UN EXEMPLE DE GENÈSE D'UN MILIEU DIDACTIQUE DANS UN TRAVAIL DE GROUPE

Farida Méjani
Affiliation: IREM d'Aix-Marseille. farida.mejani@gmail.com
Yves Matheron
Affiliation: IREM d'Aix-Marseille. yves.matheron@free.fr

Résumé: Le concept de schéma herbartien, tel que développé en Théorie Anthropologique du Didactique, permet de décrire le processus d'étude d'une question au sein du paradigme de questionnement du monde. Nous avons mené des implantations d'Activité et de Parcours d'Etude et de Recherche (AER et PER) dans des classes ordinaires en France sous les contraintes propres au système éducatif. L'exemple développé dans l'article porte sur la première rencontre avec une AER concernant la résolution d'équations du 1er degré à une inconnue. Nous avons observé à l'aide d'une caméra fixée sur des groupes d'élèves la mise en œuvre de cette AER. Nous décrivons l'ébauche d'un milieu didactique dans deux groupes d'élèves de deux classes distinctes sous la direction de deux professeurs différents. Nous analysons comment la construction du milieu se différencie dans les groupes selon l'équipement praxéologique des élèves, mais aussi sous l'influence des professeurs. Nous étudions les milieux intermédiaires que se créent les élèves et nous montrons qu'avant institutionnalisation, les mathématiques étudiées sont différentes.

Mots-clés : schéma herbartien, milieu didactique, travail de groupe

AN EXAMPLE OF THE GENESIS OF A DIDACTIC MILIEU IN A GROUP WORK

Abstract: The concept of Herbartian schema, as developed in Anthropological Theory of Didactics, describes the process of studying a question within the paradigm of inquiry. We have implemented Study and Research Activities and Study and Research Courses (SRA and SRC) in ordinary classes in France under the constraints specific to the education system. The example developed in the article relates to the first encounter with an SRA concerning the resolution of 1st degree equations with an unknown. We used a fixed camera on the groups of students working at the beginning of this SRA. We describe the rough outline of a didactic milieu by two groups of students from two different classes directed by two different teachers. We analyze how the didactic milieus in the groups are different, according to the praxeological equipment of the students, but also under the influence of the teachers. We study the intermediate milieu that students hold and we show that before institutionalization, the mathematics studied are different.

Keywords: Herbartian schema, didactic milieu, group work.

UN BREF RETOUR SUR LA NOTION DE MILIEU EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES

La notion de milieu à travers un exemple

Dès la IVe École d'été de didactique des mathématiques, en 1986, Guy Brousseau développait le concept de milieu dans le cadre d'une approche systémique. Il définissait alors deux concepts importants :

- Sont adidactiques des situations nouvelles et apparaissant problématiques aux élèves précédemment enseignés, qu'ils ont à affronter sans que le professeur propose des éléments de savoir mathématique permettant leur résolution… et à plus forte raison sans que le professeur les résolve à leur place.
- Le milieu, quant à lui, est « tout ce qui agit sur l'élève ou ce sur quoi l'élève agit » (Brousseau, 1998, p. 32). Le milieu est considéré comme l'antagoniste du « système-élèves » et peut notamment être perçu par des élèves comme « dénué d'intentions didactiques » (Brousseau, 1998, p. 106).

Dans un texte prolongeant le cours de 1986 et paru dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Guy Brousseau (1990) indique : « Nous avons de nombreux exemples de situations qui, pour un observateur, paraissent s'appuyer sur "l'intervention" d'un "milieu" dont on attend qu'il se manifeste par des propriétés (par exemple physiques) indépendantes de la connaissance des protagonistes. (Exemples : le Puzzle, La reproduction de figures, Le nombre le plus grand, la course à vingt...) » Dans l'exemple du puzzle, il s'agit d'agrandir ses pièces polygonales (des triangles et des trapèzes) de manière à ce qu'un segment qui mesure 4 cm sur le modèle en mesure 7 dans la reproduction[1].

