante. A conclusão de MacLane foi a de que os ramos da matemática surgiram de atividades humanas como contagem, construção, jogos, e assim por diante, e que a aplicação da matemática ao universo físico, portanto partiu da elaboração humana de um conhecimento matemático, juntamente com uma estreita observação do ambiente físico. Isto é, pela primeira vez se concebeu a matemática como elaboração genuinamente humana e como uma estrutura explicativa do mundo (de dentro para fora), e não como algo inerente ou pertencente ao próprio mundo.

É neste novo contexto que se situa a abordagem da matemática com foco na metáfora, estabelecendo-se carregada de implicações para a concepção do que é matemática, e, conseqüentemente, para o tratamento dado ao seu ensino, com as conseqüentes potenciais implicações para a Educação Matemática.

Um aprofundamento de ideias na direção da Educação Matemática foi levada a cabo por Lakoff e Núñez em um livro de 2001, intitulado *Where mathematics comes from : how the embodied mind brings mathematics into being*. Tomando como base a teoria da metáfora conceitual, formulada por Lakoff e Johnson em *Metaphors We Live By*, de 1982, os autores realizaram a análise de algumas ideias matemáticas, identificando metáforas conceituais que subjazem à sua compreensão. Um exemplo é a metáfora utilizada na compreensão das ideias relacionadas à aritmética. Segundo Lakoff e Núñez (2001), quando lidamos com aritmética, partimos da noção metafórica de que “Aritmética é coleção de objetos”. Deste modo, estabelece-se um mapeamento entre o domínio-fonte (coleção de objetos) e o domínio-alvo (aritmética), possibilitando-nos compreender conjuntos numéricos, por exemplo, como sendo metaforicamente coleções de objetos.

A partir desta metáfora, Lakoff e Núñez enfatizam que, quando realizamos operações aritméticas, atribuímos metaforicamente, aos conceitos de números e operações, características oriundas de nossa experiência física com coleções de objetos, bem como características originadas em nossa experiência corporal. É nesse sentido também, segundo os autores, que concebemos o número *zero* como ponto de partida de um caminho, a partir da metáfora “Aritmética é movimento ao longo de um caminho”, bem como pensamos e operamos com frações, concebendo-as como objetos construídos parcialmente, a partir da metáfora “Aritmética é construção de varetas”. Deste modo, as abstrações envolvidas nas operações aritméticas têm como base as experiências cotidianas pelas quais os corpos humanos são submetidos, de modo que a estrutura de tais ideias matemáticas é, assim, essencialmente metafórica.

Segundo Lakoff e Núñez (2001), existem metáforas conceituais na matemática que necessariamente não estão ligadas às experiências do corpo humano. Elas são associações entre domínios puramente abstratos, consistindo em se conceber uma ideia em termos de outra. No caso da matemática, estas metáforas possibilitam conceituar um domínio da matemática em termos de outro domínio da própria matemática, isto é, trata-se de um mapeamento entre domínios eminentemente abstratos². Tais metáforas são classificadas pelos autores como “metáforas de ligação” (*linking metaphors*), e são consideradas fundamentais não só para a criação de novos conceitos matemáticos, mas para a compreensão de conceitos em diferentes ramos da matemática, tais como geometria, álgebra e aritmética, resultando disto sua importância para o ensino da matemática.

Um caso ilustrativo deste tipo de metáfora na matemática é a que foi concebida pelo matemático britânico George Boole (1815 – 1864), e que desde então é utilizada, às vezes inconscientemente, em situações de ensino-aprendizagem de álgebra. Boole estabeleceu um mapeamento entre aritmética e álgebra, a partir da metáfora “Classes são números”. Disto resultou uma transferência de propriedades do domínio das operações aritméticas elementares para o domínio das operações algébricas com classes.

