UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES COM ENFOQUE NA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: IDENTIDADES BI E TRIDIMENSIONAIS FIBONACCIANAS

Rannyelly Rodrigues de Oliveira[1]
Francisco Régis Vieira Alves[2]
Solonildo Almeida da Silva[3]

Resumo: Este trabalho tem em seu escopo a investigação das relações recorrentes bi e tridimensionais do modelo de Fibonacci. Nesse sentido, é realizada uma transposição didática dessas relações matemáticas através de uma proposta de atividades com enfoque na Teoria das Situações Didáticas. Desse modo, as etapas de resolução das questões são categorizadas em ação, formulação e validação, obedecendo ao paradigma da Teoria das Situações Didáticas. Além do mais, espera-se que as questões sejam resolvidas pelos alunos, enquanto, a institucionalização seja realizada pelo docente com a finalidade de ampliar o repertório de conhecimento que abrange conceitos e relações oriundas do modelo de Fibonacci. Finalmente, compreende-se que a proposta didática oportuniza o entendimento da construção das identidades bi e tridimensionais para os números complexos de Fibonacci G(n, m) e G(n, m, p) a partir da extensão das identidades unidimensionais. De fato, é possível observar um processo histórico-evolutivo do modelo caracterizado pela introdução da unidade imaginária “i” e sua abordagem em dimensões superiores.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Teoria das Situações Didáticas. Modelo de Fibonacci. Relações Recorrentes. Identidades bi e tridimensionais.

A PROPOSAL OF ACTIVITIES WITH A FOCUS ON THE THEORY OF DIDACTIC SITUATIONS: FIBONACCIAN BI AND THREE-DIMENSIONAL IDENTITIES

Abstract: This work has in its scope the investigation of the recurrent bi and three - dimensional relations of the Fibonacci model. In this sense, a didactic transposition of these mathematical relations is carried out through a proposal of activities focusing on the Theory of Didactic Situations. In this way, the resolution steps of the questions are categorized into action, formulation and validation, obeying the paradigm of Theory of Didactic Situations. Moreover, it is expected that the issues will be solved by the students, while the institutionalization will be carried out by the teacher in order to expand the repertoire of knowledge that encompasses concepts and relationships derived from the Fibonacci model.

[1] Licenciada em Matemática – IFCE, Mestra em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/ IFCE. Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática – UFRN. Docente na Rede Estadual de Ensino Básico do Ceará, SEDUC. E-mail: ranny.math.06@gmail.com
[2] Licenciado em Matemática – UFC, Mestre em Matemática – UFC, Doutor em Educação – UFC. Coordenador e docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PGECM/ IFCE. E-mail: fregis@ifce.edu.br
[3] Doutor em Educação – UFC.

Finally, it is understood that the didactic proposal allows the understanding of the construction of the bi and three-dimensional identities for the complex numbers of Fibonacci G(n, m) and G(n, m, p) from the extension of one-dimensional identities. In fact, it is possible to observe a historical-evolutionary process of the model characterized by the introduction of the imaginary unit "i" and its approach in higher dimensions.

Keywords: Mathematics Teaching. Theory of Didactic Situations. Fibonacci Model. Recurrent Relations. Bi and Three-dimensional Identities.

INTRODUÇÃO

O modelo de Fibonacci tem sua gênese a partir da problematização da reprodução de coelhos "imortais" que é representada matematicamente pela recursividade unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Na Matemática Pura, o modelo passa por um processo de extensão de suas propriedades. Nesse âmbito, alguns autores como Berzsenyi (1977), Pethe e Harman (1981), Horadam (1986), Oliveira, Alves e Paiva (2017) são destacados por discutir o modelo através de representações complexas, a partir da inserção da unidade imaginária "i", em dimensões superiores.

Nesse sentido, este trabalho tem o objetivo de explorar as relações bi e tridimensionais para os números de Fibonacci a fim de realizar uma extensão das identidades unidimensionais para estruturas de duas e três dimensões. Para isso, assume-se a seguinte questão norteadora: como e qual enfoque didático permite realizar situações de ensino, nas quais o modelo de Fibonacci é explorado a partir de relações recorrentes complexas bi e tridimensionais? Assim, é realizada uma transposição didática dessas relações através de um conjunto de atividades com enfoque na Teoria das Situações Didáticas.

