TENTATIVAS DE ESTABELECER O CONCEITO DE NÚMERO COMO FUNDAMENTO PARA CURSOS DE ANÁLISE

Gert Schubring[1]
gert.schubring@uni-bielefeld.de

Resumo
Embora uma concepção de número fique subjacente a cada abordagem de análise, pesquisas a fim de explicitar tais concepções surgiram bem tardiamente, na primeira metade do século XIX. O artigo analisa quatro tentativas de fundamentar o cálculo em um conceito de número adaptado – duas da França e duas da Alemanha. Um foco principal dessas tentativas foi o conceito de números negativos. Porém, elaborar o conceito de números reais não ficou no horizonte conceitual desses matemáticos. Foi o desafio que levou Dedekind a estabelecer seu conceito de cortes.

Palavras-chave: Conceito de número. Números reais. Fundamentos da Análise. Cauchy. Ampère. Enno Dirksen. Martin Ohm. Dedekind. Weierstrass. Tibiriçá Dias.

Introdução

Por um lado, fica evidente que cada concepção da análise precisa de um conceito de número – vale lembrar simplesmente o caráter fundamental do teorema do valor intermediário para qualquer proposição da análise. Por outro lado, embora a análise tenha sido estabelecida na segunda metade do século XVII, tentativas de explicitar o conceito de número, seja introduzindo a análise num curso de lições ou em um livro texto, não são conhecidas no século XVIII. É somente desde o começo do século XIX que aparecem as primeiras tais tentativas. Sem dúvida, essas explicitações devem estar ligadas com a nova época de desenvolvimento da matemática, tornando-a uma das principais disciplinas a serem ensinadas nos novos sistemas de ensino público – seja em escolas secundárias, seja no ensino superior - conforme observação feita pelo historiador alemão de matemática Hans Wußing.

1. Na França

De fato, as primeiras duas tentativas de estabelecer o conceito de número como base do ensino da análise foram ambas iniciadas na *École Polytechnique* de Paris, a primeira instituição de ensino superior, onde a matemática constituiu uma disciplina fundamental e de alto nível da formação providenciada por essa escola.

[1] PhD in Mathematics pela Universität Bielefeld (Alemanha). Professor visitante do Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

O Cours d'Analyse de Cauchy

Bem conhecida é uma destas duas tentativas: o livro texto de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857): *Cours d'Analyse Algébrique*, publicado em 1821, principalmente para os alunos da escola. Com esse livro texto, Cauchy seguiu, em grande parte, a concepção do famoso livro texto de Leonhard Euler de 1748: *Introductio in Analysin Infinitorum*, que expôs, em particular, a teoria das funções. Porém, diferentemente de Euler, Cauchy fez preceder o tratamento das séries e das funções por uma parte, chamada por ele "*Preliminares*". No subtítulo, Cauchy indicou como conteúdo desta parte introdutória:

> "Estudo das diferentes espécies de quantidades reais que podemos considerar, seja em álgebra, seja em trigonometria, e as notações com as quais as representamos" (Cauchy 2015, cap. 0).

No primeiro parágrafo, ele motivou esta parte pela necessidade de assegurar os fundamentos da análise:

> "Para evitar qualquer espécie de mal-entendido na linguagem e na escrita algébricas, vamos fixar nestas preliminares o valor atribuído a diversos termos e a diversas notações que tomaremos emprestado seja da álgebra ordinária, seja da trigonometria. As explicações que nós daremos a esta questão são necessárias, para que tenhamos a certeza de sermos perfeitamente compreendidos por aqueles que lerão esta obra" (ibid.).

Revela-se como muito importante que Cauchy enfatiza uma distinção sistemática entre número e quantidade, como base de sua concepção. Para Cauchy, a distinção é de cunho epistemológico: números gozam de um caráter privilegiado, graças a uma propriedade ontológica, de ligação com substâncias:

> "Nós adotaremos sempre a denominação de *números* no sentido que se emprega na aritmética, fazendo nascer os números da medida absoluta das grandezas" (ibid.).

Quantidade, por outro lado, é todo que não tem essa ligação ontológica privilegiada:

> "nós aplicaremos unicamente a denominação de *quantidades* às quantidades *reais positivas* ou *negativas*, quer dizer, aos números precedidos dos sinais + ou -."

E se repara que existe para Cauchy uma terceira categoria de números, com um estatuto ainda menor: são as "expressões", em particular as expressões imaginárias, utilizado para números imaginários e complexos; o capítulo 7 é dedicado a essa categoria.

O foco principal da parte preliminar do livro texto foi explicar os números negativos, quer dizer as quantidades negativas. A concepção adotada de quantidades negativas é aquela de quantidades "opostas" – onde se aceita, então, de operar com quantidades negativas e positivas, e onde uma quantidade anula uma outra com mesmo valor absoluto, mas com sinal "oposto". Pode-se admirar como extensamente Cauchy explicou propriedades básicas de quantidades negativas.

Porém, entende-se bem essa maneira explicita e extensa quando se considera a situação conceitual desta área da matemática na época. De fato, depois do breve período de entusiasmo para as abordagens analíticas na matemática, a partir da

Revolução em 1789, foi em particular a obra *Géométrie de Position*, publicado em 1803 por Lazare Carnot (1753-1823), que marcou a volta para as abordagens sintéticas (ver Schubring 2004). Nesta obra, Carnot apontou que não existe nenhuma prova para a regra dos sinais e que se deve, então, substituir a doutrina das quantidades negativas e positivas na álgebra por uma nova geometria: a geometria das linhas orientadas, em sentido "direto" e em sentido "inverso" – e mais geralmente de linhas e figuras correlatas:

> "Daí concluo que toda quantidade negativa isolada é um ente imaginário, e que aquelas que se encontram no cálculo, não são senão formas algébricas simples, incapazes de representar qualquer quantidade real e efetiva" (Carnot 1803, p. xviii).
>
> "A geometria de posição é, portanto, falando propriamente, a doutrina das quantidades positivas e negativas, ou sobretudo o meio de substituí-la, pois tal doutrina é aí inteiramente rejeitada" (ibid., p. ii).
>
> "Eu diria que a geometria de posição é aquela em que a noção de quantidades positivas e negativas isoladas é substituída pela das quantidades diretas e inversas" (Carnot 1803, p. xxxiv; apud Schubring 2003, p. 123).