Com a introdução da teoria da metáfora conceitual no campo da Educação Matemática, Lakoff e Núñez deram uma explicação de como processos cognitivos fundamentais, tanto para o desenvolvimento quanto para o tratamento de ideias matemáticas,

² Núñez (2000, p. 11) ilustra tal fato com as metáforas “Números são conjuntos” (Von Neumann), “Funções são conjuntos de pontos” e “Conjuntos são gráficos”. Estas metáforas estabelecem um *link* entre domínios matemáticos distintos, quais sejam, aritmética e álgebra e álgebra e geometria.

desenvolvem-se. Mecanismos cognitivos que subjazem a compreensão de ideias e conceitos matemáticos foram explicados pelos autores a partir dos mapeamentos ocasionados por metáforas conceituais. Essa abordagem gera potenciais implicações para a Filosofia da Matemática e para a Educação Matemática, decorrentes de uma possível nova perspectiva filosófica e epistemológica a respeito do conhecimento matemático.

De modo geral, observa-se que Lakoff e Núñez sugerem que as metáforas conceituais atuam na matemática no sentido de reduzir o abstrato ao concreto, ao que eles chamam “metáforas da essência” das ideias matemáticas. Justamente neste ponto, Otte (2008b) adverte para o fato de que metáfora não é redução, mas sim generalização, e alude assim para a necessidade de um enfoque diferente sobre o papel da metáfora. Nesse sentido, Michael Otte também tem explorado esta nova perspectiva filosófica e epistemológica do conhecimento matemático a partir do foco no papel da metáfora, introduzindo considerações radicais e inovadoras a respeito das práticas desenvolvidas no contexto da Educação Matemática.

II. A perspectiva de Michael Otte: uma nova abordagem ao pensamento matemático

A abordagem da representação e comunicação de ideias com foco na metáfora é introduzida por Otte no campo da Educação Matemática com a observação inicial de que, tradicionalmente, a matemática tem sido considerada como representante de um conhecimento literal, descontextualizado e universal. Isto tem implicado à metáfora os predicativos de inútil e aberrante, algo a ser evitado no discurso matemático. Otte (2008b) ilustra esta concepção tradicional com o caso do matemático alemão Frege, para o qual “Matemática não é poesia”. A este ponto de vista, Otte contrapõe o seu, dizendo que “pode ser! Mas quem nunca apreciou metáfora na poesia, de modo idêntico também provavelmente não apreciará a matemática pura” (Otte, 2008b, p. 2).

Na perspectiva de Michael Otte, não há dissociação entre matemática e metáfora. Pelo contrário,

Toda exposição de teorias matemáticas desde os “Elementos” de Euclides, com sua estrutura “teorema-prova”, tem sido essencialmente metafórica, raciocínio de ideias gerais, em lugar de catálogos de exemplos particulares pertencentes a um mundo ideal e não à realidade contingente (Otte, 2008b, p. 2).

Para Otte (2008a), o objeto matemático, tal como um número ou função, não existe independentemente de todas as suas possíveis representações, mas não deve ser confundida

com alguma representação particular. Por outro lado, a matemática não é simplesmente uma linguagem (enquanto conjunto de representações), nem é uma ciência analítica de conceitos. Nesse sentido, conforme Otte (1993, p. 287), a matemática

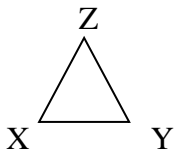
tenta relacionar-se às “coisas mesmas”, pois uma ideia teórica pode servir na solução de muitos e diferentes tipos de problemas e, por essa razão, estará ligada a muitos tipos diferentes de representações. Nenhum conceito teórico existe como uma ideia platônica, separada de sua representação. Mas tal conceito teórico nunca pode estar identificado com qualquer um de seus nomes ou representações e, além disso, qualquer representação particular de um conceito teórico é derivada de uma compreensão relacional abstrata de suas propriedades e não de outro modo.

Sendo assim, a matemática depende da consistência de suas estruturas e compreende atividades observacionais e representações indexicais que se estabelecem através de diagramas e equações. A importância dos diagramas na matemática também foi apontada por Peirce, para o qual “o raciocínio matemático é diagramático. Isto é verdadeiro tanto da álgebra quanto da geometria” (PEIRCE, 2008, p. 208).

