

BESOINS MATHÉMATIQUES POUR LA PROFESSION : UNE ENQUÊTE

André PRESSIAT

Affiliation : Association pour la recherche en didactique des mathématiques (ARDM)
andre.pressiat@wanadoo.fr

Résumé : Le but de ce travail est d'identifier des besoins mathématiques de la profession dans le domaine des grandeurs et mesures, et de proposer des moyens pour les satisfaire. Les grandeurs considérées sont des grandeurs quotients, souvent péjorées, intervenant dans de nombreuses spécialités relevant des mathématiques mixtes. Ces besoins concernent bien évidemment les praxéologies mathématiques à enseigner, mais également les praxéologies didactiques à mettre en œuvre. Dans ces praxéologies didactiques, sont mises à contribution, de façon souvent silencieuse, des praxéologies mathématiques à propos desquelles les besoins sont plus difficiles à identifier et à satisfaire. Nous avons réalisé une enquête relative à une situation d'enseignement proposée dans une brochure professionnelle, dont le contenu s'est avéré surprenant. Dans cet article, nous rendons compte du déroulement et des résultats de notre enquête, en les présentant à l'aide du schéma herbartien. L'enquête montre l'importance de deux niveaux de l'échelle de codétermination didactique peu souvent considérés : celui de la civilisation et celui de la discipline. Par ailleurs, ce travail constitue un exemple de mise en œuvre de certaines dialectiques de l'enquête : dialectique de l'étude et de la recherche, dialectique du parachutiste et du truffier, dialectique des médias et des milieux.

Mots clés : Praxéologies, besoins de la profession, échelle des niveaux de codétermination didactique, schéma herbartien, dialectiques de l'enquête.

MATHEMATICAL NEEDS FOR THE PROFESSION: AN INQUIRY

Abstract: The aim of this work is to identify praxeological needs of the profession in the domain of quantities and their measure, and to propose means to satisfy these needs. Quantities considered here are quotient quantities; they are often pejorated, but frequently used in many specialties of mixed (or applied) mathematics. These needs of course concern mathematical praxeologies, but also the didactical praxeologies used to organize their study. Inside these didactical praxeologies are often silently involved mathematical praxeologies about which the needs are harder to identify and satisfy. We have realized an inquiry about a teaching situation proposed in a professional brochure, whose content has proved surprising. In this article, we report on the progress and results of the inquiry, presenting them with the herbartian schema. This inquiry picks out and emphasizes two levels of the scale of didactic codeterminacy: the civilization level and the discipline level. Moreover, this inquiry shows an example of implementation of some inquiry dialectics: study and research dialectics, parachutist and truffle finder dialectics, media and *milieu* dialectics.

Keywords: Praxeologies, needs of the profession, scale of levels of didactic codeterminacy, the Herbartian schema, dialectics of inquiry.

INTRODUCTION

Cet article présente une enquête que nous avons faite, qui trouve son origine dans le cours donné par Michèle Artaud (sous presse) lors de la 20^e école d'été de didactique des mathématiques. Ce cours porte sur les besoins praxéologiques de la position de professeur, en matière de grandeurs et de leur mesure, à la fois du point de vue des mathématiques pour l'enseignement et du point de vue de la direction d'étude. Il est notamment illustré par deux exemples issus d'une brochure éditée par l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (APMEP), rédigée par le Groupe de travail « Problématiques Lycée », intitulée *Pour un enseignement problématisé des mathématiques au Lycée – Tome 1 : En référence privilégiée à des contenus* (GRAS et al., 2003). Cette brochure propose des « situations » en référence à cinq « problématiques », et Artaud a choisi celle qui s'intitule : « Mesure de grandeurs, précision, approximation, incertitude ». L'un des deux exemples qu'elle a traités concerne la mesure de l'alcoolémie ; elle a identifié, à ce sujet, des besoins praxéologiques chez les auteurs de la brochure, depuis sa position de chercheuse en didactique. Nous avons étudié avec attention cette situation, qui concerne des grandeurs intervenant dans des « mathématiques mixtes », ainsi que l'analyse proposée par Artaud, et cela nous a permis de dégager une nouvelle question de recherche, ce qui nous a engagé dans une enquête approfondie relativement à cette situation.

Cette enquête nous a conduit vers des objets et des rapports à ces objets insoupçonnés au départ. Elle porte, d'une part, sur les besoins mathématiques de la profession relatifs aux praxéologies mathématiques utiles pour pouvoir étudier les questions posées dans la situation. D'autre part, l'enquête porte également sur l'organisation de l'étude mise en place par les auteurs, et débouche sur l'identification de besoins mathématiques pour la profession concernant l'élaboration des praxéologies didactiques. Avant d'en venir au déroulement de l'enquête et aux résultats obtenus, que nous présenterons à l'aide du schéma herbartien, il convient de préciser le cadre théorique dans lequel nous situons notre travail, ce qui est l'objet de la section suivante.

CONTEXTE THÉORIQUE

L'école de recherche dans laquelle se situe ce travail est la théorie anthropologique du didactique. Les outils théoriques utilisés viennent principalement de deux sources : l'article de Michèle Artaud évoqué précédemment et un article d'Yves Chevallard et Gisèle Cirade publié en 2010.

La notion de besoin praxéologique selon Michèle Artaud

Pour définir la notion de besoin praxéologique, Artaud mobilise la notion d'instance, qui permet de traiter conjointement une personne et une position institutionnelle, ainsi que la notion de praxéologie – les praxéologies étudiées pourront être aussi bien mathématiques que didactiques. Plus précisément, Artaud rappelle la définition d'une instance :

On appelle instance, i , une personne, x , ou une position, p , occupée dans une institution (par exemple, nous sommes une personne occupant la position de chercheuse en théorie anthropologique du didactique dans l'institution de recherche en didactique et Gisèle Cirade est une autre personne qui occupe la même position) : on parle alors d'instance personnelle ($i = x$) ou d'instance positionnelle ($i = p$). Et on note $R(i, o)$ le rapport de l'instance i à l'objet o – ce rapport pouvant être dit personnel lorsque l'instance est personnelle, institutionnel lorsque l'instance est positionnelle. (ARTAUD, sous presse).

Dans son article, Artaud considère comme instance \hat{w} la position de chercheur en didactique des mathématiques qu'elle occupe ($\hat{w} = p\xi$) et comme instance \hat{u} la position de noosphérien de l'enseignement des mathématiques qu'occupent les auteurs de la brochure ($\hat{u} = p_n$) ; ainsi que les objets « les grandeurs et leur mesure », « la notion de grandeur », « l'espèce de grandeur longueur », etc. Elle définit alors ainsi la notion de *besoin de \hat{u} selon \hat{w}* relatif à un objet o :

Plaçons-nous alors dans le cas où \hat{w} juge le rapport de \hat{u} à o . On pourra dire que \hat{w} juge que le rapport de \hat{u} à o n'est pas conforme à un rapport à o qu'elle souhaiterait voir exister, et que nous noterons génériquement $R(*\hat{s}, o)$, où $*\hat{s}$ est en quelque sorte la *position qui devrait exister*, selon ce qu'imagine \hat{w} . C'est dans ce cas que nous parlerons d'un *besoin de \hat{u} selon \hat{w}* . On soulignera que l'origine de la demande ici n'est pas \hat{u} , mais \hat{w} , et que $R(*\hat{s}, o)$ n'est pas $R(\hat{w}, o)$ [...]. (*Ibid.*)

Pour identifier ces besoins, elle analyse les praxéologies mises en œuvre dans les exemples étudiés et, en les évaluant, y repère des manques relatifs à divers composantes de ces praxéologies (un exemple sera donné plus loin).

L'équipement praxéologique du professeur selon Yves Chevallard et Gisèle Cirade

Dans l'article qu'ils ont co-écrit, ces deux chercheurs identifient et distinguent plusieurs types de praxéologies dans l'équipement d'un professeur de mathématiques :

On a pu proposer une description de l'équipement praxéologique d'un professeur en distinguant savoirs *à enseigner* et savoirs *pour enseigner*. Souvent reprise depuis, cette distinction est insuffisamment élaborée pour permettre un repérage réaliste des praxéologies utiles à un professeur de mathématiques, notamment parce que les « savoirs pour enseigner » y sont souvent réduits aux « savoirs pédagogiques, organisationnels et relationnels » (Bourdoncle & Demailly, 1998. p. 14). Or, pour enseigner des mathématiques, il y a, parmi les savoirs pertinents, des savoirs *mathématiques* qui ne sont pas des mathématiques *à enseigner* : le premier outil pour enseigner des mathématiques, *ce sont les mathématiques elles-mêmes*. Pour cette raison, nous placerons d'abord dans une catégorie unique, ouverte, celle *des praxéologies pour la profession*, l'ensemble des praxéologies dont la profession peut avoir avantage à s'équiper. Bien entendu, cette catégorie contient la sous-catégorie des praxéologies *à enseigner* ; mais elle est loin de s'y réduire : au plan mathématique, elle inclut ainsi les connaissances indispensables pour *identifier* les praxéologies à enseigner. L'ensemble (flou, et évolutif) des praxéologies mathématiques *à enseigner* peut alors s'inclure dans une autre sous-catégorie, celle des praxéologies *pour l'enseignement*, qui comprend, avec les *praxéologies didactiques* relatives à telle ou telle praxéologie mathématique *à enseigner*, les praxéologies mathématiques directement utiles pour concevoir et construire ces praxéologies didactiques (dont l'élaboration suppose aussi des praxéologies *pour la profession* qui ne sont pas à strictement parler des praxéologies *pour l'enseignement*). (CHEVALLARD ; CIRADE, 2010, p. 45)

Par ailleurs, l'étude des besoins de la position p_n de noosphérien selon la position p_ξ de chercheur en didactique, à partir d'un corpus de documents issus de la noosphère, permet également de dégager les *besoins praxéologiques de la position de professeur*¹, p_t , selon p_ξ . En effet :

¹ Dans la notation p_t , l'indice t fait référence à *teacher*, mot dont l'emploi remplace celui du mot « professeur », qui aurait conduit à mettre la lettre « p » en indice.

Dans une profession, ce que sait un professionnel n'est guère différent de ce que sait la profession. Ou, pour user des concepts de la TAD, le rapport personnel de tel professeur à tel objet – mathématique ou didactique – de son métier est pour l'essentiel superposable au rapport institutionnel qui est celui de la profession à cet objet. (*Ibid.*, p. 44)

Dans cet article, nous chercherons à identifier des besoins en mathématiques de la profession (au sens large, voir citation ci-dessus), selon la position de chercheur en didactique p_{ξ} . Nous y occuperons également une autre position, celle d'enquêteur, que nous désignerons par AP . Ces besoins concerneront non seulement les praxéologies mathématiques à enseigner, mais également (voir citation ci-dessus, p. 45) celles permettant l'identification de ces praxéologies d'une part, et les praxéologies mathématiques directement utiles pour concevoir et construire les praxéologies didactiques mises en place pour l'étude de ces praxéologies à enseigner, d'autre part.

Afin de présenter de manière plus précise l'objet de la présente recherche, il convient d'examiner la « situation problème » qui en est l'objet.

La « situation problème »

La situation problème est elle-même intitulée *Deux verres, bonjour les dégâts*, titre faisant allusion à une campagne du Comité français d'éducation pour la santé datant de 1984 dont le slogan était « Un verre, ça va... Trois verres, bonjour les dégâts ! »². Voici tout d'abord l'énoncé que les auteurs proposent pour des élèves de la classe de 1^{re} L (élèves de 16-17 ans, série littéraire) :

Le calcul de l'alcoolémie se fait de la façon suivante une heure après l'absorption et à jeun (au sens de : sans avoir absorbé de nourriture... autre que la boisson alcoolisée !) :

soit a le poids d'alcool absorbé,

soit p le poids de la personne qui boit,

soit k le coefficient de diffusion qui est égal à 0,7 pour l'homme et 0,6 pour la femme.

Le taux d'alcoolémie est proportionnel à a et inversement proportionnel à p et k . On rappelle que la densité de l'alcool pur est 0,8.

1° Une heure après avoir bu un demi-litre de bière à 5°, quel est le taux d'alcoolémie d'un homme de 75 kg et d'une femme de 55 kg ?

² Le slogan a été trouvé par le publicitaire Daniel Robert et illustré par Cabu, dans une brochure ayant ce même slogan pour titre.

2° Une heure après avoir bu un whisky (4 cl à 40°) quels sont les taux respectifs d'un homme et d'une femme de mêmes poids que dans la question 1° ? (GRAS et al., p. 159)

Et voici les commentaires et éléments de solution qu'ils proposent à destination du professeur :

Remarque et solution :

Ce problème a de multiples objectifs :

* social : apprendre aux élèves les dangers de l'alcool.

* scientifiques : manipuler les notions de capacité, de densité et de concentration.

* mathématiques : établir une formule formalisant une situation de proportionnalité et savoir l'utiliser.

Par suite, l'information donnée nous permet de dire que le taux est obtenu par la formule suivante : $t = \frac{a}{p \cdot k}$

Ainsi, un demi-litre de bière à 5° fournit 20 g d'alcool pur (500 ml à 5° soit 25 ml d'alcool pur), soit $25 \times 0,8 \text{ g} = 20 \text{ g}$. Donc, un homme de 75 kg a un taux égal à 0,38 g/L et une femme de 55 kg un taux de 0,606 g/L (arrondir à 0,61).

Pour un whisky, 4 cL à 40° fournissent $0,04 \times 320 \text{ g} = 12,8 \text{ g}$ d'alcool puisque dans un litre de whisky on trouve $0,8 \times 400 \text{ g} = 320 \text{ g}$ d'alcool pur. Un homme aura donc un taux de 0,24 g/L et une femme 0,39 g/L.

Note : Il est dit également que l'absorption pendant le repas fait tomber d'un tiers le taux d'alcoolémie. Il est possible alors de refaire les calculs précédents dans ces nouvelles conditions. On trouvera respectivement 0,16 et 0,26 g/L. On pourrait également faire représenter la situation dans laquelle un apéritif est pris, puis suivi d'une demi-bouteille de vin, environ une heure après et au cours du repas. On utilisera l'information : le corps élimine 0,15 g/L par heure ce qui, en théorie et si les phénomènes d'absorption-élimination sont linéaires, permet de donner à chaque instant le taux d'alcoolémie.

De toutes façons, on n'oubliera jamais de rappeler aux élèves que celui qui devra conduire ne boit pas ! (GRAS et al., p. 159-160).

Dans la section de son article intitulée *Où il est question de déterminer un taux d'alcool*, à laquelle nous renvoyons le lecteur, Artaud (sous presse) étudie la manière dont sont conduits les calculs évoqués dans les éléments de solution. En conclusion, l'étude fait apparaître un rapport des auteurs à l'objet « les grandeurs et leur mesure » qui n'est pas conforme au rapport $R(*\hat{s}, o)$ que l'auteur du cours, en position \hat{w} , souhaiterait voir exister :

Selon \hat{w} , dans le cas considéré, *û a besoin non seulement d'une technique mais surtout d'un environnement technologico-théorique concernant les grandeurs quotients et les grandeurs produits, ainsi que les opérations les mettant en jeu.* (ARTAUD, sous presse)

En prenant connaissance du texte des auteurs de la brochure, l'auteur du présent article, *AP*, a été très surpris. Le motif de cette surprise est expliqué dans le paragraphe suivant.

Du motif de la surprise à la question de recherche

Les auteurs posent un problème consistant à déterminer la concentration d'alcool dans le sang dans deux circonstances bien précises. Dans leur esquisse de solution, ils recourent, sans vraiment la justifier, à la formule $t = \frac{a}{p^k}$, dans laquelle a et p sont des masses, et où k est un nombre « pur », le « coefficient de diffusion ». L'essentiel des calculs concerne le calcul de la masse a d'alcool à partir du volume de boisson ingéré, du titre en alcool de cette boisson et de la densité de l'alcool. La dernière étape du calcul, non matérialisée dans la solution, est un nombre. Or ce résultat numérique du calcul se voit affublé de l'unité g/L, alors qu'aucune allusion à un volume n'a été faite auparavant dans les grandeurs considérées. Un tel contrôle de cohérence dimensionnelle, très simple, aurait dû alerter les auteurs. Il n'en a rien été. *AP* en est très surpris, et se pose immédiatement la question : Pourquoi ? Question qui, reformulée de manière plus précise, cède la place à la double question suivante :

Question Q : Comment les auteurs ont-ils élaboré cet énoncé et, en définitive, pourquoi l'ont-ils choisi ? Pourquoi les éléments de solution proposés souffrent-ils de tels silences ou lacunes ?

Comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, l'enquête entreprise par *AP* pour construire la réponse à cette question Q sera décrite en utilisant le schéma herbartien.

L'emploi du schéma herbartien

AP se place en position p_ξ de chercheur en didactique. Désignons par $S(AP, Z, Q)$ le système de recherche, analogue à ce qu'un système didactique $S(X, Y, Q)$ est à l'étude, qui s'est alors progressivement mis en place, Z désignant ici l'ensemble des aides à l'étude dont *AP* a pu bénéficier. Au départ, le système $S(AP, Z, Q)$ souhaite produire (\rightsquigarrow) une réponse R^\forall à la question Q . Le schéma herbartien se présente sous la forme réduite :

$$S(AP, Z, Q) \rightsquigarrow R^\forall.$$

Dans ce but, $S(AP, Z, Q)$ va se constituer (\rightarrow) un « milieu pour la recherche », M ; avec celui-ci, le système souhaite produire (\hookrightarrow) une réponse R^\heartsuit à la question Q . Le schéma se présente sous la forme semi-développée :

$$[S(AP, Z, Q) \rightarrow M] \hookrightarrow R^\heartsuit.$$

Dans ce milieu M , figurent d'emblée les outils de la TAD, des entités praxéologiques comme l'algèbre des espèces de grandeur – dont les contours seront précisés plus loin –, ainsi que les résultats déjà obtenus par Artaud dans son étude, objets qui sont sous-entendus dans la description qui suit, où le milieu M , dans son état final, est décrit formellement :

$$M = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_n, R_{n+1}^\diamond, R_{n+2}^\diamond, \dots, R_p^\diamond, D_{p+1}, D_{p+2}, \dots, D_q, O_{q+1}, O_{q+2}, \dots, O_r\}.$$

Les Q_i sont des questions engendrées par l'étude de la question Q , les R_j^\diamond sont des réponses aux questions Q_i qui sont « poinçonnées » par diverses institutions, les D_k sont des corpus de données (exposés, données expérimentales...), et les O_l sont d'« autres œuvres » (par exemple les œuvres sur lesquelles les réponses R_j^\diamond reposent³). Dans la suite, les œuvres Q_i, R_j^\diamond, D_k , et O_l seront introduites progressivement, selon une numérotation qui sera précisée au fur et à mesure.

Plusieurs questions Q_i se posent relativement à la praxéologie mathématique constituant l'enjeu pour les auteurs, enjeu que ces derniers présentent sommairement ainsi : « établir une formule formalisant une situation de proportionnalité et savoir l'utiliser ». Parmi ces questions, Q_1 reprend sous une forme plus précise le constat qui a fait l'objet de notre surprise :

$\rightarrow Q_1$: On constate que les auteurs, en divisant une masse a par une masse p , et en multipliant le nombre $\frac{a}{p}$ qui en résulte par le nombre $\frac{1}{k}$, affirment que le résultat est la mesure d'une grandeur-quotient d'une masse par un volume, exprimée avec l'unité g/L. Pourquoi ne donnent-ils aucune justification sur ce point ?

$\rightarrow Q_2$: Comment donner une signification à la locution « être inversement proportionnel à une grandeur » quand cette dernière, k , qui est sans dimension, prend seulement deux valeurs ?

