OS NÚMEROS RACIONAIS NOS MANUAIS DA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DO ENSINO PRIMÁRIO EM PORTUGAL (1844-1974)

José Manuel Matos[1]

Rui Candeias[2]

Resumo: Este estudo analisa como é apresentada a noção de número racional em manuais utilizados na formação de professores do ensino primário, em Portugal, e que conhecimento profissional evidenciam. Os manuais selecionados são representativos de diferentes momentos dentro do âmbito cronológico do estudo, de 1844 a 1974. O estudo enquadra-se nos trabalhos de investigação histórica, tendo a análise de dados um caráter descritivo e interpretativo. É possível distinguir dois períodos. No primeiro, de 1844 a 1930, os cursos de formação inicial de professores do ensino primário incluem disciplinas com conteúdos de matemática na componente de ciências de especialidade e na componente pedagógica e os manuais da componente de ciências de especialidade, evidencia-se uma primeira abordagem a partir da representação na forma de fração, sendo posteriormente estabelecida uma relação com a representação decimal. No segundo período, de 1930 a 1974, os conteúdos de matemática passam a ser abordados apenas em disciplinas de didática e a abordagem inicial privilegiada é através da representação decimal, pela sua relação com o sistema métrico e com o sistema decimal de numeração. Os manuais do segundo período evidenciam uma maior preocupação com o conhecimento pedagógico do conteúdo, embora também se encontrem evidências de uma preocupação com este tipo de conhecimento nos manuais do primeiro período.

Palavras-chave: Formação de professores, ensino primário, números racionais, história da educação matemática.

RATIONAL NUMBERS IN TEXTBOOKS OF PRE-SERVICE EDUCATION TEACHERS IN PRIMARY EDUCATION IN PORTUGAL (1844-1974)

Abstract: This study analyzes how the notion of rational number is presented in textbooks used in the training of primary school teachers in Portugal, and what professional knowledge they show. The selected textbooks are representative of different moments within the chronological

[1] Professor visitante na Universidade Federal de Juiz de Fora. Professor na Universidade Nova de Lisboa, jmm@fct.unl.pt.

[2] Professor do ensino básico, Agrupamento de Escolas Terras de Larus/Investigador na UIED rp.candeias@campus.fct.unl.pt

This work is supported by national funds through FCT – Foundation for Science and Technology, I. P., in the context of the project PTDC/CED-EDG/32422/2017.

scope of the study, from 1844 to 1974. The study fits into historical research work, with data analysis being descriptive and interpretive. It is possible to distinguish two periods. In the first, from 1844 to 1930, the initial training courses for primary school teachers include subjects with mathematical content in the specialty sciences component and in the pedagogical component and the textbooks in the specialty sciences component, a first approach is evident from the representation in the form of a fraction, after which a relationship with the decimal representation is established. In the second period, from 1930 to 1974, the mathematics content started to be addressed only in didactic disciplines and the privileged initial approach is through decimal representation, due to its relationship with the metric system and with the decimal numbering system. The second period textbooks show a greater concern with the pedagogical knowledge of the content, although evidence of a concern with this type of knowledge is also found in the first period textbooks.

Keywords: Teacher education, primary school, rational numbers, history of mathematics education.

INTRODUÇÃO

O texto centra-se na forma como, nos manuais utilizados nas escolas de formação de professores do ensino primário, publicados no intervalo de tempo que vai de 1844 a 1974, é apresentado o conceito de número racional, não só no sentido de um conhecimento comum do conteúdo, mas também como se vai formando um conhecimento pedagógico do conteúdo, tal como o entende Ball, Thames e Phelps (2008).

O conhecimento profissional do professor para ensinar matemática e, em particular, para o ensino dos números racionais, tem sido alvo de diversas investigações (ver por exemplo BEHR et al 1992; MONTEIRO & PINTO, 2005; NI & ZHOU, 2005; NUNES, BRYANT & WATSON, 2009; PINTO, 2011). No ensino inicial dos números racionais é importante destacar o trabalho com os sentidos das frações em contexto ou a forma como é feita a primeira abordagem aos números racionais. Também é relevante caracterizar as representações utilizadas, assim como as principais situações e contextos que surgem nessa abordagem.

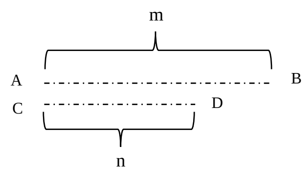
Apesar dos estudos já realizados em torno desta problemática, a perspetiva histórica tem sido pouco explorada. No entanto, e como refere Matos (2020), o conhecimento da história permite uma ação mais fundamentada no presente.

REVISÃO DA LITERATURA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O conteúdo dos números racionais não negativos é muitas vezes visto como um dos tópicos mais complexos na matemática do ensino básico e onde os alunos apresentam mais dificuldades (MONTEIRO & PINTO, 2005; NI & ZHOU, 2005).

Caraça (1941/2003)[3] considera que os números racionais surgiram da necessidade de medir através da comparação de duas grandezas da mesma espécie, sendo uma delas tomada como unidade de medida, comparação que nem sempre pode ser traduzido por um número natural, quando a unidade não cabe um número exato de vezes na grandeza a medir. Na medição, Caraça (2003) destaca três aspetos: escolha da unidade, comparação com a unidade e expressão dessa comparação através de um número, definindo o campo numérico dos números racionais do seguinte modo:

> Sejam, fig. 13, os dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em cada um dos quais se contém um número inteiro de vezes o segmento u - $\overline{AB}$ contém m vezes e $\overline{CD}$ n vezes o segmento u. Diz-se, por definição, que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o número $\frac{m}{n}$ e escreve-se



$$\overline{AB} = \frac{m}{n} \, . \overline{CD}$$

> quaisquer que sejam os números inteiros m e n (n não nulo). (CARAÇA, 2003, p. 35).

No caso de m ser divisível por n, o número $\frac{m}{n}$ coincide com um número natural, que é o quociente da divisão. No caso de *m* não ser divisível por n, o número diz-se fracionário. No entanto, em qualquer das duas hipóteses anteriores, $\frac{m}{n}$ diz-se racional, sendo o número *m* designado por numerador e o número *n* designado por denominador.

