DESCRIPCIÓN Y ANÁLISIS DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN GEOMETRÍA

Ricardo Nicasso Benito
Affiliation: Dpto. de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, Brasil. nicasso@mat.ufs.br
Marianna Bosch Casabò
Affiliation: IQS School of Management, Universitat Ramon Llull, España. marianna.bosch@iqs.url.edu

Resumen: Presentamos una experiencia de recorrido de estudio e investigación (REI) llevado a cabo por los dos autores para determinar el foco de una parábola, una cuestión generatriz que surgió durante el diseño de una formación para futuros profesores de secundaria de matemáticas, en una actividad sobre hornos solares. Describimos el REI vivido utilizando los elementos del esquema herbartiano y las distintas dialécticas y mostramos que esta descripción aporta nuevos recursos retóricos, simbólicos y conceptuales para analizar procesos didácticos en el paradigma del cuestionamiento del mundo. Postulamos finalmente que dichos recursos podrían también convertirse en instrumentos epistémicos de los procesos de indagación, más allá de su rol como herramientas de descripción y análisis.

Palabras-chave: Recorridos de estudio e investigación, teoría antropológica de lo didáctico, dialécticas, esquema herbartiano, paradigma del cuestionamiento del mundo

THE DESCRIPTION AND ANALYSIS OF A STUDY AND RESEARCH PATH IN GEOMETRY

Abstract: We present an experience of a study and research path (SRP) carried out by the two authors to determine the focus of a parabola, a generating question that arose during the design of a training course for future secondary school teachers of mathematics, in an activity about solar ovens. We will describe the SRP experienced using the elements of the herbartian schema and the various dialectics. We will show that this description provides new rhetorical, symbolic and conceptual resources to carry out and analyse processes of study in the paradigm of questioning the world. Finally, we postulate that these resources could also become epistemic instruments of the inquiry processes, beyond their role as tools of description and analysis.

Keywords: Study and research paths, anthropological theory of the didactic, herbartian schema, paradigm of questioning the world.

INTRODUCCIÓN

Estos últimos años, muchos investigadores de la teoría antropológica de lo didáctico, entre los que nos contamos, trabajan en el estudio de las condiciones y restricciones que afectan el desarrollo del paradigma de la visita de las obras hacia el paradigma del cuestionamiento del mundo (CHEVALLARD, 2007, 2013). En estas investigaciones, se han diseñado y experimentado numerosos *recorridos de estudio e investigación* (REI), tanto en la enseñanza obligatoria como en la enseñanza universitaria y la formación inicial y continua del profesorado, en modalidad presencial y online, en matemáticas y en otras disciplinas (BARQUERO, BOSCH y GASCÓN, 2011; BENITO, 2019; BOSCH, 2018; FLORENSA, 2018; GARCÍA, BARQUERO, FLORENSA y BOSCH, 2019; IGNÁCIO, 2018; LICERA, 2017; LUCAS, 2015; PARRA y OTERO, 2017; RUIZ-OLARRÍA, 2015; SANTOS JÚNIOR, DIAS, BOSCH, 2017; SILVA, 2016; entre otros). En algunos de estos trabajos, se utilizan las nociones de REI, de esquema herbartiano y de dialécticas del estudio y la investigación como instrumentos para el diseño, gestión y análisis de nuevos procesos de estudio. En particular, y como muestran Barquero y Bosch (2015), estas herramientas permiten afinar el análisis de la *cronogénesis*, *mesogénesis* y *topogénesis* de los procesos de estudio, tres dimensiones que introdujo Yves Chevallard en sus trabajos pioneros sobre la transposición didáctica (CHEVALLARD, 1985).

El objetivo de este artículo es ilustrar y someter a debate el uso del esquema herbartiano y las dialécticas como instrumentos de análisis. Para ello tomaremos un ejemplo sencillo de REI en el ámbito de la geometría que facilita una descripción detallada de los elementos del esquema herbartiano que lo componen, así como de algunas de las dialécticas que dinamizan los procesos de estudio e investigación. Una vez introducidas las herramientas del estudio y el contexto en el que se generó el REI, pasaremos a detallar sus componentes, para analizar después las dialécticas que intervinieron en su desarrollo. Concluiremos sobre los recursos o, mejor dicho, la carencia de recursos praxeológicos (epistémicos y didácticos) que afectan hoy día la ecología de los REI en los distintos niveles de enseñanza.

Las herramientas del estudio

Para abordar los procesos didácticos dentro del paradigma del cuestionamiento del mundo, la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) propone las nociones solidarias de *recorrido de estudio e investigación* (REI) y de *esquema herbartiano*. De esta manera, se pueden describir procesos didácticos cuyo punto de partida es una cuestión Q que el grupo de estudiantes X se propone responder con la ayuda de un grupo de profesores Y, formando así el sistema didáctico $S(X, Y, Q)$. Consideraremos que un REI es el proceso seguido por X e Y hasta obtener una respuesta propia $R^\heartsuit$ y que el esquema herbartiano es una descripción de algunos de los elementos que intervienen en este proceso y que se indican como:

$$[S(X, Y, Q_0) \rightarrow \{Q_i, R_j^\lozenge, O_k, D_m\}] \hookrightarrow R^\heartsuit$$

Aquí, Q_0 es el punto de partida del estudio o cuestión generatriz del REI. Q_i son las cuestiones derivadas de Q_0 que surgen durante el proceso de elaboración de $R^\heartsuit$. En dicho proceso también pueden intervenir datos empíricos D_m, obras o respuestas $R_j^\lozenge$ previamente establecidas por otros y que forman parte del conjunto de obras validadas en alguna institución accesible a X o Y. Finalmente, O_k designa el conjunto de los demás objetos que intervienen en el proceso y que, junto con Q_i, D_m y $R_j^\lozenge$ forman parte del *medio M* del proceso de estudio e investigación.

La evolución del *medio M* se puede describir en términos de *dialécticas* que utilizaremos más adelante. Siguiendo a Bosch, Chevallard, García y Monaghan (2020), una dialéctica es una praxeología o conjunto de praxeologías que permite superar dos movimientos opuestos de forma productiva. La primera que utilizaremos es la *dialéctica de las preguntas y las respuestas*. En este movimiento, la formulación de preguntas requiere la búsqueda o elaboración de respuestas, movimiento que, a su vez, genera nuevas preguntas que demandan nuevas respuestas. Estos dos movimientos—formular preguntas y buscar o elaborar respuestas— marcan la dinámica del REI hasta llegar a una respuesta final que, para el equipo de investigadores (X, Y), genera solo preguntas consideradas como marginales, poco sustanciales o postergables. La dialéctica de las preguntas y las respuestas proporciona una primera descripción de los REI al marcar determinados hitos de los caminos recorridos. La búsqueda de preguntas y la generación de respuestas se puede entonces refinar utilizando una segunda dialéctica, la de *los media y los medios*.

Los media proporcionan informaciones diversas relacionadas con las preguntas Q_i que se van generando. Son las respuestas "etiquetadas" $R_j^\lozenge$ que el equipo de investigadores deberá cuestionar, validar y adaptar a Q_i para obtener respuestas propias y sólidas $R_i^\heartsuit$. La destrucción y reconstrucción de las $R_j^\lozenge$ se hará utilizando los conocimientos, datos y otros elementos del medio que (X, Y) pueden manejar con cierta seguridad. En este trabajo aparece una nueva dialéctica, la de *la conjetura y la prueba* (o experimentación), en la que se contrastan afirmaciones a partir de elementos teóricos y empíricos cuya veracidad se da por sentado al menos provisionalmente. En clara interrelación con las anteriores aparece la dialéctica de *las cajas negras y cajas claras*, que se activa para gestionar el nivel de ignorancia o comprensión de una determinada respuesta $R_j^\lozenge$. En la búsqueda de respuestas en los media, se puede considerar la dialéctica *del paracaidista y el trufero*, que indica los grandes ámbitos que uno debe recorrer en la búsqueda de información—como el paracaidista recién aterrizado en terreno enemigo—así como la profundidad con que cabe excavar en determinados momentos para encontrar aquel elemento preciso—la "trufa" —que permite avanzar en la elaboración de $R^\heartsuit$. Mencionaremos dos últimas dialécticas también conectadas entre ellas y que utilizaremos en nuestra descripción. La primera es la de *la lectura y escritura* (o excripción e inscripción), la segunda es la de *la recepción y difusión*. Existen otras dialécticas, como la *del individuo y el colectivo* o la del *tema y fuera-de-tema* que no desarrollaremos aquí.