Porém, por não representar o objeto matemático em sua totalidade de características e formas, o diagrama ou a equação matemática mantém com tal objeto uma relação que só se estabelece de determinada perspectiva que deve ser buscada pelo sujeito cognitivo. Para Otte, reside nisto o caráter metafórico desse tipo de representação. A metáfora indica, assim, a possibilidade de relações, fazendo-nos perceber o caráter sistêmico e teórico do conhecimento matemático.

Para Otte, assim como lidar com a arte ou com a poesia, lidar com a matemática é lidar com metáforas. Isso porque, além do fato de as representações usadas na matemática serem diagramas, e por isso serem metafóricas, como exposto acima, entender uma prova matemática, por exemplo, requer mais do que a capacidade de seguir um argumento passo a passo, sendo necessário, além de se saber e de se compreender as informações fornecidas, ter incorporado uma certa “perspectiva” de ver o problema. Assim, para se conceber alguma coisa, exige-se uma perspectiva e, como tal, um envolvimento, ou a aceitação de um aspecto ou perspectiva como real e relevante, de modo que a formação de um julgamento perceptual não é um ato totalmente lógico e consciente, não podendo ser completamente analisado, decidido e determinado conscientemente.

Em uma de suas palestras proferidas em São Paulo (em 2008), Otte ilustrou o caráter metafórico das representações de objetos matemáticos, tomando como exemplo o problema da classificação de duas expressões algébricas e de uma figura geométrica. Tudo o que se vê de início são duas expressões algébricas e um triângulo. Considerando que metáfora também é uma divisão ou uma classificação, pede-se então para se dizer quais são os objetos iguais ou semelhantes. Então o autor propõe o problema a sua audiência, perguntando quais desses três objetos pertencem ao mesmo conjunto. A questão que surge é: Como classificar esses três objetos? Segundo Otte, existe uma maneira que ele chama reducionista ou empirista, que vai sustentar que é óbvio que o triângulo é um objeto geométrico e os outros dois são objetos algébricos, isto é, os dois últimos pertencem a uma classe (álgebra), e o primeiro, a outra classe, a da geometria. Porém o palestrante adverte que essa não é a única maneira de se fazer a classificação. Outra pessoa pode entender que se trata de uma metáfora, e que por isso pode buscar por uma perspectiva que estabeleça uma semelhança entre os aparentemente distintos objetos (encontrar a igualdade no desigual, segundo Aristóteles).

Objeto	Representação
Expressão algébrica 1	$x \cdot y + z$
Expressão algébrica 2	$x + y + z$
Triângulo	

Quadro 1: Objetos e suas representações utilizadas por Michael Otte para ilustrar o caráter metafórico de relações de semelhança.

Então, o que é a igualdade nesse caso? Por exemplo, pode-se dizer que toda permutação dos três vértices do triângulo equilátero deixa este objeto invariante. Toda rotação ou reflexão também o deixa invariante. Então, tal objeto é invariante nas permutações das três

letras que representam seus vértices. Agora, a expressão $x + y + z$ também é invariante quanto a permutações de seus termos (a adição é comutativa). Todavia, a expressão $x.y + z$ não atende a esta propriedade, pois ao se permutar z por y obtém-se outra coisa. Então, os dois primeiros (triângulo e “ $x + y + z$ ”) pertencem à mesma classe, e o terceiro ($x.y + z$) não. Portanto, pode-se afirmar que o triângulo e a expressão “ $x + y + z$ ” são iguais. Neste ponto da argumentação, Otte considera a possibilidade do questionamento dessa última afirmação. Alguém pode perguntar: Por quê? E o próprio Otte responde à potencial pergunta dizendo que, na metáfora, sempre se tem que buscar a perspectiva que vai garantir a relação de equivalência ou semelhança. No exemplo apresentado, a perspectiva é simetria, estrutura. E simetria é uma ideia fundamental na matemática.