$\rightarrow Q_3$: D'où le « coefficient de diffusion » vient-t-il ?

De multiples hypothèses peuvent être faites a priori sur des réponses possibles à Q_1 . Dans le premier exemple traité, sachant que la masse d'alcool bue par un homme de 70 kg est de 20 g, pour obtenir 0,38 g/L comme résultat, on peut imaginer que k , au lieu d'être égal à 0,7,

³ Voir Chevallard (2020, p. 44).

soit égal à 0,7 L/kg ; en utilisant le calcul dans l’algèbre des espèces de grandeurs, on obtient alors $\frac{20 \text{ g}}{75 \text{ kg} \times 0,7 \text{ L/kg}} = \frac{20 \text{ g}}{(75 \times 0,7) \text{ L}} = \frac{20 \text{ g}}{52,5 \text{ L}} \approx 0,38 \text{ g/L}$. L’incohérence dimensionnelle explicitée dans l’énoncé de Q_1 serait alors la conséquence d’une erreur ou imprécision dans les informations fournies dans l’énoncé au sujet de k , ce qui nous renvoie à Q_3 .

L’ENQUÊTE PROPREMENT DITE

Pour progresser dans l’élaboration d’une réponse R_1^\heartsuit à la question Q_1 , une enquête sur la notion de « taux d’alcoolémie »⁴ s’impose.

L’existence d’Internet change considérablement les moyens d’enquêter et donc les pratiques d’enquête. En formulant la requête « taux d’alcoolémie » dans le moteur de recherche Google, on sait que les réponses sont ordonnées selon un algorithme – le PageRank – dont il est bon de connaître le fonctionnement⁵. En tête de liste des réponses, on trouve le site gouvernemental de la sécurité routière, qui précise la législation française sur ce point. Ensuite, on trouve le site d’une société par actions simplifiée (SAS), LégiPermis⁶, que nous considérerons comme une donnée, D_1 . En cherchant sur la longue page qui s’affiche, on trouve une première réponse, grâce à un lien relatif au « calcul du taux d’alcool dans le sang »⁷. En voici un passage intéressant pour notre enquête, relatif au taux pour un homme, le taux pour une femme étant présenté de la même façon, en précisant que le « coefficient de diffusion » est alors de 0,6.

⇒ Réponse $R_{1,1}^\diamond$

Taux pour homme = $(V * t * 0,8) / (0,7 * m)$ où :

- V est le volume de boisson ingérée en ml,
- t est le degré d’alcool en pourcentage, un verre de vin à 12°= 12 %,
- 0,8 est la densité de l’alcool (l’éthanol), c’est une constante,
- 0,7 est le coefficient de diffusion pour un homme,
- m la masse de la personne en kg.

⁴ L’emploi de la locution « taux d’alcoolémie » peut être contesté, car pléonastique : l’alcoolémie étant le *taux* d’alcool dans le sang. Mais le fait que les auteurs l’emploient dans leur texte légitime cette requête, ce qui, à ce stade de l’enquête, ne préjuge en rien de la pertinence de son emploi par les auteurs.

⁵ Le lecteur en trouvera une description dans le journal du séminaire « Théorie anthropologique du didactique & ingénierie didactique du développement » (TAD/IDD) de l’année 2007-2008 (CHEVALLARD, 2007-2008). Les 8 séances traitent de cette question, aux pages respectives : 26-29, 22-24, 13-15, 21-27, 22-26, 1-15, 26-29, 3-6.

⁶ <https://www.legipermis.com/infractions/alcool-permis-conduire.html>

⁷ <https://www.legipermis.com/blog/2016/04/11/alcool-dans-le-sang-le-calcul-dalcoolemie/>

Pour un homme de 75 kg, buvant 2 verres de vin rouge de 14 cl à 12°, le calcul est le suivant : $T = (2 * 140 * 0,12 * 0,8) / (0,7 * 75) = 26,88 / 52,5 = 0,51$ g/L. Ce taux de 0,51 g/L dépasse la limite légale d'alcoolémie pour un permis définitif (0,5 g/L) ou pour un jeune conducteur en permis probatoire. Dans ce cas, cet individu ne pourra prendre la route.

De nombreux autres sites Internet proposent le même calcul, avec des notations et formules analogues (y compris la page <https://fr.wikipedia.org/wiki/Alcoolémie>, mais l'article, datant de 2012, est signalé au lecteur comme « ne citant pas suffisamment ses sources »⁸). Dans $R_{1,1}^\diamond$, on note quelques différences par rapport à l'énoncé de la brochure : une formule est d'emblée donnée pour chacun des deux genres, et le détail du calcul de la masse d'alcool ingérée est pris en charge dans les formules. Mais le mystère demeure en ce qui concerne la réponse à la question Q_1 , car l'apparition en fin de calcul d'une concentration masse/volume, par l'ajout de l'unité g/L, n'est pas davantage justifiée. On n'apprend rien de nouveau à propos du « coefficient de diffusion » (question Q_3).

Ceci conduit à formuler une requête sur Internet à son sujet. Parmi les réponses obtenues, l'une d'elles⁹ (donnée D_2) est intéressante. En voici un extrait, qui constituera la réponse $R_{3,1}^\diamond$:

→ Réponse $R_{3,1}^\diamond$

L'alcoolémie, c'est-à-dire la concentration du sang en éthanol, augmente rapidement après l'absorption d'alcool car celui-ci traverse facilement la paroi intestinale. Elle commence à baisser après le dernier verre mais, hélas pour les buveurs, bien plus lentement. Il est classiquement admis que l'alcoolémie (mesurée en grammes d'alcool éthylique par litre de sang) diminue de 0,1 g à 0,15 g par heure après avoir atteint un maximum une demi-heure après l'absorption (à jeun) ou une heure (après un repas). Pour estimer son taux d'alcoolémie, c'est donc ce pic qu'il faut prendre comme temps zéro.

Ces valeurs sont tirées des mesures d'un chimiste suédois, Erik Widmark, qui a donné son nom à la droite censée décrire la baisse d'alcoolémie au cours du temps. Il faut bien comprendre que cette courbe est théorique et que la réaction du corps à l'éthanol varie d'une personne à l'autre. Elle diffère selon le genre, le poids et l'âge, notamment.

Les femmes sont plus sensibles à l'alcool que les hommes pour plusieurs raisons : entre autres facteurs à cause d'une masse corporelle plus faible, d'une composition plus riche en tissu adipeux et plus pauvre en eau. D'ailleurs, la formule de Widmark, empirique, introduit un « coefficient de diffusion », qui correspond à la teneur du corps en eau. Il est donné pour 0,6 (60 %) pour une femme et 0,7 pour un homme (65 %).

⁸ Cependant, en bas de la page consultée, il est noté : « La dernière modification de cette page a été faite le 27 septembre 2020 à 09:10. ».

⁹ Trouvée sur la page : <https://www.futura-sciences.com/sante/videos/vitesse-elimine-t-on-alcool-5685/>

On apprend ainsi que le « coefficient de diffusion » a été introduit par un chimiste suédois, Erik Widmark, et que les valeurs 0,6 pour une femme et 0,7 pour un homme sont les valeurs qu'on lui donne, sans que cela apparaisse très sûr : 0,7 ou 65 % ? Cette réponse $R_{3,1}^\diamond$ relance donc indirectement la question Q_2 . Le premier paragraphe de la réponse évoque le maximum de la concentration (le pic), qui se produit soit une demi-heure (à jeun), soit une heure (dans le cas d'un repas) après le début de l'ingestion d'alcool, qui devrait être pris comme « temps zéro ». Cela fait écho à l'énoncé de la brochure – ce dernier précise que, pour calculer le taux d'alcoolémie, on se place une heure après l'absorption à jeun –, tout en s'en distinguant – la durée à prendre en considération est d'une demi-heure (à jeun) dans un cas, d'une heure (à jeun) dans l'autre.

Mais cette réponse $R_{3,1}^\diamond$ est précieuse car elle indique une œuvre O_1 , la formule de Widmark, et son créateur, Erik Widmark, à propos desquels il sera facile de lancer des requêtes sur Internet afin de répondre aux questions que le lecteur a déjà devinées :

→ Q_4 : Qu'est-ce que la formule de Widmark ? Comment a-t-elle été établie ?

→ Q_5 : À quoi la formule de Widmark sert-elle ?

La requête « formule de Widmark » fournit de nombreuses réponses. L'une d'entre elles est un site allemand¹⁰ (donnée D_3), affichant ses pages en trois langues : allemand, anglais, français. Commençons par la page en anglais :

→ Réponse $R_{4\text{-anglais}}^\diamond$

From Widmark 1932 established relationship for the calculation of the theoretical maximum blood alcohol concentration C in mg/g [mg/100 ml = mg/g \times 100 / 1.055] from the consumed amount of pure alcohol A in g and the body mass p in kg [1 lbs = 0.454 kg] according to the formula

C [mg/g] = $A / (p$ [kg] $\times r)$ resp. C [mg/100 ml] = $2.3237 \times A / (p$ [lbs] $\times r)$ where r is meaning the so-called reduction factor. Alcohol is only soluble in water but not in the bones and fat tissue. Therefore, these body mass fractions are not available for alcohol distribution. For men, the average value of r is 0.7. Women have generally more fatty tissues, here an r value of 0.6 is assumed. Newer approaches, e.g. according Watson, consider an individualised reduction factor r computed from body mass, body height, age and gender. These formulas are in modified form the basis of all calculation programs.

For realistic estimations of the BAC the resorption deficiency and the elimination rate, beginning from the start of drinking, is to be considered additionally.

¹⁰ https://www.alkohol-lexikon.de/ALCOHOL/AL_GE/widmark_f.shtml

On constate que la qualité de la traduction en anglais laisse à désirer, mais bien moins que celle de la traduction en français, que nous avons dû retoucher (parties en italique), car elle contient des erreurs plus grossières.

→ Réponse $R_{4\text{-français}}^\diamond$

La formule de Widmark (1932) *établit* le calcul du taux d'alcoolémie maximal théorique c de la *concentration* en fonction de la quantité d'alcool A en grammes et de la masse corporelle p :

$$c = A / (p * r)$$

où r est ce qu'on appelle le facteur de réduction. Étant donné que l'alcool est soluble uniquement dans l'eau, il n'est pas distribué dans les os et dans les tissus adipeux, donc, ces parties de masse du corps ne sont pas disponibles. Pour les hommes, la valeur moyenne de r est 0,7. Les femmes disposent en général de plus de tissus adipeux, *dans ce cas on suppose que $r = 0,6$* . Les nouvelles approches, *par exemple* celle de Watson, prend en compte un facteur de réduction personnalisé r *fonction de* la masse corporelle, de la taille du corps, de l'âge et du sexe. Ces formules sont, sous une forme modifiée, la base de calcul de tous les programmes.

[La dernière phrase, « Pour l'évaluation réaliste le déficit de résorption et l'élimination de commencement de boire à prendre en compte », n'est guère intelligible, et nécessiterait des modifications plus importantes que celles faites précédemment.]

Terminons par la réponse en allemand :

→ Réponse $R_{4\text{-allemand}}^\diamond$

Von **Widmark** 1932 aufgestellte Beziehung zur Berechnung der theoretisch maximal erreichbaren Blutalkoholkonzentration c aus der aufgenommenen Alkoholmenge A in Gramm und dem Körpergewicht p gemäß der Formel

$$c = A / (p * r)$$

wobei r den sogenannten Reduktionsfaktor bedeutet. Da Alkohol ausschließlich wasserlöslich ist, verteilt er sich nicht in den Knochen und im Fettgewebe, daher steht dieser Körpermassenanteil nicht zur Verfügung. Für Männer gilt der Durchschnittswert von $r = 0,7$. Frauen verfügen generell über mehr Fettgewebe, hier wird von $r = 0,6$ ausgegangen. Neuere Ansätze, z.B. nach Watson, berücksichtigen mit einem individualisiertem Reduktionsfaktor r zusätzlich zur Körpermasse noch Körpergröße, Alter und Geschlecht. Diese Formeln sind in modifizierter Form Grundlage aller Blutalkohol-Berechnungsprogramme.

Für realistische Abschätzungen ist das Resorptionsdefizit v und der Abbau ab Trinkbeginn (siehe Elimination) zusätzlich zu berücksichtigen. Allgemein gilt

$$c = A * (1 - v) / (p * r) - \beta * (t - t_b)$$

wobei β den stündlichen Abbauwert darstellt und $t - t_b$ die Zeitspanne von Trinkbeginn bis zum Berechnungszeitpunkt (in dezimalen Stunden).

On constate que le texte en allemand est plus détaillé que les deux traductions. Le dernier paragraphe précise que, « pour des estimations réalistes, le déficit de résorption v et la

dégradation depuis le début de la consommation d'alcool (voir Élimination) doivent également être pris en compte ». Une deuxième formule donne alors l'évolution de c au cours du temps : t désigne l'heure du calcul, et t_b l'heure du début de consommation (en heures décimales), alors que β représente la « valeur de dégradation horaire ». Dans les trois textes, r est appelé « facteur de réduction ».

Ces trois textes concordent sur le fait que la formule de Widmark permet de calculer un « taux maximal théorique », C (ou c), qui apparaît, pour l'instant du moins, plus mystérieux que le « pic » évoqué dans $R_{3,1}^{\diamond}$; dans les trois textes, r est appelé « facteur de réduction ». Mais le plus frappant est la ressemblance entre la formule de Widmark et celle proposée dans la brochure de l'APMEP : aux lettres C (ou c) et r sont seulement substituées respectivement les lettres t (en référence au mot « taux ») et k .

On apprend également que les valeurs 0,7 et 0,6 – cette dernière apparaissant comme moins sûre – sont des moyennes, ce qui fournit des éléments de réponse à Q_2 : k ne prend pas que deux valeurs ! Mieux même, on apprend que, selon les travaux de Watson, ce coefficient peut être exprimé comme fonction de plusieurs caractéristiques individuelles.

Mais, et c'est plus intéressant du point de vue de la réponse à Q_1 , la traduction en anglais fait apparaître non pas *une* formule de Widmark, mais *deux*, dépendant des unités choisies :

$$C \text{ [mg/g]} = A / (p \text{ [kg]} \times r) \dots \dots \dots (I)$$

$$C \text{ [mg/100 ml]} = 2.3237 \times A / (p \text{ [lbs]} \times r) \dots \dots \dots (II).$$

La première exprime la concentration en mg/g. La deuxième, exprimée en mg/100 mL, est précédée des informations suivantes :

$$\text{mg/100 ml} = \text{mg/g} \times 100 / 1.055 \dots \dots \dots (1)$$

$$1 \text{ lbs} = 0.454 \text{ kg} \dots \dots \dots (2).$$

L'information (2) concerne l'usage de la livre anglaise comme unité de masse, encore présent dans certains pays (Royaume-Uni, États-Unis, Canada) malgré l'adoption du système métrique. L'information (1) est plus intéressante en vue d'une réponse à la question Q_1 , car on y voit apparaître une relation entre des unités de concentration, mg/g et mg/100ml. Notons cependant que cette égalité (1) est singulière, car ses deux membres n'appartiennent pas à la même espèce de grandeur : la grandeur masse/volume pour le premier membre, la grandeur sans dimension \mathbf{R}^+ pour la seconde ; en effet, mg/g est égal à 1/1000, ou encore 1 ‰. On retombe sur la même incohérence dimensionnelle, qui peut donner lieu aux mêmes

interrogations et hypothèses que celles faites à propos de Q_1 . La remise en cause de l'égalité (1) rend suspecte l'égalité (II). L'égalité (1), sur laquelle nous reviendrons plus loin, fait intervenir le nombre 1,055. Même si le lecteur a une petite idée sur sa signification, la coexistence de deux manières de calculer la concentration d'alcool dans le sang invite à lancer sur ce sujet une enquête sur Internet, cette fois-ci en langue anglaise, à l'aide de la requête « Blood Alcohol Concentration ».

La page https://en.wikipedia.org/wiki/Blood_alcohol_content (donnée D_4) contient un paragraphe intitulé « Units of measurement » qui fournit à la question Q_6 suivante, une réponse, notée $R_{6,1}^\diamond$.

⇒ Q_6 : « Comment mesure-t-on la concentration d'alcool dans le sang ? »

⇒ Réponse $R_{6,1}^\diamond$

Units of measurement

There are several different units in use around the world for defining blood alcohol concentration. Each is defined as either a mass of alcohol per volume of blood or a mass of alcohol per mass of blood (never a volume per volume). 1 milliliter of blood has a mass of approximately 1.06 grams. Because of this, units by volume are similar but not identical to units by mass. In the U.S. the concentration unit 1% w/v (percent mass/volume, equivalent to 10 g/l or 1 g per 100 ml) is in use.

This is not to be confused with the amount of alcohol measured on the breath, as with a breathalyzer. The amount of alcohol measured on the breath is generally accepted as proportional to the amount of alcohol present in the blood at a rate of 1:2100. Therefore, a breathalyzer measurement of 0.10 mg/L of breath alcohol converts to 0.0001×2100 g/10dL, or 0.21 g/dL of blood alcohol (the units of the BAC in the United States, this is equivalent to 2.1 permille). While a variety of units (or sometimes lack thereof) is used throughout the world, many countries use the g/L unit, which does not create confusion as percentages do. Usual units are highlighted in the table below [tableau 1].

Tableau 1 – Units of measurement for BAC.

Reference	Unit ¹¹	Dimensions	Equivalent to	Used in
BAC by volume	1 percent (%)	1/100 g/mL = 1 g/dL	9.43 mg/g, 217.4 mmol/L	United States, Australia, Canada
	1 <u>permille</u> (‰)	1/1000 g/mL = 1 g/L	0.943 mg/g, 21.7 mmol/L	Austria, Belgium, Bulgaria, France, Latvia, Lithuania, Netherlands, Poland, Romania, Spain, Switzerland, Turkey
	1 <u>basis point</u> (‱)	1/10,000 g/mL = 10 mg/100 mL	94.3 ppm, 2.17 mmol/L	United Kingdom
BAC by mass	1 percent (%)	1/100 g/g = 1 cg/g	1.06 cg/mL, 230 mmol/L	
	1 permille (‰)	1/1000 g/g = 1 mg/g	1.06 mg/mL, 23 mmol/L	Finland, Norway, Sweden, Denmark, Germany, Ireland, Russian Federation
	1 <u>part per million</u> (ppm)	1/1,000,000 g/g = 1 µg/g	1.06 µg/mL, 23 µmol/L	

Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Blood_alcohol_content (consulté en octobre 2020).

Le tableau ci-dessus et le texte qui le précède concernent les « unités de mesurage » de la concentration d'alcool dans le sang (CAS). Un chercheur, doté du milieu de recherche M , y trouve son compte, en se livrant à une excription¹² de cette réponse $R_{6,1}^\diamond$ à Q_6 . Il va notamment s'intéresser aux objets mathématiques intervenant avant l'étape du mesurage, à savoir les grandeurs qui sont considérées. En effet, la première et la dernière colonne du tableau montrent que les continents se partagent en deux :

- ceux qui définissent la CAS (et pas seulement les unités permettant de la mesurer) comme quotient de deux masses – nous noterons $C_{m/m}$ une telle concentration,
- ceux qui la définissent comme quotient d'une masse par un volume, $C_{m/v}$.

Le texte précédent le tableau précise que la CAS n'est jamais définie comme quotient d'un volume par un volume ($C_{v/v}$). Il évoque, sans trop en formaliser l'intervention, la masse volumique du sang, égale à 1,06 g/mL, et le tableau montre que le nombre 1,06 et son inverse (dont 0,943 est une valeur approchée) jouent un rôle important : 1,06 dans le passage d'une concentration $C_{m/m}$ à la concentration $C_{m/v}$ correspondante ; 0,943 dans le passage inverse.