À vista disso, pretende-se com essa proposta de atividades, organizar e prever as possíveis etapas de resolução das questões, assim, essas fases são categorizadas de acordo com a Teoria das Situações Didáticas, em: ação, formulação e validação. E, em seguida, é feito um breve relato da institucionalização e são demonstradas algumas identidades para os números complexos de Fibonacci G(n, m) e G(n, m, p). Logo, essa teoria será discutida a seguir.

TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi concebida por Brousseau no âmbito da Didática da Matemática. A fundamentação dessa teoria teve forte influência das concepções piagetianas sobre o processo de desenvolvimento cognitivo dos alunos. Todavia, atualmente, a TSD é adotada como metodologia de ensino, pela qual é possível categorizar as etapas de resolução, de uma atividade proposta, em: ação, formulação e validação. Essas etapas permitem avaliar e observar como o raciocínio inferencial é desenvolvido durante a aprendizagem de conceitos matemáticos.

No contexto cognitivo, Brousseau (1976) investigou como a cognição é instigada e manifestada em situações de ensino quando se estuda conceitos e relações matemáticas numa abordagem epistemológica. Assim, a TSD é sistematizada em quatro etapas consecutivas: ação, formulação, validação e institucionalização. Nesse sentido, Alves (2016, p.143) explica que, durante a resolução de uma questão, o sujeito assume dois sistemas mentais: um "*corpus* teórico particular, definido *a priori* pelo expert e, relativamente ao qual, o estudante está autorizado a desenvolver/elaborar suas inferências" e o outro é um conjunto de conhecimentos prévios, intrínsecos do aluno, de natureza intuitiva.

À vista disso, na fase de ação, Pais (2002, p. 72) explica que o estudante recorre a "um conhecimento de natureza mais experimental e intuitiva do que teórica. Mesmo que esses procedimentos estejam associados a alguma teoria, o que está em jogo não é a explicitação dessa referência teórica". Dessa forma, a etapa de formulação é responsável pela transição do pensamento intuitivo para o *status* de raciocínio inferencial, assim, neste momento, os argumentos são mais elaborados.

Por conseguinte, tem-se a validação, na qual as conjecturas elaboradas são verificadas a fim refutá-las ou validá-las. Para isso, o aluno passa a apresentar uma linguagem mais teórica e formal, fazendo uso de propriedades e métodos de demonstrações matemáticas. Finalmente, tem-se a institucionalização, em que o docente avalia as produções dos alunos com o propósito de ampliar, segundo Teixeira e Passos (2013), o estatuto de saber matemático através da formalização e generalização dos conceitos aprendidos. A seguir, tem-se uma abordagem bi e tridimensional do modelo de Fibonacci.

RELAÇÕES RECORRENTES BI E TRIDIMENSIONAIS PARA OS NÚMEROS DE FIBONACCI

O modelo matemático de Fibonacci é representado pela recursividade unidimensional $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \Rightarrow f_{n+1} = f_{n+2} - f_n, \forall n \in \mathbb{N}$. De acordo com Oliveira, Alves e Paiva (2017), podem ser descritas as seguintes propriedades unidimensionais: $\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$, $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$ e $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$. Assim, numa perspectiva de investigar o modelo em dimensões superiores, são assumidas relações recorrentes bi e tridimensionais complexas. Nesse âmbito, destacam-se os autores Oliveira, Alves e Paiva (2017) que exploram as relações recorrentes e identidades bi e tridimensionais para os números complexos de Fibonacci.

Além do mais, podem ser citados alguns pesquisadores como Berzsenyi (1977), que discute os inteiros gaussianos como uma representação complexa para os termos de Fibonacci, Pethe e Horadam (1986), que fazem uma abordagem do modelo através dos números de Fibonacci Gaussiano, e Harman (1981) que descreve os números de Fibonacci a partir dos Gaussianos Inteiros (n, m) = n + mi. Desse modo, segundo Oliveira, Alves e Paiva (2017), podem-se apresentar as definições, os lemas e os teoremas a seguir:

Definição 1. Desde que os valores iniciais sejam $G(0,0)=0, G(1,0)=1, G(0,1)=i$ e $G(1,1)=1+i$, os números $G(n,m)$ satisfazem às relações recorrentes bidimensionais:

$$\begin{cases} G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m) \\ G(n,m+2)=G(n,m+1)+G(n,m) \end{cases}$$