Notemos finalmente que el esquema herbartiano y las dialécticas también pueden utilizarse para la descripción de sistemas didácticos centrados en el estudio de una praxeología u organización praxeológica $\wp$. Esta generalización se puede concebir de dos maneras. Por un lado, $S(X, Y, \wp)$ se puede entender como un tipo particular de $S(X, Y, Q_0)$ considerando cuestiones del tipo: ¿Qué es $\wp$? ¿Cómo se usa $\wp$? ¿Para qué sirve $\wp$? Etc. Por otro lado, se puede asimilar $\wp$ a una respuesta etiquetada $R^\lozenge$ que surge en el transcurso de un REI generado por una cuestión Q_0 que se mantiene implícita o que aparece al final del recorrido. Para más detalles sobre el esquema herbartiano y su utilización como herramienta de análisis, ver (BOSCH, 2018; BOSCH y WINSLØW, 2015; CHEVALLARD, 2009; FLORENSA, BOSCH, GASCÓN y WINSLØW, 2018).

El contexto: un REI-FP para futuros profesores de matemáticas de Brasil

En este artículo presentamos y discutimos un REI llevado a cabo por los propios autores durante una etapa de la investigación doctoral de Benito (2019), desarrollada bajo el marco teórico y metodología de la TAD, cuyo reto fue analizar las condiciones y restricciones emergentes de una intervención en el proceso de formación inicial del profesorado para la enseñanza de las cónicas (parábola, elipse e hipérbola). Este experimento se llevó a cabo utilizando el dispositivo de los *recorridos de estudio e investigación para la formación del profesorado* REI-FP (RUIZ-OLARRÍA, 2015; BARQUERO, BOSCH y ROMO, 2018) y contó con la participación de estudiantes de la carrera de matemáticas de la Universidad Federal de Sergipe, ciudad de Itabaiana, estado de Sergipe en Brasil. El objetivo del REI-FP era cuestionar el tipo de geometría que se enseña en secundaria, haciendo emerger las diferencias praxeológicas entre la geometría analítica y la geometría sintética. Señalemos aquí que el término "geometría sintética" refiere al estudio de la geometría sin el uso de coordenadas, utilizando el método axiomático y herramientas como la regla y el compás. El adjetivo "sintético" se incorporó a posteriori para distinguir esta geometría de la analítica o algebraica[1].

La elaboración de la cuestión generatriz utilizada en estos estudios exploratorios tuvo en cuenta los estudios epistemológicos desarrollados en Benito (2019) sobre el tratamiento de las cónicas en los diferentes modelos de geometría, como la geometría sintética, la geometría lineal y la propia geometría analítica. Basándose en Gascón (2002 y 2003), el autor buscó poner de manifiesto la dependencia y complementariedad de dichos modelos. En particular, identificó tipos de problemas en cada una de las geometrías (sintética, analítica o lineal) difíciles de resolver con las técnicas y entornos teóricos de las otras, mostrando la no equivalencia praxeológica de las actividades consideradas, a pesar de una posible equivalencia matemática.

Al analizar los libros de texto utilizados en los estados de São Paulo y Sergipe, el autor encontró que el contexto de la geometría analítica es predominante en relación con otros contextos y que, a pesar de introducirse en el contexto de la geometría sintética a través de las secciones de un cono (cortes de Apolonio), las cónicas son rápidamente reemplazadas por sus ecuaciones, y todos sus elementos como el foco, la recta directriz, la excentricidad, etc. se definen en el contexto analítico. Este hecho también fue observado por Almouloud, Koné y Sangaré (2014), quienes investigaron la enseñanza de este objeto en Malí y advirtieron que esto puede ocasionar problemas de nivel epistemológico en torno de la comprensión de las cónicas y sus elementos básicos. En todo caso, se pone en evidencia el fenómeno de desconexión escolar entre la geometría sintética y analítica identificado por Gascón (2002 y 2003) en la enseñanza secundaria, así como entre estas dos geometrías y la lineal en la enseñanza universitaria, que es donde se forman los futuros profesores.

[1] Para más información, véase URL: https://es.qaz.wiki/wiki/Synthetic_geometry.

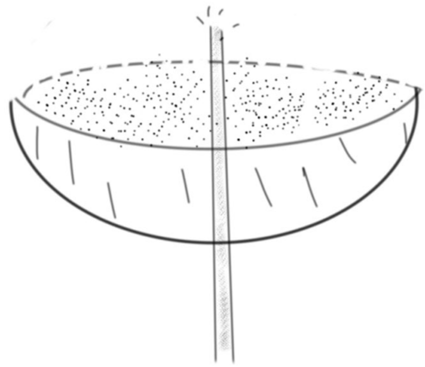
Por lo tanto, nos propusimos buscar una cuestión generatriz que favoreciera el estudio de las cónicas más allá del contexto de la geometría analítica y permitiera contrastar su tratamiento analítico con el tratamiento sintético de la geometría con regla y compás. De este modo, el REI-FP debía proporcional a los alumnos profesores herramientas de análisis epistemológico sobre la geometría que se enseña, así como la que *no* se enseña. Nos inspiramos del trabajo de Otero, Llanos y Parra (2018) en el que se presenta un REI generado por la cuestión "¿Cómo funcionan las antenas parabólicas?". Dado que las antenas parabólicas se comercializaron en Brasil de 1980 a 2017 y que el estado de Sergipe tiene sol fuerte durante todo el año, nuestra idea fue plantear a los estudiantes la posibilidad de utilizar antiguas antenas parabólicas para construir hornos que funcionaran con energía solar (Figura 1). De ahí surgió la cuestión generatriz: "¿Cómo construir un horno solar?"

Durante un experimento exploratorio con estudiantes de bachillerato, al considerar propiedades del foco y la propiedad reflectora de la parábola, un estudiante preguntó si era posible encontrar la posición de la olla en el horno, en el caso de romperse un trozo del tubo que sujeta el receptor digital en la antena parabólica (Figura 2). Surgió entonces la cuestión: ¿es posible localizar el foco de una parábola dada por su curva?

Figura 1 – Horno solar elaborado a partir de una antena parabólica

Fuente: Carvalho, Sorrentino y Nunes (2019, p. 5)

Figura 2 – Antena parabólica con el tubo roto



Fuente: elaboración propia.

Para que los estudiantes comprendieran mejor esta última cuestión, que llamaremos Q_0, era necesario que estudiaran cómo se construye una parábola en geometría sintética, es decir, cuál es la definición de la parábola como lugar geométrico. Desafortunadamente, el tiempo disponible para el REI no fue suficiente para que los estudiantes avanzaran en sus estudios, así que no llegaron a elaborar ninguna respuesta $R^♥$. Sin embargo, como se trataba de un estudio exploratorio para recopilar datos que contribuirían al desarrollo del REI-FP para su futura experimentación, los autores de este artículo estudiaron esta cuestión, tanto para resolverla, como para descubrir su potencial como posible camino del REI-FP. A continuación, describiremos este REI tal como lo vivimos nosotros, dentro de lo que podemos considerar como un trabajo de análisis a priori dentro del diseño de un REI-FP.