No desenvolvimento do sentido de número racional nos primeiros anos de escolaridade, é importante destacar os diferentes significados das frações em contexto, (MONTEIRO & PINTO, 2005; PINTO, 2011), reconhecer as dificuldades que os alunos podem ter porque cada elemento do conjunto dos números racionais pode ter diferentes representações, nomeadamente entre a representação na forma de fração e a representação decimal. Essas dificuldades podem surgir também na relação entre as diferentes representações em fração que um mesmo número

[3] As referências à obra de Bento de Jesus Caraça utilizadas neste texto são retiradas da reedição da obra em 2003, pelo que nas referências no texto utilizar-se-á apenas Caraça (2003).

racional pode ter (MCMULLEN, LAAKKONEN, HANNULA-SORMUNEN & LEHTINEN, 2014; NUNES et al, 2009; VANVAKOUSSI & VOSNIADOU, 2004). É também importante analisar se a proposta de ensino discute as vantagens e as desvantagens da iniciação aos números racionais ser trabalhada através da fração ou da representação decimal.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

O estudo enquadra-se nos trabalhos de investigação histórica, tendo a análise de dados um caráter descritivo e interpretativo. Na seleção das fontes, privilegiou-se as fontes escritas primárias. O *corpus documental* é constituído por manuais ou livros de texto com publicação entre 1844 e 1974. Começou-se por fazer a identificação dos manuais publicados entre 1844 e 1974 na literatura publicada sobre este tema (PINTASSILGO, 2006; CORREIA & SILVA, 2002; SILVA 2001) e nos documentos legais, no período em que a adoção destes manuais era publicada na legislação. Foi ainda necessário fazer uma pesquisa de fontes em arquivos das escolas superiores de educação, na Biblioteca Nacional de Portugal e na Secretaria Geral do Ministério da Educação.

Na seleção das fontes seguiu-se os seguintes critérios: livros de texto da área da matemática ou do seu ensino, explicitamente dirigidos aos cursos de formação de professores do ensino primário, publicados no âmbito cronológico do estudo, que fossem de autores portugueses e originais e que estivessem integralmente disponíveis. Foram identificadas 23 obras que correspondiam a estes critérios. Numa segunda fase da seleção das fontes, fez-se um cruzamento dos manuais selecionados inicialmente, com as principais reformas que marcaram a formação inicial dos professores do ensino primário. Chegou-se assim a uma lista final constituída por oito manuais: Nunes (1887), Affreixo e Freire (1890), Preto[4] (1903), Coelho (1892, 1906), Pimentel (1934), Gaspar e Ferreira (1944), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1972, 1974). No caso do manual de Coelho (1906) foi necessário consultar e analisar uma outra obra sua, Coelho (1892) onde a abordagem aos números racionais não negativos é aprofundada.

OS AUTORES DOS MANUAIS

[4] Nos livros deste autor, é usada a grafia Manso Preto e Manso-Preto. Optámos pela primeira que é a que consta no exemplar por nós consultado. No entanto, a edição de 1905 já usa a segunda grafia.

Na apresentação e análise dos resultados podem distinguir-se dois períodos no âmbito cronológico que marca o estudo. O primeiro período vai de 1844 até 1930, quando o plano de estudos do curso de formação inicial de professores do ensino primário apresenta, quanto às disciplinas onde se desenvolvem conteúdos de matemática, uma componente das ciências da especialidade e formação geral e uma componente pedagógica[5]. Neste primeiro período foram analisados quatro manuais, dos quais dois correspondem a disciplinas da componente de ciências da especialidade, Nunes (1887) e Preto (1903), e os outros dois correspondem a disciplinas da componente pedagógica, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1892, 1906). O segundo período vai de 1930 a 1974. As alterações efetuadas no curso em 1930 levaram a que as disciplinas da componente de ciências da especialidade fossem praticamente eliminadas, tendo o curso passado a focar-se na componente pedagógica. Desta forma, no segundo período os quatro manuais analisados correspondem a disciplinas de didática. Neste segundo período foram analisadas as obras de Alberto Pimentel Filho (1934), José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira (1944), José Moreirinhas Pinheiro (1961) e Gabriel Gonçalves (1972, 1974).

Entre os autores analisados no primeiro período estão dois autores com formação na área das ciências. Diogo Nunes tem formação como médico cirurgião, mas exerce a docência como professor de uma escola industrial, onde leciona várias disciplinas, sendo uma delas a Aritmética, e é autor de diversos manuais. Preto é o único dos autores analisados que tem uma formação especificamente em matemática, tendo obtido o grau de doutor na Faculdade de Matemática da Universidade de Coimbra. Dedica-se à docência no Liceu de Coimbra e na escola normal da mesma cidade. É autor de diversas obras para o ensino na área da matemática. Ainda relativamente ao primeiro período, José Graça Affreixo e Henrique Freire são coautores que passaram pela lecionação no ensino primário, após a formação em escolas normais. Posteriormente exerceram a função de docentes na Escola Normal de Évora tendo escrito diversos manuais na área da pedagogia e da metodologia. José Augusto Coelho, um autor ainda do primeiro período, destacou-se na docência no ensino particular. Frequentou o seminário e a Faculdade de Teologia de Coimbra, mas não terminou qualquer formação superior. Destacou-se na área da pedagogia, tendo exercido a docência na Escola Normal de Lisboa e a direção da Escola Normal de Lisboa para o sexo feminino. Foi um autor destacado de obras na área da pedagogia e teve uma intervenção relevante na introdução da pedagogia científica em Portugal.

[5] Utiliza-se aqui a designação usada por Baptista (2004), que distingue no plano de estudos dos cursos de formação de professores do ensino primário uma componente de ciências de especialidade e formação geral, uma componente pedagógica e uma componente prática.

Os autores dos manuais analisados no segundo período estão sobretudo ligados à pedagogia e à didática. Neste grupo de autores destaca-se Alberto Pimentel Filho, por ser o único com uma formação na área das ciências, sendo médico. Destacou-se na docência na Escola Normal de Lisboa e foi autor de diversos manuais na área da pedagogia e da história da educação. José Maria Gaspar e Orbelino Geraldes Ferreira, coautores, fizeram a sua formação em escolas de formação de professores do ensino primário, em Coimbra, embora tenham obtido formações complementares posteriormente, nomeadamente em ciências pedagógicas. Exerceram a docência em escolas do ensino primário, antes de ingressarem na docência na Escola do Magistério Primário de Lisboa. Trajetória de formação e profissional idêntica teve José Moreirinhas Pinheiro que se formou para a docência no ensino primário na Escola do Magistério Primário de Coimbra, tendo obtido uma formação complementar em ciências pedagógicas na Universidade de Coimbra. Exerceu a docência no ensino primário antes de chegar à docência na Escola do Magistério Primário de Lisboa. Foi autor de diversas obras na área da didática e da história da educação. Relativamente a Gabriel Gonçalves não foi possível recolher informação sobre a sua formação académica. Foi professor na Escola do Magistério do Porto, tendo posteriormente exercido a função de inspetor orientador do Ministério da Educação. Editou obras na área da didática, nomeadamente da aritmética e do português.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

1.º Período

Pode-se distinguir dois tipos de manuais quanto à definição de número racional apresentada no conjunto de manuais analisado neste período. Os manuais destinados à componente das ciências da especialidade e formação geral, Nunes (1887) e Preto (1903), e os manuais da componente pedagógica, Affreixo e Freire (1891) e Coelho (1906).

