UN CHEMINEMENT POSSIBLE POUR ACCÉDER AU MODÈLE PRAXÉOLOGIQUE DOMINANT D'UNE INSTITUTION D'ENSEIGNEMENT

Hamid Chaachoua
Affiliation: Équipe MeTAH, Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble-Alpes.
Hamid.Chaachoua@imag.fr
Annie Bessot
Affiliation: Équipe MeTAH, Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble-Alpes.
E-mail: annie.bessot@gmail.com
Danielly Kaspary[1]
Affiliation: Équipe MeTAH, Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble-Alpes.
kaspary.d@gmail.com

Résumé : L'objet de cet article est de montrer un cheminement possible pour accéder au modèle praxéologique dominant (MPD) d'une institution d'enseignement. Pour ce faire, nous nous sommes placés dans le domaine de l'algèbre élémentaire. Notre cheminement se fait en interaction avec un modèle praxéologique de référence (MPR) et, inspiré par la théorie des situations didactiques (TSD), passe par la confrontation d'une analyse *a priori* avec une analyse *a posteriori* de ce qui peut exister ou non dans une institution. Pour cela nous faisons usage de deux outils, celui de variable et celui de portée (théorique, pragmatique, institutionnelle, personnelle) d'une technique. L'analyse *a posteriori* est faite sur la base d'observables de l'institution d'enseignement ciblée, en particulier au travers de certains effets du MPD sur l'apprentissage des élèves du point de vue de la TAD.

Mots clés : Modèle praxéologique dominant, variable, portée d'une technique.

A POSSIBLE PATHWAY TO THE DOMINANT PRAXEOLOGICAL MODEL OF AN EDUCATIONAL INSTITUTION

Abstract: The purpose of this article is to show a possible pathway to the dominant praxeological model (DPM) of an educational institution. In order to do so, we have placed ourselves in the field of elementary algebra. Our approach interacts with a praxeological reference model (PRM) and, inspired by the theory of didactic situations (TDS), involves comparing an *a priori* analysis with an *a posteriori* analysis of what may or may not exist in an institution. For this we use two tools, that of a variable and that of the scope of a technique (theoretical, pragmatic, institutional, personal scopes). The *a posteriori* analysis is made on the basis of observables of the targeted educational institution, in particular through some of the effects of the DPM on student learning from the point of view of ATD.

Key words: Dominant praxeological model, variable, scope of a technique.

[1] Équipe MeTAH, Laboratoire d'Informatique de Grenoble, Université Grenoble-Alpes.
E-mail: kaspary.d@gmail.com

INTRODUCTION

Toute transposition didactique d'un domaine de savoirs (Chevallard, 1984) instaure d'une manière implicite dans une institution d'enseignement un modèle épistémologique dominant (MED). Ce modèle fonctionne comme un système de conditions et de contraintes sur les pratiques des sujets de l'institution, élèves et enseignants. Il permet l'existence de certaines pratiques et empêche que d'autres puissent apparaître (Gascon, 1994).

Comment accéder à ce modèle épistémologique dominant ?

Nous considérons qu'une première étape pour répondre à cette question est de construire un « cadre de référence » basé sur une approche épistémologique des connaissances considérées (Gascon, 1994).

> Toute recherche en didactique qui se propose d'étudier les phénomènes relatifs à un domaine des mathématiques (par exemple l'algèbre élémentaire), et dans une institution didactique donnée, ne devrait pas assumer tel quel le modèle implicite prévalant dans l'institution, mais devrait le prendre en compte en tant qu'objet d'étude, c'est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base « empirique » de la recherche.
>
> Pour cela, le chercheur a besoin d'un « point de vue » particulier, c'est-à-dire d'un modèle alternatif du domaine d'activité mathématique enseigné qui lui serve de cadre de référence pour interpréter le modèle dominant dans l'institution qu'il étudie. (GASCON, 1994, p. 44)

Pour Bosch et Gascon (2005), ce cadre est un modèle épistémologique de référence (MER). Un développement important de la TAD est de modéliser toute pratique ou activité humaine par la notion de praxéologie, introduite et baptisée ainsi par Chevallard (2002), constituée par un système de quatre éléments interdépendants. Ce quadruplet $[T / \tau / \theta / \Theta]$, regroupe le type de tâches T pouvant être accomplies par une technique τ, justifiée par une technologie θ, elle-même légitimée par une certaine théorie Θ. Dans le cadre des mathématiques, on pourra parler aussi bien de praxéologie mathématique que d'organisation mathématique (notée OM).

Autour d'un type de tâches, Chevallard (1999) définit la notion de praxéologie ponctuelle comme suit :

> Autour d'un type de tâches *T*, on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d'une technique (au moins) τ, d'une technologie θ et d'une théorie Θ. Le tout, noté [*T* / τ / θ / Θ], constitue une praxéologie ponctuelle, ce dernier qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, *T*. (CHEVALLARD, 1999, p. 228)

Selon cette définition, une praxéologie ponctuelle peut regrouper plusieurs techniques τ_i pour un même type de tâches. Nous introduisons la notion de praxéologie élémentaire (Chaachoua, Bessot 2019)

> […] nous définissons pour chaque technique accomplissant un même type de tâches *T une praxéologie ponctuelle élémentaire* : il y a autant de *praxéologies ponctuelles élémentaires* que de techniques accomplissant un unique type de tâches *T*.
>
> Les praxéologies ponctuelles élémentaires permettent de « remonter » par regroupement autour de *T* aux praxéologies ponctuelles au sens de la TAD. (CHAACHOUA, BESSOT, 2019, p. 236)

Les praxéologies ponctuelles vivent rarement isolées les unes des autres dans une institution : d'abord elles se regroupent en *organisations locales*, $[T_{ij} / \tau_{ij} / \theta_j / \Theta]$ centrées sur une technologie θ_j déterminée ; ensuite en *organisations régionales*, $[T_{ijk} / \tau_{ijk} / \theta_{jk} / \Theta_k]$, formées autour d'une théorie Θ_k. Au-delà, Chevallard (1999) nomme organisation *globale* le complexe praxéologique obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.

De ce point de vue, la discipline « mathématiques » peut être considérée comme une amalgamation de diverses praxéologies autour de différentes technologies et théories – se structurant institutionnellement en praxéologies mathématiques ponctuelles, locales, régionales et globales (Chevallard, 2002).

Pour être cohérent avec le développement de la TAD, les deux modèles MER et MED seront décrits en termes de praxéologies : Modèle praxéologique de référence (MPR) et Modèle praxéologique dominant (MPD).

> Le terme « épistémologique » renvoie ici à « savoir ». Étant donné que la TAD conçoit tout savoir comme une organisation praxéologique, on peut tout aussi bien les appeler modèles praxéologiques de référence. Cette dernière expression permet plus de généralité lorsque l'on aborde des systèmes didactiques autour de « savoirs » qui ne sont pas considérés comme tels, comme par exemple apprendre à

> faire les nœuds des chaussures, à organiser une excursion à la montagne ou à changer les cordes d'une guitare électrique. (BOSCH, 2020, p. 91)

Dans cet article, nous allons nous centrer sur le domaine de l'algèbre élémentaire dans l'institution « Enseignement français de la classe de troisième (14-15 ans) à la classe de première (16 -17 ans) ». Puis pour enrichir ce MPR et en son sein même, nous choisirons un objet de savoir algébrique beaucoup plus restreint, celui de la *résolution algébrique des équations quadratiques*.

Comment accéder au modèle praxéologique dominant ?

Pour essayer de répondre à cette question, nous allons présenter le cheminement que nous avons suivi. Nous avons synthétisé un premier MPR à partir d'un ensemble de travaux de recherche sur l'enseignement de l'algèbre. Pour accéder aux observables empiriques nécessaires à la description du MPD, nous avons procédé à différentes enquêtes pour modéliser en termes de praxéologies les effets de la transposition didactiques dans l'institution d'enseignement visée : praxéologies à enseigner à partir des programmes et des manuels, praxéologies apprises à partir d'un questionnaire auprès d'élèves. Ce travail sur le MPD, comme nous le montrerons, permet à son tour d'enrichir le MPR. Nous ferons usage de la notion de *variable* introduite dans (Chaachoua et Bessot, 2019). Comme dans la Théorie des situations didactiques (TSD, Brousseau, 1998), la notion de variable est pour nous un outil méthodologique dans un processus de modélisation, ici d'un MPR et d'un MPD, associée à l'analyse *a priori* et à l'analyse *a posteriori* de ce qui peut exister ou non dans une institution.