Essa restrição radical do alcance da álgebra não ficou limitada à esfera da matemática sábia, mas foi adotada praticamente imediatamente para o ensino da matemática. Foi divulgada em toda a França pelo livro didático de álgebra de Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), que foi prescrito a partir de 1803 como o único livro didático que se deveria utilizar nos colégios da França. As transformações desse livro texto entre 1797 e 1803 são significativas para a volta do analítico para o sintético na França. A primeira edição de 1797 foi uma reimpressão da álgebra de Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) de 1746, onde Clairaut adotou a abordagem de reinterpretar soluções negativas por uma grandeza "oposta". Na segunda edição de 1799, Lacroix não mais reimprimiu Clairaut mas copiou grandes partes do livro texto de álgebra de Étienne Bézout (1730-1783) onde soluções negativas já foram recusadas em geral. Na terceira edição, de 1800, Lacroix acrescentou críticas às abordagens de Clairaut. Na quarta edição de 1803 que a partir de aí foi reimpressa muitas vezes de forma mais ou menos idêntica, o texto tornou-se da própria autoria de Lacroix; ele reorganizou toda a concepção por causa dos números negativos – e adotou a concepção redutiva de Carnot, denotando soluções negativas como absurdidades (Schubring 2003, pp. 115-125).

Cauchy deu ainda mais enfoque na questão das quantidades negativas. Depois os doze capítulos do texto principal de seu livro texto, ele adicionou nove apêndices, chamados "notas". Ele deu à primeira nota o título: Sobre a teoria das quantidades positivas e negativas. Aí, ele foi mais extenso em explicar como se efetua as operações básicas com quantidades negativas, segundo sua concepção delas como quantidades opostas. O que chama atenção nesse primeiro apêndice é a menção indireta a Condillac (1714-1780), o importante filósofo do Iluminismo e assim um dos precursores da Revolução Francesa, odiado por Cauchy: referindo-se ao *mémoire* de Adrien-Quentin Buée (1748-1826) de 1806, ele comparou os sinais '+' e '-' à frente das quantidades com os adjetivos colocados à frente dos seus substantivos. Desta maneira, Buée referiu-se, sem o nomear, à concepção de Condillac da álgebra como a língua da matemática e das ciências.[2]

[2] Sobre Buée e seu *mémoire*, publicado nos *Transactions of the Royal Society*, ver Schubring 2001.

Na verdade, apesar do título, a Nota I expõe não somente as operações com números negativos, mas trata da extensão dos números naturais para os inteiros, racionais e irracionais, e introduz as operações básicas da aritmética até as potencias e logaritmos e faz uma introdução sucinta da trigonometria. Embora Cauchy fala de "quantidades reais", ele não introduziu explicitamente esses números. Desta maneira, o conceito de números não é exposto e definido na maneira extensa como necessitado pela análise. As chamadas "séries de Cauchy" não foram elaboradas por Cauchy, mas por Charles Méray (1835-1911) em 1869.

André-Marie Ampère

Ampère (1775-1836) está bem conhecido como físico e um pouco também como filósofo, mas praticamente não foi reparado que ele fez contribuições importantes para a matemática. Não somente que ele foi professor de análise na Escola Politécnica, a partir de 1808, e isto junto com Cauchy a partir de 1815 - eles alternaram em ministrar a disciplina de análise na escola, que foi de dois anos -, mas ele se destacou por uma pesquisa reveladora de provar, em 1806, a existência geral da derivada de uma função (ver Schubring 2005, pp. 384 sqq.).

Mais notável no nosso contexto é que Ampère pesquisou intensamente para elaborar um conceito de número que pudesse servir como introdução as suas aulas de análise na Escola Politécnica.

Ampère pode ser considerado como a verdadeira cabeça filosófica da *École*. Ele se envolveu em reflexões sobre os princípios básicos para uma profundidade muito maior e com mais rigor do que seus antecessores Prony e Garnier. Além disso, ele estava muito mais interessado em filosofia e correspondeu ativamente com os filósofos de seu tempo.

O *Nachlass* de Ampère contém um grande número de fragmentos de manuscritos para uma *Cours d'Analyse Mathématique* que antes não foram conhecidos e analisados por historiadores da matemática. Aparentemente, os catalogadores não perceberam que esses muitos fragmentos estão interligados. Os capítulos introdutórios, embora não contendo nenhum único texto acabado, todos lidam com a relação entre quantidade e número. Em abordagem após abordagem, Ampère quis elaborar uma concepção rigorosa dessas fundações.

Embora vários dos ensaios de Ampère de elaborar uma versão que o satisfaça contém listas extensas dos conteúdos que ele planejou de tratar no livro[3], ele não progrediu além das operações básicas, exceto em raros textos. Não existem manuscritos acabados (e, portanto, não há publicações sobre, por exemplo, o conceito de número), porque em seus esforços para conseguir rigor nos conceitos básicos, ele foi incapaz de encontrar algum conceito de número que o satisfez completamente. No entanto, repara-se uma concepção básica que emerge desses fragmentos: Ampère foi guiado por um princípio epistemológico, de desenvolver uma concepção do conceito de número que seria tão abstrato quanto possível, de acordo com sua convicção de que os conceitos mais gerais e mais abstratas são simultaneamente os mais simples: "em

[3] Académie des Sciences Paris; Archives. Nachlass Ampère. A lista mais detalhada extendendo-se até o cálculo diferencial encontra-se no fragmento intitulado *Principes élémentarires du calcul* (cart. 1, Chapter 1, chem. 4).

preservando a generalidade e a simplicidade que caracteriza as ideias as mais abstratas[4].”