Nunes (1887) identifica duas espécies de números que resultam da distinção que faz de dois casos na medida das grandezas. O número inteiro, "quando a grandeza contém a unidade uma ou muitas vezes exatamente." (p. 6) e a fração, "quando a grandeza não contém a unidade inteiramente." (NUNES, 1887, p. 6). Outra distinção apresentada por Nunes (1887) é a de fração, quando o número é apenas constituído por partes não inteiras, de número fracionário, quando o número é constituído por uma parte inteira e outra não inteira.

No livro III da sua obra, Nunes (1887) aborda as frações, como medida das grandezas. No capítulo I, deste livro III, são definidas as propriedades gerais das frações. A fração é definida como “dividindo a *unidade* em um certo número de partes iguais e tomando uma ou muitas das partes formadas, temos uma **fração**.” (NUNES, 1887, p. 61, itálico e negrito aumentado no original). A definição é apresentada verbalmente com um exemplo em que se divide uma laranja em quatro partes iguais e onde se tomam três dessas partes. Estes três quartos são uma fração, que se obtêm quando se mede uma grandeza menor do que a sua unidade. O autor descreve depois a forma como se representa simbolicamente uma fração, com o denominador, o numerador e o traço de fração. No final da descrição estabelece uma relação entre a representação verbal e a representação simbólica através de uma fração

> Uma fração é representada por meio de dois números: o *denominador*, que indica em quantas partes iguais a unidade foi dividida, e o *numerador*, que indica quantas partes se tomam.
>
> O numerador e o denominador chamam-se os *termos da fração*. Para escrever uma fração, escreve-se primeiro o numerador, e a baixo o denominador, separando os dois números por um traço horizontal. Assim, a fração *três quartos* escreve-se $\frac{3}{4}$. (NUNES, 1887, p. 61, itálicos no original)

Nunes (1887) expõe depois a forma de leitura de diferentes frações, destacando a forma geral, onde se lê primeiro o numerador e depois o denominador seguido da terminação avos e salientando ainda algumas particularidades como os meios, os terços até aos décimos.

Nas frações decimais, e na sua representação na forma de numeral decimal, Nunes (1887) começa por destacar a relação entre as duas representações simbólicas, estabelecendo também uma relação com a representação verbal. Nesta obra também se realça a relação que existe entre a representação na forma de numeral decimal e o sistema de numeração decimal utilizado nos números inteiros não negativos. Na descrição que faz inicialmente para apresentar a representação decimal dos racionais, Nunes (1887) utiliza a representação verbal e só depois a representação simbólica, dando ênfase à forma de fazer a leitura dos números. A forma de fazer a conversão entre a fração decimal e o numeral decimal é destacada na obra de Nunes (1887), quando este autor pretende apresentar a forma de fazer a comparação de números representados como numerais decimais e recorre à representação como fração decimal para depois fazer essa comparação.

A obra de Nunes (1887) apresenta algumas situações que se enquadram nos mal-entendidos que é comum verificar na interpretação dos alunos, nomeadamente no que se refere ao valor de posição no sistema decimal, como quando este refere que “não se altera o valor de um número decimal escrevendo ou suprimindo zeros à sua direita. Assim 13,576 e 13,57600 são número equivalentes.” (NUNES, 1887, p. 82). As regras dos procedimentos para as operações na forma de numeral decimal são apresentadas com o recurso à relação entre esta representação e a representação na forma de fração decimal. Nessa situação, recorre muitas vezes às regras das operações com frações, mas estabelece relações com as operações entre números inteiros não negativos e com o sistema decimal. Um exemplo para o referido é a multiplicação de decimais:

> Seja multiplicar 13,742 por 0,17. Os fatores podem tomar a forma $\frac{13742}{10^3}$ e $\frac{17}{10^2}$,o seu produto é $\frac{13742 \text{ x } 17}{10^5}$. Logo, para multiplicar números decimais, faz-se a operação como se fossem números inteiros, e separam-se à direita do produto tantos algarismos decimais quantos há em ambos os fatores. (NUNES, 1887, p. 84)

As situações matemáticas estritamente numéricas são privilegiadas na apresentação dos procedimentos das operações com frações decimais, não sendo utilizados outros tipos de situações com contextos mais ligados à realidade nesta apresentação inicial dos procedimentos. No entanto, é de destacar que o capítulo que se segue na obra é dedicado ao sistema métrico, onde surgem diversas situações e contextos onde são aplicados os numerais decimais.

A primeira definição do número racional que surge na obra de Preto (1903) decorre da medida.

> *Número inteiro* é o que consta de unidades iguais;
> *Número quebrado* ou *fração* é o que consta de partes iguais da unidade;
> *Número fracionário* é o que consta de unidades iguais e partes também iguais da unidade. (Preto, 1903, p. 7, itálicos no original)

Depois, o autor apresenta os termos da fração e só depois exibe a fração numa representação simbólica, estabelecendo uma relação com a representação verbal escrita.

> Escreve-se uma fração, colocando os dois números, *numerador* e *denominador*, separados por uma linha horizontal, o primeiro por cima da linha e o segundo por baixo. Assim, para representar a fração que provém de dividir a unidade em 8 partes iguais (*denominador*) e destas tomar 3 (*numerador*), escreveremos $\frac{3}{8}$. (Preto, 1903, p. 131, itálicos no original)

Preto também estabelece a relação entre a definição de divisão e a fração, concluindo que "uma fração pode ser considerada como o quociente da divisão do numerador pelo denominador." (1903, p. 132). Daqui resulta que para dividir 7 por 9, pode tomar-se $\frac{1}{9}$ da unidade e repetir esta parte alíquota da unidade por sete vezes, representando simbolicamente como $7 : 9 = \frac{7}{9}$. O autor distingue a fração que representa a unidade, a fração menor que a unidade, que designa por fração própria, e a fração maior que a unidade, que designa por imprópria.

No trabalho de Preto (1903), após a definição de fração são abordadas as frações decimais, que o autor também designa por dízimas. O autor descreve estas frações decimais como aquelas que resultam de dividir a unidade em 10, 100 ou 1000 partes iguais. Estas divisões da unidade são apresentadas como simples e vantajosas para o cálculo.