UN PREMIER ÉTAT DU MODELE PRAXÉOLOGIQUE DE RÉFÉRENCE DE L'ALGÈBRE

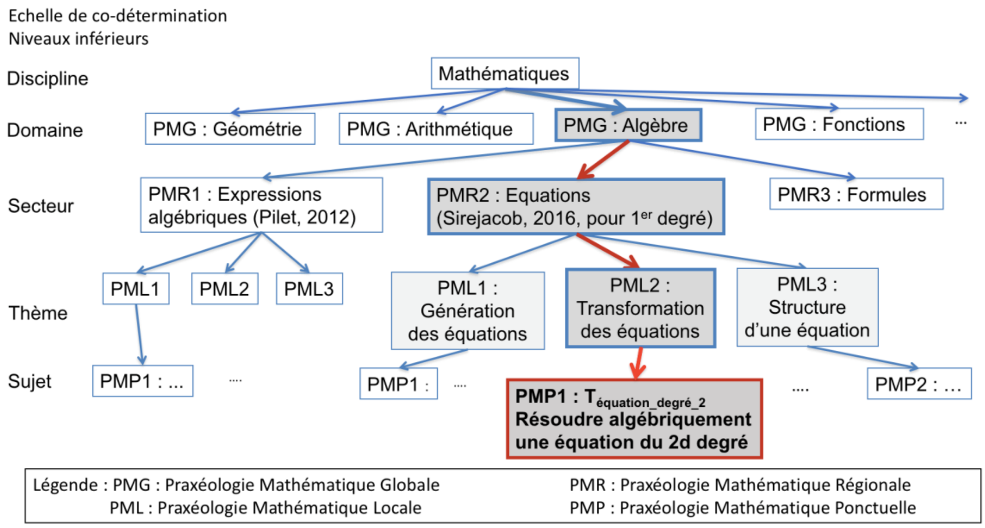
Les travaux didactiques sur le domaine de l'algèbre élémentaire (enseignement secondaire) convergent vers des constats de la prédominance de la manipulation non fonctionnelle des expressions algébriques (Chevallard, 1989 ; Schneider, 2012) et sur les difficultés rencontrées par les élèves (Kieran, 2007) dans ce domaine, essentiel pour la poursuite d'études dans les domaines scientifiques. Pour Chevallard (1989), la *raison d'être* de l'algèbre élémentaire est d'être *un outil de modélisation d'autres praxéologies mathématiques* (ou OM). Comme le soulignent Bosch et Gascon (2001) :

> Nous considérerons donc que l'algèbre élémentaire est d'abord un processus de modélisation qui, à partir d'une OM initiale (le système), construit une nouvelle OM (modèle) permettant d'étudier (de décrire, organiser, structurer, étendre, mettre en rapport, etc.) l'OM initiale. L'algèbre est ainsi initialement un instrument mathématique d'étude d'organisations mathématiques : un instrument didactique. (BOSCH et GASCON, 2001, p. 36)

Certains chercheurs tels que (Chaachoua, 2010 ; Grugeon et al., 2018 ; Ruiz-Munzon, 2010 ; Pilet, 2015 ; Sirejacob, 2016 ; Jolivet, 2018) ont tenté de construire une ingénierie didactique prenant en compte *la raison d'être* de l'algèbre élémentaire. Ces recherches ont permis d'enrichir un modèle praxéologique de référence (MPR) de l'algèbre autour d'un noyau commun. Le domaine de l'algèbre se situe au niveau global de l'organisation mathématique. Il est divisé en trois praxéologies mathématiques régionales : les expressions algébriques (Pilet, 2015), les équations (Sirejacob 2016 pour le premier degré) et les formules. Chacune de ces organisations régionales est divisée en plusieurs organisations praxéologiques mathématiques locales.

Nous représentons ce premier MPR dans la figure 1 en prenant en compte la structure hiérarchique de l'échelle des niveaux de codétermination des systèmes didactiques actuels en France.

Figure 1 - Représentation partielle d'un MPR de l'algèbre élémentaire



Nous nous centrerons dans cet article sur l'organisation mathématique régionale « Équations » (PMR2) et, au niveau local, sur la transformation et la résolution *algébrique* des équations quadratiques (PML2). Cette première délimitation de notre part relève du niveau du domaine et prend en compte le découpage institutionnel de la discipline mathématiques ; nous l'associons à la valeur d'une première variable « *domaine* », ici le domaine de l'algèbre élémentaire, contre le choix d'autres valeurs possibles comme celui de l'analyse. En effet, avec les outils de l'analyse on peut résoudre de façon approchée une équation quadratique à l'aide d'un algorithme de recherche des zéros d'une fonction, comme celui de Newton. Notre choix d'étudier la résolution *algébrique* des équations quadratiques, et non la résolution *algébrique* d'équations d'un degré supérieur, tient aux conditions de l'enseignement secondaire français actuel.

Au niveau ponctuel, nous considèrerons l'objet de savoir : résoudre *algébriquement* une équation quadratique, exprimé ici en termes de type de tâches et noté $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ (PMP1).

Pour aller plus loin sur l'étude des praxéologies ponctuelles autour de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$, nous faisons le choix de nous intéresser à cinq techniques principales pour lesquelles nous allons conduire une étude *a priori* des conditions de leur existence et de leur coexistence d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte ni le point de vue cognitif ni le point de vue de l'institution étudiée.

UNE ANALYSE *A PRIORI* DE CINQ TECHNIQUES POUR ACCOMPLIR $T_{\text{ÉQUATION\_DEGRÉ\_2}}$

Comme dit précédemment, considérons cinq techniques de résolution algébrique pour les tâches du type $T_{\text{équation\_degré\_2}}$, à savoir $\tau_{\text{produit\_nul}}$, $\tau_{\text{racine\_carrée}}$, $\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$, $\tau_{\text{racine\_évidente\_Fact}}$ et $\tau_{\text{discriminant}}$. Nous adoptons dans cet article le point de vue de T4TEL[2] (Chaachoua 2018) qui décrit une technique par une suite de types de tâches.

Chacune des cinq techniques possède un environnement technologico-théorique spécifique. Le tableau 1 ci-après donne cinq praxéologies ponctuelles élémentaires autour de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ associées aux cinq techniques étudiées.

[2] *T4* renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et *TEL* à *Technology Enhanced Learning*. A l'origine, ce qui a motivé le développement de T4TEL est de formaliser les éléments praxéologiques et leurs relations pour une représentation informatique. Par exemple, un Type de tâches est représenté par un couple (verbe, complément), une technique comme une suite de types de tâches. Pour plus de développement, se référer à Chaachoua (2018). Soulignons que ce développement trouve son intérêt au sein de la TAD en dehors du contexte particulier des développements informatiques comme le montre cet article.

Tableau 1 - Praxéologies ponctuelles élémentaires de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$

Technique	Description de la technique	Technologie de la technique
$\tau_{\text{produit\_nul}}$	- $T_{\text{regrouper\_nul}}$ (Regrouper tous les termes dans un même membre) - $T_{\text{factoriser}}$ (Factoriser une expression algébrique) - $T_{\text{produit\_nul}}$ (Résoudre une équation de la forme $P.Q = 0$)	Propriété du produit nul Propriétés de conservation des égalités Propriété de distributivité Identités remarquables
$\tau_{\text{racine\_carrée}}$	- $T_{\text{regrouper\_cte}}$ (Regrouper tous les termes avec x dans un même membre et les constantes dans l'autre membre) - $T_{\text{factoriser}}$ (Factoriser une expression algébrique) - $T_{\text{carré\_cte}}$ (Résoudre une équation de la forme $(ax+b)^2 = k$)	Règle de la racine carrée Propriétés de conservation des égalités Propriété de distributivité Identités remarquables
$\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$	- $T_{\text{trinôme}}$ (Mettre sous la forme $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$) - $T_{\text{racine\_évidente}}$ (Chercher une racine évidente) - $T_{\text{somme-produit}}$ (Écrire la relation somme et produit des racines) - $T_{\text{équation\_degré\_1}}$ (Résoudre une équation du premier degré)	Relation entre les solutions et les coefficients du trinôme Propriétés de conservation des égalités Propriété de distributivité
$\tau_{\text{racine\_évidente\_Fact}}$	- $T_{\text{trinôme}}$ (Mettre sous la forme $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$) - $T_{\text{racine\_évidente}}$ (Chercher une racine évidente x_1) - T_{Fact} (Transformer ax^2+bx+c en $a(x - x_1)(x - x_2)$) - $T_{\text{équation\_degré\_1}}$ (Résoudre une équation du premier degré)	Propriétés de conservation des égalités Propriété de distributivité Propriété du produit nul
$\tau_{\text{discriminant}}$	- $T_{\text{trinôme}}$ (Mettre sous la forme $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$) - $T_{\text{discriminant}}$ (Appliquer la formule du discriminant)	Formule du discriminant Propriétés de conservation des égalités Propriété de distributivité Identités remarquables

Du point de vue de l'algèbre, toutes ces technologies peuvent relever d'une même théorie par exemple celle de l'anneau factoriel **R**[X] des polynômes à coefficients dans **R**, comme c'est le cas dans une institution savante ou en 2005 dans l'institution de l'enseignement secondaire au Vietnam (Nguyen, 2005).