Les professeurs du groupe didactique de l'IREM d'Aix-Marseille utilisent cette ingénierie didactique dans un contexte, celui du collège, différent de celui des élèves de fin

[1] Le lien suivant https://vimeo.com/69315640 conduit vers une interview de Guy Brousseau, tournée au Brésil et sous-titrée en portugais, au cours de laquelle il expose quelques-uns des concepts fondamentaux de la Théorie des Situations Didactiques. Ils sont illustrés par le film d'une classe qui travaille les situations du puzzle et de la course à 20.

d'école primaire (9 à 11 ans) auxquels s'adressait originellement la situation du puzzle. Pour des élèves de début de collège, âgés de 11 à 13 ans, la familiarité avec les nombres non entiers est plus grande que pour des élèves d'école primaire : l'enseignement reçu leur a permis de rencontrer décimaux, rationnels et le nombre π. A ce niveau, et en s'appuyant pour cela sur la proportionnalité des longueurs qui, néanmoins, n'apparaît pas spontanément chez les élèves, l'objectif poursuivi par les professeurs est l'enseignement de la nécessité du produit d'un entier par une fraction à partir du coefficient fractionnaire 7/4. D'autres tâches du même type permettent ensuite de se confronter à des coefficients non décimaux ou inférieurs à 1.

Comme dans la description de l'ingénierie qu'en fait Guy Brousseau (1998, pp. 237 à 240) pour des élèves d'école primaire, les collégiens commencent par proposer d'additionner 3 cm aux longueurs initiales. L'ensemble formé des pièces qu'ils tentent d'assembler constitue un milieu dénué d'intention qui rétroagit en indiquant une situation d'échec. Ils poursuivent jusqu'au moment où Guy Brousseau indique « lorsque les enfants admettent qu'il doit y avoir une autre loi et se mettent à la chercher, les choses vont beaucoup plus vite, surtout si l'un d'eux, ou le maître, dispose les longueurs dans le tableau (figure 10) ». Ce tableau contient les dimensions recherchées face aux dimensions initiales, les unes et les autres étant reliées par des flèches ou des traits. En effet, à ce moment-là, les professeurs constatent que cette disposition ostensive (Bosch & Chevallard, 1999) suggère à certains élèves de recourir à la proportionnalité des longueurs et de les multiplier par 7/4.

En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), un lien entre les concepts de « milieu » et de « rapport »

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) travaille, sous le terme de rapport, noté $R(\hat{\imath}, o)$, d'une instance $\hat{\imath}$ à un objet o, ($\hat{\imath}$ peut être une personne ou une institution) ce qui, dans une relation didactique, est de l'ordre du cognitif ; soit ce que connaît ou ne connaît pas une instance $\hat{\imath}$ à propos d'un objet o, objet mathématique dans ce texte. L'exemple de l'agrandissement du puzzle permet d'entrevoir l'expression de quelques-uns des rapports à l'objet « agrandissement ». Ces rapports s'objectivent dans le déroulement de la situation ou encore leur sont attribués par un observateur, comme dans notre exemple concernant des élèves $\hat{\imath}$ de collège (11 à 13 ans).

Pour certains des élèves *î*, le rapport établi à « grandir » ou « s'agrandir » est toujours synonyme d'augmentation d'une longueur. Il se convertit, sous la pression du contrat didactique qui veut qu'on réponde mathématiquement en classe de mathématiques, en un recours à une opération : l'addition. L'échec et son association à cette même pression engagent ensuite les élèves vers l'utilisation d'une combinaison d'opérations. L'équipement praxéologique propre à certains des élèves, c'est-à-dire l'ensemble des rapports qu'ils ont établis à des organisations mathématiques[2], les amène enfin, à partir d'une inférence suscitée par les écritures au tableau – nombres connus et inconnus qui expriment des mesures de longueur, flèches, leur disposition les uns face aux autres –, vers le souvenir d'une technique, issue de leur Curriculum Personnellement Vécu (CPV) (Chevallard, 2019), associée à la proportionnalité. Pour ceux des élèves qui savent « les lire », les objets ostensifs du milieu évoquent en effet l'organisation mathématique qu'ils ont précédemment travaillée dans des situations de proportionnalité. Les objets du milieu apparaissent alors dialectiquement comme des médias (Chevallard, 2008) qui fournissent une information sur ce que *î* peut tenter pour parvenir à la réponse cherchée (Matheron, 2017). En TAD, le sens initialement donné au concept de milieu dénué d'intention s'élargit pour tenir compte de celui de médias en tant qu'objets, mathématiques dans ce cas, qui portent la possibilité de l'intention d'informer ceux qui savent les lire, les interpréter.