¹¹ Les locutions soulignées (graphiquement) font l'objet d'un lien hypertexte, que nous avons ici désactivé.

¹² Allusion à la dialectique de l'inscription et de l'excription : voir par exemple Chevillard (2009b, p. 16).

L’algèbre des espèces de grandeurs permet de mettre en évidence et de justifier l’intervention d’une masse volumique. En effet, par définition¹³ :

$$C_{m/m} = \frac{\text{masse d'alcool}}{\text{masse du sang total}} \text{ et } C_{m/v} = \frac{\text{masse d'alcool}}{\text{volume du sang total}}.$$

Pour obtenir $C_{m/v}$ à partir de $C_{m/m}$, il convient de multiplier cette dernière par la grandeur quotient $\rho_{\text{sang-total}}$:

$$\rho_{\text{sang-total}} = \frac{\text{masse du sang total}}{\text{volume du sang total}}.$$

Ainsi : $C_{m/v} = C_{m/m} \times \frac{\text{masse du sang total}}{\text{volume du sang total}}$, ou encore : $C_{m/v} = C_{m/m} \times \rho_{\text{sang-total}}$.

La valeur de la masse volumique du sang, $\rho_{\text{sang-total}}$, retenue ici, est de 1,06 g/mL, ou encore 1,06 kg/L.

Choisissons maintenant les unités suivantes : g/kg ou ‰ pour $C_{m/m}$, g/L ou mg/mL pour $C_{m/v}$ et kg/L pour $\rho_{\text{sang-total}}$. Et désignons respectivement par c , c' les mesures respectives de $C_{m/m}$, $C_{m/v}$ avec ces unités : $C_{m/m} = c \text{ g/kg}$ et $C_{m/v} = c' \text{ g/L}$. Alors :

$$C_{m/v} = c' \text{ g/L} = C_{m/m} \times \rho_{\text{sang-total}} = c \text{ g/kg} \times 1,06 \text{ kg/L} = c \times 1,06 \text{ g/L} = (1,06 c) \text{ g/L}.$$

Donc $c' = 1,06 c$, et si $C_{m/m} = 1 \text{ g/kg} = 1 \text{ ‰}$ (soit $c = 1$), alors $c' = 1,06$ et la $C_{m/v}$ correspondante est 1,06 g/L, ou encore 1,06 mg/mL ; cela justifie pleinement l’équivalence indiquée dans le tableau 1 en ligne 5 : à 1 mg/g correspond 1.06 mg/mL. Ce qui précède relève de la dialectique des médias et des milieux¹⁴ : le contenu de D_4 , considéré comme un média, est soumis à un contrôle mobilisant le milieu « algèbre des espèces de grandeurs ». Cette même dialectique est mobilisée dans le paragraphe suivant, qui revient sur D_3 dans sa version anglaise.

Le lecteur aura remarqué la proximité du nombre 1,06 avec le nombre 1,055, qui apparaissait dans l’égalité (1), figurant dans la réponse $R_{4\text{-anglais}}^\diamond$, précédemment mise en cause ainsi que l’était l’égalité (II), à laquelle elle devait servir de justification :

$$\text{mg}/100 \text{ ml} = \text{mg}/\text{g} \times 100 / 1.055 \dots\dots\dots (1)$$

$$C [\text{mg}/100 \text{ ml}] = 2.3237 \times A / (p [\text{lbs}] \times r) \dots\dots\dots (II)$$

Si l’on adopte 1,055 kg/L comme valeur pour $\rho_{\text{sang-total}}$, et si c'' désigne la mesure de $C_{m/v}$ avec l’unité mg/100 mL, l’égalité $C_{m/v} = C_{m/m} \times \rho_{\text{sang-total}}$ se traduit ainsi :

$$C_{m/v} = c'' \text{ mg}/100 \text{ mL} = c \text{ g}/\text{kg} \times 1,055 \text{ kg}/\text{L} = (1,055 c) \text{ g}/\text{L} = (1,055 c) \text{ mg}/\text{mL}.$$

¹³ La locution « sang total » est employée pour distinguer les analyses de sang portant sur l’un de ses composants, le plasma sanguin par exemple, des analyses portant sur l’ensemble des composants du sang (sang total).

¹⁴ On pourra consulter à ce sujet Chevallard (2007a, p. 13-19).

Or on peut facilement établir le rapport entre les deux unités mg/mL et mg/100 mL :

$$1 \frac{\text{mg}}{\text{mL}} = \frac{1 \text{ mg}}{1 \text{ mL}} = \frac{100 \text{ mg}}{100 \text{ mL}} = 100 \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}}.$$

Par conséquent,

$$(1,055 c) \frac{\text{mg}}{\text{mL}} = (1,055 c) (100 \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}}) = [(1,055 c) \times 100] \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}},$$

et, finalement, $c'' \text{ mg}/100 \text{ mL} = (1,055 c \times 100) \text{ mg}/100 \text{ mL}$. On a donc $c'' = 105,5 c$, ce que l'on pourrait noter symboliquement ainsi : $c \text{ mg/g} \mapsto (105,5 c) \text{ mg}/100 \text{ mL}$. Par suite, si $C_{m/m} = 1 \text{ g/kg}$, alors la $C_{m/v}$ correspondante est $(105,5) \text{ mg}/100 \text{ mL}$.

En empruntant un instant les écritures fautives des auteurs du site dans l'égalité (1), on écrirait (en prenant $c = 1$) : $1 \text{ mg/g} = (100 \times 1,055) \text{ mg}/100\text{mL}$, d'où l'on pourrait déduire : $\text{mg}/100 \text{ mL} = (\text{mg/g}) / (100 \times 1,055)$, mais non pas $\text{mg}/100 \text{ mL} = \text{mg/g} \times 100 / 1,055$. Ce qui précède montre qu'un calcul sur les seules unités, tel que le pratiquent ces auteurs, présente deux défauts : il conduit à écrire des égalités entre espèces de grandeur qui sont différentes – ce qui n'est pas permis dans l'algèbre des espèces de grandeur – mais de plus, il conduit à faire des erreurs de calculs – on note là un manque de fiabilité de ces techniques.

Venons-en pour finir à l'égalité (II) en rappelant tout d'abord que $1 \text{ lb} = 0,454 \text{ kg}$ d'après l'égalité (2). En désignant par a la mesure en g de la quantité d'alcool **A** et p' la mesure en lb de la masse corporelle **p**, et en travaillant dans l'algèbre des espèces de grandeurs, on obtient :

$$C_{m/m} = \frac{\mathbf{A}}{r \mathbf{p}} = \frac{a \text{ g}}{r (p' \text{ lb})} \approx \frac{a \text{ g}}{r [p' (0,454 \text{ kg})]} \approx 2,2026 \frac{a}{r p'} \text{ g/kg}.$$

De l'égalité $C_{m/v} = C_{m/m} \times \rho_{\text{sang-total}}$, on déduit :

$$C_{m/v} \approx 2,2026 \frac{a}{r p'} \text{ g/kg} \times 1,055 \text{ kg/L} \approx 2,3237 \text{ g/L}.$$

Et donc : $C_{m/v} \approx 232,37 \frac{a}{r p'} \text{ mg}/100 \text{ mL}$.

Ce qui prouve que la formule (II) est erronée. On peut le vérifier en employant la calculatrice de Google, qui travaille dans l'algèbre des espèces de grandeurs, et constitue à elle seule un milieu très puissant. En tapant comme requête :

$$\ll (1 \text{ g})/(1 \text{ lb}) \times (1,055 \text{ L/kg}) \gg,$$

on obtient : $2,32587687 \text{ kg/m}^3$. Pour obtenir la mesure de cette concentration en mg/100 mL, il suffit de diviser le résultat par cette unité, en entrant la requête :

$$\ll (1 \text{ g}/1 \text{ lb}) \times (1,055 \text{ L/kg}) / (\text{mg}/(100 \text{ mL})) \gg.$$

On obtient 232,587687. L'écart avec la valeur approchée trouvée précédemment (232,37) s'explique par le fait que la calculatrice de Google travaille avec la valeur exacte de la livre exprimée en kg : $1 \text{ lb} = 0,453\,592 \text{ kg}$, au lieu d'utiliser la valeur approchée 0,454 kg.

Suffisamment d'éléments ont été réunis pour que l'on puisse faire une pause dans l'enquête et formuler une première réponse à Q_1 , que nous noterons $R_{1,\text{prem}}^\heartsuit$.

↪ **Réponse $R_{1,\text{prem}}^\heartsuit$**

Il apparaît que les auteurs de la brochure de l'APMEP ont confondu la concentration $C_{m/m}$ (celle que donne la formule de Widmark telle qu'ils la décrivent), avec la concentration $C_{m/v}$ correspondante (qu'ils voudraient obtenir). On a établi plus haut que :

$$\text{si } C_{m/m} = c \text{ g/kg, alors } C_{m/v} = 1,06 c \text{ g/L,}$$

1,06 étant parfois remplacé par 1,055. Ainsi, les nombres 0,38 et 0,61, trouvés à propos de la consommation de bière, sont les mesures en g/kg de $C_{m/m}$, respectivement pour l'homme et pour la femme. De $C_{m/m} = 0,38 \text{ g/kg}$ (resp. $0,61 \text{ g/kg}$), on déduit que la concentration $C_{m/v}$ attendue par les auteurs est égale à 0,40 g/L pour un homme (resp. 0,64 g/L pour une femme). Les résultats donnés sont donc faux, et les auteurs auraient été bien en peine pour les justifier.

Nous avons vu que les auteurs de la brochure ne sont pas les seuls à fournir une réponse fautive : de nombreux sites Internet en langue française, y compris Wikipédia (dans une version datant de 2012 de l'article, déjà évoquée) font la même erreur, explicable comme on va le voir plus loin, par les contraintes institutionnelles se situant au niveau de la civilisation française. Tel n'est pas le cas de la page¹⁵ du site Wikipédia en langue allemande relative à la concentration d'alcool dans le sang (donnée D_5), qui dès le début précise :

↪ **Réponse $R_{6,2}^\diamond$**

Die **Blutalkoholkonzentration (BAK)** ist ein Maß für die Menge von Alkohol im Blut und wird üblicherweise in Gewichtsanteilen als g/kg (Promille) angegeben. [...]

In deutschen Laboren wird meistens der Ethanolwert der Probe in g/l angegeben [...] Für die Umrechnung in Promille bzw. g/kg Vollblut müssen daher [ein Faktor] berücksichtigt werden: die Dichte von Vollblut (1,057 g/ml) [...]. Als [Umrechnungsformel] erhält man:

$$\text{BAK (\%)} = \text{Ethanol im Vollblut (g/l)/1,057}$$

¹⁵ <https://de.wikipedia.org/wiki/Blutalkoholkonzentration>

[dont voici une traduction en français] :

La concentration d'alcool dans le sang (BAC) est une mesure de la quantité d'alcool dans le sang et est généralement donnée en proportion de masses exprimée en g/kg (pour mille). [...]

Dans les laboratoires allemands, la valeur éthanologique de l'échantillon est généralement donnée en g/L [...]. Pour la conversion en pour mille ou g/kg de sang total, [un facteur] donc être pris en compte : la masse volumique du sang total (1,057 g/mL). [La formule de conversion] obtenue est :

$$\text{BAC (\%)} = \text{éthanol dans le sang total (g/L)} / 1,057$$

On remarque que la valeur retenue pour la masse volumique du sang total, 1,057 g/mL, est comprise entre les deux valeurs précédemment considérées : 1,055 kg/L et 1,06 kg/L. La formule de conversion en fin de la réponse $R_{6,2}^{\diamond}$ ci-dessus, malgré les apparences, ne concerne pas les grandeurs en question¹⁶, mais leurs mesures, avec l'unité indiquée entre parenthèses. Elle a donc exactement la même signification que l'égalité $c = c'/1,06$, qui se déduit immédiatement de l'égalité $c' = 1,06 c$, utilisée ci-dessus. Les auteurs de la page Internet en allemand se sentent obligés de préciser cette formule de conversion, car les deux grandeurs $C_{m/m}$ et $C_{m/v}$ sont simultanément utilisées dans leur pays (et dans les pays d'Europe du Nord). Cette condition est beaucoup moins forte pour les rédacteurs de la page correspondante en langue française, du fait qu'en France seule la grandeur $C_{m/v}$ semble être utilisée de nos jours. L'unicité de l'espèce de grandeur « concentration » semble se transformer, en France, en contrainte. Cette dernière, dont les effets sont néfastes même auprès de personnes instruites, endort l'esprit critique ou l'envie d'enquêter sur la question : la soumission à l'autorité de la chose déjà écrite ailleurs entrave la mise en œuvre de la dialectique des médias et des milieux.

La poursuite de l'enquête, sur ce point précis, montre qu'il n'en a pas toujours été ainsi. En effet, dans la loi instaurant le taux légal maximal autorisé pour la conduite d'un véhicule, datant du 10 juillet 1970, le législateur utilise une concentration masse/masse, exprimée en pour mille, comme l'extrait suivant du Journal officiel de la République française du 10 juillet 1970 (p. 6263-6264) (donnée D_6) le montre :

¹⁶ En revanche, sur la page <http://chimie.lgk.lu/IGGE/Cours/01/qb/qb.htm> cette distinction est faite très clairement : une concentration masse/masse y est dénommée « massenanteil », notée w , on signale qu'elle est sans dimension ; une concentration masse/volume s'appelle « massenkonzentration », notée β . Les auteurs invitent à ne pas confondre cette dernière avec une « masse volumique », dénommée « dichte », mot qui se traduit par « densité ». En France, le mot « densité » renvoie à une grandeur sans dimension, quotient de la masse volumique du corps en question par celle de l'eau.

⇒ Donnée D₆**Loi n° 70-597 du 9 juillet 1970 instituant un taux légal d'alcoolémie et généralisant le dépistage par l'air expiré (1)**

L'Assemblée nationale et le Sénat ont adopté,

Le Président de la République promulgue la loi dont la teneur suit :

Art. 1^{er}. – L'article L.1^{er} du code de la route est remplacé par les dispositions suivantes :

« Art. L 1^{er}. – I – Toute personne qui aura conduit un véhicule alors qu'elle se trouvait, même en l'absence de tout signe d'ivresse manifeste, sous l'empire d'un état alcoolique caractérisé par la présence dans le sang d'un taux d'alcool pur égal ou supérieur à 0,80 gramme pour mille sans que ce taux atteigne 1,20 g pour mille, sera punie d'un emprisonnement de dix jours à un mois et à une amende de 400 F à 1.000 F ou de l'une de ces deux peines seulement. En cas de récidive, les peines prévues à l'alinéa suivant sont applicables.

« Toute personne qui aura conduit un véhicule alors qu'elle se trouvait, même en l'absence de tout signe d'ivresse manifeste, sous l'empire d'un état alcoolique caractérisé par la présence dans le sang d'un taux d'alcool pur égal ou supérieur à 1,20 g pour mille, sera punie d'un emprisonnement d'un mois à un an et à une amende de 500 F à 5.000 F ou de l'une de ces deux peines seulement.

C'est du moins l'interprétation qu'en font deux membres du Laboratoire de pharmacocinétique et de toxicologie clinique du Groupe hospitalier du Havre, J.-P. Goullé et C. Lacroix, qui, dans un article intitulé « Alcoolémie : aspects médico-légaux » (donnée D₇), publié en 2000, précisent :

⇒ Donnée D₇**Expressions des résultats – seuils légaux**

Les résultats doivent être rendus à partir de mesures établies sur sang total. Dans certains pays : Allemagne, Norvège, Suède, Finlande, la valeur maximale autorisée chez les conducteurs est exprimée en mg/g ou g/kg et non en g/L. [...] En France, les textes indiquent g pour mille, il s'agit donc au sens étymologique de g pour mille, et non g/L. La différence est sensible puisque 1 ml de sang pèse 1,055 g. (GOULLÉ ; LACROIX, 2000, p. 57)

Il n'en est plus de même dans les textes de loi ultérieurs ou actuels, dans lesquels les concentrations maximales d'alcool dans le sang sont exprimées en g/L.

Conditions et contraintes : le niveau de la civilisation

Les conditions précisées dans l'article de l'encyclopédie Wikipédia en langue anglaise, consacré aux unités de mesure de la concentration d'alcool dans le sang, sont déterminantes pour les citoyens, notamment pour les scientifiques et professeurs de chacun de ces groupes de

pays, et il n'est sans doute pas exagéré de dire que, pour nombre d'entre eux, ces conditions sont vues comme des contraintes au sens de la TAD, c'est-à-dire des conditions sur lesquelles ils ne pensent pas pouvoir agir en vue de les modifier. On peut les considérer comme des conditions C ou contraintes K se situant au *niveau de la civilisation de l'échelle de codétermination*¹⁷. On constate en effet, dans le tableau 1, la singularité du choix des unités opéré dans la civilisation britannique, ainsi que dans la civilisation nord-américaine (États-Unis, Canada, Australie). De même, un Français aura du mal à imaginer que l'on puisse définir une CAS autrement que comme une concentration masse/volume, cette dernière étant mesurée avec l'unité g/L, et sera de plus fort surpris d'apprendre que cette unité puisse être appelé « pour mille » et notée ‰. (Les auteurs de cette page Wikipédia ne sont pas assujettis à la civilisation française !)

Enfin, à partir du contenu du tableau 1, on peut faire l'hypothèse qu'Erik Widmark a utilisé une concentration masse/masse car il appartient à la civilisation nord-européenne. En effet, Widmark est un chimiste suédois, dont l'ouvrage le plus célèbre, (WIDMARK, 1932), a été publié en langue allemande. Cet ouvrage, intitulé *Die theoretischen Grundlagen und die praktische Verwendbarkeit der gerichtlich-medizinischen Alkoholbestimmung*¹⁸, n'est pas disponible sur Internet. On peut le consulter dans des bibliothèques spécialisées, en Suisse, en Allemagne, mais il se fait plus rare et d'un accès difficile en France. Heureusement, d'autres œuvres de Widmark apparaissent quand on formule la requête « Erik Widmark » sur Internet, parmi lesquelles plusieurs publications de Alan Wayne Jones¹⁹, chercheur en toxicologie médico-légale et auteur d'articles sur l'histoire de cette discipline et plus particulièrement sur la place que Widmark y occupe. L'une d'elles²⁰, publiée en 2009 dans la revue *Blutalkohol*, se fait remarquer par son titre : *Erik M. P. Widmark, Bridged the gap between forensic toxicology and alcohol and traffic safety research* (donnée D8). On y apprend que, en 1930, soit deux ans avant la publication de son ouvrage en allemand, Widmark a écrit en français une version plus courte de son travail, intitulée *Les lois cardinales de la distribution et du métabolisme de l'alcool éthylique dans l'organisme humain*, dans la revue scientifique suédoise *Kungliga*

¹⁷ Voir par exemple Chevallard (2011, p. 87-92).

¹⁸ Titre que l'on peut traduire ainsi : Les fondements théoriques de la détermination de l'alcool et l'utilisabilité pratique en médecine légale.