> Desta maneira as frações que *resultam ficam sempre por denominador a unidade seguida de um ou mais zeros* e, por isso, se lhe dá o nome de *frações decimais* ou simplesmente *dízima*. Podemos, pois, definir em geral:
> *Número decimal é o número que exprime de quantas unidades e partes decimais da unidade se compõe uma grandeza qualquer*. (Preto, 1903, p. 156, itálicos no original)

Aparentemente, Preto não faz distinção entre a designação de fração decimal e a sua representação decimal na forma de dízima, considerando-as como o mesmo. Isto também é notório na continuação da descrição das frações decimais onde ele estabelece a relação entre estas e o sistema decimal utilizado nos números inteiros referindo que tal como se organizam os números inteiros em coleções de dez, cem, mil, … unidades “analogamente poderemos dividir a unidade em dez partes iguais e a cada uma destas partes chamar décimas, que será dez vezes menor que a unidade a unidade dividir a décima em dez partes iguais e a cada uma destas partes chamar centésima” (Preto, 1903, pp. 155-156). O sistema de organização dos números é descrito sucessivamente sendo indicadas as designações das divisões da unidade até à décima milionésima.

A forma de organização da numeração escrita nas dízimas também é descrita em comparação com a organização escrita dos números inteiros, sendo indicadas as regras:

> 1.ª Para escrever um número decimal, que nos seja enunciado, principiaremos por escrever a parte inteira, se a houver, seguida de uma vírgula; se não houver parte inteira, será esta substituída por um zero, e depois, sucessivamente e da direita para a esquerda, iremos escrevendo as décimas, centésimas, etc. que nos forem enunciadas, substituindo por zero as diferentes ordens que faltarem;
> 2.ª Para ler um número decimal escrito, enuncia-se primeiro a parte inteira, se a houver, e depois a parte que está à direita da vírgula, como se fosse número inteiro, dando ao último dos seus algarismos à direita o nome decimal que lhe pertencer. (Preto, 1903, p. 158)

Preto apresenta depois alguns exemplos de leitura de números ditos decimais

> 1.º Escrever o número decimal composto de 89 *unidades*, 6 *décimas*, 5 *centésimas* e 9 *décimas milésimas*: teremos

> 89,6509;
> pondo um zero no lugar das milésimas, porque o número proposto não as tem. (Preto, 1903, p. 158)

O autor salienta depois que os números decimais obedecem ao sistema de valor de posição usado nos números inteiros, enunciando três regras como consequência da utilização desse sistema. "1.º Um número decimal não se altera, quando à direita do seu último algarismo se acrescenta qualquer número de zeros. Assim é 3,45 = 3,45000 ……" (p. 160). Também como consequência do sistema do valor de posição, se um determinado algarismo for deslocado para a esquerda passa a ter um valor dez vezes superior e se for deslocado para a direita passa a ter um valor dez vezes inferior, de onde Preto enuncia as regras para a multiplicação e para a divisão por 10, 100 ou 1000.

> 2.ª *Para multiplicar um número decimal por 10, 100, 1000, …, basta transportar a vírgula 1, 2, 3 …, casas para a direita*.
> E reciprocamente:
> 3.ª *Para dividir um número decimal por 10, 100, 1000, basta transportar a vírgula 1, 2, 3 …, casas para a esquerda*.
> Desta maneira, para multiplicar, por exemplo, 7,20345 por 100, isto é, para tornar este número 100 vezes maior, escreveremos 720,345. (Preto, 1903, p. 160).

São também apresentados exemplos para a divisão por 10, 100, ou 1000.

Preto apresenta depois a forma de converter um número decimal numa fração, indicando que "1.ª Para converter um número decimal em fração ordinária, basta suprimir a vírgula; escrever o resultado em numerador; e pôr em denominador a unidade seguida de tantos zeros quantos são os algarismos decimais" ((Preto, 1903, p. 161). O autor também enuncia o recíproco, salientando que "2.ª Para converter uma fração ordinária, que tenha por denominador a unidade seguida de qualquer número de zeros, em fração decimal, basta escrever o numerador, e separar nele tantos algarismos para dízima quantos os zeros do divisor." (p. 161). Os vários exemplos apresentados recorrem à representação simbólica, "0,345 convertido em fração ordinária dá $\frac{345}{1000}$." (p. 161)

A obra de Affreixo e Freire (1891), correspondente a uma disciplina da componente pedagógica do curso, não apresenta qualquer abordagem aos números racionais, nem na sua representação em fração, nem na sua representação decimal, razão pela qual não é possível analisar a forma como é apresentada a definição de número racional.

No manual de Coelho (1906), para a componente pedagógica do curso, a noção de fração é apresentada pela primeira vez com um exemplo ligado à realidade.

> Assim, suponha-se que se pretende, por exemplo, por diante dos olhos do aluno o que seja a relação numérica *um quinto* ou seja a fração expressa pelo seguinte símbolo: $\frac{1}{5}$; para o conseguir, bastará mostrar ao aluno, por exemplo, uma laranja dividida em cinco partes iguais: tomando uma de essas partes, ter-se-á $\frac{1}{5}$ da unidade total. (COELHO, 1906, p. 99, itálicos no original)

Nesta obra de 1906 esta é a única referência à representação na forma de fração, sendo posteriormente referida a representação decimal. Na sua obra de 1892, também aqui analisada, Coelho (1892) apresenta uma proposta em tudo idêntica à de 1906 para a iniciação das frações.

A fração é apresentada como a parte de um todo de uma unidade contínua, referindo-se o uso de objetos do dia a dia, como uma laranja. Este processo deveria ser utilizado para a apresentação de diferentes frações da unidade, unitárias e não unitárias, assim como a apresentação de frações impróprias.

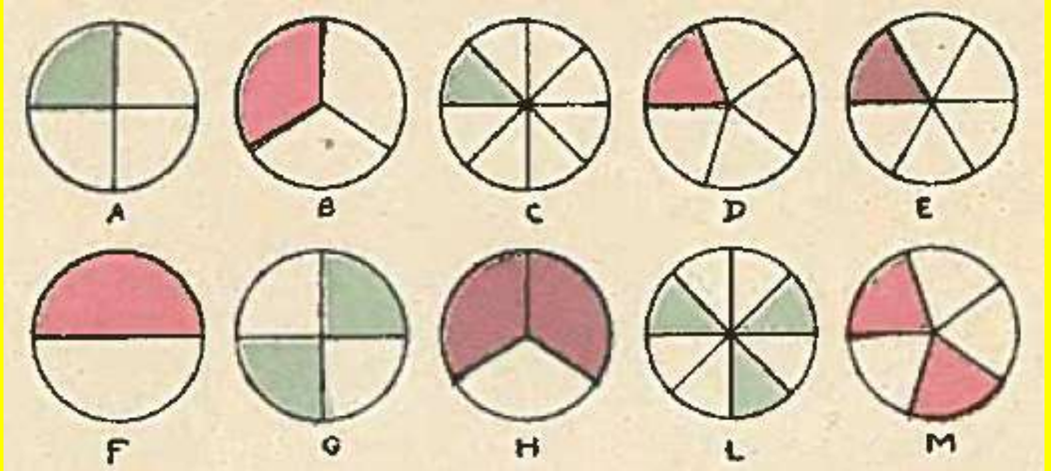
No que se refere à representação decimal dos números racionais, Coelho (1892) relaciona o seu estudo com o estudo do sistema decimal, fazendo uso de um jogo que estabelece a relação decimal entre as diferentes ordens.