Lema 1. São válidas as propriedades:

$$\begin{cases} G(n,0)=f_n \\ G(0,m)=f_m i \\ G(n,1)=f_n+f_{n+1}i \\ G(1,m)=f_{m+1}+f_m i \end{cases}$$

Teorema 1. Para $n,m \in \mathbb{N}$, os números $G(n,m)$ são determinados por:

$$G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m i.$$

Definição 2. Desde que os valores iniciais sejam: $G(0,0,0)=0, G(1,0,0)=1, G(0,1,0)=i$, $G(0,0,1)=j, G(1,1,1)=1+i+j$, $G(0,1,1)=i+j, G(1,0,1)=1+j$ e $G(1,1,0)=1+i$, os números $G(n,m,p)$ satisfazem às relações recorrentes tridimensionais:

$$\begin{cases} G(n+2,m,p)=G(n+1,m,p)+G(n,m,p) \\ G(n,m+2,p)=G(n,m+1,p)+G(n,m,p) \\ G(n,m,p+2)=G(n,m,p+1)+G(n,m,p) \end{cases}$$

Lema 2. São válidas as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} G(n,0,0)=f_n \\ G(n,1,1)=f_n+f_{n+1}i+f_{n+1}j \\ G(n,1,0)=f_n+f_{n+1}i \\ G(n,0,1)=f_n+f_{n+1}j \end{cases}$$

Teorema 2. Para $n,m,p \in \mathbb{N}$, os números da forma $G(n,m,p)$ são determinados por:

$$G(n,m,p)=f_n f_{m+1} f_{p+1}+f_{n+1} f_m f_{p+1} i+f_{n+1} f_{m+1} f_p j$$

No próximo tópico, será apresentada uma proposta de atividades que oportunizam explorar as relações bi e tridimensionais, com a finalidade de verificar as identidades unidimensionais em representações com duas e três dimensões.

ATIVIDADES PROPOSTAS: IDENTIDADES BI E TRIDIMENSIONAIS

Nesta seção, serão propostas atividades (Quadro 1) com enfoque na Teoria das Situações Didáticas a fim de oportunizar o entendimento da construção de identidades geradas a partir da investigação das relações recorrentes bi e tridimensionais do modelo de Fibonacci. Nesse sentido, será feita uma predição das etapas de ação, formulação e validação no momento da resolução de cada questão. Pretende-se, com isso, descrever como as definições e relações matemáticas são mobilizadas na demonstração matemática de propriedades.

A *priori,* para resolver as questões propostas, é necessário que os alunos tenham um conhecimento prévio sobre as relações recorrentes bi e tridimensionais Fibonaccianas, assim, na fase de ação, para todas as questões, espera-se que os alunos pensem em avaliar as identidades de modo análogo às demonstrações das identidades unidimensionais. Diante disso, a seguir, serão descritas e discutidas as resoluções para cada atividade.

Quadro 1 – Atividades propostas

Com base nos seus conhecimentos sobre as relações recorrentes bi e tridimensionais, considere que os números $G(n,m)$ e $G(n,m,p)$ devem satisfazer, respectivamente, às seguintes condições de recorrência:

$$\begin{cases} G(n+2,m) = G(n+1,m) + G(n,m) \\ G(n,m+2) = G(n,m+1) + G(n,m) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} G(n+2,m,p) = G(n+1,m,p) + G(n,m,p) \\ G(n,m+2,p) = G(n,m+1,p) + G(n,m,p) \\ G(n,m,p+2) = G(n,m,p+1) + G(n,m,p) \end{cases}$$

De acordo com as identidades unidimensionais $\sum_{i=1}^{n} (f_i)^2 = f_n f_{n+1}$, $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$ e $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11f_{n+6}$. Verifique quais identidades são determinadas para a soma dos:

Atividade 1: n primeiros quadrados dos números G(n, m).
Atividade 2: n primeiros quadrados dos números G(n, m, p).
Atividade 3: seis números G(n, m) consecutivos.
Atividade 4: seis números G(n, m, p) consecutivos.
Atividade 5: dez números G(n, m) consecutivos.
Atividade 6: dez números G(n, m, p) consecutivos.

Fonte: Elaboração dos autores.