¹⁹ On pourra consulter sa fiche Wikipédia : https://en.wikipedia.org/wiki/Alan_Wayne_Jones

²⁰ Téléchargeable à l'adresse : https://www.bads.de/mediaalt/55935/Blutalkohol_2009.pdf

Fysiografiska Sällskapet Handlingar (Actes de la Société royale de physiographie). Jones s'étonne que Widmark ait pris la peine d'écrire un tel texte en français, et formule sur ce point l'hypothèse suivante :

The reason for publishing the French version is not obvious but might have been a way to inform investigators in France about the results of his latest research work, such as Professor MAURICE NICLOUX (1873-1945), who was at the University of Strasbourg. At the time Nicloux was considered a leading authority in Europe on the subject of medical-legal aspects of alcohol and was a scientific rival to WIDMARK. (Jones, 2017, p. 12-13)

Une recherche soutenue sur Internet à propos de cet article de Widmark (1930) montre que l'on peut consulter cette œuvre – que nous noterons O_2 – à la Bibliothèque nationale de France, dans sa section Recherche²¹. Le chercheur AP s'y est donc précipité, et l'hypothèse faite plus haut se voit confirmée : Widmark utilise une concentration masse/masse.

La publication est assez courte, avec 58 pages au total se répartissant ainsi : le texte proprement dit (p. 2-25) que nous désignerons par $O_{2,T}$, le protocole des essais et autres données (p. 26-55) que nous noterons D_{O_2} , le résumé (p. 56-57) et la bibliographie (p. 58). Les extraits suivants montrent qu'aucun doute n'est permis sur les unités employées par Widmark, aussi bien pour la concentration d'alcool dans le sang ($C_{m/m}$), que pour la concentration en alcool des boissons ingérées dans les essais ($C_{m/v}$) :

La concentration d'alcool dans le sang est exprimée en unité de poids par unité de poids. L'alcool consommé est exprimé en grammes et, pour faciliter le dosage, la concentration de la boisson consommée est désignée comme unité de poids par unité de volume. (WIDMARK, 1930, p. 5, paragraphe « Disposition et méthode des essais »)

On peut alors faire l'hypothèse que, dans la formule de Widmark évoquée par les auteurs de la brochure de l'APMEP – on rappelle qu'il s'agit de la formule $t = \frac{a}{p k}$, que dans la suite nous désignerons par la notation $R_{4,0}^\diamond$ –, t désigne bien un taux, que l'on peut exprimer en %, ou en ‰. On en trouve une confirmation en page 12 de $O_{2,T}$, qui est consacrée à l'introduction-invention par Widmark du facteur r , qui correspond au coefficient k de la formule $R_{4,0}^\diamond$:

²¹ AP considère que la découverte de O_2 , permise par l'article de Jones, a été, pour lui, celle d'une véritable truffe dans la dialectique du parachutiste et du truffier. Sur cette dialectique, voir par exemple Chevallard (2009b, p. 16).

Relation entre la concentration de l'alcool dans le sang et la quantité totale présente dans l'organisme, constante r

Si la quantité d'alcool par unité de poids était égale dans toutes les parties du corps, la quantité totale d'alcool (a) présente dans l'organisme à une concentration dans le sang donnée (c) serait évidemment égale au produit du poids (p) et de la concentration d'alcool dans le sang.

$$a = p \cdot c_t$$

Ceci n'est cependant pas le cas. Ainsi Carpenter [7] trouve que la concentration de l'alcool de la graisse est tout au plus de 30 p. 100 de celle du sang et n'en forme généralement que 10 p. 100. Pour la concentration d'alcool du tissu osseux par rapport à celle du sang, il n'existe, à ma connaissance, pas de concentration d'alcool par rapport à celle du sang. Comme les données quantitatives de ce travail se rapportent à la quantité-poids alcool par unité de poids sang et tissu, il résulte avec une conséquence inéluctable que l'unité de poids tissu osseux contient, de par son poids spécifique, moins d'alcool qu'une quantité-poids sang égale, même si le coefficient de distribution entre les deux était égal à 1,0. Il s'ensuit donc que la relation entre la concentration d'alcool dans le sang et la quantité d'alcool totale présente dans le corps n'est pas uniquement déterminée par le poids du corps, mais aussi par la distribution à travers les différents organes et tissus du corps. Un calcul selon la formule donnée ci-dessus donnerait des valeurs trop élevées, parce que de grandes parties de l'organisme absorbent moins d'alcool que ne le fait le sang. Il faut donc que la valeur numérique du poids du corps soit réduite par un certain facteur r , comme suit :

$$a = p \cdot r \cdot c_t$$

Pour calculer la quantité totale d'alcool dans le sang, il importe donc de connaître la valeur du facteur r . Il est encore probable que ce facteur est à peu près constant chez un même individu, tant que le poids de son corps reste inchangé, mais qu'il peut y avoir des variations d'individu à individu, par rapport surtout à la quantité de tissu adipeux et à la grosseur du système osseux. Tandis que la constante β caractérise la capacité chez l'individu de métaboliser l'alcool, le facteur r en détermine la distribution à travers l'organisme.

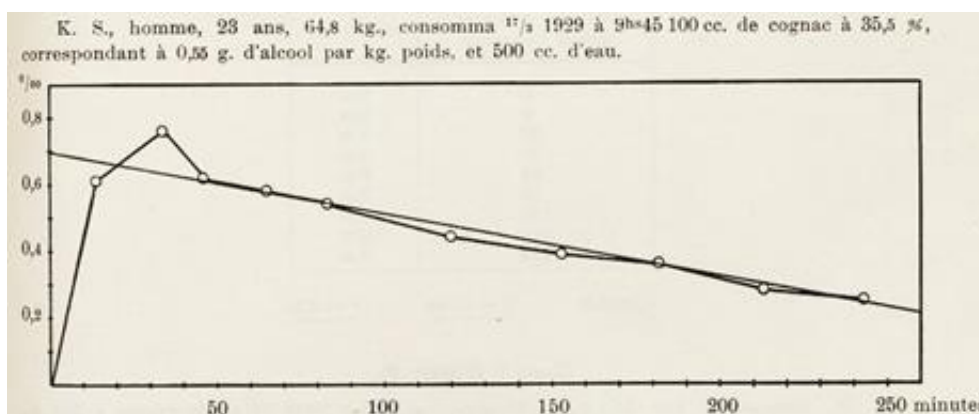
Le facteur r est défini comme un facteur permettant de réduire la valeur numérique du poids du corps, ou plutôt, en distinguant poids et masse, la valeur numérique de la masse du corps, cette dernière étant exprimée en kg. C'est donc bien une constante individuelle sans dimension. Quant au nom qu'il convient de lui attribuer, Widmark n'en donne aucun. Si on devait lui en donner un en s'inspirant du texte explicatif ci-dessus, on pourrait l'appeler « facteur de réduction du poids (ou de la masse)²² » ou « facteur de distribution » – on a vu précédemment que, dans de nombreuses réponses R^\diamond , on lui a préféré le nom de « coefficient de diffusion », ou de « facteur de réduction ». Pour valider cette proposition de dénomination,

²² Jones (2020) note l'emploi de l'expression « die reduzierte Körpermasse » dans Widmark (1932), pour désigner le produit de la masse corporelle p par le facteur r .

afin de réduire les effets de traduction, on peut consulter Wikipédia en langue allemande. L'article *Blutalkoholkonzentration* (donnée D_5) indique, dans un paragraphe consacré à la formule de Widmark, que ce facteur est appelé : « der Reduktions- oder Verteilungsfaktor im Körper », ce qui se traduit par « facteur de réduction ou de distribution dans le corps », en précisant que « le facteur de réduction reflète la proportion du corps dans laquelle l'alcool est distribué » [Notre traduction].

Le lecteur s'est sans doute interrogé sur la présence de l'indice t , figurant dans l'expression de la concentration c_t , et de la constante β dans le passage ci-dessus. L'indice t fait évidemment référence au temps. Quant à la constante β , Widmark en a rappelé la signification dans les pages précédentes, en évoquant un de ses travaux antérieurs (article datant de 1926, publié en allemand) au sujet de l'évolution de la concentration d'alcool dans le sang en fonction du temps. En voici le passage essentiel, précédé par une figure²³ tirée de D_{O_2} , qui en éclaire la lecture :

Figure 1 – Essai n°3



Source : Widmark (1930, p. 27).

Dans un travail antérieur, j'ai démontré que l'alcool éthylique se métabolise dans l'organisme humain avec une quantité constante par unité de temps, indépendamment de la concentration existante. La baisse de la concentration dans le sang est représentée dans la période postrésorptive par une ligne droite selon la formule suivante :

$$c_t = c_0 - \beta t$$

²³ Les profils de courbes obtenus font apparaître des variantes dans la partie autour du pic de concentration. La figure relative à l'essai 3 a été choisie pour faciliter au lecteur la compréhension de citations ultérieures de Widmark (réponse R_7^{\diamond} , notamment).

où c_t et c_0 désignent la concentration aux temps t et t_0 . β est une constante individuelle, qui forme une expression univoque de la vitesse avec laquelle la concentration d'alcool baisse dans le sang et, puisque l'alcool dans le sang est en équilibre de diffusion avec les tissus, cette constante devient aussi l'expression univoque de la vitesse du métabolisme de l'alcool. ($O_{2,T}$, p. 9) [...]

Dans le calcul de β selon la formule indiquée, la ligne droite a été introduite – à l'aide de la méthode du moindre carré – dans les observations susceptibles d'appartenir à la période postrésorptive. On s'est servi des formules bien connues suivantes :

$$c_0 = \frac{\sum t \sum tc - \sum c \sum t^2}{(\sum t)^2 - n \sum t^2} \quad \beta = \frac{\sum t \sum c - n \sum tc}{(\sum t)^2 - n \sum t^2}$$

Dans tous nos tableaux, t_0 désigne le moment de la consommation, et c_0 par conséquent la concentration supposée à la résorption et à l'égalisation de diffusion. ($O_{2,T}$, p. 10)

Apparaît ici une nouvelle œuvre O_3 , la méthode des moindres carrés de Legendre, permettant un ajustement affine entre deux séries de données. Cette œuvre a fait l'objet d'une transposition didactique en France dans l'enseignement secondaire, dans le secteur de la statistique descriptive, plus précisément dans le thème des séries statistiques doubles (X, Y) ou $(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}$, et enfin dans le sujet (type de tâches) suivant : déterminer les coefficients a et b de l'équation $y = ax + b$ de la droite de régression²⁴ de y en x . L'élément technologique justifiant la technique de calcul de a et b y était le suivant :

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X^2} \quad \text{et} \quad b = \bar{Y} - a \bar{X}.$$

Comme l'a fait AP , le lecteur pourra vérifier la cohérence entre la formule donnée dans $O_{2,T}$ et les deux formules qui précèdent²⁵. Si, pour passer de la formule donnant β à celle donnant a , une simple mise en facteur de n^2 dans le numérateur et le dénominateur de l'expression de β , suivie de la simplification par n^2 , suffit pour retrouver celle de a , le travail analogue est un peu plus long pour retrouver l'une des expressions de c_0 ou de b à partir de l'autre.

La figure 1 dans D_{O_2} est accompagnée du tableau de données suivant :

²⁴ Voir André Pressiat (2005), notamment le document 7, page 163, où la *différence* entre la notion de droite obtenue par la méthode des moindres carrés et la notion de droite de régression est explicitée. Ainsi que le début de l'article traitant de la place et du rôle de la méthode des moindres carrés de Legendre dans la distribution des erreurs en astronomie et en géodésie (pp. 139-142).

²⁵ On notera que le deuxième membre de la formule $\beta = \frac{\sum t \sum c - n \sum tc}{(\sum t)^2 - n \sum t^2}$ donne le coefficient directeur de la droite des moindres carrés, coefficient qui, dans le cas étudié par Widmark, est $-\beta$.

Tableau 2 – Données relatives à l’essai 3.

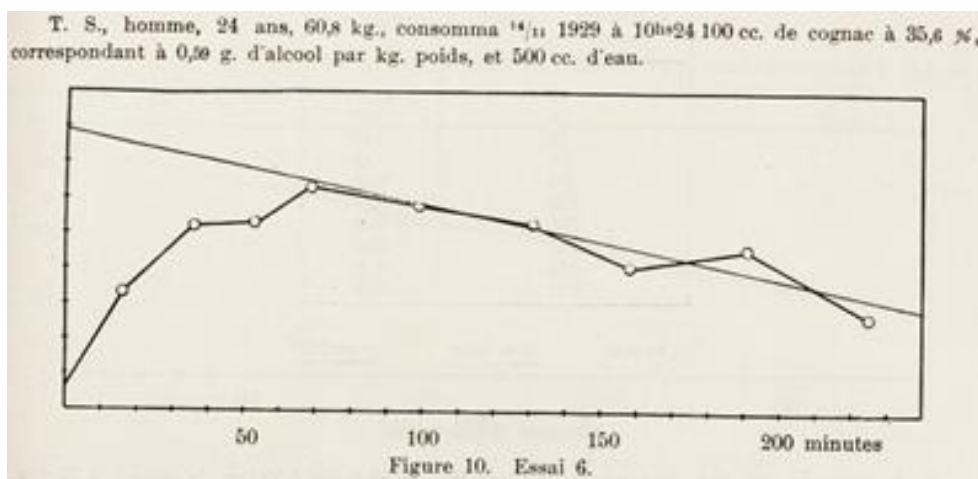
Minutes comptées depuis l’ingestion	Alcool ‰
0	0,00
14	0,61
34	0,76
46	0,62
65	0,58
13	0,54
120	0,44
153	0,39
182	0,36
213	0,28
243	0,25

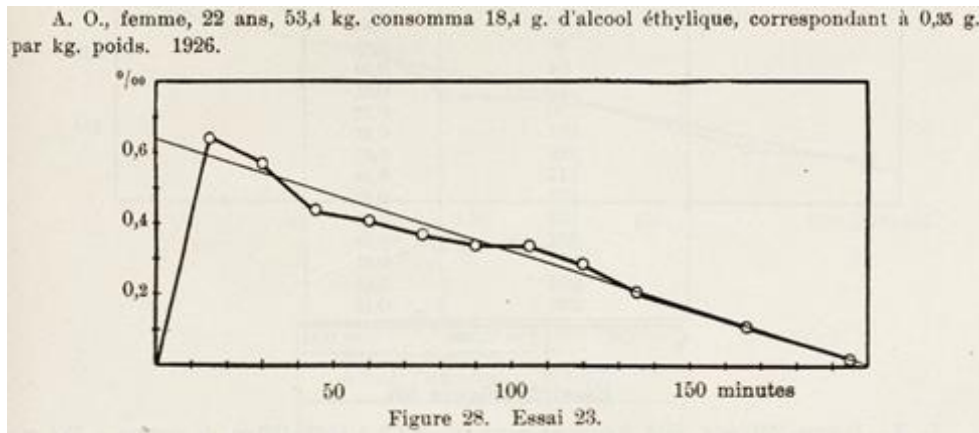
Source : *D₀₂* (p. 27).

Puis apparaissent les résultats suivants : $c_0 = 0,70$; $\beta = 0,0019$; $r = 0,78$. La période post-résorptive commence à la minute 46. La concentration d’alcool dans le sang baisse de 0,0019‰ par minute. Quant à la constante r , elle vaut 0,78.

Voici deux autres exemples d’essais réalisés par Widmark.

Figure 2 – Essais n°6 et 23





Source : D_{O_2} (p. 29 et p. 43).

Les valeurs des constantes associées sont : $c_0 = 0,79$, $\beta = 0,0021$, $r = 0,74$, pour la première figure, et pour la seconde : $c_0 = 0,64$, $\beta = 0,0032$, $r = 0,54$.

Deux questions se posent alors :

→ Q_7 : Comment Widmark définit-il les deux périodes résorptive et postrésorptive et notamment leur séparation ?

→ Q_8 : Comment Widmark calcule-t-il le facteur r ?

La réponse à Q_7 fait l'objet d'argumentations détaillées par Widmark (1930) dans les pages 4 à 7, que l'on ne rapportera pas ici. Seuls sont cités les points essentiels pour l'enquête.

→ Réponse R_7^0

Pour l'analyse des courbes, il convient de les diviser en deux périodes. Pendant la première, la résorption se fait, et en même temps à peu près, l'équilibre s'établit dans l'organisme. [...] Comme ces deux processus, résorption et établissement d'équilibre de diffusion, ne se différencient guère quant au temps, il est permis de donner à la période durant laquelle ils se produisent le nom de *période de résorption*.

La seconde partie de la courbe qui commence à la fin de la résorption et après l'établissement de l'équilibre de diffusion, se distingue par la diminution graduelle de la concentration et elle reflète la disparition de l'alcool hors de l'organisme par combustion, exhalation et passage dans l'urine. J'appelle cette période la *période postrésorptive*. ($O_{2,T}$, p. 5)

[...]

La courbe d'alcool de [la] période [résorptive] est le résultat principalement de deux développements contraires : l'affluence de l'alcool de l'intestin et sa diffusion à travers les tissus, le métabolisme de l'alcool ne jouant, pendant cette période relativement courte, qu'un rôle plutôt secondaire. [...] [Cette période] s'achève cependant normalement moins d'une heure après la consommation.

[...]

Le temps de la résorption n'est pas représenté seulement par la partie ascendante de la courbe, puisqu'une résorption peut se produire aussi dans sa partie descendante.

[...]

La résorption doit en réalité se faire avec une telle rapidité que, chez une personne à jeun, elle dépasse quelquefois celle de la diffusion provenant du sang. Si tel est le cas, il résultera nécessairement une accumulation de courte durée dans le sang, et le temps, qui suit immédiatement après que le maximum aura été atteint, présentera une chute plus abrupte que celle qui aurait été causée par le métabolisme seul. ($O_{2,T}$, p. 6)

Il est évidemment impossible de déterminer exactement la limite entre les périodes résorptive et postrésorptive, puisque la résorption et la diffusion ne cessent pas tout d'un coup mais diminuent graduellement. Pour nos fins, on peut considérer que la période postrésorptive commence à la partie de la courbe où elle joint la ligne droite. Comme la diffusion vers les tissus procède à une vitesse qui est proportionnelle à la différence entre la concentration d'alcool dans le sang et celle des tissus, il n'est pas possible de concevoir une baisse de la concentration dans le sang pendant la seconde partie du temps de résorption comme coïncidant avec la même ligne droite, qui représente le métabolisme de l'alcool indépendant de la concentration de la période postrésorptive. ($O_{2,T}$, p. 7-8)

La réponse fournie à Q_8 est essentielle pour notre enquête, car elle concerne le facteur r . Widmark précise très clairement les hypothèses sous lesquelles il peut être calculé. Rappelons que r est défini ainsi : $a = p r c_t$.

→ Réponse R_8^\diamond

Il s'agit donc de trouver un moyen de calculer ce facteur important. Jusqu'à présent on s'est heurté à certaines difficultés. En raison tant de ce que nous venons de dire pour la période résorptive que du fait qu'une certaine quantité d'alcool était métabolisée par les tissus déjà avant que la valeur maximale fût atteinte, il n'est pas permis de désigner, dans la formule citée, par a la quantité d'alcool ingérée connue et par c_t la valeur maximum mesurée de la teneur en alcool du sang après l'ingestion à jeun d'une quantité d'alcool unique. On attribuerait ainsi à r une valeur inexacte.

Le calcul du facteur r effectué ici se base sur le raisonnement suivant. Puisque – nous l'avons déjà démontré – l'alcool se métabolise à quantité égale par unité de temps indépendamment de la concentration, un métabolisme approximativement égal doit se produire aussi durant la période de résorption avant l'obtention du maximum. On doit donc, sans commettre de grosses erreurs, pouvoir interpoler la valeur c pour le temps 0, c.-à-d. le temps de l'ingestion de l'alcool. Cette valeur c_0 s'obtient en prolongeant la ligne droite qui représente la baisse de la concentration jusqu'à ce qu'elle coupe l'axe des y . Elle se présente d'ailleurs comme une des constantes à l'introduction de cette ligne droite dans la série des observations selon la méthode du moindre carré, ainsi qu'il a été déjà démontré.