2.º Período

Pimentel Filho (1934) começa por destacar que a noção de fração é uma essencial no ensino da aritmética. Pimentel Filho (1934) discute desde logo o interesse que a noção de fração poderá provocar na criança, salientando que os princípios relativos a este conteúdo devem ser "exclusivamente induzidos de casos concretos, reais, realizados diretamente pelos alunos. Mais do que em qualquer outro caso, a passagem das noções concretas à abstração deve aqui ser lenta e gradual." (p. 147). É uma discussão inicial que se centra no conhecimento da relação do aluno com aquele conteúdo em específico e com a necessidade de ser feita uma concretização dos diferentes aspetos a trabalhar.

Quando Pimentel Filho (1934) apresenta as frações, fá-lo com a indicação da utilização de materiais concretos, indicando que a apresentação deve seguir três fases, a apresentação da unidade concreta, a apresentação da fração concreta e a medida da fração. A seguir à concretização, os materiais são representados pictoricamente, estabelecendo-se posteriormente uma relação com a representação verbal, com exercícios de nomenclatura. As frações não unitárias são introduzidas da mesma forma, recorrendo-se à concretização e posteriormente às imagens. As ilustrações são utilizadas para realizar exercícios de leitura das frações representadas.

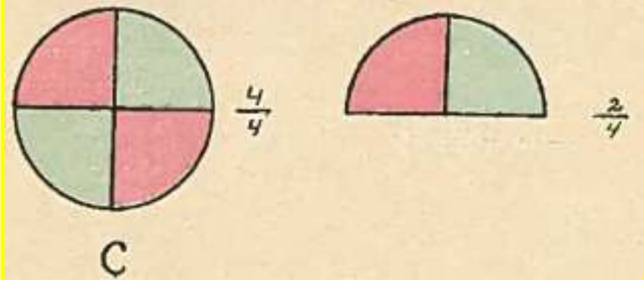
Figura 1 - Discos seccionados em diferentes partes, representando diferentes frações da unidade, onde surge a representação de frações não unitárias



(PIMENTEL FILHO, 1934, p. 150, digitalização, 100% do original)

Nestes exemplos iniciais, Pimentel Filho (1934) privilegia a introdução da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua. Depois sugere a apresentação da representação numérica da fração em três fases, representação numérica da fração, representação das expressões fracionárias, designação utilizada pelo autor para a fração imprópria, e representação de números fracionários, designação utilizada para identificar o numeral misto. Na primeira fase, insiste na importância dos significados do numerador e do denominador. Sugere que, de início, a escrita da fração seja feita por extenso, e que só se vá abandonando essa escrita conforme a leitura das frações esteja consolidada. Na segunda fase, onde apresenta as frações impróprias que designa por expressões fracionários, Pimentel Filho continua a recorrer à representação pictórica, relacionando com a representação verbal e simbólica.

Figura 2 - Representação de uma proposta de abordagem à fração imprópria, designada por expressão fracionária



(PIMENTEL FILHO, 1934, p. 152, 100% do original)

No exemplo é possível verificar que continua a privilegiar a apresentação da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua.

Os numerais mistos, designados por Pimentel Filho (1934) como números fracionários, são abordados na terceira fase. Pimentel Filho (1934) define-os como aqueles que são "formados por um número inteiro mais uma fração, como "$2+\frac{2}{3}, 5+\frac{3}{4}$, etc" (p. 154). Nesta fase não é utilizada a notação simbólica mais usual do numeral misto, sendo representado como uma adição de um inteiro com uma fração. A notação simbólica só é usada posteriormente, quando são exploradas as operações de adição e subtração. A designação verbal de numeral misto não é utilizada, nem posteriormente no contexto das operações. São dados exemplos de como se converte um número fracionário em expressão fracionária, ou seja, converter um numeral misto numa fração imprópria, por exemplo $2+\frac{2}{3}$ seria convertido em $\frac{8}{3}$ visto duas unidades serem o mesmo que $\frac{6}{3}$ "e juntos aos $\frac{2}{3}$ soltos, dão $\frac{8}{3}$" (p. 154)

Após estas fases iniciais de abordagem às frações, Pimentel Filho apresenta um conjunto de dezanove exercícios para a consolidação dos conteúdos trabalhados até ali. Os exercícios apresentados baseiam-se essencialmente em dois autores, Bourlet[6] e Grosgurin[7], dos quais se destacam aqui alguns exemplos:

> 1.º Converter em meios, terços, quartos, quintos ... nonos, 2, 3, 5, etc., inteiros.
> 2.º João tem 12 soldados de chumbo. ¿ Se der metade com quantos ficará?
> 4.º Quantos lápis serão os $\frac{2}{5}$ de 25 lápis?
> 6.º ¿Se eu quiser dividir um queijo por 8 pessoas, que porção de queijo darei a cada uma? E se o dividir por seis pessoas? E por 5?
> 9.º Deram-me $\frac{17}{5}$ de laranjas? Juntando êsses $\frac{17}{5}$ quantas laranjas posso reconstituir, posso formar? ¿ Sobram alguns quintos? Quantos?
> 18.º Após ter perdido os $\frac{3}{5}$ dos seus belindres Paulo tem ainda 12. ¿Quantos belindres tinha êle? – (Grosgurin) (PIMENTEL FILHO, 1934, pp. 155-156)