La description des cinq techniques dans le tableau 1 permet de repérer quatre types de tâches particuliers :

$T_{\text{produit\_nul}}$ (Résoudre une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$, $ac \neq 0$)

$T_{\text{carré\_cte}}$ (Résoudre une équation de la forme $(ax + b)^2 = k,\ a \neq 0$)

$T_{\text{trinôme}}$ (Mettre sous la forme d'un trinôme $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$) [3]

$T_{\text{factoriser}}$ (Factoriser une expression algébrique)

Rappelons que ce dernier type de tâches est fondamental puisqu'il est l'une des raisons d'être épistémologique de la recherche de solution de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ au sein du domaine de l'algèbre. Mais dans la description des techniques de résolution des équations quadratiques $T_{\text{factoriser}}$ intervient comme un ingrédient.

Ces quatre types de tâches mettent en avant les différentes formes que peuvent prendre $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ et nous conduisent à introduire la variable V_{forme}. Nous retiendrons quatre valeurs :

Forme $F_{\text{factorisée}}$ « $(ax + b)(cx + d) = 0$ »,

Forme $F_{\text{carré}}$ « $(ax + b)^2 = k$ »,

Forme $F_{\text{développée\_réduite}}$ « $ax^2 + bx + c = 0$ »

Autre F_{autres}

Pour toutes ces formes, les coefficients sont des réels avec *le coefficient du terme de plus haut degré non nul*.

Remarquons que la forme $F_{\text{carré}}$ est spécifique aux équations quadratiques. Les deux formes $F_{\text{factorisée}}$ et $F_{\text{développée\_réduite}}$ peuvent être rencontrées de façon plus générale dans la recherche des zéros d'un polynôme. Cependant la forme $F_{\text{carré}}$ occupe une place centrale dans la résolution exacte des équations quadratiques.

Les autres équations quadratiques (F_{autres}) peuvent se ramener à l'une des trois premières formes. C'est pour cela que nous qualifions les trois premières formes de « *principales* ». Chacune des formes principales génère des sous-types de tâches de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$: nous qualifions également ces sous-types de tâches de principaux car ils ont

[3] Une technique pour résoudre $T_{\text{trinôme}}$ (Mettre sous la forme $ax^2+bx+c = 0,\ a \neq 0$) peut être : (1) Regrouper tous les termes dans un même membre, (2) Développer une expression algébrique (3) Réduire une expression algébrique. Cette forme est donc obtenue par *développement et réduction*.

pour caractéristique de convoquer l'une des trois techniques $\tau_{produit\_nul}$, $\tau_{racine\_carrée}$ et $\tau_{discriminant}$ et, de ce fait, d'être fortement attachées à un élément technologique mathématique.

Sur quels critères peut se faire le choix d'une stratégie de transformation algébrique de la forme F_{autres} vers l'une des formes principales ?

S'il est vrai, par exemple, que la résolution de l'équation « $x^2 - 7 = 0$ » peut être accomplie par $\tau_{produit\_nul}$, $\tau_{racine\_carrée}$ ou $\tau_{discriminant}$, nécessitant des transformations algébriques adéquates pour les deux premières techniques, nous pouvons juger étrange de la résoudre par $\tau_{discriminant}$. Pour objectiver ce jugement, nous introduisons les notions de portée théorique et de portée pragmatique des techniques.

> La portée théorique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble en dehors de toute considération des conditions de son exécution. C'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet. Elle sera notée $P_{Th}(\tau)$.
>
> La portée pragmatique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et à un coût raisonnable. La technique tend à réussir sur cette portée et tend à échouer en dehors. Elle sera notée $P(\tau)$. (KASPARY, CHAACHOUA, BESSOT, 2020, p. 247)

Ces deux portées sont pour nous un outil pour établir *une certaine distance* avec les modèles praxéologiques dominants d'une institution d'enseignement, c'est-à-dire en prenant le parti d'ignorer les conditions et les contraintes propres à cette institution.

Une tâche *t* appartient à la portée théorique d'une technique sous la seule condition que τ accomplisse *t*, quel que soit les risques d'échec ou d'erreurs dans sa réalisation pratique.

La notion de portée pragmatique est plus délicate à délimiter. Il y aura toujours une dépendance au jugement du chercheur, mais surtout à l'existence d'une concurrence avec d'autres techniques comme nous le développerons plus loin.

Nous allons exemplifier la notion de portée pragmatique sur l'ensemble (*E*) de neuf équations particulières données dans le tableau 2. Les tâches proposées dans ce tableau sont issues du questionnaire utilisé dans l'enquête auprès des élèves (voir le paragraphe « Deuxième enquête – Analyse des praxéologies apprises ») et accompagneront nos différentes analyses. Une première justification du choix de l'ensemble (E) est que chacune de ces tâches instancie au moins une valeur de la variable V_{forme} (Tableau 2). D'autres justifications seront présentées lors de l'analyse de la deuxième enquête.

Nous introduisons deux notions, celle de *concurrence de deux techniques* (comme annoncé précédemment) et celle de *coût d'une technique,* en nous inspirant encore de la Théorie des situations didactiques.

La concurrence entre techniques suggère que l'une peut être plus efficace que l'autre sur un certain ensemble de tâches dans le sens où elle est moins coûteuse que sa concurrente. Par exemple, nous jugeons que $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ est moins coûteuse que $\tau_{\text{discriminant}}$ ou $\tau_{\text{produit\_nul}}$ pour la tâche t « résoudre algébriquement l'équation $x^2 - 7 = 0$ ». Cette optimalité de $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ sur ce *domaine de concurrence* entraîne l'appartenance de t à la portée pragmatique de $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ *et* exclut t des portées pragmatiques de $\tau_{\text{discriminant}}$ et $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Nous utilisons ce principe pour indiquer dans le tableau 2 les tâches appartenant à la portée pragmatique, notée P, de chacune des techniques selon la nature des équations à résoudre. Dans ce tableau nous identifions chacune des équations de (E) à celle des trois formes principales qui est « la plus proche », c'est-à-dire qui est obtenue par une technique algébrique de transformation optimale de la forme initiale de l'équation vers une forme principale.

Tableau 2 - Appartenance des tâches aux portées pragmatiques (notée *P*) de quatre techniques

$t \in T_{équation\_degré\_2}$	Forme principale ou Forme principale la plus proche	$\tau_{produit\_nul}$	$\tau_{racine\_carrée}$	$\tau_{racine\_évidente}$ [4]	$\tau_{discriminant}$
a. $(3-x)(x+2)+x+2 = 0$	$F_{factorisé}$ $(ax + b)(cx + d) = 0$	*P*			
b. $x^2+8x+16 = 0$	$F_{factorisé}$ $(ax + b)(cx + d) = 0$ $F_{développée\_réduite}$ $ax^2 + bx + c = 0$	*P*		*P*	
c. $x^2-7 = 0$	$F_{carré}$ $(ax + b)^2 = k$		*P*		
d. $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3} = 0$	$F_{développée\_réduite}$ $ax^2 + bx + c = 0$			*P*	
e. $2x^2+5x+7 = 0$	$F_{développée\_réduite}$ $ax^2 + bx + c = 0$				*P*
f. $25x^2-90x+81 = 0$	$F_{factorisé}$ $(ax + b)(cx + d) = 0$	*P*			
g. $(3x-4)^2-(5x+1)^2 = 0$	$F_{factorisé}$ $(ax + b)(cx + d) = 0$	*P*			
h. $x^2-11x+24 = 0$	$F_{développée\_réduite}$ $ax^2 + bx + c = 0$				*P*
i. $4x = x^2$	$F_{factorisé}$ $(ax + b)(cx + d) = 0$	*P*			

Le tableau 2 montre une relation entre les valeurs de la forme principale et la portée pragmatique de chacune des quatre techniques envisagées. Nous n'explorerons pas de manière plus générale cette relation.