Então, quando se escreve uma metáfora como equação, sempre tem que se perguntar em qual sentido, porque de início os objetos comparados são diferentes. $A=B$ é diferente de $A=A$. Nesse último caso, enquanto expressão tautológica, não se tem nenhuma pergunta. Nesse sentido, se se considera uma equação fora do ponto de vista da síntese, ou seja, das regras de um cálculo, ela se torna uma metáfora, porque surgem as perguntas “por quê? ”, “de qual perspectiva? ”. Nesse exemplo utilizado por Otte, o triângulo XYZ e a expressão “ $x + y + z$ ” são iguais se considerada a simetria. Pode-se imaginar, porém, muitos outros exemplos (toda equação ou diagrama, nesse caso). Por exemplo, pode se dizer que calor = movimento (calor é movimento). Como? De qual perspectiva? A perspectiva é a energia. Então, o que se percebe é que, numa equação ou diagrama matemático, sempre existe uma ideia mais abstrata, subentendida, que garante a igualdade ou semelhança, graças ao caráter metafórico da relação.

Otte (2008a) sustenta que, em matemática, a intuição avança à frente da compreensão mediada pelo signo e as metáforas surgem com o papel de garantir alguma relação entre o objeto de intuição e sua representação, comunicando o conteúdo das intuições por meio de equações e diagramas (signos), sem os quais não se chegaria a generalizações de conceitos e ideias. Esta perspectiva de explicar a compreensão em matemática se aproxima de uma “epistemologia semiótica”, porque considera que a essência das coisas só pode ser inteligível se puder ser representada por signos, de modo que “a essência de qualquer coisa é a essência da representação daquela coisa” (Otte, 2001, p. 16).

Então, nessa perspectiva da epistemologia semiótica, a criação e a introdução de algo novo no discurso matemático consiste em representar um A como um B, e isso implica dizer que a matemática trata de relações entre objetos, e não propriamente de objetos. Por sua vez,

na representação do tipo $A=B$, que na matemática é comum por exemplo ao se usar ícones, fórmulas e diagramas, as relações estabelecidas entre A e B são indeterminadas, dado o caráter metafórico da relação. Haverá sempre uma nova perspectiva que possibilitará uma nova representação do mesmo objeto. Essa indeterminação, segundo Otte (2001), leva professores de matemática, muitas vezes, a não gostarem de representações icônicas, por acreditarem que elas não são totalmente previsíveis e controláveis quanto ao seu impacto. No entanto, segundo Otte, esta imprevisibilidade é inevitável, pois, da perspectiva da linguagem e da comunicação, “nenhum pensamento ou signo pode ser exaurido por uma interpretação e experiência particular” (Otte, 2001, p. 17).

Ainda segundo Otte (2008a), não só o avanço da matemática depende de representações diagramáticas metafóricas, mas o próprio ensino dos conceitos matemáticos não pode prescindir de equações e diagramas, e portanto de metáforas. A esse respeito, o autor comenta a tentativa de psicólogos (Schulz Von Thun e Götz) de melhorar um texto matemático relativo ao problema da incomensurabilidade. O texto original, com diagramas, foi retirado do livro de Courant e Robbins (2000) e é o que segue:

Ao comparar as magnitudes de dois segmentos de reta a e b , pode ocorrer que a esteja contido em b um número r , inteiro, exato de vezes. Neste caso, podemos expressar a medida do segmento b em termos da medida de a , afirmando que o comprimento de b é r vezes o de a . Ou pode resultar que embora nenhum múltiplo inteiro de a seja igual a b , podemos dividir a em, digamos, n segmentos iguais, cada um de comprimento a/n , de tal forma que algum múltiplo m inteiro do segmento a/n seja igual a b :

$$(1) \quad b = \frac{m}{n} a.$$

Quando uma igualdade da forma (1) é válida, dizemos que os dois segmentos a e b são *comensuráveis*, uma vez que eles têm como medida comum o segmento a/n que está contido n vezes em a e m vezes em b (Courant e Robbins, 2000, p. 70).