El objetivo de este artículo es doble. Por un lado, vamos a utilizar el REI vivido como un caso de estudio para poner en evidencia los elementos del esquema herbartiano que aparecen en él, así como las dialécticas del estudio e investigación que permiten analizar la dinámica del proceso. Por otro lado, en la presentación del recorrido vivido, mostraremos cómo las herramientas de análisis que propone la TAD pueden funcionar también como instrumentos del propio proceso de estudio e investigación. Dicho en otras palabras, veremos que el esquema herbartiano es también un instrumento de la indagación matemática que llevamos a cabo, y no solo una herramienta para el análisis a priori y a posteriori. En particular, veremos cómo permite nombrar elementos del proceso que de otra forma pasarían desapercibidos.

EL REI VIVIDO: GRAFO DE CUESTIONES Y RESPUESTAS

La cuestión generatriz

Como hemos indicado anteriormente, nuestro punto de partida es la cuestión generatriz siguiente:

Q_0: ¿Cómo determinar el foco de una parábola dada por su curva?

Para aquellos que hemos recibido principalmente una formación de geometría analítica, la manera más directa de responder a esta pregunta consiste en utilizar coordenadas para definir la sección del paraboloide como una parábola de ecuación $y = ax^2$, calcular un valor aproximado de a y determinar su foco F. Una rápida búsqueda en internet o en libros sobre cónicas nos conduce a la fórmula: $p = 1/(4a)$, siendo p la distancia focal y F el punto de coordenadas $(0, p)$. Dado que nuestro objetivo era tener ejemplos de problemas que permitieran comparar la resolución analítica (con coordenadas) y la resolución sintética (con regla y compás), nos propusimos resolver Q_0 sin utilizar coordenadas. Para ello, supusimos que la parábola nos venía dada por una curva sobre un papel, junto con su eje de simetría[2]—que se podría determinar doblando el papel de tal forma que las dos ramas de la curva coincidan. Obviamente, al tener el eje de simetría también disponíamos del vértice de la parábola. Por lo tanto, la cuestión generatriz que nos planteamos quedaría mejor formulada así:

Q_0: Dada una parábola y su eje de simetría, ¿cómo determinar su foco utilizando la regla y el compás?

Primeros pasos: búsqueda de respuestas y otras obras

Lo primero que hicimos fue buscar información sobre paraboloides, parábolas y focos para ver si existe una respuesta conocida a Q_0. Es importante resaltar aquí que los dos investigadores tenemos pocos conocimientos de geometría sintética para el caso de las cónicas, que hemos estudiado principalmente en el marco de la geometría analítica y el álgebra lineal. Esta situación no es un rasgo personal, sino más bien una consecuencia de nuestra sujeción al

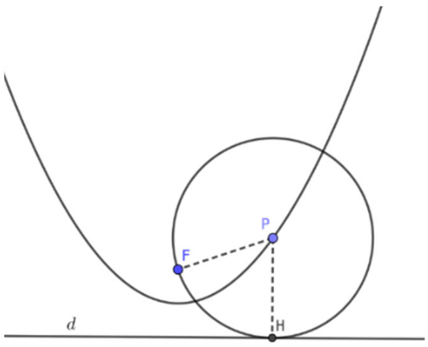
[2] La hipótesis hecha aquí puede ser suavizada, como mostramos en el anexo 1.

currículo matemático "moderno" (posterior a la reforma de las matemáticas modernas) que ha relegado la geometría sintética a una posición secundaria, en favor de la geometría analítica.

Necesitábamos por lo tanto la definición "sintética" de parábola (respuesta $R_1^{\lozenge}$), de la que dedujimos una propiedad consecuencia casi directa de la definición. Esta propiedad corresponde a una *obra O* que decidimos integrar en nuestro medio:

> Q_1: ¿Cómo se define una parábola en geometría sintética, sin utilizar coordenadas?
>
> $R_1^{\lozenge}$ (definición): Una parábola es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de una recta, llamada directriz, y de un punto exterior a la recta, llamado foco.
>
> *O* (consecuencia directa): Toda circunferencia centrada en un punto de la parábola y tangente a su recta directriz pasa por el foco de la parábola. (Figura 3)

Figura 3 – Circunferencia centrada en la parábola y tangente a su directriz

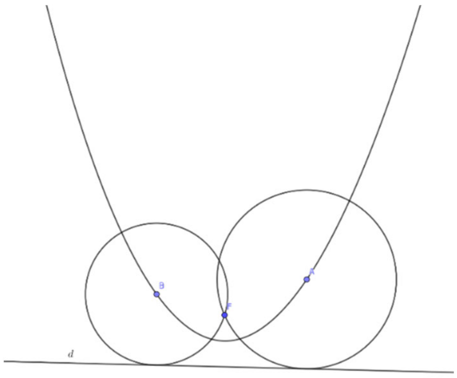


Fuente: elaboración propia.

Se deduce entonces una respuesta provisional que permite determinar el foco de una parábola *dada la recta directriz*, elemento del que no disponemos inicialmente. La cuestión derivada y su respuesta son entonces:

> *Q_2: Dada una parábola $\wp$ y su directriz d, ¿cómo determinar su foco?*
>
> $R_2^{\heartsuit}$: Trazar dos circunferencias centradas en dos puntos de la parábola y tangentes a su recta directriz. Si las circunferencias intersectan, entonces el foco de la parábola será una de las intersecciones de las dos circunferencias (Figura 4).

Figura 4 – Circunferencias tangentes a la directriz



Fuente: elaboración propia.

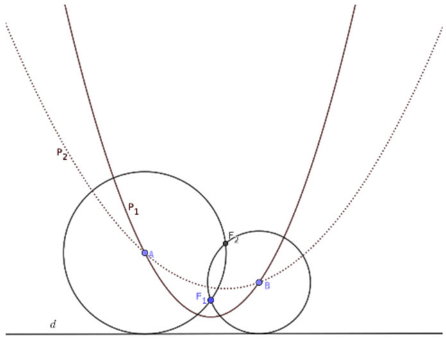
Podemos además comprobar esta propiedad utilizando el software geométrico GeoGebra, dibujando la figura 4 y arrastrando los centros de las dos circunferencias a lo largo de la parábola. De este trabajo *experimental* con GeoGebra surgen cuestiones derivadas de Q_2 que no desarrollaremos, algunas que se requieren para obtener $R_2^{\heartsuit}$ (y que se pueden considerar como "subcuestiones" de Q_2) y otras que surgen del propio trabajo de construcción y que podemos tratar de "marginales" por cuanto parecen extender el estudio en los márgenes de nuestro recorrido:

$Q_{2.1\text{sub}}$: *¿Cómo determinar una circunferencia centrada en la parábola y tangente a la directriz?*

$Q_{2.2\text{marg}}$: *¿En qué caso las dos circunferencias son tangentes?*

$Q_{2.3\text{marg}}$: *¿Qué ocurre si tomamos la otra intersección como foco? ¿Qué relación hay entre las dos parábolas definidas por ambos focos?* (Figura 5)

Figura 5 – Dos parábolas con sus focos en la intersección de las circunferencias



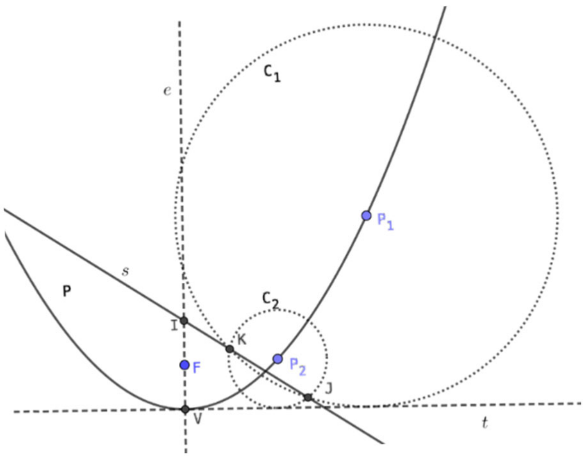
Fuente: elaboración propia.