Si une technique peut être considérée du point de vue épistémologique ou pragmatique comme plus efficace qu'une autre, que se passe-t-il dans les institutions d'enseignement ?

PREMIÈRE ENQUÊTE - ANALYSE DES PRAXÉOLOGIES ENSEIGNÉES

Pour rendre compte de l'existence des techniques dans une institution d'enseignement, nous introduisons la notion de portée institutionnelle d'une technique.

> La portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâches *T* est l'ensemble des tâches où cette technique τ est attendue par une institution. Cette portée est une conséquence des conditions et des contraintes de la vie de τ dans une institution. Elle sera notée $P_I(\tau)$. (KASPARY, CHAACHOUA, BESSOT, 2020, p.

[4] Cette technique désigne aussi bien $\tau_{racine\_évidente\_SP}$ que $\tau_{racine\_évidente\_Fact}$.

247)

Par la suite, nous utilisons cette notion comme outil pour enquêter sur le modèle praxéologique dominant de l'objet $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ dans le système français relatif aux programmes 2016 – 2019.

Comme déjà dit dans l'introduction, la vie de cet objet débute en fin de collège en classe de troisième (13-14 ans) et se termine en classe de première (16-17 ans). Pour notre enquête, nous restreignons l'analyse à celle de manuels que nous considérons comme un bon observatoire du modèle praxéologique dominant (Assude, 1996 ; Chaachoua, Comiti, 2007). Nous faisons l'hypothèse de travail que les praxéologies ponctuelles à enseigner présentes dans ces manuels sont représentatives des praxéologies ponctuelles enseignées.

Le dispositif utilisé est composé d'une même collection de manuels, la collection Transmath.

- Manuel Transmath, classe de 3e, 2016, noté *M-3e* ;
- Manuel Transmath, classe de 2nde, 2019, noté *M-2nde* ;
- Manuel Transmath, classe de 1re, 2019, *noté M-1re*.

La question du choix du (et des) manuel(s) est bien sûr une question cruciale. Le choix de la collection Transmath semble pertinent du fait de son usage répandu dans l'enseignement secondaire français.

Les deux premières années de l'existence de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ dans M-3e et M-2nde

Durant ces deux premières années, seule la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ est présente : d'abord pour résoudre une équation de la forme $(ax+b)^2 - [k^2] = 0$, puis la forme des équations proposées varient, élargissant la portée institutionnelle de $\tau_{\text{produit\_nul}}$ comme le montre le tableau 3 ci-après. Dans ce tableau et dans la suite, nous mettons en évidence, à l'aide de crochets, des propriétés potentielles des *coefficients* pouvant permettre l'usage d'une technique, ici $\tau_{\text{produit\_nul}}$. Par exemple, nous formaliserions $x^2 - 7 = 0$ en $x^2 - [(\sqrt{7})^2] = 0$.

Tableau 3 – Portée institutionnelle de $\tau_{produit\_nul}$ pour $T_{équation\_degré\_2}$ dans M-3^{e}, M-2nde

		Ordre chronologique des types tâches présentés dans le *cours*	Ordre chronologique d'apparition des types tâches présents dans les *exercices*. Le nombre d'occurrence est donné entre parenthèses.
M-3^{e}	$\tau_{produit\_nul}$	$(ax + b)^2 – [k^2] = 0$ $x^2 + [2c]x + [c^2] = 0$ $ax^2 + bx = 0$	$(ax + b)(cx + d) = 0$ (8) $k(ax+b)(cx+d) = 0$ (1) $ax^2 + bx = 0$ (2) $[a^2]x^2 - [k^2] = 0$ (2) $x^2 + [2c]x + [c^2] = 0$ (1) $(ax + b)^2 – [k^2] = 0$ (1)
M-2nde	$\tau_{produit\_nul}$	$[a^2]x^2 – [k^2] = 0$ $k(ax + b)(cx + d) = k'(ax + b)(ex + f)$	$(ax + b)(cx + d) = 0$ (6) $[a^2]x^2 – [k^2] = 0$ (2) $(ax + b)^2 = [k^2]$ (3) $x^2 + [k^2] = 0$ (1) $x^2 = k$ (1) $[a^2]\,x^2 \pm [2ac]x + [c^2] = [k^2]$ (1) $(ax + b)(cx + d) + (ax + b)(ex + f) = 0$ (1) $(ax + b)(cx + d) - k(ax + b)(ex + f) = 0$ (2) $[k^2]\,(ax + b)^2 = [l^2]\,(cx + d)^2$ (3) $(ax + b)2 = -[k^2]$ (1) $k(ax + b)(cx + d) = k'(ax + b)(ex + f)$ (2) $k([na]x + [nb])(cx + d) = l([ma]x + [mb])(ex + f)$ (2) $(ax + b)(cx + d) = [c^2]x^2 - [\,d^2]$ (1) $[a^2]\,x^2 \pm [2ac]x + [c^2] = [b^2]\,x^2 \pm [2bf]x + [f^2]$ (1) $[a^2]\,x^2 - [c^2] + k([[a^2]\,x^2 \pm [2ac]x + [c^2]) = ax - c$ (1) $([na]x + [nb])^2 = ax + b$ (1) $k(ax + b)^2 = l(cx + d)^2$ (1)

Dans les deux manuels, les lettres à l'intérieur des crochets désignent toutes des entiers. Ainsi on ne rencontre jamais une équation telle que $x^2 – 7 = 0$ mais plutôt $x^2 – 9 = 0$ ou $4x^2 – 9 = 0$. Pour objectiver cette limitation, nous introduisons la variable V_{nature_coef}. Les valeurs possibles pour cette variable sont des *nombres* ou des *lettres* appelées paramètres. Si ce sont des nombres, ils peuvent appartenir aux ensembles suivants : **Z**, **D****Z**, **Q****D**, **R****Q**. Dans les deux manuels les valeurs prises pour V_{nature_coef} sont des nombres et comme déjà dit plus haut, tous ces nombres appartiennent à **Z**. De plus, comme on peut l'observer dans le tableau 3, ce n'est pas seulement une limitation sur la nature des coefficients mais aussi sur celle de leurs propriétés (par exemple être un carré parfait) ou sur celle des relations entre les coefficients (par exemple, ils sont choisis pour pouvoir reconnaitre une identité remarquable comme $[a^2]\ x^2 \pm [2ac]x + [c^2] = [k^2]$). Ainsi deux autres variables sont à considérer : la variable $V_{propriété\_coefficients}$ dont l'une de valeurs singulières est qu'un entier soit un carré parfait (ou non) et la variable $V_{relation\_coefficients}$. Enfin une autre variable peut être considérée, celle de la taille des coefficients V_{taille_coef} qui précise l'intervalle sur lequel les coefficients sont considérés. Ces quatre nouvelles variables représentent des sous valeurs de la variable F_{autre}, les valeurs de ces cinq variables conduisant à une multiplication institutionnelle des formes.

Cette multiplication limite l'incertitude sur les choix de la meilleure stratégie pour produire la forme $F_{\text{factorisée}}$ et fournit par là des indicateurs sur la technique de factorisation optimale des équations étudiées : on retrouve ici le phénomène d'effet de contrat déjà repéré par Tonnelle (1979).

Ces différentes formes délimitent donc la portée institutionnelle de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ dans les institutions M-3^{e} et M-2nde. L'élargissement progressif de la portée institutionnelle de cette technique résulte du jeu sur les sous valeurs de F_{autre} qui génère plusieurs sous-types de tâches de $T_{\text{factoriser}}$ (factoriser une expression). Ainsi est renforcé le complexe technologique « identités remarquables », « propriété de la distributivité » (comme préconisé dans le programme) et l'élément technologique « produit nul ».

Durant cette longue période, à savoir deux années scolaires consécutives, aucune autre technique ne concurrence la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$!