Inicia-se a discussão das questões, considerando a representação dos números $G(n,m)$ e $G(n,m,p)$ através das relações recorrentes bi e tridimensionais

$G(n+2,m)=G(n+1,m)+G(n,m)$ e $G(n+2,m,p)=G(n+1,m,p)+G(n,m,p)$. Nesse sentido, na atividade 1, os alunos devem manifestar a ação de desenvolver o somatório $\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2$.

Tabela 1 - Esquematização das etapas de resolução das atividades 1 e 2

Ação	Formulação	Validação
Desenvolver	**Aplicar**	**Determinar**
$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2$	$G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m i$ e $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2=[(1-f_{n+1}.f_{n+2})f_m^2+f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2]+$ $+(f_{n+1}^2+f_n.f_{n+2}-1)f_m.f_{m+1}i$
$\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p)^2$	$G(n,m,p)=f_n f_{m+1}f_{p+1}+$ $+f_{n+1}f_m f_{p+1}i+f_{n+1}f_{m+1}f_p j$	$\sum_{i=1}^{n} G(i,m,p)^2=(f_m^2+f_n f_{n+1}f_{m+1}^2-f_{n+1}f_{n+2}f_m^2)f_{p+1}^2$ $+(f_n f_{n+2}+f_{n+1}^2-1)f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i+$ $+(f_n f_{n+2}+f_{n+1}^2-1)f_{m+1}^2 f_p f_{p+1} j+$ $+(f_{n+1}f_{n+2}-1).(2f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p i j+f_{m+1}^2 f_p^2 j^2).$

Fonte: elaboração da autora.

Prosseguindo, na formulação, com a determinação das parcelas através da aplicação de $G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m i$, ademais, as operações e simplificações podem ser feitas utilizando a recursividade unidimensional $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$. E, no processo de validação, deve-se determinar: $\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2=[(1-f_{n+1}.f_{n+2})f_m^2+f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2]+(f_{n+1}^2+f_n.f_{n+2}-1)f_m.f_{m+1}i.$ Analogamente, a abordagem tridimensional dessa identidade possibilita a resolução da atividade 2 (tabela 1).

Tabela 2 – Esquematização das etapas de resolução das atividades 3 e 4

Ação	Formulação	Validação
Desenvolver	**Aplicar**	**Determinar**
$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m)$	$G(n,m)=f_n f_{m+1}+f_{n+1}f_m i$ e $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$	$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m)=4.G(n+4,m)$
$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p)$	$G(n,m,p)=f_n f_{m+1}f_{p+1}+$ $+f_{n+1}f_m f_{p+1}i+f_{n+1}f_{m+1}f_p j$	$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p)=4.G(n+4,m,p)$

Fonte: elaboração da autora.

Na atividade 3, na fase de ação, deve-se desenvolver $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m)$. Na formulação, pode-se escrever os termos, números $G(n,m)$, do somatório aplicando

$G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$, além disso, as simplificações podem ser feitas pela recursividade unidimensional $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. E, na validação deve-se determinar $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m)$. De modo análogo, consegue-se resolver a atividade 4 que é uma extensão da propriedade bidimensional para três dimensões (tabela 2).

Tabela 3 – Esquematização das etapas de resolução das atividades 5 e 6

Ação	**Formulação**	**Validação**
Desenvolver	**Aplicar**	**Determinar**
$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m)$	$G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$	$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m)$
$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p)$	$G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} +$ $+ f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j$	$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p) = 11.G(n+6,m,p)$

Fonte: elaboração da autora.

Na resolução da atividade 5, no momento de ação, deve-se haver o desenvolvimento de $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m)$. Assim, na formulação, pode-se escrever os números $G(n,m)$ do somatório recorrendo à $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$, além do mais, as simplificações podem ser feitas pela recursividade unidimensional $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. E, na etapa de validação, deve-se obter $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m) = 11.G(n+6,m)$. Analogamente, a atividade 6 é resolvida a partir da extensão da propriedade bidimensional para três dimensões (tabela 3). A seguir, tem-se a institucionalização.

DISCUSSÃO E INSTITUCIONALIZAÇÃO

Na institucionalização, pretende-se, com as atividades propostas, formalizar o conteúdo estudado e, assim, ampliar o repertório de conhecimento sobre as relações matemáticas oriundas da investigação do modelo de Fibonacci. Além do mais, percebe-se a marcante característica de rigor matemático desta situação didática que, todavia, de modo implícito, oportuniza a observação de um processo evolutivo do modelo de Fibonacci. Doravante, as identidades bi e tridimensionais trabalhadas nas atividades serão deduzidas com fundamentação no trabalho de Oliveira, Alves e Paiva (2017).