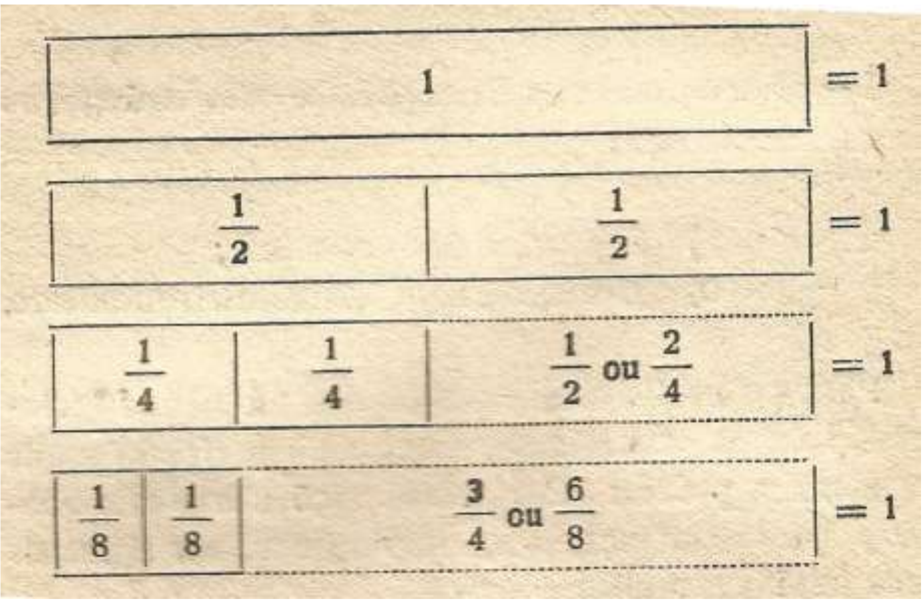
Na citação anterior é de realçar que Pimentel Filho apresenta alguns exercícios (2.º, 4.º e o 18.º) que remetem para situações em que a unidade é um conjunto discreto, e em que a fração é entendida como operador partitivo multiplicativo, o que ainda não tinha sido abordado

[6] Carlo Bourlet (1866-1913) - Matemático francês do final do século XIX e princípio do século XX, autor de diversas obras nesta área. (recuperado de https://fr.wikipedia.org/wiki/Carlo_Bourlet).
[7] Louis Grosgurin (?-?) - É um autor de manuais suíço, do final do século XIX, princípio do século XX.

anteriormente na obra. É ainda destacar o 6.º exercício cujo contexto remete para uma situação de partilha equitativa, com a fração entendida como um quociente.

A obra de Gaspar e Ferreira (1944) também começa por considerar o ensino das frações, e dos decimais, como essencial na aritmética, referindo que o ensino destes números envolve noções abstratas e que, nos primeiros anos de escolaridade deve ser intuitivo, prático e ativo. Gaspar e Ferreira (1944) sugerem a utilização de instrumentos de medida como o metro articulado ou a utilização de medidas de capacidade. Os autores indicam uma sequência para apresentação das frações aos alunos, que começa por trabalhar a metade e posteriormente a quarta parte e a oitava parte, por se conseguirem obter a partir da metade e da quarta parte da metade. O terço, o sexto e o nono só seriam trabalhados após o trabalho com a décima. Os exemplos apresentados referem-se sempre à fração como parte de um todo de uma unidade contínua, valorizando-se a relação entre a representação pictórica, a representação verbal e posteriormente a representação simbólica.

Figura 3. Apresentação da noção de fração



(GASPAR & FERREIRA, 1944, p. 52, 100% do original)

Estes autores defendem um ensino simultâneo da representação na forma de fração e a representação decimal. Na representação decimal Gaspar e Ferreira (1944) realçam a compreensão e a dimensão utilitária pela sua relação com o sistema métrico.

A representação decimal é utilizada por Pinheiro (1961) como primeira abordagem aos números racionais, seguindo as instruções dos programas da época[8]. De acordo com as instruções desses programas, a iniciação aos números decimais deveria ser feita a partir do estudo do metro e dos seus submúltiplos. Os alunos deveriam começar por fazer medições em que o metro entrasse um número inteiro de vezes. Mediriam depois usando o metro e o decímetro representando na forma designada por decimal misto, utilizando a vírgula a seguir à unidade principal[9].

Depois do trabalho com o metro e os seus submúltiplos, os alunos deveriam generalizar, dividindo qualquer unidade em décimas, centésimas e milésimas. As operações com números decimais deveriam ser ensinadas, estabelecendo-se um paralelismo com as operações com os números inteiros. É esta abordagem que Pinheiro (1961) faz na sua obra de didática, o que leva a um trabalho centrado na relação parte todo de uma unidade contínua.

No trabalho com as frações, Pinheiro (1961) destaca o trabalho com a representação pictórica, a representação verbal e posteriormente a relação com a representação simbólica. A fração é essencialmente apresentada como a parte de um todo de uma unidade contínua. A iniciação é feita através das frações unitárias numa sequência idêntica à proposta por Gaspar e Ferreira (1944). Também é apresentado um exemplo em que a fração surge como operador multiplicativo partitivo de uma unidade discreta. Pinheiro (1961) não explicita nenhuma indicação a diferenciar estes dois tipos de situações.

Tal como Pinheiro (1961), a proposta de Gonçalves (1974) para a iniciação aos números racionais também se centra no trabalho com a representação decimal. Esta opção de Gonçalves (1974) também é justificada pelas orientações do programa do ensino primário em vigor na época[10]. No entanto, Gonçalves (1974) aprofunda esta questão da forma de iniciar o estudo dos números racionais citando metodólogos que apresentam opiniões divergentes. Por um lado, aqueles que consideram que se deve começar o estudo pela representação decimal porque estes constituem uma continuação do estudo dos números inteiros e têm uma relação direta com o sistema de medida decimal. Por outro lado, aqueles que defendem que a primeira abordagem

---

[8] Programas do ensino primário aprovados pelo Decreto-lei n.º 42:994, de 28 de maio de 1960.

[9] A designação decimal misto é utilizada nas instruções do programa, assim como por Pinheiro (1961), para se referirem a um número que represente mais do que uma unidade, na sua representação decimal, em que uma vírgula separa a parte inteira da não inteira do número. As instruções do programa também referem decimal simples como um número na sua representação decimal, com um valor inferior à unidade.

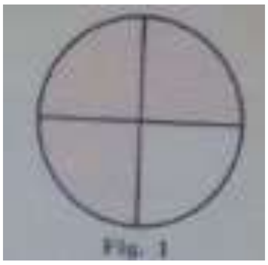
[10] Na época estavam em vigor os programas aprovados na Portaria n.º 23.485, Diário do Governo, 167, 16/7/1968, 1.019-36.

deve ser feita através das frações ordinárias, porque as frações decimais são só um caso particular das frações. Gonçalves (1974) também estabelece a diferença entre a representação decimal e o número decimal, chamando à atenção para a utilização de número decimal em vez de numeral decimal.

Na definição de fração, Gonçalves (1974) refere que as frações constituem “um mundo novo, com tipos próprios de unidades, de quantidades, de números: nova numeração, novas notações e operatória geral distinta.” (p. 142). Gonçalves (1974) considera que a aritmética apresenta a fração como um caso de nova realidade de uma nova numeração e, por isso, o seu estudo não devia ser paralelo ao estudo dos números inteiros.