La exploración con GeoGebra

La respuesta R_2♥ no sirve como respuesta a Q_0 *porque no conocemos la directriz de la parábola* $\wp$, solo su vértice y eje de simetría. Se nos ocurrió entonces utilizar la recta tangente a la parábola en su vértice, que sí podemos construir y es paralela a la directriz. Obtenemos así una tercera cuestión derivada:

> Q_3: *Dada una parábola y la tangente t en su vértice, dados dos circunferencias cualesquiera con centro en la parábola y tangentes a t, ¿qué propiedades tienen los puntos de intersección de las dos circunferencias? ¿Qué propiedades tiene la recta que une estas intersecciones?* (Figura 6)

Figura 6 – Circunferencias tangentes a la recta t

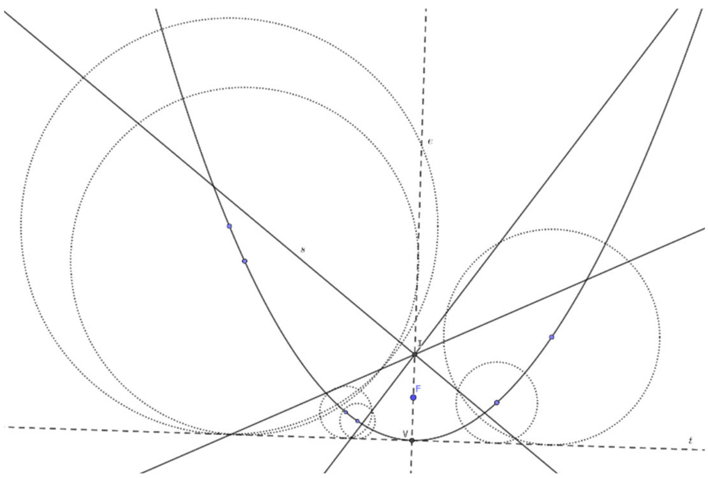


Fuente: elaboración propia.

La figura 6 nos indica un punto I intersección de la recta que une las intersecciones de las circunferencias y el eje de simetría de la parábola. En este momento realizamos un hallazgo importante gracias al trabajo experimental con GeoGebra: al modificar los puntos P_1 y P_2 a lo largo de la parábola, pudimos observar que el punto I es un invariable de la figura. Además, parece cumplirse la propiedad IF = FV, es decir, parece que el foco F es el punto medio del segmento [IV]. *Si esta propiedad es cierta*, podemos determinar el foco de la parábola y obtener una respuesta a Q_0.

> R_3♥: Dada una parábola $\wp$ y su eje de simetría *e*, trazamos la recta *t* perpendicular a *e* en el vértice V de la cónica. A continuación, dibujamos las circunferencias C_1 y C_2 centrados respectivamente en los puntos P_1 y P_2 de la parábola y tangentes a la recta *t* (Figura 6). Trazamos después la recta *s* determinada por los puntos de intersección entre C_1 y C_2 que interseca al eje de la parábola en I. El foco F de la parábola es el punto medio del segmento VI.

Figura 7 – Experimentación con GeoGebra



Fuente: elaboración propia.

Al construir la figura 7 considerando diferentes puntos P_1 y P_2, se observa que las circunferencias no siempre intersecan, con lo que surge una nueva cuestión derivada, con una respuesta evidente que limita el conjunto de puntos P_1 y P_2 necesarios para la construcción de R_3♥:

$Q_{3.1}$: ¿En qué casos las circunferencias intersecan y cómo determinar los dos puntos de la parábola para que así sea? (Figura 7)

$R_{3.1}$♥: La distancia entre los dos puntos debe de ser menor a la suma de sus distancias a la recta *t* tangente a la parábola en su vértice.

Validar la respuesta final

Volviendo a la figura 6, necesitamos todavía validar la respuesta R_3♥ que, de momento, solo hemos constatado en la figura de GeoGebra considerando un gran número de parejas de puntos sobre la parábola. En efecto, como hemos dicho anteriormente, al mover P_1 y P_2 a lo largo de la parábola, la recta *s* oscila sobre el punto I que permanece fijo. Además, el mismo GeoGebra nos confirma que F es el punto medio de [IV]. La cuestión que surge es pues la de la validación de R_3♥, que podemos declinar en las siguientes preguntas derivadas:

Q_4: ¿Cómo demostrar R_3♥? ¿Cómo probar que F *es el punto medio de* [IV]*?*

$R_{4.An}$♥: Una posible demostración consiste en utilizar los recursos de la geometría analítica, considerando los puntos $P_1 = (x_1; ax_1^2)$ y $P_2 = (x_2; ax_2^2)$, las circunferencias centradas en P_1 y P_2 con radios respectivos ax_1^2 y ax_2^2, calculando los dos puntos de intersección de estas circunferencias, la recta que pasa por estos puntos y su intersección con el eje O*y* (ver Anexo 2).

Ahora bien, si nos mantenemos en el universo de la geometría sintética, las cuestiones derivadas que deberían llevarnos a R_4♥ serían:

$Q_{4.1}$: ¿Qué figuras y propiedades se desprenden de la construcción R_3♥?

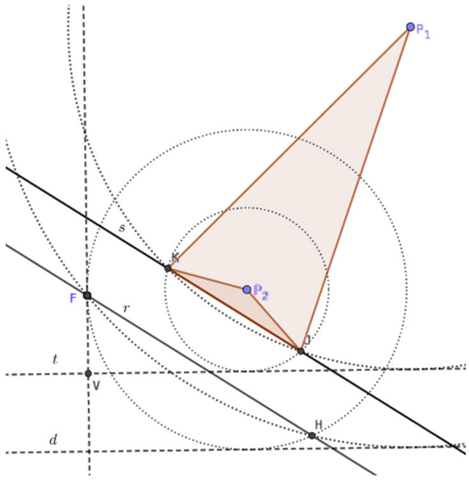
$R_{4.1}$♥: Los triángulos P_1JK y P_2JK son isósceles.

$R_{4.2}$♥: Si dibujamos la directriz de la parábola $\wp$ asumiendo que IF = FV y repetimos la construcción (Figura 8), obtenemos dos rectas *r* = (FH) y *s* = (KJ). Parece que estas rectas son paralelas.

$Q_{4.2}$: ¿Qué se deriva del hecho que los triángulos P_1JK *y* P_2JK *son isósceles? ¿Permite esta propiedad deducir que las rectas r y s son paralelas?*

Interrumpiremos aquí nuestra descripción del recorrido, que nos llevó a considerar numerosas configuraciones y propiedades de sus elementos, así como la consideración de casos límite con $P_1 = P_2$, para obtener una validación de R_3♥.

Figura 8 – Triángulos isósceles P_1JK *y* P_2JK



Fuente: elaboración propia.