Como primeiro assunto que foi preciso de ser clarificado, Ampère discutiu, em um certo número dos fragmentos, a relação entre os três conceitos básicos: *quantidade*, *grandeza* e *número*. Ele define *quantidade* como aquilo que é composto de partes que correspondem uma a outra; pode-se aumentar ou diminuir uma quantidade apenas por acréscimo ou remoção de tais partes. Como *grandeza*, ele compreende uma variável que pode mudar de um estado para outro apenas se assume sucessivamente todos os estados intermediários. Num outro segmento de manuscrito, ele, portanto, distinguiu entre uma *grandeza* e os valores que ela assume em cada etapa. A única maneira de medir *quantidades* e *grandezas* é por meio de números. Assim, para Ampère, os primeiros sinais são os sinais que representem “ser igual”, “ser menor do que” e “ser maior do que”, isto é, =, < e >.

Como resultado, os primeiros conceitos refletidos por Ampère – em uma abordagem completamente nova e abrangente - são os conceitos de igualdade e desigualdade. Para medir e determinar números, é requerido um meio de medição. Desigualdades assim determinados são necessários antes que se possa executar operações iniciais de diminuição e aumento. É só depois de refletir sobre igualdade e desigualdade e introduzir os seus sinais que Ampère expõe as operações básicas, junto com os sinais de mais e de menos.

Em seguida, ele imediatamente explicou que a forma tradicional de caracterizar quantidades positivas e negativas por meio dos seus sinais está incorreta, embora sendo uma prática continuada tanto por Bézout que por Lacroix. O significado exigido de aumentar ou diminuir mostra o carácter errôneo da definição tradicional:

> “C'est même de la que vient le nom de quantités positives qu'on donne à celles qui sont précédées du signe +, et celui de quantités négatives à celles qui sont précédées du signe -, mais cette distinction inutile et qui n'est propre qu'a jetter dans l’erreur. ”

Ampère foi o primeiro a afirmar que tal caracterização não é apenas desnecessária, mas ainda leva ao erro. Ele mostrou em grande detalhe que a razão por que esta definição não funciona reside precisamente na natureza das quantidades algébricas. Especificamente, como se lida inicialmente com uma quantidade desconhecida que é definida como tal, se fica livre para denominá-la ou por $+x$ ou $-x$, e se fica também livre para substituir $+x$, por exemplo, por $–y$, isto é, $+x = y$ e $-x = +y$.

Como uma quantidade ser positiva ou negativa não depende de seu sinal, o texto de Ampère continua sem discriminar entre as quantidades positivas e negativas:

> “Nous n'établirons donc pour le present aucune distinction entre les quantités positives et négatives, nous reservant de donner à ce sujet des notions precises, quand nous aurons developpés suffisamment ces premiers príncipes. ”

Num outro fragmento, Ampère não só enfatiza o status igual de quantidades positivas e negativas, mas também prossegue para a primeira vez além do nível conceitual de quantidades e concebe o conceito no novo domínio de “números abstratos”. Aqui, pela primeira vez na matemática francesa, ele também admitiu "números negativos abstratas" e afirmou. “Não existem diferenças entre as quantidades positivas e

[4] Académie des Sciences Paris; Archives. *Nachlass* Ampère. Carton 4, Chap. 4, chemise 75: Cours d’Analyse. Nota no capítulo 3 (nenhum dos manuscritos é paginado).

negativas, mas aquelas que são situados no lado oposto da unidade são marcados por números negativos abstrato. ”

Em um outro trecho manuscrito, intitulado *Notas*, Ampère criticou as recentes “objeções” contra quantidades negativas e, em particular, contra quantidades negativas abstratas. Infelizmente, os diferentes textos são fragmentos, e esses capítulos introdutórios não foram continuados por Ampère. Assim, a concepção de números negativos de Ampère não existe em uma forma polida e coerente. No entanto, estes fragmentos revelam que ele rejeitou, por razões epistemológicas, a volta de Carnot e Lacroix às abordagens sintéticas, e quis fundamentar, pela primeira vez, a aritmética e a álgebra no conceito de número, em vez de no conceito tradicional de quantidade.

Foi claramente o conceito de números negativos que instigou Ampère para continuar com seus esforços de elaborar os fundamentos. Por um lado, ele sempre utilizou palavras fortes de crítica para as concepções empiristas contemporâneas, referindo-se várias vezes ao *idée du nombre négatif*. Ele censurou autores contemporâneos para a maneira evidentemente intencional de lançar um véu de obscuridade sobre os números negativos:

> “il nous suffit d'avoir donné une idée précise de la distinction des nombres positifs et negatifs, et de la nature de ces derniers, sur lesquels les auteurs modernes semblent avoir laissé à dessein flotter un voile d'obscurit.”