Dans M-3^{e} le choix de la forme $[a^2]x^2 = [k^2]$ ou de la forme $\mathrm{P}(x)^2 = [k^2]$ n'est jamais proposé et on évite ainsi l'émergence de la technique $\tau_{\text{racine\_carrée}}$.

Dans M-2nde, la première équation proposée en exercice résolue est bien de la forme $F_{\text{carrée}}$ $(ax + b)^2 = [k^2]$, mais le premier geste de la technique est une injonction à transformer cette équation à la forme travaillée en classe de troisième, soit $(ax + b)^2 - [k^2] = 0$ afin de produire $F_{\text{factorisée}}$ (voir figure 2).

Figure 2 - Exercice résolu

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $(5x+3)^2 = 4$ (E_1)

b. $3(2x+7)(2x-4) = 4(x+4)(2x+7)$ (E_2)

Solution

a. Résolvons (E_1)

■ $(5x+3)^2 = 4$ équivaut à $(5x+3)^2 - 4 = 0$.
L'équation est équivalente à $(5x+3)^2 - 2^2 = 0$.

■ On factorise :
$[(5x+3)+2][(5x+3)-2] = 0$
$[5x+3+2][5x+3-2] = 0$
$[5x+5][5x+1] = 0$

■ Ainsi $5x+5=0$ ou $5x+1=0$
$5x+5-5=0-5$ ou $5x+1-1=0-1$
$5x=-5$ ou $5x=-1$
$x=-\frac{5}{5}$ ou $x=-\frac{1}{5}$
$x=-1$ ou $x=-\frac{1}{5}$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :
$S=\left\{-1;-\frac{1}{5}\right\}$.

Méthode

→ **Étape n° 1**
On se ramène à une équation équivalente du type $A(x)=0$.

→ **Étape n° 2**
On factorise $A(x)$.
On reconnaît l'identité remarquable ❸
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
avec $a=5x+3$ et $b=2$.

→ **Étape n° 3**
Un produit de facteurs est nul si et seulement si au moins l'un des facteurs est nul.

Source : M-2^{nde}, page 71

De plus, les manuels M-3^e et M-2^{nde} ne mentionnent jamais le terme d'« équation du second degré ». Dans M-3^e on introduit la notion d'« *équation produit nul* » et dans M-2^{nde} sont distinguées « équation du premier degré » et « *équation autre que du premier degré* » (voir figure 3).

Figure 3 - Une équation autre que du premier degré

✔ **Pour résoudre une équation (autre que du premier degré) on utilise le théorème :**
$A \times B = 0$ si et seulement si $A = 0$ ou $B = 0$.

Source : M-2^{nde}, page 74

De ce fait, une équation a (presque) toujours une solution ! Seulement deux exercices en seconde proposent des équations sans solution, mais jamais en troisième.

Que se passe-t-il dans l'étape finale (classe de première) de l'évolution praxéologique autour de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ telle qu'elle nous est exposée dans M-1^{re} ?

Comme préconisé par le programme, M-1^{re} consacre un paragraphe entier au sujet (Résolution des équations du second degré).

Une équation du second degré peut être reconnue sous différentes formes, d'abord sous sa *forme trinôme* « $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$ » puis sous sa forme canonique « $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$ » (voir figure 4). La notion de *forme factorisée* introduite par la suite permet de reconnaître l'équation produit nul de la période précédente comme une forme de l'équation du second degré. L'équivalence entre *forme trinôme* et *forme factorisée* est prise en charge par le théorème 3 (voir figure 4).

Figure 4 - Théorème 3

Théorème 3

Considérons le polynôme du second degré ax^2+bx+c (avec $a \neq 0$). Posons $\Delta = b^2-4ac$, alors :

$$\underbrace{ax^2+bx+c}_{A} = \underbrace{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]}_{B}$$

Démonstration

On transformera B et on démontre que B = A.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+2x\times\frac{b}{2a}+\frac{b^2}{4a^2} = x^2+\frac{bx}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \text{ et } \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-4ac}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}.$$

$$\text{Donc } B = a\left(x^2+\frac{bx}{a}+\cancel{\frac{b^2}{4a^2}}-\cancel{\frac{b^2}{4a^2}}+\frac{c}{a}\right)$$

$$B = ax^2+bx+c = A$$

Source : M-1re, page 67

L'environnement technologique se complexifie fortement aussi bien pour la factorisation que pour la résolution du type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$.

M-1re commence par introduire une nouvelle technique de factorisation qui consiste à transformer « $ax^2 + bx + c$ » en « $a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$ » puis par application d'une identité remarquable en produit de deux polynômes. Cette nouvelle technique de factorisation fournit un environnement technologique pour une nouvelle technique $\tau_{\text{discriminant}}$ pour accomplir $T_{\text{équation\_degré\_2}}$. Un autre énoncé technologique met en relation les racines d'un polynôme et ses coefficients, permettant de produire une autre technique $\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$.

Il y a donc trois techniques de résolution algébrique d'une équation du second degré si on ajoute à ces deux nouvelles techniques celle mise en place dans M-3e et M-2nde, à savoir $\tau_{\text{produit\_nul}}$. L'extrait du manuel donné en figure 5 montre qu'il y a une volonté manifeste de mettre en concurrence les trois techniques.

Figure 5 - Mise en garde sur la concurrence des techniques

Essayer de résoudre une équation du second degré sans utiliser la méthode générale de résolution :
- reconnaître une identité remarquable,
- une racine évidente,
- etc.

Source : M-1re, page 73

L'usage de l'expression « méthode générale » renvoie à la technique $\tau_{\text{discriminant}}$. La consigne telle que formulée par les auteurs de M-1re sous-entend *pour nous* : bien que $\tau_{\text{discriminant}}$ ait une portée pragmatique plus grande que celles de $\tau_{\text{produit\_nul}}$ ou $\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$, cette technique n'est pas considérée comme optimale sur les portées pragmatiques de $\tau_{\text{produit\_nul}}$ ou $\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$.

Le regroupement des exercices en trois phases donné ci-après dans l'ordre chronologique vient renforcer cette interprétation.

• Dans une première phase 12 tâches sont proposées et mettent en concurrence, de façon *implicite*, $\tau_{\text{discriminant}}$ et $\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$. Tout d'abord le manuel incite à transformer toutes les équations F_{autres} en $F_{\text{développée\_réduite}}$. Sous cette forme, $\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$ est optimale pour 3 exercices et $\tau_{\text{discriminant}}$ pour 9 exercices. De plus le choix des équations est fait en sorte que les tâches soient hors de la portée pragmatique de $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Figure 6 - Mise en concurrence implicite de $\tau_{\text{somme\_produit}}$ et $\tau_{\text{discriminant}}$

Pour les exercices 55 à 60 résoudre l'équation après l'avoir écrite sous la forme $ax^2+bx+c=0$ si besoin.

55 **a.** $3x^2+10x-48=0$; **b.** $9x^2+4x+5=0$.

56 **a.** $4x^2+4x=1$; **b.** $2x^2+28=15x$.

57 **a.** $4x=3+x^2$; **b.** $12x^2+3=12x$.

58 **a.** $x=3+2{,}5x^2$; **b.** $4x^2+3x=7$.

59 **a.** $0{,}6=10x^2+x$; **b.** $1+2x+6x^2=0$.

60 **a.** $x^2+1{,}5x=1$; **b.** $x+0{,}2=30x^2$.

Source : M-1re, page 77

Remarquons que certains coefficients sont des nombres décimaux, une timide ouverture sur les valeurs de la variable $V_{\text{nature\_coef}}$ par rapport aux années précédentes.

Cependant cette présence peut faire office d'autorisation de l'usage de tels nombres comme coefficient.

• La phase 2 comporte 14 exercices dans lesquels la consigne « *résoudre l'équation, sans utiliser les formules générales de résolution* » (M-1re, page 77) interdit explicitement $\tau_{discriminant}$. La technique optimale est pour tous les exercices $\tau_{produit\_nul}$ ce qui exclut implicitement $\tau_{racine\_évidente\_SP}$. Les différentes formes des expressions à factoriser sont une reprise de celles déjà observées dans M-2nde. Dans cette phase, il n'y a donc pas de mise en concurrence mais un renforcement des praxéologies enseignées durant les deux années précédentes comme le montre un extrait de cette liste (figure 7).

Figure 7 - Mise en œuvre de $\tau_{produit\_nul}$ avec interdiction de $\tau_{discriminant}$

73 $3x(2+5x)=(2+5x)(x+1)$.