En c_0 nous avons donc la valeur théorique de la concentration d'alcool dans le sang, à la condition supposée que la résorption et la distribution se fassent

simultanément avec la consommation de la boisson. Cette valeur est évidemment la plus propre théoriquement pour le calcul du facteur r , lequel se définit par conséquent par la formule : $r = \frac{a}{p c_0}$. ($O_{2,r}$, p. 12-13)

Le premier paragraphe de R_8^\diamond a pour but d'écartier le choix de la valeur maximale c_{\max} de la concentration dans la perspective du calcul de r à partir de la relation $a = p r c_t$. Le deuxième argumente en faveur du choix de la valeur de c extrapolée à l'origine, c_0 , ordonnée à l'origine de la droite décrite plus haut, et dont le mode de calcul a été précisé (méthode des moindres carrés). Il explicite le raisonnement sur lequel ce calcul de r est fondé, sans masquer les points délicats (en italique, dans la citation suivante) : « un métabolisme *approximativement égal doit se produire aussi* durant la période de résorption avant l'obtention du maximum. On doit donc, *sans commettre de grosses erreurs*, pouvoir interpoler la valeur c pour le temps 0 ». L'emploi du mot « interpoler » au lieu de « extrapoler » peut s'expliquer par la difficulté à laquelle l'auteur s'est confronté en écrivant un texte scientifique en français, et par l'apparition récente à l'époque du mot « extrapoler », qui date de la fin du XIX^e siècle. Ce deuxième paragraphe convoque d'ailleurs les deux significations du mot « extrapoler », telles qu'elles apparaissent sur le site du CNTRL²⁶ : « Calculer par extrapolation » et « Dédire, à partir de processus ou de comportements observables, des processus ou des états qui échappent à l'expérience humaine ». Dans le dernier paragraphe, Widmark rappelle la condition supposée pour pouvoir faire ce choix : « à la condition supposée que la résorption et la distribution se fassent simultanément avec la consommation de la boisson », et souligne que la valeur c_0 est une valeur théorique qui est « évidemment la plus propre théoriquement » pour le calcul de r . Une nouvelle question se pose alors :

→ Q_9 : Quels sont les résultats des calculs pour r ?

Widmark présente alors un tableau rassemblant les résultats obtenus sur un échantillon de 20 hommes et 10 femmes. Les résultats des calculs pour r sont rangés en 9 classes : 0,46-0,50 ; 0,51-0,55 ; 0,56-0,60 ; 0,61-0,65 ; 0,66-0,70 ; 0,71-0,75 ; 0,76-0,80 ; 0,81-0,85 ; 0,86-0,90. Il les commente ainsi :

²⁶ <https://www.cntrl.fr/definition/extrapoler>

→ Réponse R_9^\diamond , tirée de $O_{2,T}$

Le chiffre moyen de r était de 0,68 chez les hommes et de 0,55 chez les femmes avec des dispersions de $\pm 0,085$ et $\pm 0,055$ ²⁷. La valeur la plus élevée (0,90) fut constatée chez un homme (ess. 7) et la plus basse (0,47) chez une femme (ess. 27). [...]

La valeur la plus élevée constatée chez les femmes était de 0,64. [...] La valeur la plus basse, 0,47, fut observée chez une femme de 22 ans et d'un poids de 79,8 kg, ayant une adiposité prononcée. ($O_{2,T}$, p. 14)

Une étude faite en 1944²⁸ (donnée D_9), a permis d'agrandir les effectifs des échantillons, en considérant 10 hommes et 20 femmes supplémentaires. Le r moyen obtenu alors est de 0,70 pour les hommes et 0,60 pour les femmes, ce qui correspond aux valeurs adoptées par les auteurs de la brochure de l'APMEP.

On peut maintenant apporter une réponse provisoire à Q_2 , que nous noterons $R_{2,prov}^\heartsuit$.

↳ Réponse $R_{2,prov}^\heartsuit$

On comprend bien maintenant que les valeurs 0,7 et 0,6 pour le facteur r ne sont que des moyennes, ce que l'énoncé dans la brochure ne précise pas ; et que r peut prendre des valeurs comprises entre 0,4 et 1.

Mais on a appris aussi que r est une invention de Widmark : ce facteur, qu'il a créé, permet de déterminer la fraction de la masse du corps dans laquelle l'alcool devrait être présent s'il y était distribué avec la même concentration que dans le sang. Rappelons que r est défini par la relation²⁹ : $a_t = p r c_t$, dans laquelle a_t désigne la masse totale d'alcool présente dans l'organisme correspondant à une concentration dans le sang donnée (c_t) et que, pour le calculer, Widmark procède à une extrapolation à l'origine : r est tel $a = p r c_0$, où a désigne la masse d'alcool ingérée, et c_0 la concentration extrapolée à l'origine. En effet, de $a = p r c_0$, on déduit immédiatement : $r = \frac{a}{p c_0}$. On peut également en déduire la formule $c_0 = \frac{a}{r p}$ (1). De façon un peu surprenante, on ne trouve pas cette formule (1) dans le texte de Widmark. C'est pourtant cette formule qui a été médiatisée sous le nom de « formule de Widmark » dans les nombreux médias où notre enquête nous a conduits jusqu'ici, formule dans l'écriture de laquelle c_0 est remplacé

²⁷ Valeurs qui sont les mêmes que celles figurant dans la publication en allemand de 1932 (telles qu'elles sont rapportées par Watson et al. (1981)).

²⁸ Osterlinds, S, Ahlen, M. and Wolff, E. Investigations concerning the constants "β" and "r" according to Widmark, especially in women. Acta Path. Microbiol. Scand., Suppl. No. 54, pp. 489-498, 1944. Référence citée dans (Jones et al., 2020).

²⁹ Pour éviter des confusions, tout en gardant l'essentiel du formalisme introduit par Widmark, nous avons modifié la notation de la masse d'alcool correspondant à une concentration c_t : a est remplacé par a_t .

par la lettre **C**, ou **c** ou *t*. Dans les médias qui sont les plus fidèles au travail de Widmark, **C** est dénommée « concentration maximale théorique », mais rien dans ces notations ou dénominations n'indique l'extrapolation à l'origine³⁰. Dans la description fournie par les auteurs de la brochure, *t* est le taux d'alcool une heure après l'absorption à jeun, et dans le média rapporté dans $R_{3,1}^\diamond$, *c*'est le « pic », valeur maximale expérimentale, c_{\max} , qui est considéré : dans ces deux médias, il y a donc un glissement plus ou moins explicite de c_0 vers c_{\max} . La figure 1 montre un cas, parmi bien d'autres, dans lequel c_0 est différent de c_{\max} ; il est assez rare qu'ils soient égaux. Voici donc la réponse que l'on peut apporter à la question Q_4 , concernant la formule de Widmark :

↳ **Réponse R_4^\heartsuit**

- Introuvable sous cette forme dans le texte $O_{2,T}$ de Widmark, la formule y est présente sous la forme équivalente $r = \frac{a}{p c_0}$.
- On la trouve dans certains médias fidèles au texte de Widmark, dans lesquels la concentration c_0 est correctement dénommée, mais l'extrapolation à l'origine n'est visible ni dans la dénomination, ni dans la notation utilisée.
- Dans des médias moins rigoureux car peu fidèles, une confusion est entretenue à des degrés divers entre c_0 et c_{\max} .

Passons maintenant à la réponse à la question Q_5 : « À quoi la formule de Widmark sert-elle ? ». Pour y répondre, on peut décrire et analyser le contenu du texte de Widmark en termes de praxéologie.

• Le premier résultat mis en valeur par Widmark est la relation entre la masse d'alcool *a* correspondant à une concentration donnée *c* dans le sang et au poids *p*, qui résulte de la définition de *r* : $a = c p r$ (*), ce que nous noterons (voir la note 30 précédente) :

$$a_t = c_t p r (*).$$

En particulier, pour $t = 0$, $a = c_0 p r$. Jones (2017) qualifie cette relation (*) de « fameuse équation de Widmark », expression que Widmark n'aurait sans doute pas désavouée, puisque c'est de cette relation qu'il tire la réponse à la question motivant sa recherche. Voici cette question :

³⁰ La réponse $R_{4,\text{allemand}}^\diamond$ est la plus remarquable sur ce point : **c** est dénommée « der theoretisch maximal erreichbaren Blutalkoholkonzentration », ce que l'on peut traduire ainsi : « la concentration maximale d'alcool dans le sang théoriquement atteignable ».

\mathcal{Q} : Dans quelle mesure une même *consommation* peut-elle résulter en une concentration d'alcool variable dans le sang et, par suite, dans les tissus sensibles à l'alcool ? [...] Le but principal de ce travail est de démontrer comment des particularités constitutionnelles, variant d'individu à individu, déterminent qu'une consommation égale peut avoir pour résultat une concentration d'alcool très différente dans le sang. La variation individuelle de la tolérance vis-à-vis de l'alcool s'explique de la sorte en partie. ($O_{2,T}$, p. 3)

Et la réponse, qu'il formule ainsi :

\mathcal{R} : Toutes les femmes [de l'échantillon] présentent une teneur en alcool supérieure à celle des hommes, à cause des constantes p et r , généralement moins élevées chez elles. [...] Les variations des constantes individuelles p et r sont donc les causes premières d'une concentration d'alcool dans le sang, la quantité d'alcool étant égale dans l'organisme. Elles sont donc aussi les causes premières de la différence individuelle de la tolérance vis-à-vis de l'alcool. ($O_{2,T}$, p. 16)

Mais, d'autre part, cette relation (*) fournit la technique relative à un premier type de tâches T_1 , que Widmark formule ainsi :

$T_{1,W}$: Le facteur r étant connu, calculer avec une précision satisfaisante la quantité totale d'alcool correspondant à une concentration d'alcool dans le sang donnée. ($O_{2,T}$, p. 16)

La technique τ_1 consiste, le lecteur l'aura deviné, à calculer la valeur de l'expression algébrique figurant au second membre de la relation (1) pour les valeurs p et r concernant la personne, et pour la mesure c_t de concentration obtenue, avec l'unité g/kg : on obtient ainsi la mesure en gramme de la masse recherchée.

Quatre-vingt-dix ans plus tard, dans un ouvrage qu'il coordonne avec deux collègues, intitulé *Alcohol, Drugs, and Impaired Driving. Forensic Science and Law Enforcement Issues* (JONES et al., 2020), Jones est l'auteur du chapitre 8, intitulé *Pharmacokinetics of Ethanol. A Primer for Forensic Practitioners* (JONES, 2020) œuvre que nous désignerons dans la suite par O_4 . Il y reformule le type de tâches T_1 comme suit :

$T_{1,J}$: Estimer la masse d'alcool absorbée et distribuée dans tous les fluides et tissus du corps, à partir de la concentration d'alcool dans le sang déterminée lors d'une prise de sang. (O_4 , p. 311, notre traduction).
Jones précise que le calcul ne doit pas être fait avant un délai de 90 minutes après le dernier verre d'alcool bu.

• Widmark enrichit le bloc pratico-technique de la praxéologie de plusieurs types de tâches, la technique étant à chaque fois associée à une formule ou expression algébrique. Pour alléger, on n'indiquera dans la suite que les types de tâches et les formules algébriques qui leur sont associées.

$T_{2,W}$: Calculer la quantité d'alcool métabolisée par unité de temps, et la quantité d'alcool métabolisée à l'instant t .

Expressions algébriques associées : $\beta p r$, pour la première, $\beta p r t$ pour la seconde.

Dans la suite, le lecteur trouvera la formulation des types de tâches directement tirée du texte de Widmark ($O_{2,T}$, pp. 17-25) et du texte de Jones (O_4 , pp. 311-318).

$T_{3,W}$: À la condition que l'alcool se trouve en équilibre approximatif au moment de la détermination du sang, connaissant les constantes dont il s'agit, calculer la quantité d'alcool résorbé (somme de la quantité d'alcool présente dans le corps à un moment donné et de la quantité métabolisée depuis le début de la consommation).

Formules algébriques associées : $A = c_t p r + \beta p r t = p r (c_t + \beta t)$.

$T_{3,J}$: To estimate the amount of alcohol a person has consumed after starting to drink until the time a blood sample was taken for analysis.

Jones obtient la relation $a = p r (c_t + \beta t)$ ainsi : de $c_t = c_0 - \beta t$, il déduit $c_0 = c_t + \beta t$ et substitue cette dernière expression à c_0 dans $a = c_0 p r$. Plus loin, il reprend la justification faite par Widmark (somme de la masse présente et de la masse métabolisée), en précisant qu'on peut convertir le résultat en nombre de verres consommés selon qu'il s'agit de bière, vin, ou alcools forts.

Voici la formulation que AP peut proposer pour ce type de tâches T_3 :

$T_{3,AP}$: Calculer la masse totale a d'alcool consommé à l'aide de la concentration c_t déterminée lors d'une prise de sang à l'instant t , connaissant p , r et β .

Formules algébriques associées : $a = c_0 p r = p r (c_t + \beta t) = p r c_t + \beta p r t$.

Widmark développe un exemple de mise en œuvre de T_3 en médecine légale.

L'évaluation de la quantité d'alcool consommée est d'un intérêt considérable au point de vue de la médecine légale. C'est le cas surtout lorsqu'il s'agit de décider dans quelle mesure des accidents de circulation sont dus à l'intoxication du conducteur.

[...]

À l'évaluation de la quantité résorbée on se heurte cependant [...] à cette difficulté que les constantes individuelles sont de grandeur variable chez des personnes différentes. [...] Au point de vue légal une sous-évaluation doit être préférable à une surévaluation.

Afin d'éviter une surévaluation par suite de la variation individuelle des constantes, il convient évidemment de se servir, pour l'évaluation, de valeurs situées à la limite inférieure des variations individuelles. La dispersion des constantes individuelles étant connue, cette limite inférieure peut être déterminée avec la certitude désirable pour qu'elle ne soit pas dépassée dans le cas individuel. Si on choisit deux fois la dispersion, cette certitude est de 39 cas sur 40 environ. On obtient les équations suivantes :

Quantité résorbée probable :

Hommes : $0,68 p (c_i + 0,15 t)$ Femmes : $0,55 p (c_i + 0,16 t)$

Limite inférieure de la quantité résorbée :

Hommes : $0,51 p (c_i + 0,08 t)$ Femmes : $0,44 p (c_i + 0,11 t)$

Dans ces formules, les unités de temps sont des heures [60β et $60 (\beta - 2 \sigma)$ respectivement]. Ce calcul simple est éclairé par [l']exemple suivant tiré des trois essais effectués en 1926.

Monsieur S. V., 97 kg, consomme à jeun 96 g d'alcool, répartis en portions ingérées toutes les 45 minutes. Après 6 heures, la concentration dans le sang est de 1,12 ‰.

Le calcul donne :

Quantité probable : $0,68 \times 67 (1,12 + 6 \times 0,15) = 92$ g.

Limite inférieure : $0,51 \times 67 (1,12 + 6 \times 0,08) = 52$ g.

Dans ce cas, où les constantes individuelles ne sont pas connues, le calcul donne 96 % de la consommation mesurée. Cette concordance excellente tient évidemment à ce que les constantes de [cette] personne-objet étaient situées très près des moyennes.

La limite inférieure est considérablement au-dessous de la consommation probable. (*O_{2,7}*, pp. 21-23)

Le lecteur aura remarqué l'emploi des résultats concernant l'effet sur une moyenne et sur un écart-type d'un changement d'unités de mesure, ainsi qu'une allusion à la loi des 3 sigmas relatifs à la loi normale, Widmark supposant implicitement que r suit une telle loi. Pour une variable suivant une loi normale $N(\mu, \sigma)$, la probabilité qu'une valeur de la variable appartienne à l'intervalle $[\mu - 2 \sigma, \mu + 2 \sigma]$ est voisine de 0,95, comme tout membre de la profession le sait, et $39/40 = 0,975$. On voit ainsi poindre deux œuvres mathématiques O_5 (statistique descriptive) et O_6 (probabilités, notamment le lien entre probabilités et fréquences, et la loi normale, avec en particulier la connaissance de la « loi des 3 sigmas »³¹).

Jones énonce pour sa part une application en médecine légale un peu différente de celle décrite par Widmark et connue en langue anglaise sous le nom de « reverse BAC calculation ». Il la décrit en termes de type de tâches, de la manière suivante :

³¹ Voir par exemple : https://en.wikipedia.org/wiki/68%E2%80%9395%E2%80%9399.7_rule ou https://fr.wikipedia.org/wiki/Règle_68-95-99.7

$T_{2,J}$: To make a back extrapolation of a person's blood alcohol concentration from time of sampling blood to some earlier time, such as the time of driving.

Sous le titre de « Retrograde Extrapolation », il y consacre une section de trois pages, en l'illustrant par des études de cas ; il conclut en signalant que cette « extrapolation arrière » est souvent considérée comme une pratique douteuse, car elle nécessite de nombreuses hypothèses sur l'admission-distribution-métabolisme-excrétion (ADME) de l'alcool et celles-ci doivent être soigneusement expliquées au tribunal dans chaque cas (O_4 , p. 317, notre traduction).

Poursuivons la liste des couples (types de tâches, formules algébriques) chez nos deux auteurs, Widmark et Jones :

$T_{4,J}$: Estimer la concentration d'alcool dans le sang attendue après qu'une quantité connue d'alcool a été bue, autrement dit, faire une prédiction (forward prediction) de la concentration fondée sur un scénario donné de consommation d'alcool.

Formule algébrique : $c_t = \frac{a}{r p} - \beta t$.

Ce type de tâches n'est pas cité en tant que tel par Widmark, car il le remplace par un type de tâches plus élaboré, traité dans une de ses publications antérieures, dont il rappelle les éléments essentiels :

$T_{5,W}$: Calculer la concentration d'alcool dans le sang à l'instant t si l'on ingère de l'alcool d'une façon continue à raison de la quantité b grammes par unité de temps.

Résultats et formules algébriques associées :

La concentration monte en ligne droite si $\frac{b}{p r} > \beta$, reste constante si $\frac{b}{p r} = \beta$, et

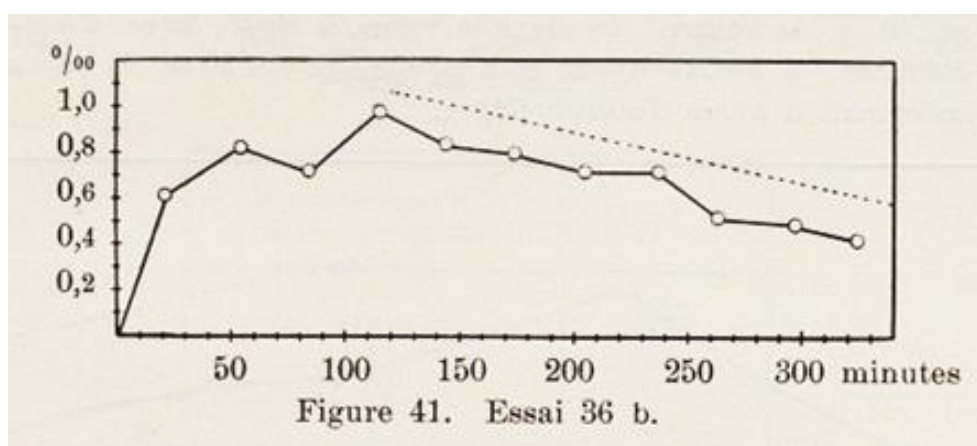
baisse en ligne droite si $\frac{b}{p r} < \beta$, selon la formule : $c_t = \left(\frac{b}{p r} - \beta\right)t$.