E ele também apontou como sua concepção de comparar quantidades pode ser usado para obter não só números negativos inteiros, mas também todos os outros tipos de números, os fracionais ou irracionais: “[por uso de] o tipo de comparação que nos deu números negativos, deve-se ser capaz da mesma forma [...] de obter números inteiros, fraccionais, ou irracionais, e todos os negativos.”[5]

De acordo com os *Registres d’Instruction*[6], Ampère nunca começou qualquer um dos seus cursos de análise na *École Polytechnique* em introduzindo os fundamentos do conceito de número. O seu curso de primeiro ano geralmente começou com equações cúbicas. Na verdade, esses fragmentos claramente não são notas de aula, mas primeiros rascunhos para uma publicação futura. Ele fala expressamente sobre um *ouvrage* com o objetivo: “[...] o primeiro fundamento da análise matemática, isto é, a ciência a que essa obra é dedicada. ”

Como ele planejou um livro sobre análise, torna-se claro que ele queria também incluir os aspectos fundamentais que não foram abordadas nas lições da *École*, porque os alunos foram assumidos possuir tais conhecimentos antes do início dos cursos. Pode-se supor que Ampère discutiu seus conceitos sobre fundamentos com seus alunos. Isto é particularmente significativo porque Ampère atuou como *répétiteur* para a disciplina de análise de Lacroix a partir de 1805, exatamente o ano em que Cauchy frequentou esse curso (Gilain 1989, 5). Além disso, os fragmentos podem ser datados ao período anterior a 1810.

Em uma nota de rodapé em um dos fragmentos, Ampère criticou Lacroix explicitamente: Na seção sobre álgebra superior de seu livro didático, Lacroix volta para a verdadeira teoria dos números negativos, sem dar qualquer explicação para

---

5 *Nachlass* Ampère, cart. 1, Chapter 1 chem. 4, Livre premier. I. Notions préliminaires.

6 Os *Registres* foram um tipo de “livro de classe”: depois cada aula, o professor devia descrever em poucas palavras os conteúdos principais lecionados.

essa mudança e a diferença com a álgebra elementar. Aí, em contraste, Lacroix ensinou o oposto de uma verdadeira teoria: as suas regras como se deve altera os sinais na equação original:

> lacroix n'explique point la vraie theorie des signes litteraux essent.[t][iellement] neg.[s][atives] representant tout ce qu'on veut, sa regle de changer les signes de *c* en est precis[t][ement] le contraire. il en revient à la vraie théorie dans les formules generales mais sans en donner la moindre expl.[on][ication].[7]

2. Na Prússia

Entre os vários Estados alemães, a Prússia tornou-se no século XIX o país com o sistema educacional desenvolvido de maneira mais forte. Contrariamente à França, onde dominou no ensino superior durante muitas décadas a formação de engenheiros, as universidades foram o setor dominante do ensino superior; em particular foram as Faculdades de Filosofia que atingiram o novo papel de unir ensino com pesquisa. Graças a nova função dessas Faculdades de formar professores para o ensino secundário, a matemática nas universidades prussianas desenvolveu-se na forma paradigmática de matemática pura (ver Schubring 1981).

Enno Heeren Dirksen

Dirksen (1788-1850) estudou matemática em Göttingen, em particular com Gauss. A partir de 1820 atuou como professor de matemática na universidade de Berlim. Ele teve um mesmo projeto como Ampère, porém de alcance muito maior. Durante várias décadas, ele pesquisou para elaborar uma obra que deveria assegurar os fundamentos da análise. O título planejado foi: *Organon der Gesamten Analysis* – Organon de toda a Análise: "Organon" no sentido de uma obra ligando as partes da análise de uma maneira segundo a natureza dos conceitos. Dirksen concebeu a obra em três partes:

- teoria elementar da análise, com dois volumes:
  - ✓ teoria elementar algébrica da análise
  - ✓ teoria elementar transcendental da análise
- teoria analítica das funções.

Porém, analogamente a Ampère, Dirksen não conseguiu terminar esse projeto enorme e significativo. Mas, mais feliz do que Ampère, Dirksen foi capaz de publicar, em 1845, um dos três volumes planejados, o intermediário:

> *Organon der Gesamten Transcendenten Analysis*.

Dos outros dois volumes, encontra-se um número também enorme de esboços dos capítulos planejados – de forma muito mais desenvolvida do que os fragmentos de Ampère. Os esboços são preservados no *Nachlass* de Dirksen[8]. Já o tamanho extraordinário do volume publicado, 940 páginas, evidencia os esforços de tipo obsessivo de Dirksen de sistematizar cada possível ramificação conceitual.

[7] Ibid.: *Application de l'Analyse à la Résolution des equations à une seule inconnue*.

[8] O Nachlass de Dirksen é em posse privada, em Osterburg, Groothusen, Friesland do Leste (Alemanha). Agradeço Menso Folkerts que facilitou acesso aos manuscritos.

A maior parte do livro contém o que foi chamado de "análise algébrica" por um longo tempo. Com efeito, essa parte da matemática tratou da teoria de séries infinitas. Enquanto Crelle, em um relatório para o Ministério da Educação, criticou a estranheza de seus métodos e da terminologia[9], Gauss, em uma carta de 5 de novembro de 1845, em resposta a uma cópia do livro enviada por Dirksen, deu os maiores elogios possíveis para si mesmo, ou seja, dizendo que ele mesmo já havia começado em uma abordagem semelhante: Gauss conseguiu chegar bem perto da abordagem da obra de Dirksen:

> "É aquela [abordagem] que sempre foi de grande valor para mim. Mesmo muito precoce, ou seja, mais de 50 anos atrás, tudo que encontrei em livros sobre séries infinitas foi insatisfatório para mim e abominável para uma mente matemática digna, e me lembro que em 1793 ou 1794, eu comecei uma tentativa de desenvolver os conceitos básicos de uma forma satisfatória de que, segundo minha memória, tiveram notável semelhança com a sua abordagem" (Folkerts 1983/84, 73 f.).

Dos "numerosos fólios" que Gauss começou naquela época, ele contou que não continuou com essa pesquisa, por um lado, porque "todo desenvolvimento, se deve ser completo, exigiria uma *grande* demanda de espaço", e, por outro lado, porque naquela época, parecia que não havia leitores para tais tratados, uma situação que agora parecia ter mudado (citações de ibid.). Da obra imensa de Dirksen, vou expor somente alguns elementos quanto ao conceito de número e das notações importantes para expor a análise.