Una sorpresa final

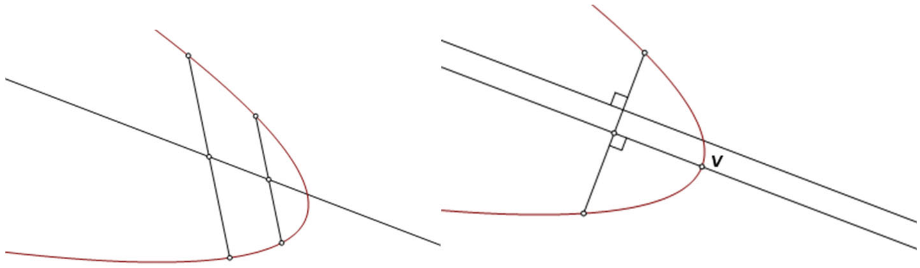
Unos meses más tarde de hallar la respuesta $R_3^{♥}$ y mientras buscábamos la manera de demostrarla, encontramos en la web de Paul Kunkel (http://whistleralley.com) una respuesta directa a Q_0 que no supimos hallar en su momento y que llamaremos $R_{PK}^{\lozenge}$. El autor toma como punto de partida únicamente el trazado de una parábola e indica una forma de determinar tanto el eje de simetría como el foco y la directriz mediante regla y compás. En esta respuesta aparece una obra *O* que tiene un papel central y que corresponde a la *propiedad reflexiva de la parábola*[3] —una obra que *no* formaba parte del nuestro medio en el momento de llevar a cabo el REI:

> $R_{PK}^{\lozenge}$: Se empieza construyendo una cuerda arbitraria de la parábola junto con su punto medio. Se construye después una segunda cuerda paralela a la primera junto con su punto medio. La recta que une los dos puntos medios es paralela al eje de simetría de la parábola. Por lo tanto, trazando una cuerda perpendicular a esta recta y determinando su punto medio se obtiene el eje de simetría y el vértice V de la parábola (Figura 9). Sea P punto de la cuerda ortogonal y M el punto medio. Sea M′ el simétrico de M respecto a V. Entonces PM′ es tangente a la parábola en P (Figura 10). La propiedad reflexiva de la parábola nos permite hallar el foco F (Figura 11): se construye en P una recta paralela al eje y se construye su simétrica respecto a la tangente PM’. El foco se halla en la intersección de esta recta con el eje de simetría. Además, el simétrico F’ del foco F respecto a la tangente siempre

[3] Ver: https://es.wikibooks.org/wiki/Geometría_Analítica/Parábola/Propiedades_geométricas
o http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Fa08/Wisdom/EMAT6690/Parabolanjw/reflectiveproperty.htm

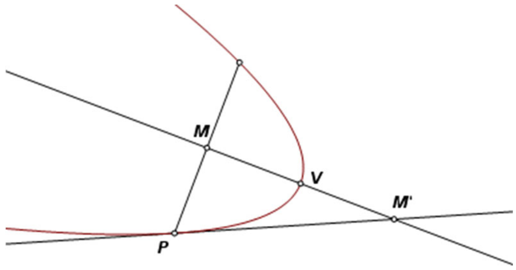
cae en la directriz. Por lo tanto, la directriz es la perpendicular al eje que pasa por F' (Figura 12).

Figura 9 – Construcción del eje de simetría de la parábola



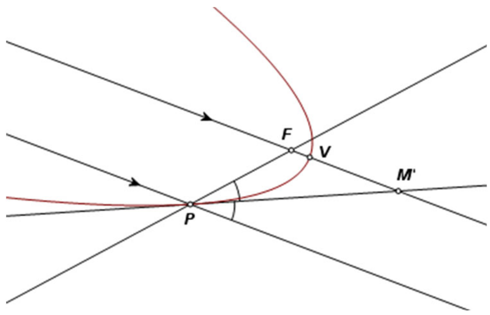
Fuente: http://whistleralley.com/conics/conic_construction/parabola_parts/

Figura 10 – Simetría y tangencia



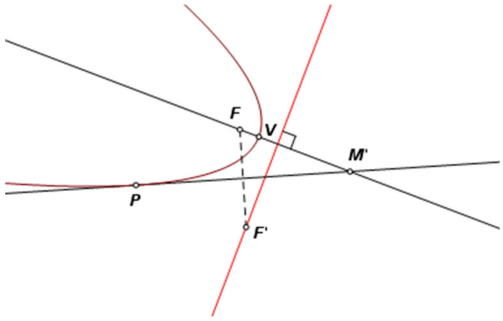
Fuente: http://whistleralley.com/conics/conic_construction/parabola_parts/

Figura 11 – Construcción del foco



Fuente: http://whistleralley.com/conics/conic_construction/parabola_parts/

Figura 12 – Construcción de la directriz



Fuente: http://whistleralley.com/conics/conic_construction/parabola_parts/

Como vemos, esta solución utiliza principalmente la propiedad reflexiva de la parábola, y no su definición como lugar geométrico. Además, incluye la construcción del eje de simetría, utilizando la simetría oblicua de una cónica y propiedades de sus cuerdas. Se abren así nuevas cuestiones en nuestro recorrido, cuyas respuestas requieren el estudio de estas propiedades:

> $Q_{PK.1}$: *¿Por qué la recta que une los puntos medios de dos cuerdas de una parábola es paralela al eje de simetría de la parábola? ¿Qué es una simetría oblicua? ¿Qué propiedades tiene?*
>
> $Q_{PK.2}$: *¿Cómo se demuestra que* PM' *es tangente a la parábola? (Figura 10)*
>
> $Q_{PK.3}$: *¿Cómo se demuestra la propiedad reflexiva de la parábola?*
>
> $Q_{PK.4}$: *¿Por qué el foco pertenece a la recta simétrica a la paralela al eje en* P *respecto a la tangente? (Figura 11)*
>
> $Q_{PK.5}$: *¿Por qué utilizar* F' *para determinar la directriz en lugar del hecho que* V *es el punto medio entre* F *y la intersección del eje con la directriz?*

ANÁLISIS DE LAS DIALÉCTICAS DEL REI VIVIDO

La dialéctica de las preguntas y respuestas

En el apartado anterior, hemos utilizado la dialéctica de las preguntas y respuestas (o del estudio y la investigación) para describir el REI vivido. Esta elección no es inocente y contrasta sin duda con las descripciones escolares tradicionales de las actividades matemáticas, que suelen poner el énfasis en las respuestas $R_j^{\Diamond}$ movilizadas, y tienden a ignorar las cuestiones derivadas Q_i, así como las respuestas $R_i^{\heartsuit}$ elaboradas, tanto aquellas finalmente validadas como las desechadas durante el recorrido.

Como hemos indicado al principio de este artículo, muchas investigaciones sobre los REI utilizan la dialéctica de las preguntas y respuestas en tres sentidos distintos pero complementarios. Por un lado, la descripción de esta dialéctica permite realizar un análisis a priori—más o menos detallado según las necesidades—para identificar la potencia de una cuestión generatriz y romper nuestra visión "monumentalizada" de los contenidos por enseñar. Al dar prioridad a las cuestiones que se plantean en detrimento de las respuestas pre-establecidas más o menos accesibles a un determinado grupo de estudiantes, se puede cuestionar más fácilmente las estructuras tradicionales de los contenidos por enseñar, así como los procesos transpositivos que han conducido hasta ellas. Podemos aproximar el uso de esta dialéctica a la propuesta del pedagogo español José Manuel Esteve de "recuperar las preguntas, las inquietudes, el proceso de búsqueda de los hombres y mujeres que elaboraron los conocimientos que ahora figuran en nuestros libros" (ESTEVE, 1993). En segundo lugar, si consideramos el REI como proceso didáctico para implementar en el aula, los grafos de cuestiones y respuestas se revelan como una herramienta interesante de gestión del recorrido, mediante el *análisis in vivo*, tanto para el profesor como para los propios estudiantes, tal como se muestra en (FLORENSA, 2018). Porque, al igual que el esquema herbartiano, el grafo de preguntas y respuestas es una realidad dinámica que evoluciona a medida que avanza el proceso de estudio e investigación sobre la cuestión generatriz. Finalmente, nuestra descripción ilustra también el uso de esta dialéctica como descripción de un REI vivido a modo de *análisis a posteriori*.