Identidade 1. A soma dos n primeiros quadrados dos números G(n, m) é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = [(1-f_{n+1}.f_{n+2})f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2] + (f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2} - 1)f_m.f_{m+1}i\ .$$

Demonstração: pode-se escrever:

$$\begin{cases} G(1,m)^2 = [G(2,m)-G(0,m)].G(1,m) \Rightarrow G(2,m)G(1,m)-G(0,m)G(1,m) \\ G(2,m)^2 = [G(3,m)-G(1,m)].G(2,m) \Rightarrow G(3,m)G(2,m)-G(1,m)G(2,m) \\ G(3,m)^2 = [G(4,m)-G(2,m)].G(3,m) \Rightarrow G(4,m)G(3,m)-G(2,m)G(3,m) \\ G(4,m)^2 = [G(5,m)-G(3,m)].G(4,m) \Rightarrow G(5,m)G(4,m)-G(3,m)G(4,m) \\ G(5,m)^2 = [G(6,m)-G(4,m)].G(5,m) \Rightarrow G(6,m)G(5,m)-G(4,m)G(5,m) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ G(n,m)^2 = [G(n+1,m)-G(n-1,m)]G(n,m) = G(n+1,m)G(n,m)-G(n-1,m)G(n,m). \end{cases}$$

Assim, segue que $\sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 = G(1,m)^2 + G(2,m)^2 + \dots + G(n,m)^2 = -G(1,m).G(0,m) +$ $+G(n+1,m).G(n,m) = -(f_{m+1} + f_m i)f_m i + (f_{n+1}.f_{m+1} + f_{n+2}.f_m i).(f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m i) =$ $= -f_{m+1}.f_m i + f_m^2 + f_n.f_{n+1}f_{m+1}^2 + f_{n+1}^2.f_m.f_{m+1}i + f_n.f_{n+2}.f_m.f_{m+1}i - f_{n+2}.f_{n+1}.f_m^2 \therefore \sum_{i=1}^{n} G(i,m)^2 =$ $= [(1-f_{n+1}.f_{n+2})f_m^2 + f_n.f_{n+1}.f_{m+1}^2] + (-f_m.f_{m+1} + f_m.f_{m+1}.f_{n+1}^2 + f_n.f_{n+2}.f_m.f_{m+1})i.$ ■

Identidade 2. A soma de seis números G(n, m) consecutivos é divisível por quatro:

$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) = 4.G(n+4,m).$$

Demonstração: a partir de $G(n,m) = f_n f_{m+1} + f_{n+1} f_m i$ pode-se avaliar os números G(n, m) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} G(n,m) = f_n.f_{m+1} + f_{n+1}.f_m i \\ G(n+1,m) = f_{n+1}.f_{m+1} + f_{n+2}.f_m i \\ G(n+2,m) = f_{n+2}.f_{m+1} + f_{n+3}.f_m i \\ G(n+3,m) = f_{n+3}.f_{m+1} + f_{n+4}.f_m i \\ G(n+4,m) = f_{n+4}.f_{m+1} + f_{n+5}.f_m i \\ G(n+5,m) = f_{n+5}.f_{m+1} + f_{n+6}.f_m i \end{cases}$$

Veja que $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$. Além de: $\sum_{i=1}^{6} f_{n+i} = (f_{n+1} + f_{n+2}) + (f_{n+3} + f_{n+4}) + f_{n+5} + f_{n+6} =$ $= f_{n+3} + f_{n+5} + f_{n+5} + f_{n+6} = f_{n+3} + f_{n+5} + f_{n+5} + f_{n+4} + f_{n+5} = 4.f_{n+5}$. Dessa forma, $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m) =$

$$= G(n,m) + G(n+1,m) + G(n+2,m) + G(n+3,m) + G(n+4,m) + G(n+5,m) =$$

$$=(f_n+f_{n+1}+f_{n+2}+f_{n+3}+f_{n+4}+f_{n+5})f_{m+1}+(f_{n+1}+f_{n+2}+f_{n+3}+f_{n+4}+f_{n+5}+f_{n+6})f_m i=\left(\sum_{i=0}^{5}f_{n+i}\right).f_{m+1}+$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{6}f_{n+i}\right).f_m i=4.f_{n+4}.f_{m+1}+4.f_{n+5}.f_m i=4(f_{n+4}.f_{m+1}+f_{n+5}.f_m i)\therefore\sum_{i=0}^{5}G(n+i,m)=4.G(n+4,m).\quad\blacksquare$$