D'autres dimensions du rapport à l'objet « agrandissement » des *î*-élèves sont portées par la situation telle qu'elle se déroule, ainsi que par sa conception *a priori*. Par exemple, si l'agrandissement est considéré comme un accroissement des longueurs, il ne saurait pourtant être mathématiquement et socialement tel sans qu'il y ait conservation des angles, et absence de déformation des pièces polygonales du puzzle. La propriété des similitudes – agrandir ou rétrécir « sans déformer » – constitue l'une des dimensions privées des rapports $R(\hat{\imath}, o)$ des élèves, établie à partir de rapports avec des phénomènes de leur environnement qui relèvent de la similitude. Ils seraient sans doute incapables de l'énoncer, mais elle les fait rejeter la proposition d'addition de 3 cm lorsqu'ils constatent que les pièces ne s'ajustent pas.

En TAD, le milieu contient donc aussi l'ensemble des rapports à divers objets qui, à

[2] Rappelons qu'une organisation mathématique ponctuelle est constituée du quadruplet $(T, \tau, \theta, \Theta)$ où T est un type de tâches, τ la technique permettant de l'accomplir, θ la technologie qui permet de produire, justifier et rendre compréhensible la technique, Θ la théorie qui remplit pour la technologie θ les mêmes fonctions de production, justification et de compréhension. Les organisations mathématiques ponctuelles s'amalgament pour créer des organisations plus complexes : locales, régionales et globales.

un instant t, sont considérés comme stables et mobilisables par des instances $\hat{\imath}$. Ces rapports pourront être « déstabilisés » lorsque des organisations mathématiques nouvelles viendront modifier les paysages à partir desquels les rapports personnels à certains objets avaient été établis : une division peut donner un quotient supérieur au dividende, les vecteurs ne seront pas toujours des bipoints, les nombres pas toujours associés à des mesures de grandeurs, il existera des fonctions continues nulle part dérivables, etc. Ainsi, l'instance $\hat{\imath}$ étant une institution I, Yves Chevallard (1992) définit ce qu'il nomme le milieu institutionnel à un instant t, O désignant un objet, et R_I le rapport institutionnel. C'est « le sous-ensemble de $C_I(t)$ *[du contrat institutionnel]* formé des couples (O, $R_I(O, t)$) "stables" au temps t ».

Divers autres exemples peuvent être donnés de rapports stables à des objets pour des sujets $\hat{\imath}$ à un instant t du processus d'étude, et constitutifs d'un milieu tel qu'on peut l'envisager en TAD. Ainsi, en est-il des rapports personnels stables d'un bon élève de fin d'études secondaires, c'est-à-dire d'un élève bien assujetti au contrat institutionnel portant sur certains objets mathématiques de ce niveau. Par exemple, le milieu institutionnel fait des rapports stables aux notions de probabilité et d'exponentielle, jouent un rôle de milieu permettant de rétroagir lorsqu'à l'issue d'un calcul, il se trouve confronté à une probabilité supérieure à 1 ou à une exponentielle négative.