Esse texto descreve a ideia do que é comensurável a partir de uma fração que estabelece a relação $b = \frac{m}{n} a$, onde b é uma grandeza, a é uma unidade e m/n é uma medida, um número racional.

Por sua vez, o sistema desenvolvido pelos psicólogos citados por Otte (2008a) sugere a abolição de diagramas e fórmulas dos livros didáticos de matemática e defende o uso exclusivo de palavras na exposição de um conceito matemático. Então, a versão transformada do texto de Courant e Robbins (2000) de acordo com este sistema ficou assim:

Dizemos que dois segmentos são comensuráveis se tem uma medida comum. O que significa dizer ter uma medida comum? Supomos que um segmento tenha 3 cm e outro 9 cm. Esses dois segmentos são comensuráveis. A medida comum é 3 cm, que cabe 1 vez no primeiro segmento e exatamente 3 vezes no segundo. Supomos que um segmento tenha 6 cm e outro 10 cm. Esses dois segmentos são comensuráveis. A medida comum é 2 cm, que cabe 3 vezes no primeiro segmento e exatamente 5 vezes no segundo. Mesmo para dois segmentos, como por exemplo 1,67 cm e 4,31 cm, é fácil encontrar uma medida comum: 0,01 cm, que cabe 167 vezes no primeiro e 431 vezes no segundo. O que esses exemplos estão nos mostrando? Dois segmentos são comensuráveis se um deles (ou uma fração) está contido dentro do outro sem resto (Thun & Götz, 1976, apud Otte, 2008a, p. 60).

Otte afirma que estes dois textos foram testados com estudantes, na Alemanha e no Brasil, nas disciplinas oferecidas pelo autor em cursos de mestrado, sendo que cerca de 95% das pessoas afirmaram que o segundo texto é melhor, bem mais fácil de entender. Porém, o autor adverte para um detalhe. O detalhe é que desaparece o assunto, o próprio objeto matemático. Se se fala em termos de frações decimais finitas, não há incomensurabilidade. Então, o aluno vai entender o que significa segmentos comensuráveis, mas não vai entender por quê. Porque não há incomensurabilidade, pois frações decimais finitas são sempre comensuráveis.

Então, aqui fica claro que a equação $b = \frac{m}{n}a$ é uma metáfora. Todo diagrama é uma metáfora. O que os psicólogos quiseram foi eliminar as metáforas, colocando tudo numa linguagem bem direta. Otte considera que tal proposta é bem atraente, mas muitas vezes perde-se conteúdo, especialmente quando esse conteúdo é mais abstrato, isto é, eliminar metáforas dos textos matemáticos é eliminar conteúdos.

Na verdade, a vantagem de se escrever $b = x.a$ reside no fato de se poder afirmar que as grandezas a e b são comensuráveis quando x é número racional, e incomensuráveis quando x não é racional. Porém, no texto dos psicólogos não existem essas duas alternativas, porque, em vez de grandezas que são indeterminadas ou contínuas, eles usaram números, números decimais.

Para Otte (2008a), cada conceito introduz uma distinção: distinção dos objetos vermelhos – faz uma distinção no universo dos objetos vermelhos entre objetos vermelhos e objetos não vermelhos; comensurável ou racional – faz uma distinção no universo dos números racionais entre números que são racionais e os que não são racionais. No caso do texto dos psicólogos, não é possível esta distinção, porque tudo é de mesmo tipo. Otte (2008a) conclui que a exclusão de metáforas dos textos (variáveis, fórmulas e diagramas) pode torná-

los textos mais facilmente legíveis, mas algumas vezes pode-se com isso promover a perda de conteúdo abstrato. Afinal, toda equação é uma metáfora porque relaciona grandezas indeterminadas. Determinar estas grandezas é empobrecer as relações, promovendo a perda de generalidade dos objetos matemáticos.