Identidade 3. A soma de dez números G(n, m) consecutivos é divisível por onze:

$$\sum_{i=0}^{9}G(n+i,m)=11.G(n+6,m).$$

Demonstração: de modo análogo à demonstração anterior, ao aplicar $G(n,m)=f_nf_{m+1}+f_{n+1}f_m i$ para escrever os números G(n, m), tem-se que $\sum_{i=0}^{9}f_{n+i}=11f_{n+6}$ e também $\sum_{i=1}^{10}f_{n+i}=(f_{n+1}+...+f_{n+6})+f_{n+7}+...+f_{n+10}=4.f_{n+5}+f_{n+7}+f_{n+8}+f_{n+9}+(f_{n+8}+f_{n+9})=$

$=4.f_{n+5}+f_{n+7}+2[f_{n+8}+(f_{n+7}+f_{n+8})]=4.f_{n+5}+3f_{n+7}+4f_{n+8}=4.f_{n+5}+3f_{n+7}+4(f_{n+6}+f_{n+7})=$

$=4.f_{n+5}+4.f_{n+6}+7.f_{n+7}=11f_{n+7}$. Desse modo, $\sum_{i=0}^{9}G(n+i,m)=G(n,m)+G(n+1,m)+G(n+2,m)+$

$$+...+G(n+8,m)+G(n+9,m)=(f_n+f_{n+1}+f_{n+2}+...+f_{n+8}+f_{n+9})f_{m+1}+(f_{n+1}+f_{n+2}+f_{n+3}+$$

$$+...+f_{n+9}+f_{n+10})f_m i=\left(\sum_{i=0}^{9}f_{n+i}\right).f_{m+1}+\left(\sum_{i=1}^{10}f_{n+i}\right).f_m i=11.f_{n+6}.f_{m+1}+11.f_{n+7}.f_m i=11(f_{n+6}.f_{m+1}+f_{n+7}.f_m i)$$

$$\therefore\sum_{i=0}^{9}G(n+i,m)=11.G(n+6,m).\quad\blacksquare$$

Identidade 4. A soma dos n primeiros quadrados dos números G(n, m, p) é dada por:

$$\sum_{i=1}^{n}G(i,m,p)^2=(f_m^2+f_nf_{n+1}f_{m+1}^2-f_{n+1}f_{n+2}f_m^2)f_{p+1}^2+(f_nf_{n+2}+f_{n+1}^2-1)f_mf_{m+1}f_{p+1}^2 i+$$
$$+(f_nf_{n+2}+f_{n+1}^2-1)f_{m+1}^2f_pf_{p+1}j+(f_{n+1}f_{n+2}-1).(2f_mf_{m+1}f_{p+1}f_p ij+f_{m+1}^2f_p^2j^2).$$

Demonstração: continuando o raciocínio da demonstração da identidade anterior, podemos verificar que:

$$\begin{cases}G(1,m,p)^2=[G(2,m,p)-G(0,m,p)].G(1,m,p)\Rightarrow G(2,m,p)G(1,m,p)-G(0,m,p)G(1,m,p)\\ G(2,m,p)^2=[G(3,m,p)-G(1,m,p)].G(2,m,p)\Rightarrow G(3,m,p)G(2,m,p)-G(1,m,p)G(2,m,p)\\ G(3,m,p)^2=[G(4,m,p)-G(2,m,p)].G(3,m,p)\Rightarrow G(4,m,p)G(3,m,p)-G(2,m,p)G(3,m,p)\\ G(4,m,p)^2=[G(5,m,p)-G(3,m,p)].G(4,m,p)\Rightarrow G(5,m,p)G(4,m,p)-G(3,m,p)G(4,m,p)\\ G(5,m,p)^2=[G(6,m,p)-G(4,m,p)].G(5,m,p)\Rightarrow G(6,m,p)G(5,m,p)-G(4,m,p)G(5,m,p)\\ \quad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots\\ G(n,m,p)^2=[G(n+1,m,p)-G(n-1,m,p)]G(n,m,p)=G(n+1,m,p)G(n,m,p)-G(n-1,m,p)G(n,m,p)\end{cases}.$$