LE MILIEU DU SCHÉMA HERBARTIEN

Les rapports personnels sont le produit plus ou moins aléatoire de la fréquentation, par un individu, d'institutions au sein desquelles vivent des rapports institutionnels à des objets. Etude en classe, consultation de médias, discussions plus ou moins informelles entre élèves, rencontres personnelles avec des éléments d'organisations mathématiques ou des raisons d'être au cours de la résolution de problèmes, réflexions personnelles, etc., sont autant d'occasions pour la constitution de ces rapports. Observant un élève x qui étudie un objet o, nous n'avons accès qu'à *l'expression publique* à l'instant t de l'état plus ou moins évolutif de son rapport personnel à o ; cette expression publique étant soumise à observation et évaluation par une autre instance, notée $\hat{v}$ (Chevallard, 2019). Si nous pouvons alors l'analyser et l'évaluer depuis une position $\hat{v}$ dans l'institution ou observant celle-ci, sa genèse nous demeure en grande partie cachée. En situation didactique, nous pouvons seulement créer les conditions de possibilité de constitution de rapports personnels à des objets *o* pour des élèves.

Un des postulats anthropologiques sur lesquels s'appuie la TAD énonce que les mathématiques sont des œuvres *O*, c'est-à-dire des réponses, construites au fil des siècles, à des questions auxquelles l'humanité, ou une partie d'entre elle, s'est trouvée confrontée. Enseigner revient à faire étudier des œuvres didactiquement transposées (Chevallard, 1985 & 1991). Au cours du processus d'étude, l'une des questions qui se pose depuis la didactique est celle de l'observation et de l'analyse de la rencontre, si elle existe, avec des questions transposées et génératrices de l'œuvre, de la manière dont se construisent les réponses, de la nature du milieu qui permet cette construction.

Sous sa forme réduite, le schéma herbartien constitue une modélisation permettant l'attaque de la question théorique précédente ; on le note $S(X, Y, Q) \rightarrow R^{\heartsuit}$ où la flèche $\rightarrow$ indique que le système S a élaboré une réponse (Chevallard, 2018). Ce schéma fournit une modélisation du processus de production d'une réponse à une question Q sur laquelle enquête un collectif d'étude X (des élèves $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'une classe par exemple), sous la direction et/ou l'aide de Y. Y est généralement constituée du seul professeur y_1, mais certains élèves x_i remplissant temporairement une fonction d'enseignement peuvent devenir des y_i durant ce temps-là. La question Q constitue l'enjeu de l'étude. $R^{\heartsuit}$ est la réponse élaborée par le collectif d'étude X sous la direction de Y à l'issue de son travail d'étude.

Les pratiques auxquelles s'adonnent diverses institutions sociales offrent de nombreux exemples de processus d'enquête et de questionnement : enquêtes scientifiques, journalistiques, judiciaires, etc. Une fois posée la question qui l'engendre, l'enquête nécessite de rassembler des objets, des faits, des œuvres, etc. Ils fournissent des premiers éléments de réponses, vraies ou fausses et souvent partielles, mais qui pourront nourrir un processus conduisant à se poser de nouvelles questions afin d'apporter *in fine* une réponse à la question à l'origine de l'enquête. Un tel ensemble constitue un milieu M et le schéma herbartien semi-développé se note alors : $[S(X\,;Y\,;Q) \rightarrow M] \rightarrow R^{\heartsuit}$, la flèche $\rightarrow$ indiquant que $S(X, Y, Q)$ a fabriqué le milieu M.

Ce schéma correspond à une situation de questionnement du monde qui vit difficilement sous les formes scolaires dominantes. Mais le schéma demeure opérant pour décrire des situations ordinaires d'enseignement, relevant du paradigme de la visite des œuvres, au cours desquelles le processus d'enquête ne vit pas pour les élèves X, mais où l'on montre des œuvres sans faire travailler les questions qui peuvent les engendrer, voire même sans les évoquer, comme on visite un monument.