De todos modos, es importante resaltar que la descripción de un REI en términos de preguntas y respuestas no puede realizarse en un ámbito a-teórico. La misma formulación de las preguntas supone situarse en un espacio terminológico y conceptual concreto, que puede estar más o menos vinculado con uno o varios ámbitos del conocimiento—tal vez todavía por descubrir o por crear—. De ahí que podamos considerar que la descripción en términos de preguntas y respuestas forma parte de la elaboración de *modelos praxeológicos de referencia* relativos a determinados ámbitos relacionados con los REI, tal como indican Lucas, Fonseca, Gascón y Schneider (2019). En este caso, la dialéctica permite cuestionar—o, si se quiere, completar—las descripciones más comunes de los contenidos de enseñanza basadas en síntesis conceptuales y técnicas—en *logos* praxeológicos—.

La dialéctica media-medios y las dialécticas asociadas

La dialéctica de los media y los medios puede asociarse con el trabajo de mesogénesis, es decir, con la evolución del medio M que integra los diferentes componentes del recorrido de estudio e investigación. El sistema didáctico $S(X, Y, Q_0)$ parte de un medio inicial que incluye todos aquellos conocimientos y herramientas de análisis—incluidas los instrumentos materiales—con los que X e Y inician el estudio de Q_0. Este medio inicial es difícil de describir en extensión, pero se pueden destacar algunos de sus elementos. En nuestro caso, por ejemplo, disponíamos de GeoGebra y de un equipamiento praxeológico relativamente desarrollado en el ámbito de la geometría analítica y lineal, aunque bastante limitado, como ya hemos indicado, en el de la geometría sintética o con regla y compás.

El acceso a los media, principalmente Internet y algunos libros de geometría antiguos, nos permitió acceder a distintas obras $R_i^\lozenge$ sobre la geometría de las cónicas. Pero nuestra intención no era estudiar estas obras para convertirnos en expertos del tema, sino obtener lo mínimo indispensable para resolver las cuestiones que nos planteábamos. Este es un principio general que rige el paradigma del cuestionamiento del mundo o, más precisamente, la *pedagogía de la investigación*. Uno se convierte en "experto" en un campo multiplicando las investigaciones en ese campo, pero es poco probable que la pericia así construida sea similar a la pericia construida previamente investigando otras cuestiones.

Aquí aparece la primera dialéctica asociada: la del paracaidista y el trufero. Tuvimos que explorar "toda" la geometría sintética de las cónicas, pero desde una perspectiva exploratoria muy amplia, recorriendo los índices de los tratados geométricos y haciendo búsquedas en internet con algunas palabras clave. De paracaidistas pasábamos a buscadores de trufas cuando, en alguna web o tratado de geometría, hallábamos algún elemento que nos parecía potencialmente productivo, como, por ejemplo, la "propiedad reflexiva" de las cónicas y su concreción al caso de las parábolas. Señalemos aquí que el trabajo del investigador como "paracaidista" es obviamente esencial. Sin embargo, está casi totalmente ausente de las pedagogías escolares ordinarias, en las que el alumno debe estudiar "a fondo" una obra que no ha buscado y que el profesor le sirve en bandeja de plata. Hay en este “rastreo” un aspecto esencial del trabajo de investigación que la escuela debería aprender a valorar.

Una vez identificado un elemento potencialmente útil, se activa la dialéctica de las *cajas negras y cajas claras*. Así, cada vez que encontramos obras $R_i^\lozenge$ que nos parecen relevantes, nos preguntábamos hasta qué punto debemos estudiarlas o qué nivel de gris es el aceptable. Es evidente que el tipo de estudio que uno desarrolla afecta el tipo de respuestas $R_i^\heartsuit$ que se elaboran, así como las nuevas cuestiones derivadas que surgen. Forma parte de la dirección del proceso el determinar en qué momento deben X e Y detener el estudio o, por el contrario, desarrollarlo más. Lo único claro es la diversidad de aproximaciones que se pueden establecer con las $R_i^\lozenge$, por mucho que la cultura escolar insista en construir nociones muy estancas de “conocer” e “ignorar” una obra.

La tercera dialéctica que queremos comentar es la de *la conjetura y la prueba* (o *experimentación*). En nuestro caso, el acceso a GeoGebra fue determinante para poder considerar en poco tiempo un número muy grande de configuraciones geométricas—cuando se desplazan los puntos P_1 y P_2 a lo largo de la parábola—y poder observar las variaciones e invariantes de los demás elementos de la figura. Este trabajo experimental con GeoGebra forma parte de la evolución del medio del estudio. Permite poner a prueba los elementos de respuesta encontrados en los media y formular hipótesis o conjeturas sobre las nuevas relaciones observadas. También requiere, por supuesto, la activación de conocimientos geométricos básicos para hacer las construcciones (por ejemplo, la definición de parábola como lugar geométrico o de circunferencia tangente a una recta) y de conocimientos técnicos para manejar el software con propiedad.

Ahora bien, las experimentaciones con GeoGebra no fueron consideradas por el equipo de investigadores que éramos como una validación suficiente. La dialéctica de las cajas negras y claras volvió a funcionar aquí con las restricciones—y condiciones—propias de la comunidad de matemáticos: las propiedades observadas en las configuraciones “dinámicas” de GeoGebra requerían una prueba intelectual o demostración formal. Aunque el paso de la observación de GeoGebra a la demostración geométrica sea un modo de “aclarar” la caja negra, no olvidemos que cualquier demostración matemática, por muy rigurosa que sea, siempre parte de un nivel de gris inicial y no se alcanza nunca el blanco nuclear.

La dialéctica de la recepción-difusión o de la inscripción-excripción

Las dialécticas que se han propuesto para describir los procesos de estudio e investigación están interrelacionadas. La de la *recepción y difusión* se vincula muy directamente con la de la *lectura y escritura* (o *excripción e inscripción*). Le dedicamos una sección aparte porque en el REI que vivimos tuvo un papel especial, como ahora explicaremos. Es evidente que hay recepción y difusión durante todo el proceso de estudio e investigación. La primera recepción ocurre con la *devolución* de la cuestión generatriz Q_0, que alguien tiene que difundir para que X e Y la asuman como propia, aunque sean los mismos X e Y. En la dialéctica de los media y los medios se produce una variedad de recepciones y difusiones, cada vez que encontramos una respuesta $R_i^\lozenge$ en los media y la queremos compartir con el grupo de estudio. El propio media lleva a cabo, por definición, un trabajo de difusión de $R_i^\lozenge$ que requiere su *inscripción* en algún dispositivo y posterior *excripción* por parte del investigador. Posteriormente, se necesitará recepción e inscripción para integrar esta respuesta escrita en el medio del REI. La última ocurrencia de la dialéctica tiene lugar al final del proceso, cuando X e Y consideran que ya tienen una respuesta $R^\heartsuit$ validada y se plantean difundirla, es decir inscribirla en un media apropiado.

En nuestro caso, y como suele ocurrir muchas veces en el trabajo matemático, en el momento de redactar y difundir nuestra repuesta $R^\heartsuit$, nos dimos cuenta de una debilidad en la demostración final: la justificación de que F es el punto medio del segmento IV (Figura 6). Surgieron nuevas preguntas a las que no sabíamos aportar repuesta. De ahí que tuviéramos que activar nuevamente la dialéctica de los media y los medios, junto con la del paracaidista y el trufero, de la excripción e inscripción, hasta encontrar una nueva respuesta $R_i^\lozenge$ que debíamos integrar en el medio, como una nueva caja gris, y con nuevas preguntas derivadas que dejamos abiertas, a la espera de nuevos REI futuros.