Estas discussões permitem especular sobre um possível potencial heurístico da metáfora a ser explorado no ensino da matemática. Desse modo, reconhecido o caráter metafórico de seus objetos, o próximo passo seria elaborar metáforas para o ensino da matemática. No entanto, essa ação inventiva não se mostra tão simples. Nesse sentido, questiona Otte:

O que nos guia na criação de boas metáforas? Tudo parece similar a tudo, pelo menos em alguns aspectos. Assim, como descobrimos quais são as analogias ou as metáforas úteis? Não há um método infalível. Por outro lado, as metáforas parecem ser absolutamente indispensáveis quando não podemos identificar, com certeza, o significado com o uso (Otte, 2001, p. 47).

Em reflexão, nessa mesma perspectiva, que aproxima a matemática da arte e da poesia, Otte (2008b, p. 10) questiona: “Como pode o professor levar o aluno a perceber a metáfora?”. Presume-se assim que a metáfora depende de criatividade tanto em sua elaboração quanto em sua interpretação, sendo que sua compreensão é facilitada pelo contexto cultural.

Uma ideia é dada por Corrêa (2008). A autora diz que, quanto à linguagem, o professor de matemática poderia se beneficiar da ajuda dos poetas, uma vez que a linguagem metafórica tão característica dos poetas age como uma transferência de significado, baseando-se na analogia, ou seja, na relação entre dois conceitos que apresentam algo em comum. Desse modo, a vantagem do uso da metáfora, em termos cognitivos, estaria no fato de apoiar a comunicação em conceitos mais concretos e mais próximos da experiência do aluno, facilitando a compreensão de conceitos mais complexos e abstratos.

Nesse sentido, um exemplo de uso da metáfora no ensino da matemática seria a expressão “a igualdade é uma balança de dois pratos”. Numa balança desse tipo, se for adicionada ou subtraída a mesma quantidade de objetos (massa) nos seus dois pratos, ela permanecerá equilibrada, ou seja, não haverá alteração na relação de equivalência. Nesse caso, não só a igualdade é tratada metaforicamente, mas os membros e termos da equação (números e letras) são considerados como coisas materiais, “ganham massa”, sendo capazes de pender a balança para um dos lados, tal qual acontece numa feira, onde legumes são

vendidos desse modo. Seria possível explicar inclusive algumas propriedades a partir desta metáfora, como, por exemplo, a comutatividade da adição de números reais ($a + b = b + a$), uma vez que a mudança de posição dos “objetos” num mesmo prato da balança não altera as suas massas totais. Assim, ao se chamar a *igualdade de balança*, estar-se-ia aproximando um objeto matemático abstrato de algo mais concreto e de domínio do estudante. Aliás, segundo Corrêa (2008), a própria origem do sinal de igualdade “=” dever-se-ia a um pensamento metafórico, uma vez que Robert Recorde (1510 – 1558), ao usá-lo pela primeira vez, concebeu-o como um par de segmentos de reta paralelos, alegando que nada poderia ser mais igual.

No entanto, a esta metáfora da balança cabem alguns questionamentos: O que seria “mesma quantidade”? Isto deveria ser definido em termos da balança. Mas aí se iniciaria um círculo vicioso. Então surge a pergunta: podemos calcular com balanças? Por exemplo, podemos pensar em números racionais como sendo equações: $7x = 3$ (em vez de $x = \frac{3}{7}$), mas isso exige que saibamos adicionar e multiplicar *equações*. Nesse caso a metáfora da balança ajudaria? Para que esta metáfora não seja reducionista, ela tem que permitir o conhecimento das características dos números (como são expressas nos axiomas de Peano). Como adicionar, por exemplo, $7x = 3$ (ou $\frac{3}{7}$) e $2y = 1$ (ou $\frac{1}{2}$)? Tem-se, neste caso:

$$\begin{array}{l} 7x = 3 \Rightarrow 14x = 6 \\ 2y = 1 \Rightarrow 14y = 7 \end{array} \Bigg\} 14(x + y) = 13$$