Widmark procède à une vérification expérimentale de ce résultat. Puis il fait remarquer qu'en prenant $b = \frac{a}{t}$ (on obtient alors : $c_t = \frac{a}{r p} - \beta t$), on trouve une formule équivalente à la formule $a = p r (c_t + \beta t)$ relative au type de tâches T_3 . Mais il ne met pas en valeur la formule $c_t = \frac{a}{r p} - \beta t$, valable seulement pour la période postrésorptive, car cette question a été traitée précédemment et n'est qu'une conséquence immédiate de $c_t = c_0 - \beta t$ et de $c_0 = \frac{a}{r p}$.

Le dernier paragraphe de son texte $O_{2,T}$ est consacré à l'influence de la digestion sur l'alcool consommé. Le traitement est moins formalisé, et ne débouche pas sur une expression algébrique. Voici un passage de son texte, et une des figures qui l'accompagnent :

Ces deux essais, qui doivent être considérés comme préliminaires, confirment les observations antérieures que l'alcool ingéré avec des aliments donne une concentration dans le sang plus basse que s'il n'avait pas été combiné avec un repas. Dans les fig. 41 [voir figure 3] et 42, les lignes hachées désignent la concentration qu'on aurait obtenue pendant la période postrésorptive si toute la quantité d'alcool consommée s'était trouvée dans l'organisme.

Figure 3



Source : D_{O_2} (p. 53).

En revanche, Jones consacre à la question une section entière, intitulée « Prospective Estimation ». Il y rappelle le constat fait par Widmark, puis fait état de travaux dans lesquels on a déterminé pour un même sujet le facteur r à jeun et r_1 après qu'un repas a été pris. En moyenne, l'augmentation lorsqu'on passe de r à r_1 est de 19 % environ. Jones propose ensuite (p. 318) une formule permettant de calculer la concentration d'alcool dans le sang c_t après la prise d'un repas, à partir du seul facteur r à jeun :

$$c_t = \frac{a \times f}{r p} - \beta t.$$

Cette formule est donc associée à un type de tâches, que nous désignerons par T_5 , et non pas $T_{5,J}$ pour rendre compte du fait que Jones ne le définit pas explicitement comme tel, contrairement à ce qu'il a fait pour tous les types de tâches qui précèdent. Le facteur f est introduit dans la formule $c_t = \frac{a}{r p} - \beta t$ pour compenser la surestimation de la concentration

qu'occasionnerait l'emploi de cette formule « non rectifiée » (matérialisée par la ligne en pointillé sur la figure 3). Ce facteur est inférieur à 1 ; on emploie les valeurs 0,9 ou 0,8 selon l'importance du repas. Jones donne un exemple pour l'illustrer. En termes modernes de pharmacocinétique, la taille du facteur f traduit la biodisponibilité de l'éthanol : f vaut 100 % en cas d'injection de l'alcool en intraveineuse, est proche de 100 % en cas de consommation à jeun d'un alcool fort, mais de l'ordre de 80 à 90 % en cas de repas accompagné d'alcool. Le lecteur aura sans doute fait le lien entre le facteur f , introduit ici, et le facteur $(1 - v)$ présent dans la réponse $R_{4\text{-allemand}}^{\diamond}$, où v désigne un « déficit de résorption ».

Pour terminer la description de la praxéologie construite par Widmark, il reste à décrire son environnement technologico-théorique. Comme l'ont montré la description et l'analyse de son texte $O_{2,T}$, cette description est faite avec soin par Widmark lui-même. Jones pointe avec justesse (O_4 , p. 277), à propos de Widmark, que sa double qualification en sciences et en médecine, ainsi que de bonnes bases en mathématiques, l'ont placé en position de force pour faire des contributions originales sur la pharmacocinétique de l'éthanol dans les fluides corporels. On peut résumer le niveau technologique θ de la praxéologie qu'il déploie en distinguant trois éléments essentiels (le premier, traité dans une publication antérieure, est seulement résumé dans $O_{2,T}$) :

θ_1 : La définition des périodes résorptive et postrésorptive, et la modélisation de l'évolution de la concentration masse/masse d'alcool dans le sang par la relation $c_t = c_0 - \beta t$, applicable seulement pour t appartenant à la période postrésorptive ; les constantes individuelles β et c_0 étant déterminées par la méthode des moindres carrés, c_0 apparaissant comme l'extrapolation à l'origine de l'évolution de la concentration pendant la phase postrésorptive.

θ_2 : L'introduction du facteur r pour établir la relation $a_t = p r c_t$.

θ_3 : Le calcul du facteur r à l'aide de la relation $a = p r c_0$, équivalente à : $r = \frac{a}{p c_0}$.

Quant au niveau de la théorie Θ , elle est encore embryonnaire en bien des points, et Widmark ne manque pas de le faire remarquer : comme on l'a souligné précédemment, il énonce à chaque fois les hypothèses faites sur le système σ qu'il étudie, et précise le

raisonnement qui lui permet d'élaborer un modèle μ du système³², modèle qu'il valide expérimentalement, quand c'est possible. Ce modèle fait intervenir des grandeurs, dont la concentration $C_{m/m}$, et leurs mesures avec des unités qu'il précise avec soin. Les relations entre les grandeurs en jeu se traduisent par des formules algébriques relatives à leurs mesures respectives. On a vu que plusieurs œuvres mathématiques, autres que le calcul algébrique élémentaire, sont mises à contribution, ces œuvres étant mises au service des questions étudiées. L'environnement technologico-théorique est donc un mélange de composantes indissociables d'objets de « la distribution et du métabolisme de l'alcool », d'objets de la médecine légale, et d'objets mathématiques.

En lisant l'œuvre O_4 de Jones, on voit apparaître plusieurs conditions et contraintes qui vont conduire à plusieurs mises à jour des travaux de Widmark.

Mise à jour des travaux de Widmark

Une *première réactualisation* des travaux de Widmark est la conséquence d'un changement des conditions et contraintes dans le mesurage de grandeurs. Dans ses travaux, les mesures de masses nécessaires étaient faites avec une balance à torsion, et les concentrations masse/masse étaient mesurées en mg/g ou g/kg. Dans les années 1950, avec les nouvelles méthodes analytiques de mesurage, comme la chromatographie en phase gazeuse³³, les parties aliquotes de sang sont mesurées en volume : la concentration considérée est une concentration masse/volume, avec des unités variables selon les groupes de pays (civilisations) comme on l'a vu plus haut (tableau 1) : mg/100 mL aux États-Unis, g/L en Europe. Dans les pays d'Europe du nord, les deux types de concentrations et unités associées sont utilisés.

³² Sur les relations entre système et modèle dans la TAD, voir Chevallard (2009a, p. 9-39), qui traite de la question de la modélisation en mathématiques et dans l'enseignement, et notamment p. 12-13. Ce document fait partie des œuvres du milieu pour la recherche M de cette enquête.

³³ Sa mise au point date des années 1950 (Prix Nobel de chimie en 1952 attribué à Martin et Synge). Voir : <https://en.wikipedia.org/wiki/Chromatography> (paragraphe « History »).

Le facteur de Widmark r est remplacé par une grandeur exprimée en L/kg

Jones (2009) signale que c'est en 1981, une cinquantaine d'années après sa parution en allemand, que l'œuvre de Widmark est traduite en anglais par Randal Baselt aux États-Unis, sous le titre *Principles and application of medicolegal alcohol determinations*. Cette édition en langue anglaise n'est pas disponible en version numérique, et l'ouvrage n'est accessible en Europe que dans des bibliothèques auxquelles AP n'a pas eu accès. Mais, selon John Searle (2015) qui se réfère à cette seule traduction en langue anglaise, le coefficient r sans dimension de Widmark y est remplacé par une grandeur quotient volume/masse, exprimée en L/kg, qui est elle aussi désignée par la lettre r . L'objet de l'article est la détermination de l'incertitude sur la concentration C quand on la calcule avec la « formule de Widmark », que Searle écrit sous la forme : $C = \frac{m}{rM} \times 100 \frac{\text{mg}}{100 \text{ mL}}$, car l'unité de concentration est celle utilisée aux États-Unis : mg/100mL.

La formule de Widmark est remplacée par celle de Watson

La publication en langue anglaise en 1981 de l'œuvre de Widmark a lieu la même année que celle d'un article de Watson et al., ayant pour titre : *Prediction of Blood Alcohol Concentrations in Human Subjects. Updating the Widmark Equation*. Les auteurs remarquent que la principale faiblesse du travail de ce dernier réside dans le fait que les valeurs de r peuvent être déterminées si les autres variables (c_0 , a et p) sont connues, ce qui n'est pas le cas dans la plupart des situations dans lesquelles les formules de Widmark sont utilisées. Se pose alors la question de la valeur qu'il convient d'attribuer à r . Ils établissent dans ce but une nouvelle formule, faisant intervenir le volume hydrique total (total body water, TBW, en anglais ; Gesamtkörperwasser, GKW, en allemand) et la proportion en volume d'eau dans le sang, qui est une grandeur quotient volume/volume, sans dimension, dont la valeur retenue est 0,8. La formule de Widmark, notée $C_0 = \frac{a}{r \times p}$ par Watson, est remplacée par la formule $C_0 = \frac{0,8 \times a}{V}$, qui donne la mesure en g/L de la concentration masse/volume d'alcool dans le sang, à partir de la mesure V en litres du volume hydrique total. Pour déterminer V , les auteurs ont utilisé une régression linéaire multiple (œuvre O_7) faite par ordinateur à partir de la masse, de la taille et

de l'âge de 458 hommes et 265 femmes. Ils ont obtenu les relations suivantes, où a est l'âge en années, h la taille en centimètres et m la masse en kg :

$$V = 2,447 - 0,09516 a + 0,1074 h + 0,3362 m, \text{ pour un homme,}$$

$$V = -2,097 + 0,1069 h + 0,2466 m, \text{ pour une femme (} a \text{ n'intervient pas).}$$

On notera que, sur la page³⁴ du site Wikipédia en langue allemande relative à la concentration dans le sang, les lettres utilisées désignent les grandeurs correspondantes : t pour l'âge, h pour la taille et m pour la masse. Les mesures sont écrites comme quotient de la grandeur par l'unité. Ainsi, la première formule est écrite sous la forme :

$$GKW_{\text{männlich}} = 2,447 - 0,09516 \frac{t}{\text{Jahre}} + 0,1074 \frac{h}{\text{cm}} + 0,3362 \frac{m}{\text{kg}},$$

ce qui laisse entendre que le rapport des citoyens allemands à l'objet « grandeurs et mesures » est très différent des rapports institutionnels à ces mêmes objets dans l'enseignement en France. On notera qu'au premier membre, en gardant les notations des auteurs relatives aux mesures de grandeurs, il aurait été souhaitable d'écrire : $\frac{GKW_{\text{männlich}}}{L}$, mesure en L de la grandeur $GKW_{\text{männlich}}$.

Les calculateurs en ligne permettant le calcul d'une CAS mobilisent souvent la formule de Watson, comme c'est le cas dans le site allemand D_3 de l'encyclopédie de l'alcool. Concernant les applications pour téléphone mobile, certains utilisateurs se plaignent du fait que les résultats sont donnés en ‰, et demandent des explications³⁵ au sujet de la multiplication par 1,055 :

Bonjour,

On trouve beaucoup d'application [*sic*] android qui calculent le taux d'alcoolémie et les délais d'élimination, mais la plupart d'entre elles (et les meilleures...) n'expriment pas le taux en g/L mais en ‰. Quel est le rapport entre ces deux unités de valeur ? J'ai lu, soit que 1 g/L = 1 ‰, soit que 1,055 g/L = 1 ‰ (et donc que 0,5 g/L = 0,47 ‰). Qu'en est-il vraiment ?

On voit que les besoins mathématiques concernent également les citoyens, pas seulement les membres de la profession...

Sur le site brésilien du CISA³⁶ (Centre d'information sur la santé et l'alcool), les tableaux indiquant les taux d'alcoolémie moyens (un pour les hommes, un pour les femmes)

³⁴ <https://de.wikipedia.org/wiki/Blutalkoholkonzentration> (page déjà citée).

³⁵ La réponse apportée mérite lecture (Rubrique Commentaires).

<https://www.legipermis.com/blog/2016/03/30/combien-de-temps-pour-eliminer-un-verre-dalcool/>

³⁶ <https://cisa.org.br/index.php/sua-saude/informativos/artigo/item/109-consumo-e-alcoolemia>

ont sans doute été construits à l'aide de la formule de Widmark, car la seule variable individuelle prise en compte est la masse corporelle (en kg). Ces tableaux sont adaptés d'après une source citée sur le site de l'Organisation mondiale de la santé : il s'agit de l'article de Watson et al. (1981).

Le facteur r peut être plus grand que 1

En 1984, deux chercheurs (P. Zink et G. Reinhart) publient en allemand un article dans la revue *Blutalkohol*, dans lequel de tels facteurs apparaissent dans des expériences où les sujets ont été soumis à de fortes doses d'alcool (de 3,0 à 5,7 g/kg). Les valeurs du facteur r de Widmark obtenues alors sont les suivantes : $1,05 \pm 0,161$, les valeurs extrémales étant 0,77 et 1,32. Dans certaines conditions, il devient donc difficile de lui donner le nom de « facteur de réduction ».

Cet article fera l'objet d'une réévaluation dans Jones et al. (2006), compte tenu de son intérêt dans le cadre des sciences judiciaires, lors de la présentation d'un témoignage à titre d'expert. En effet, des calculs conduits à l'aide de la formule de Widmark, dans laquelle on prendrait pour r la valeur 0,7, donneraient des résultats proches du taux légal, ce qui pourrait provoquer des erreurs judiciaires.

Une révision de la formule de Watson en 1997

La formule de Watson, $C_0 = \frac{0,8 \times a}{V}$, ne souffre d'aucune incohérence dimensionnelle – il s'agit bien d'une concentration masse/volume –, mais pour déterminer les formules pour V indiquées plus haut, les auteurs ont utilisé des données dans lesquelles des concentrations $C_{m/m}$ avaient été utilisées, ce qui a suscité des débats dans les cercles scientifiques concernés. En effet, on a vu que Watson désigne par la même notation C_0 les nombres c_0 et c'_0 tels que $C_{m/m} = c_0$ g/kg et $C_{m/v} = c'_0$ g/L, alors que $c'_0 = 1,055 c_0$. Dans la correspondance de la revue *Science & Justice* (donnée D_{10}) – correspondance qui est un lieu du débat scientifique –, en 1997, soit 16 ans après la publication de Watson, Alec Gabe, évoquant l'un de ces débats (figurant dans un article de Jones de 1984), propose de remplacer le coefficient 0,8 de Watson, proportion en

volume d'eau dans le sang, par $0,8 \times 1,055$, soit 0,844. Il parle alors de « formule de Watson corrigée », et désigne la formule de Watson originale par « formule non corrigée ».

Le facteur r de Widmark devient le volume de distribution ; contrainte au niveau de la discipline

Une *deuxième réactualisation* des travaux de Widmark est la conséquence d'un changement des conditions et contraintes au niveau « Discipline » de l'échelle des niveaux de codétermination. En effet, une discipline nouvelle, la « pharmacocinétique », se constitue dans les années 1950. Jones signale (*O*₄, p. 277) que le mot est forgé par Friedrich Dost, dans un ouvrage publié en 1953 où il établit les formules permettant de décrire les relations Concentration-Temps de substances dans le sang ou dans le plasma, selon différents modes d'administration. Les conditions et contraintes imposées par l'apparition de cette nouvelle discipline peuvent être appréciées en confrontant les contenus de chapitres sur la concentration de l'alcool dans le sang dans deux ouvrages de synthèse.

Alan Wayne Jones et Derrick J. Pounder (1997), dans un chapitre de 30 pages intitulé *Measuring Blood-Alcohol Concentration for Clinical and Forensic Purposes* (donnée D_{11}), donnent des informations nouvelles sur les relations entre disciplines et choix d'unités : dans les laboratoires de biochimie clinique, les concentrations sont exprimées avec les unités du système international (mol/L, mmol/L), alors que dans les laboratoires de science médico-légale (forensic science), elles sont exprimées en unité de masse par unité de volume (mg/dL, g/L, etc.) ou en unité de masse par unité de masse (mg/g ou g/kg). Ils précisent même que les résultats de laboratoires de biochimie clinique ne peuvent être cités dans les tribunaux sans qu'une correction appropriée ait été faite, ou sans rechercher l'aide d'un expert pour l'interprétation des résultats.

Ils abordent ensuite la question du facteur de Widmark dans un développement, reproduit ci-dessous, où le facteur de Widmark r est mis en relation avec une nouvelle grandeur quotient, volume/masse, exprimée en L/kg. Mais d'une manière très particulière, comme le montre cet extrait :

The apparent volume of distribution (V_d) of alcohol is obtained from the ratio dose (g/kg) divided by C_0 and in clinical pharmacology textbooks the V_d has

units of liters/kg¹⁵². However, because BAC in Widmark's studies was reported in units of mg/g or g/kg, the ratio dose/C₀ known as the Widmark *r* factor is a ratio without any dimensions and should be 5,5% greater than V_d reported in units of L/kg^{154,162}. (JONES ; POUNDER, p. 343)

Cette grandeur se voit attribuer un nom : le volume apparent de distribution, noté V_d, mais les auteurs font référence aux manuels de pharmacologie clinique (à visée didactique) pour en préciser la dimension, en donnant l'unité avec laquelle elle est mesurée. Si l'on y regarde de plus près, la référence à laquelle ils renvoient avec l'appel de note 152 a pour titre *Clinical pharmacokinetics, Concepts, and applications*³⁷. On voit donc que les auteurs évitent l'emploi du mot « pharmacokinetics », et qu'ils ne donnent aucune justification à propos de l'attribution du nom « volume apparent de distribution ». Les appels de note 154 et 162 renvoient respectivement à un article sur la vie et l'œuvre de Widmark, et à l'article de Watson et al. (1981).

Tel n'est plus le cas dans l'ouvrage de Jones et al. (2020). D'abord, le mot « pharmacokinetics » est le premier mot du titre du chapitre O₄ écrit par Jones. Ensuite, Jones désigne par la notation « rho » le facteur de Widmark tel qu'il est défini dans son œuvre en allemand (1932), puis le désigne ensuite comme « rho factor or distribution volume of ethanol », en précisant sur ce point :

Because the aliquots of blood analysed were weighted, the ethanol concentrations are in units g/kg (same as mg/g), which meant that the rho factor, which is the ratio of the ethanol dose (g/kg)/C₀ (mg/g) has no dimensions. This contrasts with the way BAC is reported in journal articles today, which is mostly in mass/volume units (g/L or g/100 mL) so a correction is necessary to the rho factor reported by Widmark. Taking the density of whole blood as 1.055 g/mL, a rho factor of 0,68 according to Widmark becomes 0,64 L/kg. (O₄, p. 280)

Cette fois-ci, il ne fait plus allusion à des manuels mais à des articles dans les revues scientifiques. De plus, l'intervention de la masse volumique du sang (« density » en anglais³⁸) dans cette « nécessaire correction » est clairement évoquée, sans être traitée en détail. On en devine la raison quand on lit ce que Jones précise alors dans une note : « The density of whole blood is 1.055 g/mL on average, so 1.0 g/L = 0.948 g/kg ». Il commet ainsi une erreur que nous

³⁷ Il s'agit de l'ouvrage de M. Roland, et T. N. Tozer publié chez Lea & Febiger, Philadelphie, en 1980.

³⁸ En anglais, l'équivalent du mot « densité » est « relative density », ce qui est éclairant, notamment pour un Français.

avons déjà analysée : avec des notations déjà introduites plus haut, il fait comme si $C_{m/m} = C_{m/v}$, alors que ces grandeurs sont seulement proportionnelles : $C_{m/v} \propto C_{m/m}$. Et plus précisément $C_{m/v} = C_{m/m} \times \rho_{\text{sang-total}}$. Dans l'institution à laquelle il appartient, cette « erreur » est jugée sans importance.