LLEVAR UN REI AL AULA: EL PROBLEMA DE LOS RECURSOS

El REI que acabamos de describir a partir de las dialécticas del estudio y la investigación fue vivido por los autores de este artículo dentro de un trabajo más amplio de investigación didáctica, la tesis doctoral de Ricardo Nicasso Benito (BENITO, 2019), y en el proceso de diseño a priori de una actividad de formación de profesores. La experiencia que hemos relatado entra dentro de lo que podemos considerar la normalidad de una investigación en didáctica, en el que los investigadores se encuentran con un problema matemático y deciden abordarlo para aportarle una solución. Esta experiencia es análoga a la de los REI-FP, cuando se propone a los profesores en formación "vivir un REI" en carne propia para después analizarlo, desarrollarlo y, eventualmente, adaptarlo para su implementación en el aula. Al vivir un REI desde la perspectiva que hemos descrito, uno toma consciencia de muchos elementos que el esquema herbartiano y las dialécticas ponen de manifiesto, y que quedarían de otro modo implícitos, cuando no reprimidos o anulados.

De la experiencia vivida y de su descripción, queremos sacar algunas consecuencias. Para empezar, nos podemos preguntar en qué medida el esquema herbartiano y las dialécticas se pueden utilizar en el propio REI como instrumentos del estudio y la investigación. Es decir, hasta qué punto estas herramientas que propone la TAD para describir procesos de estudio en el paradigma del cuestionamiento del mundo se limitan a su función descriptiva o analítica, o pueden también concebirse como *herramientas de acción* en el desarrollo de un REI. Algunas investigaciones recientes de la TAD propugnan este rol y presentan experimentaciones didácticas que avalan su viabilidad. Por ejemplo, Florensa (2018) y Florensa et al (2018) abordan el rol de los grafos de cuestiones y respuestas como instrumento de gestión de REI, tanto para el profesor durante el diseño, implementación y análisis de los REI, como para los estudiantes durante el propio desarrollo del proceso. Si bien estos trabajos se han centrado en la enseñanza universitaria, otras investigaciones en curso estudian su extensión a la enseñanza secundaria (VASQUEZ, BARQUERO y BOSCH, en prensa).

Los grafos de cuestiones y respuestas también han mostrado su funcionalidad en el caso de la formación de profesores y la implementación de REI-FP, como muestran Barquero et al (2018), Florensa et al (2020), Romo et al (2019), Ruiz-Olarría, Sierra, Bosch y Gascón (2014). En este caso, al tratarse de profesores en formación, el uso del esquema herbartiano y las dialécticas asociadas a la cronogénesis, mesogénesis y topogénesis del estudio se pueden introducir más fácilmente como herramientas para el análisis didáctico de los REI vividos. Sin embargo, sería muy importante mostrar que estas herramientas no sirven únicamente para instrumentalizar el REI-FP, es decir para analizar un REI en posición de profesor, sino que también tienen un rol instrumental en la realización del propio REI, cuando este se lleva a cabo en posición de estudiante-investigador.

Consideremos el problema desde otra perspectiva. Supongamos que hemos realizado el REI sobre el foco de la parábola y queremos implementarlo en el aula. ¿Qué condiciones se necesitarían para ello y qué restricciones se pueden anticipar? Un primer conjunto de condiciones y restricciones aparece vinculado al tipo de estudiantes, a su nivel educativo, al tipo de escuela y a la infraestructura pedagógica disponible. Existe otro conjunto de condiciones y restricciones tal vez menos visible, pero sin duda igual de crítico que los anteriores. Nos referimos a la ausencia de recursos que podríamos llamar *epistémicos* y que incluyen nuestra manera de referirnos a las actividades que realizamos durante el REI, así como a los resultados o productos de estas actividades. ¿De qué manera hubiéramos podido describir nuestro proceso de indagación sobre el foco de la parábola si no hubiéramos tenido acceso a las nociones de la TAD? ¿En qué términos hubiéramos descrito el proceso? ¿Qué elementos del proceso hubiéramos destacado y cuáles hubiéramos omitido a falta de denominaciones para designarlos? Es más, ¿qué acciones hubiéramos realizado y cuáles hubiéramos dejado de hacer por la dificultad de interpretarlas o entenderlas?

Invitamos a los lectores a hacer el ejercicio inverso e intentar dar cuenta de un proceso de estudio e investigación como el que hemos vivido, utilizando estrictamente el lenguaje y las nociones comunes de la comunidad matemática, que son a menudo los únicos de los que disponen los profesores cuando tienen que implementar este tipo de procesos. Los matemáticos han elaborado un universo rico para referirse a las definiciones, axiomas, problemas, hipótesis, conjeturas, teoremas, proposiciones, lemas, corolarios, con los que estructuran las síntesis de sus investigaciones—su proceso de *inscripción*—. Pero es mucho más difícil hallar nociones y términos para nombrar, por ejemplo, la variedad de tipos de cuestiones derivadas que surgen del problema inicial que nos planteamos, ya sean cuestiones "particulares", "marginales", "anteriores", "imposibles", "triviales" o de cualquier otro tipo que uno pueda considerar. Y lo mismo ocurre con las maneras de considerar las fuentes de información que tenemos al alcance para examinar lo dudables o fiables que pueden ser.

El análisis de la ecología de los procesos de estudio propios del paradigma del cuestionamiento del mundo no puede ignorar este tipo de necesidades que surgen en la realización, gestión y evaluación de las actividades de estudio e investigación. Tampoco puede dejar de lado el estudio de las restricciones que limitan su desarrollo. Su superación pasa por proponer instrumentos y dispositivos que permitan a estudiantes y profesores *nombrar* y *designar*, antes que *describir*, *interpretar*, *explicar* y *analizar*, los componentes de las actividades de indagación que se les propone realizar. El esquema herbartiano y las distintas dialécticas que hemos ilustrado en este artículo son una posible respuesta a esta carencia de recursos epistémicos y didácticos. Pero es una respuesta todavía muy provisional, que de momento está ayudando a visibilizar el problema, pero todavía no permite resolverlo. La manera cómo la didáctica puede contribuir a hacerlo es una de las líneas de investigación de la TAD a la que más esfuerzos le estamos dedicando.

AGRADECIMIENTOS

Esta investigación ha sido realizado dentro del proyecto RTI2018-101153-B-C21 del Programa Estatal de I+D+i orientado a los Retos de la Sociedad (MCIU/AEI/FEDER, UE).

También queremos agradecer los comentarios críticos y constructivos de Yves Chevallard y Josep Gascón.

REFERENCIAS

ALMOULOUD, S. A.; KONÉ, C.; SANGARÉ, M. S. Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the Republic of Mali. **RIPEM**, v. 4, n. 3, 2014.

BARQUERO, B.; BOSCH, M. Didactic Engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. En A. Watson & M. Ohtani (Eds.), **Task design in Mathematics Education**. Cham, Suiza: Springer. p. 249-272, 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. **Enseñanza de las Ciencias**, v. 29 n. 3, p. 339-352, 2011.

BARQUERO, B.; BOSCH, M.; ROMO, A. Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. **ZDM Mathematics Education**, v. 50, n. 2, p. 31-43, 2018.