Existem numerosas versões da teoria algébrica elementar entre os papéis de Dirksen; alguns foram marcados por Dirksen: "datando de um período anterior" - por isso temos uma certa sequência cronológica entre as várias versões. Vale ressaltar que não só Dirksen não ficou satisfeito com qualquer das suas versões, mas também que o conceito de número se revelou a constituir o núcleo de seu problema conceitual.

Exatamente análogo ao de Ampère, que se dedicou no que se tornou uma tentativa fútil de uma dedução coerente do conceito de número a partir da relação entre quantidade e número, o objetivo de Dirksen era elaborar os fundamentos para o conceito de número. É significativo que nas primeiras versões o número era um conceito fundamental, mas que em versões posteriores ele se afastou dessa concepção, e, ao final, o número foi apresentado como um conceito derivado de modo intermediário: na dedução do conceito de número, Dirksen mesmo fez um apelo à cognição humana.

Inicialmente, "número" foi o conceito fundamental, e "quantidade", um conceito derivado. Depois, essa relação se inverteu, e assim outros conceitos básicos foram inseridos antes de "quantidade". Por um lado, houve a ideia de um "conjunto", e, por outro lado, a ideia indeterminada de "coisas", com a qual Dirksen aparentemente tencionou estabelecer uma ligação com a compreensão humana através da imaginação[10]. Dirksen havia adotado a ideia do conjunto e sua incorporação como um

---

[9] Relato do 19.9.1845; in: (HA PrKu) Sammlung Darmstädter, H 1818 Crelle; informação devido à Menso Folkerts.

[10] "Conjunto" e "coisa" encontram-se como conceitos fundamentais em duas versões, contidas em "pacote III" em uma pasta com a anotação: "Teoria da Análise Elementar. Primeira Seção. Primeiro Livro: Sobre quantidades e números (primeiro rascunho e 2 revisões). Início de uma obra da qual a Organon impresso é uma parte". A descrição foi claramente feita por Fooke Hoissen Müller, amigo e biógrafo de Dirksen (ver Folkerts 1998).

conceito fundamental da aritmética e álgebra, uma ideia que tinha sido desenvolvida por matemáticos alemães no século XVIII; isso mostra que a ideia de um conjunto foi usada como um conceito fundamental na Alemanha bem antes de Georg Cantor (cf. Schubring 2011).

Em um fragmento sobre a teoria das funções, que parece datar de um período médio das pesquisas de Dirksen, há uma página na qual é delineado um "plano de trabalho". Sob o título "Teoria Básica de toda a Análise", a primeira seção da primeira parte - teoria elementar algébrica - devia conter quatro livros:

1. Sobre conjuntos e os todos.

2. Sobre quantidades (*quantis*) e as suas razões.

3. Sobre números.

4. Sobre quantidades algébricas.

Versões posteriores desta parte foram diferenciadas notavelmente. Na versão manuscrita, a mais elaborada, e, portanto, provavelmente, a mais recente, o primeiro capítulo é intitulado: "Sobre conjuntos e seus índices", e a primeira seção, tendo como assuntos: pluralidade ou multiplicidade - (Mehrzahl oder Mehrheit); unidade; conjunto, número ou variedade (Vielheit) – começa por introduzir a "coisa"[11].

Em seguida, Dirksen introduziu uma "coisa" como uma generalização do aspecto cardinal e foi já capaz de expor operações elementares com conjuntos. No segundo capítulo, ele definiu quantidades como coisas especiais: uma coisa é nomeada uma quantidade caso ela contenha apenas uma única característica (fol. 15). Enfim, no primeiro capítulo do segundo livro, ele conseguiu definir números. Esses foram definidos como as razões de quantidades, ou seja, como a sua medida (§ 527, fol. 70).

Caso duas quantidades A e B sejam iguais, o seu número é entendido ser "assinável" (*angebbar*) e caso elas sejam desiguais, o seu número é entendido como "não assinável" (*unangebbar*). É uma característica de toda a construção de Dirksen da análise e, especialmente, de sua teoria das séries, que, para Dirksen, o *zero* não é um número, e em particular não um número assinável. Dirksen manteve coerentemente esta posição básica em todas as versões de sua teoria da álgebra elementar; claramente, foi também uma condição fundamental para o seu conceito das séries. Assim, nas primeiras versões da primeira parte, que começa com o conceito de número, o *zero* goza esse estatuto especial, em virtude da definição de números em termos de medida de quantidades:

> § 1.1. Por um *número* entendemos aqui a *razão geométrica* em que duas quanta iguais esta em relação uma à outra como quantidades. Um número por este não é um quantum, mas apenas o predicado de um quantum.

Dirksen identificou o zero como a "negação" de qualquer número assinável. Como consequência desta abordagem, Dirksen exigiu explicitamente quocientes sendo definidos somente para números assináveis.

Em contraste ao caso especial do zero, Dirksen não evidenciou nenhum problema com a definição de números negativos, e mesmo nem achou necessário incluir uma

[11] Se não indicadas diferentemente, as citações que seguem são tiradas dos manuscritos do *Organon* no *Nachlass* de Osterburg. Para conformidade, as palavras sublinhadas por Dirksen são colocadas aqui em itálico, como no volume impresso de 1845. "Pacote III," texto da parte I: Elementary Theory of Algebraic Analysis, Primeiro livro, capítulo I, Seção 1.

reflexão sobre esse domínio de números. Ele não os apresentou no capítulo seguinte, onde os números foram introduzidos no sentido de representação aritmética dos números; aí, a diferença $a - b$ foi restrita ao caso positivo. Porém, na parte seguinte, "Sobre formas algébricas de quantidades", nessa parte de "álgebra", Dirksen introduziu as diferenças de duas quantidades reais sem qualquer restrição sobre o resultado sendo positivo ou negativo. Sua abordagem nessa parte é a generalização do conceito de número. Números completamente determinados foram agora nomeados de "quantidades algébricas reais." Para tais quantidades, ele introduziu o conceito do valor absoluto - utilizando o termo de Cauchy do *Cours* de 1821: "valor numérico" (*Zahlenwerth)*. Ele simbolizou o valor absoluto de uma quantidade algébrica g como:

$$\text{v.n. } g,$$

onde "v.n." é o símbolo para *valeur numérique*. August-Leopold Crelle propôs em 1823 usar barras para o valor numérico de uma grandeza, porém, foram adotadas somente muito mais tarde.