Então, $\frac{3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{13}{14}$. Ou seja, esta abordagem é vantajosa, pois as regras que os alunos geralmente não memorizam surgem naturalmente. Daí se conclui que a álgebra deveria ser ensinada do ponto de vista da estrutura e não como uma aritmética generalizada, pois as regras ($- x - = +$, por exemplo) se baseiam na consistência da estrutura e não nos significados concretos, como uma aplicação reducionista da metáfora da balança pode sugerir. Afinal, como seria possível representar concretamente as equações $7x = 3$ e $2y = 1$ em cada prato da balança?

Em suma, verifica-se que para Michael Otte a metáfora desempenha um papel essencial para o pensamento teórico, sendo essencial para o desenvolvimento de ideias matemáticas. Em sua concepção semiótica do conhecimento, o autor destaca a importância das representações diagramáticas para o pensamento matemático e, identificando representações com metáforas, indica a possibilidade teórica de o conhecimento matemático estar vinculado originalmente a metáforas.

Considerações finais

Tendo nascida com a expansão do ensino de matemática no início do século XX, a Educação Matemática tem acompanhado as tendências originadas no interior da filosofia da ciência. No entanto, nota-se que a natureza própria da matemática não tem sido questionada quando inserida em contextos formais de ensino-aprendizagem.

O reconhecimento do caráter metafórico da matemática inevitavelmente implica uma mudança de concepção a respeito do que é a matemática, e de como se originam, representam-se e comunicam-se seus objetos, com potenciais contribuições para a Educação Matemática. Pelo apresentado neste artigo, e tomando-se por base a construção teórica elaborada a partir de perspectivas teóricas de Lakoff, Núñez e Otte, podem-se conjecturar algumas destas contribuições, a saber:

1) Reconhece-se o caráter contingente da representação e comunicação de ideias matemáticas, em oposição à objetividade postulada pelo paradigma da modernidade. Sendo construção humana, toda teoria matemática está suscetível a formas de compreensão vinculadas a particularidades do tempo e do espaço. A matemática é essencialmente uma atividade humana, cujos objetos se originam e são gerados a partir da linguagem, na qual a metáfora tem papel fundamental. Objetos matemáticos só existem a partir de representações, e a compreensão destas representações depende de perspectivas metafóricas particulares adotadas pelos sujeitos cognitivos. Perspectivas particulares são definidas por regras oriundas de teorias, garantindo deste modo a consistência da matemática enquanto estrutura. Nesse sentido, a objetividade da matemática consiste simplesmente na obediência às regras de uso que dão consistência a uma teoria, e não da existência universal de seus objetos.

2) Uma abordagem da matemática com foco na metáfora pressupõe a impossibilidade da certeza absoluta como uma de suas características, visto que metáforas estão intimamente vinculadas a processos contingentes de construções teóricas. Nesse sentido,

surge a possibilidade de um novo olhar sobre certos tipos de “erros” cometidos por estudantes no processo de ensino-aprendizagem da matemática. Em seu sentido absoluto, o termo “erro” pressupõe a existência de uma ação ou perspectiva absurda em relação a alguma verdade universal. Entretanto, uma abordagem da matemática com foco no papel da metáfora indica que nem sempre há concepções “erradas”, mas sim variações de ideias geradas por diferentes perspectivas metafóricas utilizadas pelos sujeitos cognitivos. Segundo Lakoff e Núñez, por exemplo, estas variações ocorrem devido a diferenças entre os sistemas conceituais das pessoas, o que proporciona diferentes estruturas inferenciais. Quando estas estruturas inferenciais são diferentes das estabelecidas tradicionalmente em alguma teoria que se queira absoluta e universal, a incompatibilidade de perspectivas é considerada um “erro”. Ocorre que, estando baseadas em metáforas, ideias matemáticas não são passíveis de serem estabelecidas e entendidas a partir de uma única estrutura inferencial, como fica subentendido pela concepção moderna de matemática. Neste caso, deve-se buscar pedagogicamente uma identificação das variações das perspectivas metafóricas que geram “erros”, de modo a ser possível uma intervenção no sentido de possibilitar aos alunos perspectivas necessárias e suficientes para a compreensão que se queira de uma ideia ou objeto matemático.