74 $2x(x+3)-(x^2-9)=0$.

75 $x^2-4-3(x+2)^2=0$.

76 $3x^2-12x+12=0$.

77 $5(2x-3)=9-4x^2$.

78 $2(x-3)^2-8=0$.

79 **a.** $9=4(x-2)^2$;
b. $9+4(x-2)^2=0$.

Source : M-1re, page 77

• La phase 3 comporte seulement 4 exercices et la consigne demande explicitement une résolution par $\tau_{produit\_nul}$ et $\tau_{discriminant}$ (voir figure 8).

Figure 8 - Mise en concurrence de $\tau_{produit\_nul}$ et $\tau_{discriminant}$

Pour les exercices 81 à 84 résoudre chaque équation de deux façons :
• en factorisant le premier membre ;
• en développant et en utilisant les formules de résolution.

81 $4x^2-(x-2)^2=0$.

82 $(x+3)-x(x+3)=0$.

83 $50-2(2-3x)^2=0$.

84 $x^2-x-3(x-1)=0$.

Source : M-1re, page 77

La double résolution exigée dans la phase 3 montre de façon éclatante l'optimalité de $\tau_{produit\_nul}$ pour l'ensemble des tâches proposées. De fait, la mise en concurrence organisée par

M-1re vise à limiter la portée institutionnelle de $\tau_{\text{discriminant}}$ en réduisant sa portée pragmatique au profit de $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

On peut même affirmer que ces trois phases contribuent dans leur ensemble à réduire la portée institutionnelle de $\tau_{\text{discriminant}}$.

L'étape finale de l'existence officielle de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ opère un renversement dans la relation établie entre $T_{\text{factoriser}}$ et $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ durant les deux années précédentes.

Dans M-3e et M-2nde, $T_{\text{factoriser}}$ est invariablement un ingrédient de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ et contribue ainsi de façon *essentielle* à nourrir la portée institutionnelle de $\tau_{\text{produit\_nul}}$.

Dans M-1re, $\mathrm{T}_{\text{équation\_degré\_2}}$ devient un ingrédient *possible* de $T_{\text{factoriser}}$ et de ce fait permet l'élargissement de la portée institutionnelle de $T_{\text{factoriser}}$.

Notre étude a écarté un fait important du fait de sa centration sur la résolution *algébrique* de $\mathrm{T}_{\text{équation\_degré\_2}}$: actuellement, en France, l'étude des équations du second degré et celle des fonctions quadratiques s'alimentent mutuellement et l'habitat des équations migre du domaine de l'algèbre à celui de l'analyse au cours de l'enseignement secondaire.

Pour conclure cette première enquête : les grandes lignes du MPD issues de l'analyse des observables M-3e, M-1re, M-2nde (période 2016 – 2019)

Notre étude met en évidence une valorisation de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ pendant les niveaux scolaires de troisième (14-15 ans) et de seconde (15-16 ans). En effet les seules équations proposées sont données soit sous la forme principale $\mathrm{F}_{\text{factorisée}}$ soit sous une forme $\mathrm{F}_{\text{autres}}$ qui, par un jeu sur les coefficients et leurs relations, suggère fortement une transformation vers la forme $\mathrm{F}_{\text{factorisée}}$ au moyen d'outils produits par les éléments technologiques que sont la distributivité et les identités remarquables. Ce n'est qu'au niveau de la classe de première (16-17 ans) qu'apparait la forme appelée « trinôme », c'est-à-dire $\mathrm{F}_{\text{développée\_réduite}}$, dont certaines valeurs la rendent non factorisable par les éléments technologiques antérieurs. La technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ nourrit l'environnement technologique de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ pour produire la technique $\tau_{\text{discriminant}}$ de résolution de $\mathrm{F}_{\text{développée\_réduite}}$ « $ax^2+bx+c = 0$ avec $a \neq 0$ ». C'est seulement dans la phase finale de l'existence de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ qu'une concurrence est organisée essentiellement entre deux techniques, $\tau_{\text{discriminant}}$ et $\tau_{\text{produit\_nul}}$, en s'appuyant implicitement sur les portées pragmatiques de ces deux techniques.

Pour terminer cette partie, comparons dans le tableau 4 les portées institutionnelles, notées P_I, que l'on peut déduire du MPD et les portées pragmatiques (P) à propos des neuf équations particulières de (E).

Tableau 4 - Appartenance des tâches t aux portées institutionnelle (notée P_I) et pragmatique (notée P) des techniques

$t \in T_{équation\_degré\_2}$	$\tau_{produit\_nul}$	$\tau_{racine\_carrée}$	$\tau_{racine\_évidente\_SP}$	$\tau_{discriminant}$
a. $(3 - x)(x + 2) + x + 2 = 0$	P_I, P			
b. $x^2 + 8x + 16 = 0$	P_I P		P	
c. $x^2 - 7 = 0$	P_I	P		
d. $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$			P	
e. $2x^2 + 5x + 7 = 0$				P_I, P
f. $25x^2 - 90x + 81 = 0$	P_I, P			
g. $(3x - 4)^2 - (5x + 1)^2 = 0$	P_I, P			
h. $x^2 - 11x + 24 = 0$				P_I, P
i. $4x = x^2$	P_I, P			

Remarquons que l'équation (d) n'existe pas dans l'institution des trois manuels bien qu'elle soit mise sous la forme $F_{développée\_réduite}$, ses coefficients n'étant ni entiers ni décimaux. On peut donc avancer qu'elle n'est dans la portée institutionnelle d'aucune des quatre techniques.

Ce tableau met en évidence que la portée institutionnelle des techniques coïncide avec la portée pragmatique de chacune de ces techniques sauf pour la tâche relative à l'exercice (c). Pour cette tâche, la technique $\tau_{racine\_carrée}$ optimale par rapport aux trois autres techniques, a été écartée de l'enseignement par les derniers programmes (2019) au profit de $\tau_{produit\_nul}$ alors qu'elle fut un objet d'enseignement officiel dans les programmes précédents. C'est pour cette raison que nous avons grisé la colonne qui lui correspond.

Pour terminer, les principaux éléments technologiques sont les règles du calcul algébrique le plus souvent dans l'ensemble **Z** plongé dans **R**. Ce sont en particulier : propriété de la multiplication dans R « $a \times b = 0$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$ », distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, identités remarquables.

Nous allons maintenant nous engager dans une seconde enquête pour mettre à l'épreuve les résultats de cette première enquête en regardant du côté des praxéologies apprises sous les conditions et les contraintes de ce MPD.

DEUXIÈME ENQUÊTE – ANALYSE DES PRAXÉOLOGIES APPRISES

Pour mener cette seconde enquête, nous introduisons la notion de *portée personnelle* d'une technique pour un sujet d'une institution *I* (ici les classes de troisième, seconde et première) relative à un type de tâches *T* (ici $T_{\text{équation\_degré\_2}}$) : *la portée personnelle d'une technique est l'ensemble des tâches pour lesquelles une personne mobilise cette technique*. Elle résulte de l'histoire de la personne autour du type de tâches *T*, histoire marquée par le modèle praxéologique dominant de *I*. Du fait de cette histoire particulière, cette portée peut être plus ou moins conforme à la portée institutionnelle de cette technique. Cela correspond au type de tâches personnel au sens de Croset et Chaachoua (2016).

Pour obtenir des observables des praxéologies apprises et des portées personnelles à propos de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$, nous avons proposé, en juin 2019, à des élèves français de première scientifique (16-17 ans) le questionnaire présenté en figure 9. La calculatrice était autorisée. Rappelons que ce sont les équations que nous avons soumises à une analyse *a priori*.

Figure 9 - Questionnaire proposé à des élèves de première scientifique

Résoudre les équations suivantes en prenant soin de laisser apparent votre procédé de résolution.

a. $(3-x)(x+2)+x+2=0$
b. $x^2+8x+16=0$
c. $x^2-7=0$
d. $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$
e. $2x^2+5x+7=0$
f. $25x^2-90x+81=0$
g. $(3x-4)^2-(5x+1)^2=0$
h. $x^2-11x+24=0$
i. $4x=x^2$

Si l'on se reporte au tableau 4, le choix fait pour ces exercices est d'abord de mettre à l'épreuve la volonté affichée des auteurs des manuels étudiés de réduire la portée institutionnelle de $\tau_{\text{discriminant}}$ en privilégiant $\tau_{\text{produit\_nul}}$ en cas de concurrence. En effet

- 5 exercices sont dans la portée institutionnelle et pragmatique de $\tau_{\text{produit\_nul}}$: (a), (b), (f), (g) et (i) ;
- Seuls les exercices, (e) et (h), sont dans la portée institutionnelle et pragmatique de $\tau_{\text{discriminant}}$.