Em seguida, Dirksen fez a distinção entre o valor numérico e o sinal de um número algébrico real. Baseado nessa distinção, ele definiu um número negativo assim: se um número completamente determinado a é considerado de ser tanto menor do que qualquer terceiro número completamente determinado b, comparado com seu valor numérico.

Martin Ohm

Uma última, ainda mais abrangente, tentativa foi elaborada por uma colega de Dirksen na Universidade de Berlim: Martin Ohm (1792-1872), o irmão caçula do físico Georg Simon Ohm. Originário de Erlangen, Ohm mudou várias vezes sua nacionalidade, junto com a cidade de Erlangen, devido ao período político tumultuado em Europa. Erlangen foi originalmente parte da Prússia, depois foi integrada à Baviera, depois tornou-se território francês e, finalmente, voltou ao domínio da Baviera. Como a Baviera licenciou os professores de matemática nas escolas secundárias em 1816, Ohm emigrou para a própria Prússia. Em 1822, foi chamado para ser professor de matemática na Universidade de Berlim.

No mesmo ano, Ohm começou a publicar uma obra ousada, com o título ambicioso:

> *Versuch eines vollkkommen consequenten Systems der Mathematik*, ou:
>
> Ensaio de um sistema completamente coerente da matemática.

A obra foi planejada contendo nove volumes, e, de fato, Ohm foi o único dos quatro matemáticos analisados aqui, da primeira metade do século XIX, a publicar a série toda, abrangendo a aritmética, a álgebra e a análise. Somente a geometria que tinha sido planejada a ser integrada, no final não entrou nessa série. Mas desta maneira Ohm foi o primeiro no século XIX a publicar "um" livro texto expondo toda a parte analítica da matemática, desenvolvida a partir dos fundamentos da aritmética e da álgebra.

Os primeiros dois volumes da série foram intitulados: *Lehrbuch der niedern Analysis, Algebra und Analysis des Endlichen enthaltend*. Os cinco volumes 3 até 7 foram *Lehrbuch der höhern Analysis, die Differential- und Integralrechnung enthaltend*. O oitavo volume foi *Die Lehre der endlichen Differenzen und Summen und die reellen Faktoriellen und Fakultäten, so wie die Theorie der bestimmten Integrale.* O último volume foi *Die Auswertungs-Methoden bestimmter Integrale, so wie die Theorie der Reihen und der Integrale des Fourier*. Os últimos dois volumes só foram publicados em 1851 e 1852, os outros entre 1822 e 1833. Houve algumas reedições dos primeiros dois volumes.

Além disso, Ohm publicou uma edição sucinta, de três volumes, como "matemática elementar pura" para lições na engenharia e escolas militares. Ao contrário do principal objetivo de seu sistema completamente coerente, ele modificou sua concepção de quantidades negativas muitas vezes em edições diferentes e em diferentes séries do livro texto, mesmo dando declarações contraditórias.[12]

Já em 1816 Ohm publicou o núcleo de sua concepção do conceito de número, em um trabalho sobre a teoria elementar dos números. O fundamental para ele foi a separação entre número e quantidade. Assim, a teoria dos números constitui a disciplina básica de toda a matemática; quantidades pertencem às aplicações e podem, portanto, ser ensinadas apenas após a teoria dos números. Ohm apontou especialmente números absolutos na sua teoria dos números, assumindo uma "unidade absoluta" e colocando essa unidade de maneira iterada como os outros números seriam formados. Zero, no entanto, não era um número, mas apenas um sinal (Ohm 1816, p. 3). As diferenças de dois números foram limitadas de tal maneira que o minuendo deveria ser realmente maior do que o subtraendo, pelo menos "quando números reais são exigidos". No outro caso, as diferenças não designam um "número" e não tem, então, "qualquer significado" (ibid., p. 23). Assim, ele baseou suas afirmações em uma prioridade epistemológica de números absolutos e em posições substancialistas de existência. A exclusão do mesmo estatuto conceitual de zero e os números negativos correspondeu à mais recente concepção francesa seguindo Carnot.

No primeiro volume de seu sistema coerente, publicado em 1822, sobre aritmética e álgebra, ele estendeu a estrutura básica de 1816. A prioridade dos "números inteiros absolutos" ainda foi confirmada: "não há outros números" (Ohm 1822, XI).

Correspondente a esta prioridade o conceito de "extensão" dos domínios de números tornou-se o foco da elaboração. Ohm permitiu operar com zero e diferenças impróprias como operações estendidas, atribuindo um significado apropriado para eles. Para isso, ele introduziu "sinais da forma $a - b$", como diferença "no sentido extenso do termo". Ele distinguiu o sentido extenso de "soma" e de "diferença" do seu significado original, especialmente nomeando os últimos termos como "soma real" e "diferença real" (ibid., 37). Ohm não apenas estendeu conceitos como somando, minuendo, adicionar e subtrair, mas também o conceito de igualdade. Ao introduzir "subtrativamente igual" para operar com diferenças gerais, ele a distinguiu da igualdade "real". Termos "subtrativamente iguais" podem tornar-se "realmente iguais". Ohm praticamente usou um princípio de permanência de acordo com o qual todos os teoremas sobre operações com números absolutos inteiros foram entendidos como também validos para somas e diferenças gerais e a igualdade estendida (ibid., 43). Com esses conceitos estendidos, Ohm introduziu primeiramente zero como a igualdade subtrativa $a - a = b - b$, para todos a e b, e, em seguida, a soma $0 + b$ como "número aditivo" $+b$ e a diferença $0 - b$ como "número subtrativo" $-b$ (ibid, p. 44 f).