3) Considerando que, no processo de representação e comunicação, o entendimento de abstrações e de novas ideias depende de particularidades do contexto em que os sujeitos cognitivos estão inseridos, e que a utilização e compreensão de metáforas vinculam-se às particularidades do uso de quem delas faz, uma abordagem da matemática na perspectiva da metáfora leva à negação da universalidade de qualquer teoria matemática, contrariando o que pressupõe o paradigma da modernidade.

4) Quanto à formação inicial de professores de matemática, a discussão tecida nesta pesquisa indica a possibilidade de que seja necessário, para além de uma iniciação em temas sobre educação, história da matemática e filosofia da matemática, proporcionar uma boa experiência sobre a análise e verificação empírica das estruturas conceituais e de todos os mecanismos inferenciais empregados por alunos no processo de ensino-aprendizagem. Em especial, os professores devem ser preparados para identificar as estruturas conceituais metafóricas implícitas nas ideias e conceitos matemáticos ensinados.

5) Quanto ao processo de ensino-aprendizagem da matemática, verifica-se, a partir da construção teórica levada a cabo nesta pesquisa, a possibilidade de que, para se ensinar bem e para se aprender bem matemática, não basta dominar os processos e algoritmos envolvidos em cálculos e operações, mas fundamentalmente, é necessária a capacidade de se

identificar as metáforas ideais, bem como a capacidade de manipular tais metáforas, combinando-as durante a construção ou comunicação de ideias matemáticas.

6) Por último, verifica-se também a possibilidade de que em Educação Matemática deve-se ter a preocupação de se realizar um estudo detalhado das perspectivas metafóricas adotadas pelos alunos referentes a uma ideia ou objeto a fim de se identificar as origens de dificuldades que podem estar interferindo na aprendizagem da matemática.

Referências

CORRÊA, I. M. P., 2008. *Como se fala matemática? Um estudo sobre a complementaridade entre representação e comunicação na educação matemática*. Cuiabá: UFMT, Dissertação de Mestrado. Instituto de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso.

COURANT, R.; ROBBINS, H., 2000. *O que é matemática?* Uma abordagem elementar de métodos e conceitos. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

FONT, V., 2001. Matemáticas y cosas: una mirada desde la Educación Matemática. *Educación Matemática Pesquisa*, São Paulo, vol. 3, n. 2, pp. 59-112.

LAKOFF, G. & NUÑEZ, R. E., 1997. The metaphorical structure of mathematics: sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics. In: ENGLISH, L. D. (Ed.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images*. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ.

LAKOFF, G. & NUÑEZ, R. E., 2001. *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being*. New York: Basic Books.

NUÑEZ, R., 2000. Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. Opening plenary address in *Proceedings of the 24th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 3-22, Hiroshima, Japan.

OTTE, M., 1993. *O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à Filosofia e à Didática da Matemática*. São Paulo: Editora da Unesp.

_____, 2001. Epistemologia matemática de um ponto de vista semiótico. Tradução de Maria Laura Magalhães Gomes et al. *Educación Matemática Pesquisa*, São Paulo, vol. 3, n. 2, pp. 11-58.

_____, 2008. Metaphor and Contingency. In: RADFORD, L.; SCHUBRING, G.; SEEGER, F. (Orgs.). *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History, Classroom and Culture*. Rotterdam: Sense Publishers.

_____, 2012. *A Realidade das Ideias: uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá: EdUFMT.

PEIRCE, C. S., 2008. *Semiótica*. São Paulo: Perspectiva.