Pour les exercices (c) et (d), ni $\tau_{\text{produit\_nul}}$ ni $\tau_{\text{discriminant}}$ ne sont *a priori* optimales.

- Pour (c), la technique optimale est $\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$;
- Pour (d), la technique optimale est une technique absente des programmes de la période étudiée, à savoir $\tau_{\text{racine\_carrée}}$.

Que se passe-t-il alors ?

Les élèves de la classe observée sont à la fin du processus d'enseignement de la résolution algébriques des équations du second degré dans **R**. Se placer à la fin du parcours d'étude de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ permet d'observer l'effet du MPD sur les praxéologies apprises. De plus la première scientifique, regroupant après la classe de seconde les élèves choisissant les études scientifiques, représentent un observatoire de sujets de I cherchant un rapport aux savoirs scientifiques le plus conforme possible aux attentes de I.

Tout d'abord, examinons quatre copies d'élèves dans lesquelles les procédés de résolution sont apparents et toutes les équations (ou presque) sont traitées.

L'objectif prioritaire ici n'est pas d'analyser les erreurs mais de questionner la relation, *via* les portées personnelles, entre portée institutionnelle et portée pragmatique. Les techniques utilisées par les élèves seront comparées, d'une part, avec les techniques les moins coûteuses (portée pragmatique, voir tableau 2), et, d'autre part, avec les techniques attendues telles que préconisées par le MPD (portée institutionnelle, voir tableau 4). Le résultat de cette analyse est présenté dans le tableau 5.

Tableau 5 - Techniques utilisées par quatre élèves notés E1, E2, E3 et E4 et portées institutionnelle (notée P_I) et pragmatique (notée P) des techniques

$t \in T_{\text{équation\_degré\_2}}$	$\tau_{\text{produit\_nul}}$	$\tau_{\text{racine\_carrée}}$	$\tau_{\text{racine\_évidente\_SP}}$	$\tau_{\text{discriminant}}$	Autre
a. $(3 - x)(x + 2) + x + 2 = 0$	P_I, P			E1, E2, E3, E4	
b. $x^2 + 8x + 16 = 0$	P_I, P		P	E1, E2, E3, E4	
c. $x^2 - 7 = 0$	P_I	E2, E3 P		E1, E4	
d. $x^2 - (1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$			P	E1, E2, E3, E4	
e. $2x^2 + 5x + 7 = 0$				E1, E2, E3, E4 P_I, P	
f. $25x^2 - 90x + 81 = 0$	P_I, P			E1, E2, E3, E4	
g. $(3x - 4)^2 - (5x + 1)^2 = 0$	P_I, P			E1, E2, E3, E4	
h. $x^2 - 11x + 24 = 0$				E2, E3, E4 P_I, P	E1(non réponse)
i. $4x = x^2$	P_I, P			E2, E4	E1 (non réponse), E3 (erronée)

Les portées personnelles des élèves accordent une place prédominante à $\tau_{\text{discriminant}}$, bien au-delà de sa portée institutionnelle : même quand la factorisation est optimale, comme pour les équations (a) et (g), les élèves utilisent la technique du discriminant, ce qui va à l'encontre des incitations observées dans le manuel M-1re.

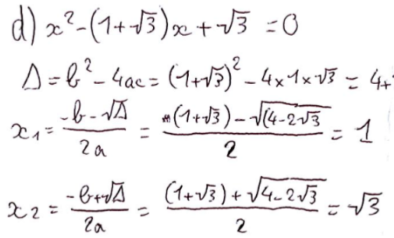
La seule exception concerne l'équation « $x^2 - 7 = 0$ » que E2 et E3 résolvent avec la technique optimale $\tau_{\text{racine\_carrée}}$! Remarquons que l'élève E3 donne bien les deux racines mais que l'élève E2 ne donne que la racine positive. Cette erreur, probablement fréquente chez les élèves, peut être à l'origine du choix institutionnel d'écarter $\tau_{\text{racine\_carrée}}$ au profit de la technique $\tau_{\text{produit\_nul}}$ pour ce type de tâches.

L'utilisation massive de $\tau_{\text{discriminant}}$ est confirmée par les réponses des autres élèves de l'enquête.

Comment expliquer ce résultat remarquable concernant les praxéologies apprises et qui questionne fortement la description faite du MPD ?

L'extrait de la copie de l'élève E1 fournit des indices. Cet élève transforme toutes les équations (sauf (i) où il échoue) pour les ramener à la forme $F_{\text{développée\_réduite}}$ dont il identifie les coefficients pour calculer le discriminant. Il en déduit *immédiatement* des solutions pour lesquelles *a priori* la technique du discriminant est très coûteuse comme pour l'équation (d) (voir figure 10).

Figure 10 - Production de l'élève E1 pour l'équation (d)


d) $x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}=0$

$$\Delta=b^2-4ac=(1+\sqrt{3})^2-4\times1\times\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}-4\sqrt{3}=4-2\sqrt{3}$$

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(1+\sqrt{3})-\sqrt{(4-2\sqrt{3}}}{2}=1$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(1+\sqrt{3})+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}{2}=\sqrt{3}$$

On peut alors avancer l'hypothèse que cet usage majoritaire de $\tau_{\text{discriminant}}$ résulte de la présence de calculatrices programmables dans les classes actuelles. Nous n'avons pas pris en considération cette présence et son impact dans notre analyse du modèle dominant. Or, la présence de la calculatrice programmable modifie l'analyse *a priori* des portées pragmatiques des techniques : en effet, avec la calculatrice, la technique du discriminant peut devenir optimale pour toute équation pouvant se mettre *facilement* sous la forme $F_{\text{développée\_réduite}}$, ce qui n'est pas le cas par exemple pour les équations (a) et (g).

Examinons de plus près ces deux cas. Pour ces deux équations, nous allons compléter l'enquête mené en 2019 par une deuxième enquête menée en France en 2005 par Nguyễn (2006) au même niveau scolaire et proposant aussi la résolution des équations (a) et (g). La comparaison des résultats de ces deux enquêtes permet d'observer l'impact de modèles dominants différents sur les praxéologies apprises et de questionner en retour les modèles dominants (voir tableau 6).

Tableau 6 - Résultats des deux enquêtes sur les équations (a) et (g)

	a. $(3-x)(x+2)+x+2=0$		g. $(3x-4)^2-(5x+1)^2=0$	
Effectif en %	2005 (62 élèves)	2019 (26 élèves)	2005 (62 élèves)	2019 (26 élèves)
$\tau_{\text{produit\_nul}}$	52	0	61	0
$\tau_{\text{discriminant}}$	48	73	39	59
Autres	0	17	0	41

Les portées personnelles ont évolué radicalement entre les deux enquêtes et révèlent des portées institutionnelles différentes – et donc des MPD différents. En particulier, contrairement à l'intention des manuels de valoriser $\tau_{\text{produit\_nul}}$, les praxéologies apprises autour de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ par les élèves de la *classe observée* en 2019, relèvent majoritairement d'une praxéologie ponctuelle élémentaire, celle attachée à $\tau_{\text{discriminant}}$. Le contexte institutionnel français fournit des éléments d'interprétation sur les évolutions des techniques utilisées par les élèves français entre 2005 et 2019 : les changements de programmes d'études, comme la migration de l'habitat des équations du domaine de l'algèbre à celui de l'analyse mais aussi la centration sur la résolution de problèmes, ont conduit à une réduction drastique du temps consacré au travail des techniques, en particulier de $\tau_{\text{produit \_nul}}$. Pour preuve de la diminution du travail de la technique il suffit de comparer le nombre d'exercices de factorisation proposés dans un manuel de 2003 et dans un manuel de 2019 : en classe de troisième on trouve 146 exercices dans le manuel Triangle (2003) et 25 exercices dans le manuel M-3^{e}. De plus, l'introduction du domaine de l'algorithmique incite à une utilisation fréquente des calculatrices programmables. Il faut donc compléter le MPD par la prise en compte de la présence des calculatrices programmables qui change non seulement la portée pragmatique de $\tau_{\text{discriminant}}$ mais aussi efface les limitations que pouvait apporter $\tau_{\text{produit\_nul}}$ à sa portée institutionnelle.