De fato, $\sum_{i=1}^{n}G(i,m,p)^2=G(1,m,p)^2+G(2,m,p)^2+...+G(n,m,p)^2=-G(1,m,p).G(0,m,p)+$

$+G(n+1,m,p).G(n,m,p)=-(f_{m+1}.f_{p+1}+f_m.f_{p+1}i+f_{m+1}.f_pj).(f_m.f_{p+1}i+f_{m+1}.f_pj)+$

$+ (f_{n+1}f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+2}f_m f_{p+1}i + f_{n+2}f_{m+1}f_p j).(f_n f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+1}f_m f_{p+1}i + f_{n+1}f_{m+1}f_p j) = -f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i + f_m^2 f_{p+1}^2 - f_m f_{m+1}f_p f_{p+1}ij - f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j - f_m f_{m+1}f_p f_{p+1}ij - f_{m+1}^2 f_p^2 j^2 + f_n f_{n+1}f_{m+1}^2 f_{p+1}^2 + f_n f_{n+2}f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i + f_n f_{n+2}f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j + f_{n+1}^2 f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i - f_{n+1}f_{n+2}f_m^2 f_{p+1}^2 + f_{n+1}f_{n+2}f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij + f_{n+1}^2 f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j + f_{n+1}f_{n+2}f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij + f_{n+1}f_{n+2}f_{m+1}^2 f_p^2 j^2 = (f_m^2 + f_n f_{n+1}f_{m+1}^2 - f_{n+1}f_{n+2}f_m^2)f_{p+1}^2 + (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i + (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j + (f_{n+1}f_{n+2} - 1)2f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij + (f_{n+1}f_{n+2} - 1)f_{m+1}^2 f_p^2 j^2.$

$$\text{Logo: } \sum_{i=1}^{n} G(i,m,p)^2 = (f_m^2 + f_n f_{n+1}f_{m+1}^2 - f_{n+1}f_{n+2}f_m^2)f_{p+1}^2 + (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)f_m f_{m+1}f_{p+1}^2 i + (f_n f_{n+2} + f_{n+1}^2 - 1)f_{m+1}^2 f_p f_{p+1}j + (f_{n+1}f_{n+2} - 1).(2f_m f_{m+1}f_{p+1}f_p ij + f_{m+1}^2 f_p^2 j^2). \quad \blacksquare$$

Identidade 5: A soma de seis números G(n, m, p) consecutivos é divisível por quatro:

$$\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = 4.G(n+4,m,p).$$

Demonstração: aplicando $G(n,m,p) = f_n f_{m+1}f_{p+1} + f_{n+1}f_m f_{p+1}i + f_{n+1}f_{m+1}f_p j$ para descrever os números G(n, m, p), pode-se ver:

$$\begin{cases} G(n,m,p) = f_n.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+1}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+1}.f_{m+1}.f_p j \\ G(n+1,m,p) = f_{n+1}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+2}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+2}.f_{m+1}.f_p j \\ G(n+2,m,p) = f_{n+2}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+3}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+3}.f_{m+1}.f_p j \\ G(n+3,m,p) = f_{n+3}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+4}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+4}.f_{m+1}.f_p j \\ G(n+4,m,p) = f_{n+4}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+5}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+5}.f_{m+1}.f_p j \\ G(n+5,m,p) = f_{n+5}.f_{m+1}.f_{p+1} + f_{n+6}.f_m.f_{p+1}i + f_{n+6}.f_{m+1}.f_p j. \end{cases}$$

Como $\sum_{i=0}^{5} f_{n+i} = 4.f_{n+4}$ e $\sum_{i=1}^{6} f_{n+i} = 4.f_{n+5}$. Assim, $\sum_{i=0}^{5} G(n+i,m,p) = G(n,m,p) + G(n+1,m,p) + G(n+2,m,p) + ... + G(n+5,m,p) = (f_n + f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5})f_{m+1}f_{p+1} + (f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6})f_m f_{p+1}i + (f_{n+1} + f_{n+2} + f_{n+3} + f_{n+4} + f_{n+5} + f_{n+6})f_{m+1}f_p j = \left(\sum_{i=0}^{5} f_{n+i}\right).f_{m+1}.f_{p+1} + \left(\sum_{i=1}^{6} f_{n+i}\right).f_m f_{p+1}i + \left(\sum_{i=1}^{6} f_{n+i}\right).f_{m+1}f_p j = 4.f_{n+4}.f_{m+1}.f_{p+1} + 4.f_{n+5}.f_m f_{p+1}i + 4.f_{n+5}.f_{m+1}f_p j = 4.G(n+4,m,p).$ ■