On peut en effet avoir le schéma $[S(X, Y, Q) \rightarrow \{R^{\lozenge}y, O\}] \rightarrow R^{\heartsuit}$, qui modélise une forme didactique des plus frustes mais pourtant en usage dans de nombreuses classes. Dans ce cas, les élèves doivent s'approprier la réponse toute faite et personnelle $R^{\lozenge}y$ portée par leur professeur y sur l'œuvre O ; réponse devant être institutionnellement validée et reconnue, tant par y que par les x_i de X, comme réponse $R^{\heartsuit}$ à étudier. Partie de l'œuvre O transposée, $R^{\heartsuit}$ est ainsi enseignée sans qu'une des questions qui fondent pourtant la raison d'être de O ait été rencontrée et travaillée par le collectif X des élèves. Ces questions restent externes à l'institution didactique à laquelle sont assujettis les élèves, leur dévolution n'ayant pas lieu. Certains des élèves se les poseront peut-être de manière privée, d'autres jamais ; ils se demanderont alors à quoi servent les mathématiques, ou toute autre œuvre ou partie d'œuvre devenue discipline scolaire.

Dans le cas d'une enquête, parmi les divers éléments constitutifs du milieu en construction, on trouve des réponses toutes faites venues de la société, de la littérature, de la nature. Par exemple, enquêtant sur la couleur bleue de la mer, une réponse largement partagée énonce que cette couleur provient du ciel qui s'y réfléchit. Une telle réponse, notée $R^{\lozenge}$ (R poinçon) en TAD, porte l'estampille d'une partie de la société fournissant une explication à cette couleur. La réponse $R^{\lozenge}$ recueillie est l'expression d'un rapport R stable pour une partie $\hat{\imath}$ de la société à l'objet o « couleur de la mer ». Il est probable qu'on recueille d'autres réponses $R^{\lozenge}{}_i$. Par exemple, que les algues lui donnent une couleur tirant vers le vert ; soit donc un autre rapport stable $R(\hat{\imath}', o)$ au même objet o, où $\hat{\imath}'$ désigne une autre partie de la société. De telles réponses nécessitent que l'on interroge leur degré de vérité ; de là de nouvelles questions que l'on tente de résoudre au sein d'une dialectique entre médias, qui informent, et milieux dénués de cette intention. Suivant cet exemple, la recherche peut amener à consulter des œuvres O_j portant sur la nature de la couleur, sur la composition chimique de l'eau, sur celle de l'air, sur les raisons de la couleur du ciel, etc. Etudier ces œuvres permet de recueillir des données D_k qui, à leur tour, suscitent de nouvelles questions Q_l. Par exemple, par quel phénomène physico-chimique les molécules d'eau absorbent-elles certaines longueurs d'onde et pas d'autres ? En mer, les algues et sels minéraux modifient-ils le phénomène ? Sous sa forme développée, le schéma herbartien devient alors : $[S(X ; Y ; Q) \rightarrow M] \rightarrow R^{\heartsuit}$ où

$M = \{R^{\Diamond}_1, R^{\Diamond}_2, \ldots, R^{\Diamond}_m, O_{m+1}, O_{m+2}, \ldots, O_n, D_{n+1}, D_{n+2}, \ldots, D_p, Q_{p+1}, Q_{p+2}, \ldots, Q_q\}$.

La question que traite cet article concerne *l'évolution du milieu M* du schéma herbartien. L'exemple sur lequel la question s'appuie est constitué d'une proposition d'ingénierie didactique de développement et de son observation en classe. Elle consiste à engager les élèves dans une activité de recherche, sous les contraintes propres au système scolaire français : celles de Curriculum Institutionnellement Offert (CIO) (Chevallard, 2019), d'organisation temporelle, de formation des enseignants, etc. La proposition vise l'étude des équations du 1er degré à une inconnue du type $ax + b = cx + d$. Les contraintes propres au système scolaire énoncées ci-dessus pèsent sur la forme prise par l'enquête. Elle ne peut suivre un processus idéal, tel que pourrait le décrire l'exemple de la couleur de la mer. Cependant, engager les élèves dans une activité de recherche permet l'observation et l'analyse de l'évolution de certaines des composantes du milieu, leur présence ou non. Les élèves, âgés de 13 à 14 ans, sont mis en groupe de quatre ou cinq. Le dispositif, constitué d'enregistrements vidéo du travail des groupes, autorise le recueil des traces du milieu qu'ils se donnent pour élaborer des techniques permettant la résolution des tâches problématiques qu'ils rencontrent.