Démontrons l'affirmation de Jones sur la « correction nécessaire » du facteur rho, en adoptant la valeur 1,055 kg/L pour $\rho_{\text{sang-total}}$. En gardant les notations de Widmark, utilisons le calcul dans l'algèbre des espèces de grandeurs. On sait que c_0 est la mesure en g/kg d'une concentration $C_{m/m}$, que nous désignerons par C_0 . Ainsi $C_0 = c_0 \text{ g/kg} = c_0 \text{ ‰}$ avec $c_0 = \frac{a}{r p}$. D'autre part, notons C'_0 la concentration masse/volume correspondante, et c'_0 sa mesure en g/L. On a :

$$C'_0 = c'_0 \text{ g/L} = c_0 \text{ g/kg} \times 1,055 \text{ kg/L} = \frac{a \text{ g}}{r \times (p \text{ kg})} \times 1,055 \text{ kg/L}$$

Sans toucher à la quantité d'alcool $a \text{ g}$ et à la masse corporelle $p \text{ kg}$, on « fait passer » 1,055 kg/L au dénominateur :

$$C'_0 = \frac{a \text{ g}}{\frac{r}{1,055 \text{ kg/L}} \times (p \text{ kg})}$$

On peut ensuite continuer les calculs :

$$C'_0 = \frac{a \text{ g}}{\left(\frac{r}{1,055} \text{ L/kg}\right) \times (p \text{ kg})} = \frac{a \text{ g}}{\left(\frac{r}{1,055} \times p\right) \text{ L}} = \frac{a}{\frac{r}{1,055} \times p} \text{ g/L} = \frac{a}{r' p} \text{ g/L} \text{ en posant : } r' = \frac{r}{1,055}.$$

Ainsi la mesure c'_0 de C'_0 en g/L est égale à $\frac{a}{r' p}$, et non pas $\frac{a}{r p}$, avec $r' = \frac{r}{1,055}$.

On notera que ce calcul dans l'algèbre des espèces de grandeurs permet de mettre en évidence la grandeur introduite par Jones et Pounder (1997), le volume apparent de distribution : il est égal à $r' \text{ L/kg}$ car $C'_0 = \frac{a \text{ g}}{\left(\frac{r}{1,055} \text{ L/kg}\right) \times (p \text{ kg})} = \frac{a \text{ g}}{r' \text{ L/kg} \times p \text{ kg}}$.

À ce sujet, Jones note (deuxième phrase de la citation suivante) que la confusion entre r et r' a pu être faite même par des chercheurs de la discipline « science médico-légale » :

Some investigators failed to confirm the values of β and rho reported by Widmark, although this often depended on some departure from his stipulated experimental design, namely drinking a bolus dose of ethanol as neat spirits on an empty stomach. Others failed to appreciate that BAC was in mass/mass concentration units (mg/m or g/kg), which influences the values of β and rho by 5,5 %. (O_4 , p. 281)

Mais dans O_4 , on ne trouve pas de justification de la dénomination « volume apparent de distribution » donnée à cette nouvelle grandeur : $r' \text{ L/kg}$. Pour essayer de comprendre ce choix, revenons au premier calcul fait dans la brochure de l'APMEP, dans lequel $a = 20$, $p = 75$

et $r = 0,7$. Le calcul envisagé au départ de notre enquête, $\frac{20 \text{ g}}{75 \text{ kg} \times 0,7 \text{ L/kg}} = \frac{20 \text{ g}}{(75 \times 0,7) \text{ L}} = \frac{20 \text{ g}}{52,5 \text{ L}} \approx 0,38 \text{ g/L}$, doit donc être remplacé par $\frac{20 \text{ g}}{75 \text{ kg} \times \frac{0,7}{1,055} \text{ L/kg}} \approx \frac{20 \text{ g}}{(75 \times 0,66) \text{ L}} \approx \frac{20 \text{ g}}{49,5 \text{ L}} \approx 0,40 \text{ g/L}$. Le volume de 49,5 L, qui apparaît au dénominateur dans le calcul qui précède, est le volume d'eau dans le corps dans lequel la masse de 20 g d'alcool devrait être diluée pour que la concentration en alcool du mélange ainsi obtenu soit égale à la concentration d'alcool dans le sang³⁹. On l'obtient en multipliant la masse de la personne par la grandeur 0,66 L/kg.

En enquêtant auprès d'une chercheuse en pharmacocinétique sensible aux questions d'enseignement, AP apprend que la locution « volume de distribution » est utilisée dans cette discipline pour désigner deux grandeurs :

- un volume au sens habituel exprimé en L, qui vaut 49,5 L dans l'exemple précédent ;
- le quotient d'un volume par une masse, qui vaut 0,66 L/kg dans cet exemple.

Cette grandeur quotient est utile lorsqu'on veut comparer des volumes de distribution, au premier sens de cette locution. On pourrait appeler ce quotient « volume massique de distribution », ou encore « volume spécifique de distribution », selon l'usage en vigueur en thermodynamique où ce qualificatif est employé quand on « rapporte une grandeur à l'unité de masse ». Mais dans l'institution « pharmacocinétique », on préfère parler de « volume de distribution », le contexte devant suffire à indiquer celui des deux que l'on considère. Mieux même, cette double interprétation est intégrée dans la formule suivante donnant V_d , en fonction de la dose d'un médicament et de la concentration extrapolée à l'origine C_0 , qui figure en bonne place dans les manuels de pharmacocinétique : $V_d = \frac{\text{Dose}}{C_0}$.

La technique d'emploi de cette formule est la suivante :

- si la dose de médicament prescrite l'est sous forme d'une masse (par exemple un comprimé de 20 mg par voie orale), et si C_0 est exprimée en mg/L, alors on obtient V_d en L ;
- si la dose du médicament est donnée en g/kg (par exemple, 3 mg/kg par injection en intraveineuse), et si C_0 est exprimée en mg/L, la formule donne V_d en L/kg.

³⁹ Formulation ressemblant beaucoup à la définition du facteur de distribution r de Widmark donnée plus haut : Le facteur r permet de déterminer la fraction de la masse du corps ($r p$) dans laquelle l'alcool devrait être présent s'il y était distribué avec la même concentration masse/masse que dans le sang.

Ainsi, apparaissent deux V_d , que nous désignerons respectivement par $V_{d,1}$ et $V_{d,2}$, reliés par la relation : $V_{d,1} = V_{d,2} \times P$, où P désigne la masse corporelle (notation adoptée par cohérence avec l'emploi de p pour désigner sa mesure en kg).

En revenant à la formule de Widmark, on a alors, avec les conventions de notations précédentes : $c'_0 = \frac{a}{v_{d,1}}$ ou $c'_0 = \frac{a}{v_{d,2}}$, où $v_{d,1}$ et $v_{d,2}$ désignent les mesures respectives de $V_{d,1}$ en L et de $V_{d,2}$ en L/kg. Et $v_{d,2}$ n'est autre que r' , défini précédemment.

Il reste à justifier l'emploi du qualificatif « apparent ». Ce mot a plusieurs significations. La page correspondante du CNTRL indique la signification surprenante suivante : « Qui n'est pas tel qu'il apparaît », avec une spécification dans les domaines techniques : « Dont on n'a par l'observation que des indications approximatives ou inexactes. » Ces significations sont celles qu'il convient de convoquer ici. En effet, le volume de distribution estimé de certains médicaments (1000 L pour certains antidépresseurs) peut être très supérieur au volume d'eau standard d'un corps humain (40 L).

Les dernières estimations du volume de distribution pour l'éthanol

Les estimations faites à propos de V_d dans les années 1983-2000 (O_4 , p. 293) donnent les valeurs moyennes suivantes : 0,7 L/kg pour un homme et 0,6 L/kg pour une femme, valeurs envisagées au départ de l'étude en imaginant par hypothèse une mauvaise interprétation des données par les auteurs de la brochure de l'APMEP. La coïncidence est frappante : cette hypothèse est-elle pour autant la bonne ? Certainement pas. Si les auteurs de la brochure avaient eu connaissance de ces travaux, ils auraient parlé du « volume de distribution » au lieu de citer la dénomination « coefficient de diffusion », et n'auraient pu se dispenser d'indiquer l'unité L/kg, qui évoque une grandeur assez singulière pour des élèves de 1^{re} L.

Dans un article de Maskell et al., publié en 2019 (donnée D_{12}), les auteurs – parmi lesquels on retrouve Jones – ont recueilli des mesures expérimentales établies avec soin, concernant 163 hommes et 63 femmes. Les résultats sont les suivants : $0,69 \pm 0,086$ L/kg avec un coefficient de variation de 12,41 % pour les hommes, et $0,60 \pm 0,100$ L/kg avec un coefficient de variation de 16,8 % pour les femmes.

Notons qu'ils ont utilisé de nombreuses formules telles que celles de Watson pour déterminer V_d à partir de données anthropométriques. L'une d'elles intègre la modification proposée par Gabe en ce qui concerne le volume de distribution pour un homme, noté r :

$$r(\text{homme}) = \frac{2,447 - (0,09516 \times \text{Âge}) + (0,1074 \times \text{Taille}) + (0,3362 \times \text{Masse})}{\text{Masse} \times 0,84}.$$

Le résultat final est le suivant : cette formule est celle qui rend le mieux compte des données expérimentales. Cette formule est sans biais et présente l'écart interquartile le plus faible. Par contre, la formule qui est la meilleure pour les femmes fait intervenir l'indice de masse corporelle ; due à Forrest, et intégrant la modification proposée par Gabe, elle est très complexe et ne sera pas évoquée ici.

En revenant au facteur de Widmark, on voit qu'il est passé en moyenne de 0,68 pour l'homme (resp. 0,55 pour la femme) en 1930, à 0,74 pour l'homme (resp. 0,63 pour la femme) en 2018, ce qui s'explique par la variation des données anthropométriques.

Il reste à étudier les besoins mathématiques dans les praxéologies didactiques, celles qui permettent d'élaborer l'organisation de l'étude.

Les besoins mathématiques pour l'organisation de l'étude

Dans le cas qui nous occupe, ces connaissances sont celles qui concernent le début du travail demandé aux élèves. Les auteurs de la brochure se sont imposé une contrainte de taille : inscrire leur énoncé dans la catégorie « situation problème », dans laquelle les élèves sont supposés partir d'un problème et construire leurs connaissances « eux-mêmes » ou, du moins, en ayant un *topos* qui ne soit pas aussi réduit que dans le cas d'une simple application de formule.

La solution trouvée par les auteurs consiste à leur donner une information qui devrait leur permettre de retrouver la formule de Widmark, sans qu'il soit besoin de leur poser une question dans ce but. Les auteurs peuvent alors afficher comme objectif mathématique : « établir une formule formalisant une situation de proportionnalité ». Cette information est : « le taux d'alcoolémie est proportionnel à a et inversement proportionnel à p et k ».

Le lecteur aura bien senti que les auteurs ont une confiance limitée dans leur organisation didactique : leur silence dans les éléments de solution sur ce point précis en témoigne. Ils savent bien que des élèves ayant suivi un enseignement en France sur ces

questions ne peuvent pas répondre seuls à une telle question, et sans doute comptent-ils sur une intervention forte du professeur pour faire émerger la formule attendue. Mais la seule question qui nous intéresse ici est la suivante : sur le plan mathématique, comment un professeur justifierait-il l'obtention de cette formule à partir des informations données ?

Considérons un exemple plus familier, en géométrie. Sachant que le volume V d'un cylindre, d'une pyramide ou d'un cône est proportionnel à l'aire A de sa base quand sa hauteur h est fixée, et proportionnel à sa hauteur h quand l'aire de sa base A est fixée, on peut en déduire que V est proportionnel au produit $A \times h$ de ces grandeurs : $V \propto A \times h$. Ce qui signifie que, dans chacun des trois cas, il existe un nombre réel positif k tel que $V = k A \times h$. Ce raisonnement ne permet cependant pas de déterminer les valeurs de k dans chacun des cas : $k = 1$ pour le cylindre, $k = 1/3$ dans les cas de la pyramide et du cône.

Sur quels éléments technologiques un professeur peut-il s'appuyer pour démontrer, en tant que professeur, le résultat plus général suivant, implicitement convoqué dans la déduction précédente :

Si une grandeur est proportionnelle à deux grandeurs indépendantes, elle est proportionnelle à leur produit.

Il est à craindre qu'un professeur n'ait jamais rencontré dans sa formation les éléments technologiques en question. Ce besoin de la profession a déjà été repéré par des didacticiens, qui ont mis à disposition de la profession des éléments technologico-théoriques sur cette question délicate, utilisée abondamment en physique, ainsi que parfois en mathématiques. Sur les questions relatives à la proportionnalité par rapport à plusieurs grandeurs, le professeur trouvera des réponses dans CHEVALLARD et BOSCH (2002, p. 74-75), dans le cas du volume d'un cylindre, ainsi qu'un traitement bienvenu sur la définition de la notion de grandeurs indépendantes dans CHEVALLARD et ARTAUD (2012, p. 23-24), dont voici un extrait, formulé en termes de variables :

Soit S un système, Ω son ensemble d'états et soit x une variable relative à S ; pour préciser la notion de variable(s) indépendante(s) on suppose :

- 1° que l'ensemble des valeurs que peut prendre une telle variable x est un certain intervalle I_x de \mathbf{R} ;
- 2° que, étant donné n variables indépendantes x_1, \dots, x_n relatives à S , ayant respectivement pour ensemble des valeurs possibles les intervalles réels I_1, \dots, I_n , et étant donné un n -uplet $(a_1, \dots, a_n) \in I_1 \times \dots \times I_n$, il existe $\omega \in \Omega$ tel que $(x_1(\omega), \dots, x_n(\omega)) = (a_1, \dots, a_n)$. [...]

En d'autres termes, les *variables indépendantes* peuvent prendre *n'importe quelle valeur que l'on se plaise à imaginer*.

Si on utilise cette modélisation dans la situation évoquée par les auteurs de la brochure, peut-on dire que a , p et r sont des variables indépendantes ? On a déjà critiqué le fait de ne considérer que deux valeurs moyennes pour r , une pour l'homme, une pour la femme, et envisagé que r puisse prendre des valeurs dans un intervalle I_r . On peut de même préciser des intervalles I_a et I_p dans lesquels a et p prennent leurs valeurs. Faisons un instant le crédit aux auteurs d'une telle modélisation. Peut-on pour autant considérer que les variables a , p et r puissent prendre *n'importe quelle valeur que l'on se plaise à imaginer* ? Dans Watson et al. (1981), les auteurs, mobilisant la technologie de la régression linéaire multiple, précisent que le pourcentage de la variance qui est expliquée par les formules établies pour le volume hydrique total TBW, est de 70 %. Les valeurs de V_d ainsi obtenues (voir la formule adoptée dans Maskell et al.), et donc r , dépendent assez fortement de celles de p . Or elles sont proches des valeurs obtenues expérimentalement. La condition d'indépendance peut donc être fortement mise en doute. Mais revenons sur la modélisation faite par Widmark. Pourquoi les difficultés qui viennent d'être évoquées n'y sont-elles pas apparues ?

La modélisation faite par Widmark

Widmark part de la formule $a_t = p c_t$, qui se révèle fausse. À partir de résultats expérimentaux obtenus par des collègues, il en comprend la raison (l'alcool n'est pas distribué de la même manière dans tous les organes). Le moyen le plus simple pour établir un meilleur modèle consiste à faire l'hypothèse que les deux grandeurs en question, a_t et $p c_t$, sont proportionnelles : $a_t \propto p c_t$. C'est-à-dire qu'il existe un nombre sans dimension k tel que $a_t = k p c_t$, ou mieux tel que $a_t = (k p) c_t$, pour prendre en compte le fait que son introduction porte sur la masse corporelle p , et non pas sur la concentration du sang en alcool c_t . Puisque les expérimentations ont montré que ce coefficient est inférieur à 1, il le note r et non pas k . Ainsi : $a_t = (r p) c_t$. Le facteur r est donc « fabriqué sur mesure » pour obtenir une égalité. Et c'est seulement lorsqu'il va vouloir calculer r qu'il va choisir d'extrapoler à l'origine : $a = (r p) c_0$, pour en déduire r . Dans la formule équivalente : $c_0 = \frac{a}{r p}$, r se retrouve au dénominateur. C'est cette dernière formule qui est, par la suite, devenue célèbre sous le nom de formule de Widmark.

Dans le modèle μ construit par Widmark du système σ qu'il étudie, la concentration c_0 n'a pas de contrepartie réelle dans le système. Cependant, sa présence dans μ rend ce dernier plus commode à employer pour obtenir des informations sur σ que ne le permettrait une interrogation directe de σ .

La mise en scène de la formule par les auteurs de la brochure, dont on a vu dans la section précédente qu'elle était difficile à justifier, présente le désavantage supplémentaire de masquer le raisonnement de Widmark, à la fois expérimental dans sa démarche et théorique dans sa visée. On peut suivre et faire sien ce raisonnement, alors qu'il très difficile de le faire pour celui suggéré par les auteurs de la brochure. Sur ce point, on peut méditer la citation de Ronald Fisher, trouvée dans un travail sur le « modèle logistique » de Verhulst, qui mérite lecture :

L'Histoire des Sciences a beaucoup souffert de l'utilisation par les professeurs de matériaux de seconde main, et de l'oubli conséquent des circonstances et de l'atmosphère intellectuelle dans laquelle les grandes découvertes du passé furent faites. Une étude de première main est toujours instructive, et souvent ... pleine de surprises. (Cité⁴⁰ dans BACAËR, 2008, p. 3)

Assurément, l'histoire des sciences n'est pas la seule à souffrir, et la profession de professeur, qui en prend ici pour son grade, en souffre aussi, car se créent ainsi des contraintes qui vont peser sur des praxéologies ne concernant pas directement l'enseignement, mais la construction conjointe de positions d'élève p_e et de professeur p_t , construction que Chevallard décrit en termes de « façonnage et refaçonnage » :

Whenever students study and teachers teach, they willy-nilly embark on a collective process of creation and development of institutional positions p_s and p_t . [...] This is true [...] in every classroom where students and teachers routinely meet to work together. All teachers can be aware that they don't just teach. Jointly with their students and many other stakeholders, they shape and reshape these students' position as much as their own position. Students, whatever their age, can be made aware, through appropriate means, of the creative process in which they are, by necessity, engaged. (CHEVALLARD, 2020, p. 37).

⁴⁰ Citation tirée de : Mendel, G., Experiments in plant hybridisation. Mendel's original paper in English translation with Commentary and Assessment by the late Sir Ronald A. Fisher, edited by J. H. Bennett. Oliver & Boyd, Edinburgh and London 1965. Traduction revue par l'enquêteur AP.

On a vu que les auteurs ont peiné à façonner les positions p_e et p_t en se plaçant sous les contraintes d'une « situation problème ». L'étude de la praxéologie construite par Widmark montre que, sans le savoir, les auteurs ont voulu transposer didactiquement son travail en s'attaquant à un élément θ_3 se situant au niveau technologique θ de sa praxéologie.

Dans la TAD, le modèle didactique des activités d'étude et de recherche (AER), qui modifie les contraintes du modèle des « situations problèmes » tout en en gardant certains traits, invite le professeur à mettre en avant le type de tâches T de la praxéologie mathématique enjeu de l'étude par l'intermédiaire d'une de ses tâches t , l'objectif étant de faire émerger ladite praxéologie⁴¹.