No primeiro volume de 1822, mais extensões das operações foram expostas, extensões de frações e, consequentemente, dos números racionais, e, em seguida, de números positivos e negativos, que Ohm entendeu aqui como números inteiros ou

[12] Uma análise das obras de Ohm foi publicada por Bekemeier (1987).

fracionais sejam números aditivos ou sejam subtrativos (ibid., p. 140). Os números irracionais foram a última extensão dos domínios de números. Depois da teoria dos números, Ohm apresentou a "teoria geral de quantidades". Enquanto na teoria dos números, as operações introduzidas por meio das extensões foram desenvolvidas em geral para todo o domínio dos números reais, apesar mesmo da prioridade epistemológica dos números absolutos, a teoria das quantidades revela surpreendentemente um programa radicalmente reducionista, que seguiu Carnot e Lacroix, os quais aceitaram apenas quantidades e valores positivos. Ohm permitiu números inteiros absolutos como medidas para quantidades, mas não números negativos (ibid., 296). Como única extensão ele permitiu "quocientes de números inteiros absolutos" (ibid., 299). Correspondente a este programa rígido, zero também foi excluído de servir como uma medida para as quantidades (ibid., p. 348).

Ohm apresentou as consequências de seu programa reducionista na parte em que ele lidou com a resolução de equações. Uma das regras principais foi a limitação de possíveis soluções para os números absolutos, sejam eles inteiros ou fracionais - devido à sua concepção básica: "Tais valores não são números absolutos e podem, portanto, ser desconsiderados apenas" (ibid., p. 328).

Quanto à resolução de equações, Ohm resolveu separar então o problema em casos individuais de tipos de equações, de tal maneira que apenas um valor foi exigido para cada desconhecida e por isso podia-se analisar valores não absolutos para, eventualmente, verificar se o valor podia ser "negligenciado" ou transformado em um valor absoluto. Ohm adotou a prática da cultura matemática francesa de alterar a equação original, no caso de uma solução negativa, como sua própria concepção (ibid., p. 341). Ele apresentou o procedimento de mudar as equações originais também para equações com mais do que uma incógnita.

Em edições posteriores, no entanto, Ohm modificou parcialmente suas concepções radicais "francesas". Em 1828, acrescentou um parágrafo no qual explicou como operar com "direções opostas". Seu distanciamento interior foi expresso pelo título significativo: "Números chamados positivos e negativos devem ser tratados com cuidado; portanto, é melhor não permitir eles de todo" (Ohm 1828, p. XVI).

A edição sucinta de seu livro-texto para engenharia e formação militar confirma ainda mais fortemente sua volta para a concepção de quantidades opostas. Nesse livro didático para a formação de *practitioners*, *Matemática Pura Elementar* (1825 - 1826) ele, de fato, apresentou duas concepções diferentes de forma paralela: a sua própria "visão", segundo a qual se "lida apenas com as operações indicadas", e uma "visão mais material", segundo a qual operar com zero e quantidades negativas é permitido (Ohm 1825, p. 64 f.). Ele resumiu aqui como números os "inteiros positivos, fracionais positivos, inteiros negativos, e números fracionais negativo[s], bem como zero [...] sob o nome de números reais" (ibid., 68). Na teoria das quantidades, por outro lado, ele manteve sua visão de que apenas um número positivo é uma solução válida (ibid., 261). Na segunda edição deste livro, em 1834, ele não só introduziu o termo "oposto" (Ohm 1834, 27), mas também acrescentou um parágrafo próprio sobre "quantidades opostas" em teoria de quantidades. Por analogia com a segunda edição do "Sistema", ele permitiu medidas negativas para quantidades (-*m*) *P* e quantidades 0 *P* para "nada", e, por outro lado, mesmo concedeu-lhes um significado: quantidades opostas no sentido muito tradicional, como dívidas versus fortunas, etc. (ibid., p. 36 f.). Ele também explicou aqui que as operações básicas com quantidades opostas poderiam ser definidas corretamente (ibid., p. 97 sqq.). Ohm mesmo ousou formular uma legitimidade epistemológica para quantidades opostas (ibid., p. 100). Finalmente, ele declarou mesmo que essas quantidades opostas poderiam ser justificadas da mesma maneira, como uma única unidade (ibid.). Com isso, ele tinha deixado para trás a posição francesa "revisionista".

Conclusões

Nenhum dos matemáticos aqui analisados enfrentou o desafio de determinar o que são números reais. Eles falaram, sim, de números reais, mas de uma maneira por demais geral, não definindo o conceito. Basicamente, entendeu-se o domínio dos números reais abrangendo os domínios parciais – dos naturais e inteiros até os irracionais -, e mais para contrapor esses domínios aos números complexos (chamados na época "imaginários").

Foi Richard Dedekind quem entendeu o desafio. Como ele relatou na introdução do seu livro sobre continuidade e números irracionais, de 1872, ele foi instigado a pesquisar sobre o conceito de números reais mesmo, quando ele, como jovem professor em 1858 na *Eidgenössiche Technische Hochschule* em Zürich (Suiça), foi obrigado a dar lições sobre os elementos do cálculo diferencial:

"*eu senti mais fortemente do que jamais antes a falta de uma fundamentação verdadeiramente científica*" (Dedekind 1872, p. 1).