CONCLUSION

Revenons sur les apports et sur les limites du cheminement présenté pour accéder au modèle praxéologique dominant (MPD) de l'institution enseignement secondaire en France à propos de la résolution algébrique dans **R** des équations de degré 2.

Une première étape a été de présenter un modèle praxéologique de référence (MPR) de l'algèbre élémentaire à partir d'une synthèse de travaux sur le domaine. Cette construction a permis de situer notre objet d'étude et les limitations auxquelles il est soumis, de par le choix de cet objet par le chercheur mais aussi du fait de son insertion dans le curriculum offert par l'institution. Nous avons modélisé ces limitations à l'aide de variables et de leurs valeurs. La première limitation est le choix de nous restreindre au domaine de l'algèbre. La deuxième limitation porte sur le degré de l'équation qui résulte de la vie de la résolution *exacte* des équations dans l'enseignement secondaire français.

En une deuxième étape, nous avons enrichi, du point de vue épistémologique, le niveau ponctuel autour du type de tâches $T_{\text{équation\_degré\_2}}$ « Résoudre dans **R** algébriquement une équation de degré 2 » par une analyse *a priori* des techniques en commençant par la caractérisation de praxéologies ponctuelles *élémentaires*. Puis pour approfondir cette analyse, nous avons introduit un nouvel outil : la notion de portée – théorique et surtout pragmatique, cette dernière permettant de prendre en charge la notion d'optimalité d'une technique sur un domaine de concurrence avec d'autres techniques. Pour caractériser les domaines de concurrence et l'optimalité d'une technique, dans le cas de $T_{\text{équation\_degré\_2}}$, nous avons introduit la variable forme (V_{forme}) avec trois premières valeurs que sont les formes principales $F_{\text{factorisée}}$, $F_{\text{carré}}$, $F_{\text{développée\_réduite}}$ – chacune de ces formes générant des sous-types de tâches associés à l'optimalité de trois techniques. De plus, chacune de ces techniques est produites par un élément technologique spécifique. La quatrième valeur de V_{forme} (F_{autres}) rassemble toutes les autres équations. Elle conduit à poser la question de la stratégie pour transformer algébriquement une équation de la forme F_{autres} en l'une des trois formes principales.

L'analyse *a posteriori* s'appuie sur l'analyse *a priori* pour tenter de caractériser le MPD à partir de deux enquêtes : la première porte sur des observables des praxéologies enseignées : dans notre cas, observables recueillis par l'étude de manuels – la deuxième sur des observables des praxéologies apprises : dans notre cas, observables recueillis dans des productions d'élèves en réponse à un questionnaire construit sur la base de l'analyse *a priori* et sur des éléments de la première enquête.

Dans la première enquête nous avons considéré la valeur F_{autres} comme une sous-variable avec des valeurs issues des observables des praxéologies enseignées. Ces valeurs modélisent des choix de l'institution pour les tâches proposées et caractérisent la portée institutionnelle des techniques : elles diminuent fortement l'incertitude quant à l'usage d'une stratégie de transformation algébrique – dans notre étude vers $F_{\text{factorisée}}$ ou $F_{\text{développée\_réduite}}$ – phénomène relevant d'un contrat didactique (Tonnelle, 1979). Cette première enquête débouche sur l'hypothèse d'un MPD autour de l'objet d'étude.

L'objectif de la seconde enquête est de mettre à l'épreuve cette hypothèse pour poser de nouvelles questions et enrichir ainsi le MPD. Dans notre cas, le MPD se doit de prendre en compte la présence de la calculatrice programmable mais aussi la réduction actuelle du temps consacré au moment du travail de la technique.

Maintenant, soulignons quelques limites de notre travail. D'une part, les observables issus des manuels semble insuffisant pour accéder à eux seuls au MPD. On peut se demander par exemple, quelles sont les conditions qui ont fait émerger la technique $\tau_{discriminant}$ avec usage d'une calculatrice programmable. Plusieurs explications sont possibles : cette technique peut relever du choix de l'enseignant de l'unique classe observée ou d'une pratique apprise dans d'autres contextes comme celui de l'enseignement de l'algorithmique. D'autre part, l'observation d'une seule classe restreint la mise à l'épreuve du MPD sans que cela ne remette en cause le cheminement présenté.

RÉFÉRENCES

BOSCH, M. ; GASCON, J. Organiser l'étude. 2. Théories & empiries. In J.-L. Dorier et al. (eds) **Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques**. pp. 23-40. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2001.

BOSCH M. ; GASCON J. La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Dans Mercier A. & Margolinas C. (Dir) **Balises pour la didactique des mathématiques.** pp. 197 – 122. Grenoble : La Pensée Sauvage, 2005.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques.** Grenoble : La Pensée Sauvage, 1998.

CHAACHOUA, H. **La praxéologie comme modèle didactique pour la problématique EIAH. Étude de cas : la modélisation des connaissances des élèves** (Note de synthèse HDR). Grenoble, France : Université Joseph Fourier, 2010.

CHAACHOUA, H. T4TEL un cadre de référence didactique pour la conception des EIAH. **Communication au séminaire national de didactique des mathématiques**. Paris, France, 2018.

CHAACHOUA, H. ; BESSOT, A. La notion de variable dans le modèle praxéologique. **Educação Matemática Pesquisa: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, 21, 2019. doi: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p234-247

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.** Grenoble : La Pensée Sauvage, 1984.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. **Petit x**, n° 19. pp. 43-72. IREM de Grenoble, 1989.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. **Recherches en didactique de mathématiques**, 19 (2). Grenoble : La Pensée Sauvage. 221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude – Écologie & Régulation. In J.-L. Dorier et al. (eds) **Actes de la XIe école d'été de didactique des mathématiques** (Corps, 21-30 août 2001). Grenoble : La Pensée Sauvage. 41-56, 2002.

CROSET, M.C. ; CHAACHOUA, H. Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. **Recherches en Didactique des Mathématiques**. 36(2). Grenoble : La Pensée Sauvage. 161-196, 2016.

GASCON, J. Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à « l'arithmétique généralisée ». **Petit x**, 37, 43-63, 1994.

GRUGEON-ALLYS, B. ; CHENEVOTOT-QUENTIN, F. ; PILET, J. ; & PREVIT, D. Online Automated Assessment and Student Learning: The PEPITE Project in Elementary Algebra. In L. Ball end al. (Eds.), **Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education,** ICMI-13 (pp. 245-266). Cham: Springer, 2018.

JOLIVET, S. **Modèle de description didactique de ressources d'apprentissage en mathématiques, pour l'indexation et des services EIAH.** Thèse. Université Grenoble Alpes, 2018.

KASPARY, D. ; CHAACHOUA, H. ; BESSOT, A. Qu'apporte la notion de portée d'une technique à l'étude de la dynamique praxéologique ? **Annales de didactique et de sciences cognitives**. N°25, p. 243-269, 2020.

KIERAN, C. Learning and teaching algebra at the middle school trough college levels. N Lester F. (Ed.) (Chapter 16, pp. 702-762). Charlotte, NC: Information Age Publishing, 2007.

NGUYỄN, A. Q. **les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France**. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier. Grenoble, 2006.

PILET, J. Réguler l'enseignement en algèbre élémentaire par des parcours d'enseignement différencié. **Recherches en didactique de mathématiques**, 35(3), pp. 273-312, 2015.

RUIZ-MUNZON, N. **La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional**. Doctoral dissertation, Universitat Autònoma de Barcelona, Spain, 2010.

SIREJACOB, S. Les organisations de savoirs mathématiques à enseigner : les équations au collège. **Petit x**, 102, 27-55, 2016.

TONNELLE, J. **Le monde clos de la factorisation au premier cycle**. Mémoire de DEA de Didactique des Mathématiques, Aix-Marseille II et Bordeaux, 1979.

RÉFÉRENCES DES PROGRAMMES ET DES MANUELS

PROGRAMMES, 3e : Bulletin officiel spécial n° 6 du 28 août 2008

MANUEL TRANSMATH, **classe de 3e**, Edition Nathan, 2016

MANUEL TRANSMATH, **classe de 2nde**, Edition Nathan, 2019

MANUEL TRANSMATH**, classe de 1re**, Edition Nathan, 2019