Or dans la brochure de l'APMEP, l'accent est d'abord mis sur les aspects technologiques, soit « scientifiques » (capacité, densité, concentration), soit « mathématiques » (la formule à établir). C'est seulement dans la note finale que les auteurs font allusion à des types de tâches. D'abord en indiquant que l'on peut réduire t d'un tiers en cas d'« absorption pendant un repas », appliquant ce facteur aux valeurs trouvées pour t . Ce qui évoque l'emploi d'un déficit de résorption v de $1/3$, ou un facteur f de $2/3$, que Widmark et Jones appliquent à c_t , et pas seulement à c_0 . Enfin, les auteurs de la brochure évoquent un type de tâches engendré par cet élément c_0 et la connaissance de la constante β , mais ils le font seulement en fin de note et en employant le conditionnel : « on pourrait... ». La confusion faite par les auteurs entre c_0 et c_{1h} rend difficile l'identification du type de tâches concerné, qui est à relier à la fois à $T_{5,w}$ et à T_5 : sans doute la difficulté de la tâche ainsi évoquée est-elle sous-estimée par les auteurs.

Un accès direct à des travaux tels que celui de Widmark devrait permettre à la profession de disposer d'un matériau utile pour enrichir la palette du professeur en matière de façonnages et refaçonnages possibles de positions p_e et p_t . Nous allons l'esquisser en citant quelques exemples, à partir desquels le lecteur pourra décliner ces positions.

- Dans le paradigme de la visite des œuvres :

- Proposer aux élèves une formule toute faite, mais utilisant une concentration $C_{m/v}$, et le volume de distribution V_d à la place de la formule de Widmark donnée par les auteurs, qui utilise une concentration $C_{m/m}$ et le facteur sans dimension r . (Exercice fermé, en complément des cours d'auto-école, au cas où la formule de Widmark en termes de $C_{m/m}$ leur ait été présentée, dans ce système didactique situé hors de l'école publique.)

⁴¹ Voir par exemple Chevallard (2007b, § 6.3-6.8).

– Si la notion d’ajustement linéaire d’une série statistique double par la méthode des moindres carrés (ou un libellé équivalent) est un enjeu de l’étude dans le programme de la classe, proposer une AER en fournissant aux élèves les données D_{O_2} de Widmark, sous forme du tableau 2, mais converties en $C_{m/v}$. Le type de tâches motivant l’AER consistant à trouver une formule permettant de prévoir la concentration d’alcool sur la période de temps commençant une heure après la consommation de l’alcool ; le milieu pour l’étude comportant une calculatrice graphique avec fonctions statistiques intégrant la « régression linéaire », ou un tableur permettant de faire les calculs...

- Dans le paradigme de questionnement du monde, les contraintes institutionnelles sont nombreuses. Certaines, qui sont anciennes, ont été identifiées dans (Chevallard, 2009a), référence déjà citée : les objets regardés comme non mathématiques ne sauraient vivre longtemps dans la classe de mathématiques ; ces objets ne sauraient vivre que dans une autre discipline enseignée, ici les sciences de la vie et de la terre (SVT). D’autres sont plus récentes, comme la suppression des « travaux personnels encadrés » (TPE) ; mais il est possible qu’un dispositif analogue soit de nouveau créé, ce qui permettrait de modifier les contraintes actuelles.

On peut alors envisager une enquête faite en classe, menée de la même façon que celle conduite ici (toutes choses égales par ailleurs). Il s’agirait d’une enquête codisciplinaire⁴² et non pas d’un « travail pluridisciplinaire ». On pourrait motiver l’enquête en posant au départ les questions suivantes : « Comment peut-on prévoir si on dépasse le taux légal d’alcoolémie de 0,5 g/L et de 0,2 g/L pour les jeunes conducteurs ? » ; « Programmer une application pour téléphone mobile permettant d’obtenir rapidement la réponse à la question précédente ».

CONCLUSION

Le principal *besoin*, selon la position p_{ξ} de chercheur en didactique (et aussi selon l’enquêteur AP), en matière de *praxéologies mathématiques* qui seraient utiles à la profession, est le calcul dans l’algèbre des espèces de grandeurs, résultat déjà dégagé dans Artaud (sous presse), ce calcul ne se réduisant pas à un simple « calcul avec unités » (voir CRUMIÈRE et al., sous presse). Le travail conduit dans cette enquête approfondit l’étude de ces besoins dans

⁴² Sur ce point, voir le lien suivant qui indique les articles du site de Yves Chevallard évoquant ce sujet : <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/recherche.php3?recherche=codiscipli>

cette partie de l'algèbre des grandeurs où abondent les grandeurs quotients, d'espèces différentes ou non, et solidairement, leur produit par la grandeur figurant au dénominateur du quotient. Les exemples de telles grandeurs abondent, dans la vie courante, et aussi dans certaines spécialités scientifiques, comme l'illustre la citation suivante (notre soulignement, en italique souligné) :

Les grandeurs en question [...] sont les grandeurs de base telles que la longueur, la masse, la durée, le prix (montant d'une facture), etc., et celles qu'on peut en déduire comme produit : aire, volume ou capacité, etc. *Mais aussi des grandeurs quotients de telles grandeurs* : vitesse (en m/s), densité (en hab/km²), débit (en m³/s), prix massique (en €/kg), prix à la pièce (en €/Pce), prix surfacique (en €/m²), etc., grandeurs qui, dans certaines spécialités, sont appelées *intensives*, alors que les grandeurs de base, qui sont additives, sont qualifiées d'*extensives*. [...]

À ce sujet, Brunet et al. (2015, p. 26) proposent un paragraphe intitulé « *Grandeurs extensives et intensives* », que nous reproduisons : « Si on jette la moitié d'un système macroscopique à pression et température fixées (on vide une bouteille d'eau, par exemple), sa masse est divisée par deux, ainsi que son volume, son énergie interne, son entropie, etc. : ces quantités sont dites *extensives*. À l'opposé, la température et la pression ne varient pas ; ce sont des grandeurs qui ne dépendent pas de la quantité macroscopique de matière considérée. Ce sont des quantités dites *intensives*. Le rapport de deux quantités extensives est une quantité intensive : par exemple, la densité numérique (nombre de particules par unité de volume), la masse volumique, l'énergie moyenne par particule. » (CRUMIÈRE et al., sous presse)

Pourtant, les calculs avec ces grandeurs quotients, et produits associés, sont péjorés dans l'institution d'enseignement des mathématiques en France, ce qui prive une partie importante de la population⁴³ de l'aide et du confort qu'un tel calcul pourrait lui apporter dans la vie quotidienne du citoyen.

Un apport supplémentaire du présent travail concerne les ostensifs associés à ce calcul. Dans le calcul littéral, on utilise des lettres majuscules pour désigner les grandeurs, la même lettre en minuscule pour désigner la mesure de cette grandeur dans l'unité prévalant dans l'institution considérée. Cet équipement permet de modéliser les systèmes σ étudiés dans l'algèbre des espèces de grandeurs, et donc d'identifier correctement les grandeurs avec lesquelles on travaille. Pour cela, on choisit un système générateur d'espèces de grandeurs adapté à l'étude du système étudié, ici le système engendré par les espèces grandeurs désignées

⁴³ Voir la description des trois populations P1, P2 et P3 dans le journal du séminaire TAD-IDD de 2013-2014-1, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/rubrique.php?id_rubrique=17, ainsi que son utilisation dans la thèse de Sineae Kim (2015).

usuellement par les initiales du nom de l'espèce : L pour « longueur », M pour « masse », T pour « temps ». Les unités ne sont que des éléments particuliers de chacune des espèces de grandeur, dont on peut facilement changer, en limitant le risque d'erreurs en raison du contrôle que ces techniques de calcul permettent au fil des calculs. Cet équipement praxéologique permet également d'effectuer les calculs numériques, à la main mais aussi avec des calculatrices intégrant un module relatif aux grandeurs ; sans oublier la barre de requête de Google, qui constitue une version de ces calculatrices plus ergonomique, et qui met ce type de calculs à la portée de tous (ou presque).

L'étude faite au cours de l'enquête a montré que les calculs dans cette algèbre permettent au chercheur (qui s'est fait, par moment, didacticien gyrovague⁴⁴) d'expliquer différents types d'erreurs :

– des erreurs faites par des chercheurs d'autres champs, résultant de la confusion entre des grandeurs d'espèces différentes, leurs mesures avec des unités différentes étant désignées par la même lettre ou notation. Confusions encouragées par les noms donnés dans la langue à ces espèces de grandeurs, vérifiant ainsi l'adage « Mal nommer un objet, c'est ajouter au malheur de ce monde ». Confusions pointées par certains chercheurs du champ, mais rarement expliquées en détail, faute d'une identification claire des grandeurs mises en œuvre, que la considération des seules unités ne parvient pas à faire exister.

– les erreurs faites dans des pages Internet (dont la fréquence est plus grande dans celles fabriquées pour des sites en français), et notamment celles portant sur des changements d'unités, dans des calculs confus ne convoquant que des unités, sans les intégrer dans l'algèbre des espèces de grandeurs.

– enfin les erreurs entretenues par des membres de la noosphère de l'enseignement des mathématiques.

En ce qui concerne les besoins *didactiques* de la profession selon l'instance p_ξ , l'enquête conduite permet de contribuer à la satisfaction des besoins de la profession en matière de *conduite d'une modélisation*. En effet, l'emploi de l'algèbre des espèces de grandeurs permet de mieux mettre en évidence la fabrication d'un modèle μ du système σ étudié, pour répondre à une question précise Q posée à son sujet, en partant d'hypothèses simples formulées en termes

⁴⁴ Sur ce qualificatif, voir le journal du séminaire TAD/IDD de l'année 2012-2013 (CHEVALLARD, 2012-2013), notamment la séance 3, où cet adjectif admet 17 occurrences, et la séance 6 (p. 24-25).

de grandeurs. Si le premier modèle ainsi construit μ_1 n'est pas satisfaisant, on cherche à le modifier le plus simplement possible de façon à corriger ce qui l'a mis en faiblesse, la correction apportée dépendant de la question posée. Cette correction ne dépend pas seulement du premier modèle, selon une hiérarchie préétablie une fois pour toute, comme pourrait le laisser penser la diffusion large dans la sphère cultivée, et donc dans la profession, de classes de modèles, telles que {modèle affine, modèle exponentiel, modèle logistique} ; {modèle exponentiel, modèle SIS, modèle SIR⁴⁵}, ou ici⁴⁶ {cinétique d'ordre 0 : équation $dC/dt = -k C^0$, cinétique d'ordre 1 : $dC/dt = -\alpha C^1$, cinétique de Michaelis-Menten : $-\frac{dC}{dt} = V_{max} \frac{C}{k_m + C}$ }.

Enfin, cette enquête contribue à la satisfaction des besoins didactiques de la profession en matière de *façonnages et refaçonnages de positions d'élève et de position de professeur*. Conduire des enquêtes sur des œuvres originales ayant montré au cours du temps leur puissance, produit un tout autre effet, sur la personne d'un membre de la profession, que celui résultant de la lecture d'exposés faits à d'autres fins, comme ceux faits par les professeurs... Chaque fois qu'on se livre à une telle enquête, on va plus vite et mieux au cœur des praxéologies, car on y découvre leurs raisons d'être, qui sont des questions, les réponses qui étaient insuffisantes ou fausses à l'époque où ces praxéologies ont été construites, et la manière dont un auteur génial⁴⁷ a modifié le modèle en l'adaptant, ou a complètement changé sa question d'étude et de recherche. Nombreux sont les membres de la profession qui sont capables de faire de telles enquêtes, qui montrent à ceux qui en douteraient l'existence bien concrète de la transposition institutionnelle des savoirs. Ces enquêtes permettent d'interroger plus particulièrement la transposition didactique faite par le métier et sa noosphère : quelles sont ses motivations, quelles sont les praxéologies mises en œuvre par le métier et sa noosphère pour décider quelles praxéologies doivent être transposées, et comment doivent-elles l'être ? Plus ils seront nombreux, plus la profession sera à même de se libérer de l'état de semi-profession dans

⁴⁵ Voir [Modéliser la propagation d'une épidémie](http://www.math.ens.fr/~enseignement/telecharger_fichier) [www.math.ens.fr > enseignement > telecharger_fichier](http://www.math.ens.fr/~enseignement/telecharger_fichier)

⁴⁶ Lorsque la concentration en alcool tombe au-dessous de 0,20 g/L, le modèle affine (cinétique d'ordre 0) cède la place à un modèle exponentiel (cinétique d'ordre 1). La cinétique de Michaelis-Menten permet de modéliser avec une seule équation toute la phase post-résorptive. Elle est exposée dans (JONES, 2020), pp. 321-323, dont on reprend ici les notations. Jones indique qu'elle est d'un faible intérêt en science médico-légale. Voir les articles correspondants sur Wikipedia, en langue anglaise et en langue française :

https://en.wikipedia.org/wiki/Michaelis-Menten_kinetics et

https://fr.wikipedia.org/wiki/Équation_de_Michaelis-Menten.

⁴⁷ L'International Council on Alcohol, Drugs & Traffic Safety (ICADTS) a créé en 1965 un *Widmark Award*, en l'honneur de Widmark.

laquelle la société française et son école (au sens large) la tiennent, et dans laquelle elle accepte, dans une large mesure, d'être tenue.

RÉFÉRENCES

ARTAUD, M. Des grandeurs et de leur mesure : Besoins praxéologiques de la position de professeur et leur satisfaction. Dans H. Chaachoua et al. (Éds), **Actes de la 20^e école d'été de didactique des mathématiques**. Grenoble, France : La pensée sauvage, sous presse.

BACAËR, N. **Verhulst et l'équation logistique en dynamique des populations**. 2008, p. 24-26. hal-01562340v3.

CHEVALLARD, Y. **Le développement actuel de la TAD : pistes et jalons**. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=150, 2007a.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, F. J. García (Éds), **Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD)**, p. 705-746. Jaén, Espagne : Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007b. <http://yves.chevallard.free.fr/...>

CHEVALLARD, Y. **Journal du séminaire TAD/IDD 2007-2008**. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=131, 2007-2008.

CHEVALLARD, Y. **Journal du séminaire TAD/IDD 2009-2010, séance 3**. <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-2010-3.pdf>, 2009a.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_TAD_face_au_professeur_de_mathematiques.pdf, 2009b.

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Dans C. Margolinas et al. (Éds), **En amont et en aval des ingénieries didactiques. XV^e école d'été de didactique des mathématiques**, p. 81-108. Grenoble, France : La pensée sauvage, 2011. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=144

CHEVALLARD, Y. **Journal du séminaire TAD/IDD 2012-2013**. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=212, 2012-2013.

CHEVALLARD, Y. Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 22, n. 4, p. 13-53, 2020. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p013-053>

CHEVALLARD, Y. ; ARTAUD, M. **Fondements et méthodes de la recherche en didactique**. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/FM_DM_UE35_YC_TD.pdf, 2012.

CHEVALLARD, Y. ; BOSCH, M. Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. **Petit x**, v. 59, p. 43-76, 2002.

CHEVALLARD, Y. ; CIRADE, G. Les ressources manquantes comme problème professionnel. Dans G. Gueudet, L. Trouche (Éds), **Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques**. Rennes/Paris : PUR/INRP, 2010.

CRUMIÈRE, A. ; ROS, N. ; CIRADE, G. ; PRESSIAT, A. Identification et satisfaction de besoins praxéologiques relatifs aux grandeurs. Dans H. Chaachoua et al. (Éds), **Actes de la 20^e école d'été de didactique des mathématiques**. Grenoble : La pensée sauvage, sous presse.

GABE, A. Reappraisal of the Watson formula for BAC calculation. **Science & Justice**, v. 37, p. 145-147, 1997.

GOULLÉ, J.-P ; LACROIX, C. Alcoolémie : aspects médico-légaux. **Journal de médecine légale, droit médical**, v. 43, n. 1, p. 17-32, 2000.
<https://www.yumpu.com/fr/document/read/12971368/alcoolemie-aspects-medico-legaux-blood-ethanol-in-legal-sfta>

GRAS, R. ; BARDY, P. ; PARZYSZ, B. ; PÉCAL, M. ; RICHTON, J.-P. **Pour un enseignement problématisé des mathématiques au Lycée – Tome 1 : En référence privilégiée à des contenus** (brochure n° 150). Paris : APMEP, 2003.

JONES, A. W. Erik M. P. Widmark, Bridged the gap between forensic toxicology and alcohol and traffic safety research. **Blutalkohol**, v. 46, p. 15-23, 2009.
https://www.bads.de/mediaalt/55935/Blutalkohol_2009.pdf

JONES, A. W. Profiles in Forensic Toxicology. Professor Erik Widmark (1889-1945). **THIAFT Bulletin**, v. 47, n. 2, p. 6-16, 2017.
<https://www.icadtsinternational.com/resources/Documents/Widmark%20profile%20by%20Wayne%20Jones.pdf>

JONES, A. W. Pharmacokinetics of Ethanol. A Primer for Forensic Practitioners. Dans A. W. Jones, J. G. Mørland, R. H. Liu (Éds), **Alcohol, Drugs, and Impaired Driving, Forensic Science and Law Enforcement Issues**, p. 275-346. CRC Press, 2020.

JONES, A. W. ; MØRLAND, J.G. ; LIU, R. H. (Éds). **Alcohol, Drugs, and Impaired Driving, Forensic Science and Law Enforcement Issues**. CRC Press, 2020.

JONES, A. W. ; POUNDER, D. J. Measuring Blood-Alcohol Concentration for Clinical and Forensic Purposes. Dans S. B. Karch (Éd.), **Drug Abuse Handbook**, p. 327-356. CRC Press, 1997.

JONES, A. W. ; WIGMORE, J. G. ; HOUSE, C. J. The course of the blood-alcohol curve after consumption of large amounts of alcohol under realistic conditions. **Canadian Society of Forensic Science Journal**, v. 39, n. 3, p. 125-140, 2006.

KIM, S. **Les besoins mathématiques des non-mathématiciens : quel destin institutionnel et social ? : études d'écologie et d'économie didactiques des connaissances mathématiques**, Thèse de doctorat Aix-Marseille université, 2015.

MASKELL, P. D. ; JONES, A. W. ; SAVAGE, A. ; SCOTT-HAM, M. Evidence based survey of the distribution volume of ethanol: Comparison of empirically determined values with anthropometric measures. **Forensic science international**, v. 294, p. 124-131, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.forsciint.2018.10.033>

PRESSIAT, A. De l'épistémologie de la statistique vers sa didactique dans l'enseignement secondaire. Dans A. Mercier, A., C. Margolinas (Éds), **Balises en didactiques des mathématiques. Cours de la XII^e école d'été de didactique des mathématiques**, p. 139-164. Grenoble, France : La pensée sauvage, 2005.

SEARLE, J. Alcohol calculations and their uncertainty. **Medicine, Science and the Law**, v. 55, n. 1, p. 58-64, 2015. <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4361698/>

WATSON, P. E. ; WATSON I. D. ; BATT, R. D. ; PHIL, D. Prediction of Blood Alcohol Concentrations in Human Subjects. Updating the Widmark Equation. **Journal of Studies on Alcohol**, v. 42, n. 7, p. 547-556, 1981.

WIDMARK, E. M. P. Les lois cardinales de la distribution et du métabolisme de l'alcool éthylique dans l'organisme humain. **Kungliga fysiografiska sällskapets handlingar**, Bd. 41, Nr 9, p. 1-58, 1930.

WIDMARK, E. M. P. **Die theoretischen Grundlagen und die praktische Verwendbarkeit der gerichtlich-medizinischen Alkoholbestimmung**. Berlin : Urban und Schwarzenberg, 1932.

WIDMARK, E. M. P., **Principles and application of medicolegal alcohol determinations**. Davis, CA : Biomedical Publications, 1981.