Gonçalves (1974) destaca que o conceito de número fracionário é mais complexo do que o conceito de número natural e, por isso, requer da criança maior maturidade e conhecimentos matemáticos. Ao contrário do que acontece com o número natural, que é propriedade de um determinado conjunto, ele distingue no número fracionário diversos conceitos. Gonçalves distingue quatro conceitos diferentes, apresentando exemplos que diferenciam esses conceitos. O primeiro exemplo refere-se ao que se pode enquadrar na fração como a parte de um todo de uma unidade contínua “1) Na partilha de um conjunto contínuo ele significa «uma ou mais das partes iguais em que se dividiu esse conjunto».” (GONÇALVES, 1974, p. 143, aspas no original) sendo apresentada a seguinte figura.

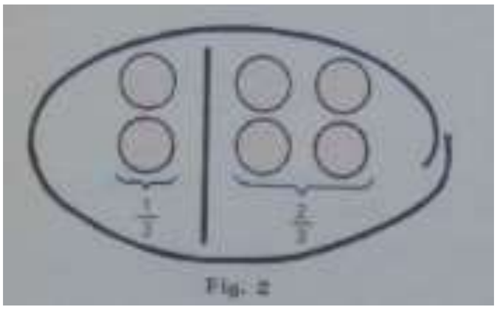
Figura 4 - Ilustração da fração como parte de um todo de uma unidade contínua.



(GONÇALVES, 1974, p. 143, digitalização, 100% do original)

No segundo exemplo, Gonçalves (1974) apresenta a fração no que se pode enquadrar como parte de um todo de um conjunto discreto, ou operador partitivo multiplicativo “2) Na partilha de um conjunto descontínuo, ele significa «uma ou mais das partes iguais desse conjunto» (de coisas, pessoas, etc.).” (GONÇALVES, 1974, p. 143, aspas no original). Para ilustrar a fração neste sentido, apresenta a seguinte figura.

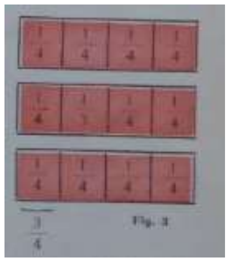
Figura 5 - Ilustração da fração como parte de um todo de uma unidade discreta.



(GONÇALVES, 1974, p. 143, digitalização, 100% do original).

No terceiro conceito que Gonçalves (1974) distingue nas frações, apresenta um exemplo que remete para o que se pode designar como a fração como o quociente entre dois números inteiros, numa situação de partilha equitativa.

> 3) Pode significar o «quociente de dois números naturais (divisor ≠ zero)». Se eu quiser dividir três barras de sabão por 4 lavadeiras, posso dividir cada barra em 4 partes, dando a cada lavadeira três quartos, pois as barras são três. Ver fig. 3 (GONÇALVES, 1974, p. 143, aspas no original)



Gonçalves apresenta ainda um quarto significado que o conceito de fração pode encerrar, referindo-se à fração como uma razão "a razão das propriedades numéricas de dois conjuntos". O exemplo apresentado para este caso é o seguinte:

> 4) Pode também significar «a razão das propriedades numéricas de dois conjuntos». Se, num fruteiro, houver 5 bananas e eu comer duas, a relação entre as bananas que comi e as que havia no fruteiro é de 2 para 5 ↔ 2/5." (GONÇALVES, 1974, p. 143, aspas no original)

Para ele este último significado da fração está no fundamento do estudo da percentagem.

Mais à frente, Gonçalves recomenda que o desenvolvimento do conceito intuitivo de fração seja feito através da partilha equitativa de conjuntos contínuos, seguida da formação de subconjuntos de um conjunto determinado. Este autor define também a função do numerador e do denominador na fração, esclarecendo da seguinte forma o que designa por número fracionário:

> *número fracionário* é uma *ideia* e a sua representação simbólica denomina-se *fração* (numeral do número fracionário), a qual pode ter a forma *a/b*, e que *a*

> e *b* designam números naturais, podendo também referir-se *a* como dividendo e *b* como divisor, sendo **b** $\neq$ **0**. (GONÇALVES, 1974, p. 144, itálicos e negritos no original)

Ainda na definição de fração, Gonçalves (1974) distingue o que designa por unidade fracionária, quando se divide a unidade inteira em partes iguais e se toma apenas uma dessas partes, da quantidade fracionária que resulta da junção de várias unidades fracionárias. Salienta ainda que a fração pode representar uma quantidade que não é inteira, mas também pode representar unidades inteiras. Só depois do trabalho com a noção de fração é que Gonçalves introduz a nomenclatura utilizada normalmente nas frações como traço de fração, que o autor designa por risco de fração, numerador, denominador e termos da fração. Ele apresenta também as frações impróprias mencionando que esta designação se deve ao facto de elas se referirem a frações que valem mais do que a unidade. No exemplo anterior, Gonçalves apresenta também a fração imprópria representada na forma de numeral misto, sem explicar verbalmente o significado da parte inteira e da parte fracionária, apresentando apenas a relação entre a figura e a representação simbólica. Verbalmente refere apenas as frações impróprias, destacando que as crianças devem observar que o numerador é igual ou maior do que o denominador[11]. Numa nota de rodapé, Gonçalves destaca ainda que os números naturais devem ser considerados como um subconjunto dos números fracionários, e que as crianças devem ir adquirindo essa noção de números fracionários.

Na mesma obra, Gonçalves (1974) trabalha ainda a relação entre a fração decimal e a dízima, indicando a forma para o fazer e como identificar as frações que podem ser representadas como dízimas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É importante salientar que em nenhum dos manuais é utilizada a designação de número racional, tendo sido identificadas designações como como quebrado ou fração para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é menor do que a unidade, ou número fracionário para referir um número que tem partes iguais da unidade, mas que é maior do que uma unidade. Algumas designações utilizadas para designar fração própria, fração imprópria ou numeral misto também são diferentes das que são comuns encontrar nos manuais na

11 Gonçalves (1974) considera como fração imprópria as frações que representam números maiores ou iguais à unidade.

atualidade. Algumas das designações utilizadas por autores como Nunes (1887) ou Pimentel Filho (1934) parecem estar relacionadas com a utilização de traduções de manuais em castelhano.

Na análise efetuada podem distinguir-se dois tipos de manuais em dois períodos diferentes. Os manuais da componente de ciências de especialidade e formação geral, Nunes (1887) e Preto (1903), e os manuais da componente pedagógica, Affreixo e Freire (1891), Coelho (1892, 1906), Pimentel Filho (1934), Gaspar e Ferreira (1944), Pinheiro (1961) e Gonçalves (1974).