Identidade 6. A soma de dez números G(n, m, p) consecutivos é divisível por onze:

$$\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p) = 11.G(n+6,m,p).$$

Demonstração: de modo análogo à demonstração anterior, recorre-se à $G(n,m,p) = f_n f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+1} f_m f_{p+1} i + f_{n+1} f_{m+1} f_p j$ para determinar os números G(n, m, p). Como $\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} = 11 f_{n+6}$ e $\sum_{i=1}^{10} f_{n+i} = 11 f_{n+7}$. Dessa forma, $\sum_{i=0}^{9} G(n+i,m,p) = (n, m, p) + G(n+1, m, p) +$

$$+ G(n+2, m, p) + \ldots + G(n+9, m, p) = (f_n + f_{n+1} + \ldots + f_{n+9}) f_{m+1} f_{p+1} + (f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+10}) f_m f_{p+1} i +$$

$$+ (f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+10}) f_{m+1} f_p j = \left(\sum_{i=0}^{9} f_{n+i} \right) .f_{m+1} .f_{p+1} + \left(\sum_{i=1}^{10} f_{n+i} \right) .f_m .f_{p+1} i + \left(\sum_{i=1}^{10} f_{n+i} \right) .f_{m+1} .f_p j =$$

$$= 11.f_{n+6} f_{m+1} f_{p+1} + 11.f_{n+7} f_m f_{p+1} i + 11.f_{n+7} f_{m+1} f_p j = 11.\,(f_{n+6} f_{m+1} f_{p+1} + f_{n+7} f_m f_{p+1} i + f_{n+7} f_{m+1} f_p j) =$$

$$= 11.\,G(n+6, m, p). \qquad \blacksquare$$

CONCLUSÕES

Este artigo investigou o modelo de Fibonacci a partir das relações recorrentes bi e tridimensionais na forma complexa. Assim, é sugerido que as definições e relações matemáticas sejam transpostas para o contexto didático através da concepção de atividades que permitam instigar o pensamento do estudante para a compreensão do desenvolvimento das identidades Fibonaccianas complexas para os números G(n, m) e G(n, m, p).

Por fim, as etapas de resolução foram classificadas, de acordo com as fases da Teoria das Situações Didáticas, em ação, formulação e validação. Isso permite observar que durante a resolução das atividades propostas, o pensamento intuitivo do aluno pode ser mobilizado em direção ao raciocínio inferencial. Além do mais, é possível ampliar o conjunto de relações e identidades oriundas do modelo de Fibonacci.

REFERÊNCIAS

ALVES, F. R. V. Didática de Matemática: seus pressupostos de ordem epistemológica, metodológica e cognitiva. **Interfaces da Educ.,** Paranaíba, v.7, n. 21, p.131-150, 2016. ISSN2177-7691.

BERZSENYI, G. Gaussian Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly,** 15. p. 233–236, 1977.

BROUSSEAU, G. Les obstacles épistémologiques et les problèmes em mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), La problématique et l'enseignement de la mathématiques. **Comptes rendus de la XXVIIIe reencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques**. Louvain-la-Neuve, p. 101-117, 1976.

HARMAN, C. J. Complex Fibonacci Numbers. **The Fibonacci Quarterly,** 19, p. 82 – 86, 1981.

OLIVEIRA, R. R.; ALVES, F. R. V.; PAIVA, R. E. B. Identidades bi e tridimensionais para os números de Fibonacci na forma complexa. **REVISTA ELETRÔNICA PAULISTA DE MATEMÁTICA**, v. 11ic, p. 91-106, 2017.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa.** 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PETHE, S.; HORADAM A. F. Generalized Fibonacci Gaussian Numbers. *Bull.* **Aust. Math. Soc.**, 33, p. 37–48, 1986.

TEIXEIRA. P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké** – FE/Unicamp, v. 21, n. 39, p. 155 – 168, 2013.