BENITO, R. N. **Construção de um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores:** o ensino de cônicas. 2019. 220p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2019. Disponível em https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/22544/2/Ricardo%20Nicasso%20Benito.pdf

BOSCH, M. Study and Research Paths: a model for inquiry. En B. Sirakov, P. N. De Souza & M. Viana (Eds.), **International Congress of Mathematicians,** v. 3, p. 4001-4022. Rio de Janeiro: World Scientific Publishing Co, 2018

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; GARCÍA, F. J.; MONAGHAN, J. **Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A Comprehensive Casebook**. London: Routledge, 2020. http://dx.doi.org/10.4324/9780429198168-6

BOSCH, M.; WINSLØW, C. Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 35, n. 2, pp. 357-399, 2015.

CARVALHO, A. E. O.; SORRENTINO, T. A.; NUNES, A. G. **Estudo comparativo do desempenho de um fogão solar parabólico e de um fogão solar híbrido**. 2019. Trabalho de conclusão de curso. Universidade Federal Rural do Semiárido. Disponível em https://repositorio.ufersa.edu.br/bitstream/prefix/4658/1/AntonioEOC_ART.pdf. Acessado em 23.11.20

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné**. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage, 1985.

CHEVALLARD, Y. La notion de PER : problèmes et avancées, 2009. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. J. García (Eds.), **Sociedad, escuela y matemáticas: Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico,** p. 705-746, 2007. Jaén: Universidad de Jaén

CHEVALLARD, Y. Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: Alegato a favor de un contraparadigma emergente. **REDIMAT-Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n. 2, p. 161-182, 2013.

ESTEVE, J. M. El choque de los principiantes con la realidad. **Cuadernos de pedagogía**, *220*, p. 58-63, 1993.

FLORENSA, I. **Contributions of the epistemological and didactic analysis: question-answer maps in engineering and in teacher education.** 2018. 179p. Doctoral thesis – Universitat Ramon Llull, Barcelona, Spain.

FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Question-answer maps as an epistemological tool in teacher education, **Journal of Mathematics Teacher Education**. 2020. https://doi.org/10.1007/s10857-020-09454-4

FLORENSA, I.; BOSCH, M.; GASCÓN, J.; WINSLØW, C. Study and research paths: A new tool for design and management of project-based learning in Engineering. **International Journal of Engineering Education**, v. 34, n. 6, p. 1848-1862, 2018.

GARCÍA, F. J.; BARQUERO, B.; FLORENSA, I.; BOSCH, M. Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. **Avances de investigación en educación matemática**, n. 15, p. 75-94, 2019. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15
GASCÓN, J. Geometría sintética en la E.S.O. y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? **Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**, 39, 13-25. 2002.

GASCÓN, J. Efectos del «autismo temático» sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Desaparición escolar de la razón de ser de la geometría. **Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas**, 44, 25-34. 2003.

IGNÁCIO, R. S. **Percurso de estudo e pesquisa na educação básica:** um caminho para aprender geometria na educação básica. 2018. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil.

LICERA, R. M. **Economía y ecología de los números reales en la enseñanza secundaria y la formación del profesorado**. 2017. 251p. Tesis doctoral – Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.

LUCAS, C. O. **Una posible razón de ser del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional.** 2015. 625p. Tesis Doctoral – Universidade de Vigo, Vigo, Portugal.

LUCAS, C.; FONSECA, C.; GASCÓN, J.; SCHNEIDER, M. The phenomenotechnical potential of reference epistemological models. The case of elementary differential calculus, En M. Bosch, Y. Chevallard, F. J. García & J. Monaghan (Eds.) **Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A comprehensive Casebook,** p. 77-97. London: Routledge, 2019

OTERO, M. R.; LLANOS, V. C.; PARRA, V. Training in-service teachers: study of questions and the organization of teaching. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 4, 2020.

PARRA, V.; OTERO, M. R. Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didácticos-matemáticos de las "dialécticas". **Educación matemática,** v. 29, n. 3, p. 9-49, 2017**.** https://doi.org/10.24844/em2903.01

ROMO, A.; BARQUERO, B.; BOSCH, M. El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. **Uni-pluriversidad**, v. 19, n. 2, p. 161-183, 2019.

RUIZ-OLARRÍA, A.; SIERRA, T. A. D.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las matemáticas para la enseñanza en una formación del profesorado basada en el estudio de cuestiones. **Bolema**, v. 28, n. 48, p. 319-340, 2014.

RUIZ-OLARRÍA, A. **La formación matemático-didáctica del profesorado de secundaria. De las matemáticas por enseñar a las matemáticas para la enseñanza.** 2015. 372p. Tesis de doctoral – Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, España.

SANTOS JÚNIOR, V. B.; DIAS, M. A.; BOSCH, M. Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o Estudo das Noções de Juros Simples e Compostos. **Bolema**, v. 33, n. 63, p. 327-347, 2019.

SILVA, J. V. G. **Grandezas e medidas: um percurso de estudo e pesquisa para a prática profissional**. 2016. 426p.Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, Brasil.

VASQUEZ, S., BARQUERO, B., BOSCH, M. (en prensa). How long would it take to open a padlock? A study and research path with grade 10 students. In Barquero et al (Eds), Extended Abstracts. **Advances in the Anthropological Theory of the Didactic**, Birkhäuser-Centre de Recerca Matemàtica.

ANEXO 1. DETERMINACIÓN DE UNA PARÁBOLA

Una parábola viene determinada por tres de sus puntos y la *dirección* del eje. Esta propiedad es "clásica" en la geometría sintética. Aparece por ejemplo como un apartado del ejercicio 803, 8º, de las *Leçons de géométrie élémentaire*, volumen II, de Jacques Hadamard (1949, p. 260). La demostración "analítica" se hace sin gran dificultad. En un sistema de coordenadas donde el eje de las ordenadas es paralelo al eje de la parábola, la parábola tiene una ecuación de la forma $y = ax^2 + bx + c$. El hecho de que la parábola pase por los puntos de coordenadas (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, se escribe matricialmente como: $X\,[a, b, c]^t = [y_1, y_2, y_3]^t$, donde $X = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$. Tenemos $\mathrm{Det}(X) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)$ (puede usarse la calculadora en línea https://www.emathhelp.net/calculators/linear-algebra/matrix-determinant-calculator/); por lo tanto $\mathrm{Det}(X) \neq 0$ y el sistema tienen una solución (a, b, c) única.

ANEXO 2. DEMOSTRACIÓN ANALÍTICA DE QUE F ES EL PUNTO MEDIO DE IV

Consideremos que los centros de las circunferencias pertenecen a la parábola de ecuación $y = \alpha x^2$. Esta parábola tiene vértice V(0, 0) y foco $\mathrm{F}\left(0, \frac{1}{4a}\right)$.

La ecuación de la línea que une los puntos de intersección de la circunferencia con centro (a, b) y radio r_0 y la circunferencia con centro (c, d) y radio r_1 es:

$$y = \frac{a-c}{d-b}x + \frac{(r_0^2 - r_1^2) + (c^2 - a^2) + (d^2 - b^2)}{2(d-b)} \qquad (*)$$

(ver en http://www.ambrsoft.com/TrigoCalc/Circles2/circle2intersection/CircleCircleIntersection.htm).

En este caso tenemos:

$$a = x_1,\ b = \alpha x_1^2,\ r_0 = \alpha x_1^2,\ c = x_2,\ d = \alpha x_2^2,\ r_1 = \alpha x_2^2.$$

El punto I tiene abscisa $x = 0$. Sustituyendo en (*) se obtiene su ordenada y:

$$y = \frac{(\alpha^2 x_1^4 - \alpha^2 x_2^4) + (x_2^2 - x_1^2) + (\alpha^2 x_2^4 - \alpha^2 x_1^4)}{2(\alpha x_2^2 - \alpha x_1^2)} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(\alpha x_2^2 - \alpha x_1^2)} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Por lo tanto, $\mathrm{F}\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ corresponde al punto medio entre el vértice V(0, 0) y el punto $\mathrm{I}\left(0, \frac{1}{2a}\right)$.