Nas obras de Nunes (1887) e Preto (1903), este conjunto numérico tem uma primeira abordagem a partir da representação na forma de fração, como medida das grandezas, embora não seja apresentada uma definição formal simbólica. Em Preto (1903) a fração também aparece definida como quociente. Outra característica comum aos dois autores referidos é a importância que dão à relação entre a representação verbal da fração, a leitura dos termos da fração e a sua representação simbólica. Nestes dois manuais a definição de dízima é apresentada em estreita relação com a noção de fração decimal. Desta forma, o conhecimento desenvolvido nestes dois manuais em torno da definição de número racional pode considerar-se como um conhecimento comum do conteúdo já que surge como uma definição próxima do que acontece noutras obras que não são para o ensino básico.

No entanto, é de destacar que tanto Nunes (1887), como Preto (1903), apresentam no final do capítulo sobre as frações, exemplos de exercícios que remetem para a utilização da fração com um contexto da parte de um todo, tanto contínuo como discreto, e contextos em que a fração surge como operador (MONTEIRO & PINTO, 2005), onde implicitamente se trabalha um conhecimento especializado do conteúdo.

Nas obras da componente pedagógica do primeiro período é de salientar o pouco desenvolvimento que é dado ao ensino dos números racionais. Isto é particularmente evidente em Affreixo e Freire (1891). São manuais generalistas onde as metodologias específicas ainda estão pouco desenvolvidas.

Os manuais analisados no segundo período centram-se na componente pedagógica. No entanto é possível distinguir diferentes abordagens à noção de número racional. Pimentel Filho (1934) é privilegiada a introdução da fração como uma relação entre a parte e um todo de uma unidade contínua, destacando-se um conhecimento especializado do conteúdo e conhecimento do conteúdo e do seu ensino. Na iniciação às frações também são apresentados exemplos que remetem para situações em que a fração aparece com o significado de operador partitivo multiplicativo de um conjunto discreto (MONTEIRO & PINTO, 2005).

As obras de Pinheiro (1961) e de Gonçalves (1974) distinguem-se das anteriores por fazerem uma proposta de abordagem inicial à noção de número racional a partir da representação decimal. Esta opção é justificada com base nas orientações curriculares da época e reflete a influência do trabalho com o sistema métrico de medidas.

Quanto à utilização de diferentes representações, distingue-se as obras de Pimentel Filho (1934) e de Gonçalves (1974) pelo amplo recurso à representação pictórica e à sua relação com a representação simbólica. Esta utilização da representação pictórica é também comum a outras obras da componente pedagógica, como Pinheiro (1961) ou Gaspar e Ferreira (1944), mas não se verifica nos manuais da componente de ciências de especialidade, Nunes (1887) e Preto (1903), onde se valoriza a relação entre a representação verbal e a representação simbólica.

FONTES PRIMÁRIAS

AFFREIXO, J. M. D. G.; FREIRE, H. **Elementos de pedagogia para uso do magistério primário português**. 8.ª edição. Lisboa: Liv. Ferreira, 1891.

COELHO, J. A. **Princípios de pedagogia, Tomo 2**. São Paulo: Teixeira & Irmão, 1892.

COELHO, J. A. **Noções de pedagogia elementar**. 2ª edição. Lisboa: Livraria Moderna, 1906.

GASPAR, J.; FERREIRA, O. **Notas de Didáctica Especial**. Lisboa: B.U. Amaral, 1944.

PIMENTEL FILHO, A. **Súmula didáctica. I parte Língua maternal e aritmética**. 2ª ed. Lisboa: Guimarães & Cª, 1934.

GONÇALVES, G. **Didáctica do cálculo (apontamentos), 1.º volume**. 2.ª edição. Porto: Porto Editora, 1972.

GONÇALVES, G. **Didáctica do cálculo (apontamentos), 2.º volume**. 2.ª edição. Porto: Porto Editora, 1974.

NUNES, D. **Elementos de aritmética, teoria e prática, para uso das escolas normais**. Covilhã: Cruz & Irmãos Editores, 1887.

PINHEIRO, J. E. M. **Introdução ao estudo da didáctica especial**. Lisboa: Escola do Magistério Primário de Lisboa, 1961.

PRETO, F. A. M. **Arithmética prática e geometria elementar para o ensino das escolas normaes**. 2ª edição. Coimbra: Cruz & C.a, 1903.

FONTES SECUNDÁRIAS

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. Content Knowledge for Teaching : What Makes It Special? **Journal of Teacher Education,** v. 59, p. 389-407, 2008.

BAPTISTA, M. I. **O Ensino Normal Primário. Currículo, práticas e políticas de educação**. Lisboa: Educa, 2004.

BEHR, M. J. et al. Rational Number, Ratio, and Proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Nova Iorque: Maxwell Macmillan, 1992. p.296-334.
CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5.ª edição. Lisboa: Gradiva, 1941/2003.
CORREIA, A. C. D. L.; SILVA, V. B. D. **Manuais pedagógicos — Portugal e Brasil — 1930 a 1971 — Produção e circulação internacional de saberes pedagógicos**. Lisboa: Educa, 2002.
MATOS, J. M. História da Educação Matemática e Educação Matemática. In: SILVA, M. C. L. D. e PINTO, T. P. (Ed.). **História da Educação Matemática e Formação de professores: aproximações possíveis**. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p.19-51.
MCMULLEN, J. et al. Modeling the developmental trajectories of rational number concept(s). **Learning and Instruction,** v. 37, p. 14-20, 2015.
MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. **Quadrante, Revista de Investigação em Educação Matemática,** v. 14, n. 89-107, 2005.
NI, Y.; ZHOU, Y. Teaching and learning fraction and rational numbers: The Origins and implications of whole number bias. **Educational Psychologist,** v. 40, n. 1, p. 27-52, 2005.
NUNES, T.; BRYANT, P.; WATSON, A. **Key understandings in mathematics learning**. Londres: Nuffield Foundation, 2009.
PINTASSILGO, J. Os manuais de pedagogia no primeiro terço do século XX: entre a tradição e a inovação. In: PINTASSILGO, J.;FREITAS, M. C. D., *et al* (Ed.). **História da escola em Portugal e no Brasil. Circulação e apropriação de modelos culturais**. Lisboa: Edições Colibri, 2006. p.175-200.
PINTO, H. **O desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais**. 2011. Tese de doutoramento Universidade de Lisboa, Lisboa.
SILVA, V. **História de leituras para professores: um estudo da produção e circulação de saberes especializados nos "manuais pedagógicos" brasileiros (1930-1971)**. 2001. Dissertação de mestrado Universidade de São Paulo
VAMVAKOUSSI, X.; VOSNIADOU, S. Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. **Learning and Instruction,** v. 14, p. 443-467, 2004.