Assim motivado, ele publicou seus cortes em 1872. Desde já, pode-se dizer que ao menos nos cursos de análise na Alemanha, os fundamentos da aritmética constituíram a parte introdutória. Weierstrass, por exemplo, deu sempre no seu ciclo de disciplinas sobre a teoria das funções, uma primeira parte extensa sobre os "Grundbegriffe der Arithmetik" – conceitos básicos da aritmética (Viertel 2014, p. 133).

Para dar uma certa visão sobre o que aconteceu quanto a este assunto no Brasil, quero mencionar um livro texto de cálculo infinitesimal. Foi publicado por Altamiro Tibiriçá Dias, professor de matemática na Escola de Minas em Ouro Preto. Esse livro texto, publicado a primeira vez em 1952, causou um impacto enorme no Brasil. Pode-se estimá-lo como sendo o primeiro livro texto de cálculo de produção própria no Brasil, e não mais cópias ou adaptações de livros textos franceses. De fato, o autor começa o curso por uma parte extensa "Definições de números reais", continuando com uma revisão de álgebra, expondo variáveis reais e funções de uma variável, antes de entrar no segundo livro com o cálculo diferencial.

Referências

Fontes

Académie des Sciences, Paris
Papiers de A. M. Ampère
chem. 74, Cours de calcul intégral et différentiel
chem. 75, Cours d'analyse
chem. 76, Ancien cours d'analyse algébrique

Nachlass de Enno H. Dirksen, Osterburg, Friesland do Leste (Alemanha).

Handschriftenabteilung Preußischer Kulturbesitz, Berlim, Alemanha (HA PrKu)

Sammlung Darmstädter, H 1818 Crelle

Publicações

Bekemeier, Bernd (1987). *Martin Ohm (1792-1872): Universitäts- und Schulmathematik in der heuhumanistischen Bildungsreform*. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Carnot, Lazare (1803). *Géométrie de Position*. Paris: Crapelet (an XI).

Cauchy, Augustin-Louis (1821). *Cours d'Analyse Algébrique de l'École Royale Polytechnique*. Paris: Impriméríe Royale.

Dedekind, Richard (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: F. Vieweg.

Folkerts, Menso (1983/84). Der Mathematiker E. H. Dirksen und C.F. Gauss, *Mitteilungen der Gauss-Gesellschaft Göttingen*, Nr. 20/21, 66–76.

Folkerts, Menso (1998). *Fooke Hoissen Müller. Sämtliche Gedichte. Kritisch herausgegeben und eingeleitet von Menso Folkerts*. Aurich (Ostfriesische Landschaft).

Gilain, Christian (1989). *Cauchy et le Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique*. Bulletin de la Société des Amis de la Bibliothèque de l'Ecole Polytechnique. no. 5, Juillet 1989.

Lacroix, Sylvestre-François (1803). *Éléments d'Algèbre*, à l'usage de L'École Centrale des Quatre-Nations. Troisième édition, revue et corrigée. Paris: Duprat, (an XI).

Ohm, Martin (1816). *Elementar-Zahlenlehre zum Gebrauch für Schulen und Selbstlernende*. Erlangen: Palm u. Enke.

Ohm, Martin (1822). *Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Analysi*s. Nach eigenen Prinzipien. Berlin: Reimer (Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, Erster Theil).

Ohm, Martin (1825). *Die reine Elementar-Mathematik*: weniger abstrakt, sondern mehr anschaulich u. leichtfaßlich ... zunächst für seine Vorles. an d. Kgl. Bau-Akademie zu Berlin, dann auch zum Gebrauche an anderen ähnlichen Lehranstalten, bes. aber an Gymnasien u. zum Selbst-Unterrichte. Berlin: Riemann. Erster Band: *Die Arithmetik bis zu den höhern Gleichungen* 1825.

Ohm, Martin (1828). *Lehrbuch der niedern Analysis*. - 2. umgearb., durch viele neue erl. Beisp. verdeutlichte Ausgabe (Berlin: Riemann, 1828/29). (Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik, 1/2) Erster Theil: Arithmetik und Algebra.

Ohm, Martin (1834). Zweite Auflage. Erster Band: *Die Arithmetik bis zu den höhern Gleichungen*. Berlin: Jonas.

Schubring, Gert (1981). The Conception of Pure Mathematics as an Instrument in the Professionalization of Mathematics, *Social History of Nineteenth Century Mathematics*, eds. H. Mehrtens, H. Bos, I. Schneider. Basel: Birkhäuser, 111-134.

Schubring, Gert (2001). Argand and the early work on graphical representation: New sources and interpretations, *Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers*. Proceedings of the Wessel Symposium at

The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11–15 1998, Jesper Lützen (ed.), Copenhagen: C. A. Reitzel, 125–146.

Schubring, Gert (2003). *Análise Histórica de Livros de Matemática. Notas de Aula*. Campinas: Editora Autores Associados.

Schubring, Gert (2004). *Le Retour du Refoulé. Der Wiederaufstieg der synthetischen Methode an der École Polytechnique*. Reihe Algorismus, No. 46. Augsburg: Erwin Rauner.

Schubring, Gert (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany*. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. New York: Springer.

Schubring, Gert (2011). Conceptions for Relating the Evolution of Mathematical concepts to Mathematics Learning - Epistemology, History, and Semiotics Interacting", *Educational Studies in Mathematics*, *77: 1*, 79-104.

Schubring, Gert & Tatiana Roque (orgs.) (2015). *O Curso de Análise de Cauchy: uma edição traduzida e comentada*. Rio de Janeiro: Editora da SBM (no prelo)

Tibiriçá Dias, Altamiro (1952). *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Tomo I. Ouro Preto: Fundação Gorceix.

Viertel, Klaus (2014). *Geschichte der gleichmäßigen Konvergenz. Ursprünge und Entwicklungen des Begriffs in der Analysis des 19. Jahrhunderts*. Springer.