LA NOTION D'ACTIVITÉ D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE (AER) : UN EXEMPLE INSCRIT DANS UN PARCOURS D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE (PER) SUR L'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE

Activités et Parcours d'Étude et de Recherche comme ruptures avec le paradigme de la visite des œuvres

Depuis la TAD, les mathématiques actuellement enseignées ont pu être qualifiées d'immotivées : on les montre aux élèves, comme on le ferait de monuments ou d'objets de musée dont la raison d'être a été perdue (Chevallard, 2007). A l'opposé d'un enseignement qui sépare structure et fonction – on enseigne des organisations mathématiques sans que se pose la question de leur fonctionnalité : à quoi servent-elles, pourquoi existent-elles ? –, une Activité d'Etude et de Recherche (AER) organise la mise en place d'un système didactique autour d'une question que les élèves ont à travailler, afin de produire une réponse sous la forme d'une organisation mathématique. Une AER autorise l'enseignement d'un *thème* du programme autour d'un élément technologique ; le plus souvent un théorème. La différence avec un chapitre de manuel porte tout d'abord sur l'organisation didactique, qui s'en démarque fortement. Elle promeut un processus de recherche, sous la direction du professeur, dans lequel les élèves sont largement acteurs des réponses ; ce qui modifie en retour l'organisation mathématique construite, comme nous le verrons par la suite.

Sous les contraintes du système scolaire tel qu'il est, une AER engage les élèves dans l'étude d'une organisation mathématique (OM) à propos de laquelle les types de tâches institutionnellement évaluées figurent au programme de la classe ; le respect de ce point du programme est une contrainte forte à respecter. La construction de l'OM résultant d'un processus de recherche, elle peut se laisser décrire à l'aide du modèle du schéma herbartien $S(X, Y, Q) \rightarrow R^{\heartsuit}$. L'AER support de cet article permet seulement d'engendrer le thème de la résolution d'équations du 1er degré à une inconnue pour des élèves de 13 à 14 ans[3], mais s'inscrit dans un PER que nous utilisons pour générer un secteur du domaine de l'algèbre élémentaire. Il permet de faire travailler les élèves depuis les nombres relatifs à partir de 12 ans, jusqu'au début de l'étude des fonctions algébriques pour des élèves de 15-16 ans (Matheron, 2019). Les contraintes propres au système scolaire conditionnent la forme que prend un tel PER : il est monodisciplinaire, en mathématiques, et sa finalité est l'enseignement des types de tâches évaluées au programme national. D'autres dispositifs peuvent exister, qui nécessitent de solliciter plusieurs disciplines, pour lesquels aucun programme ou aucune œuvre n'indique par avance vers quelle réponse conduit l'étude de la question génératrice. Il s'agit alors de PER ouverts, codisciplinaires et non finalisés, comme pourrait l'être l'enquête sur la couleur de la mer.

Présentation de l'AER

L'AER a pour but de faire étudier le type de tâches T : « résoudre l'équation $ax + b = cx + d$ » à partir de rencontres successives avec quatre tâches t_1, t_2, t_3 et t_4. Elles sont

[3] On trouvera une version de cette AER à l'adresse suivante : http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/ressources-pour-la-classe/per-une-possibilite-d2019enseignement-de-la-resolution-d-equation-du-premier-degre-a-une-inconnue-en-quatrieme/

du même type T^* : « déterminer la ou les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul donnent le même résultat », tâches familières aux élèves qui ont travaillé les programmes de calcul dans la classe du niveau précédent : test de valeurs, « remontée » d'un programme de calcul afin de commencer à résoudre arithmétiquement une équation simple. L'énoncé s'inspire d'une proposition issue du travail d'un didacticien des mathématiques. Il évoque deux élèves qui tapent sur leur calculatrice deux calculs différents et s'aperçoivent qu'ils trouvent finalement le même résultat. On demande quel nombre ont-ils tapé.

La technique associée à T^* est celle des tests de valeurs ; les élèves, spontanément, la mettent en œuvre. Accompagnée de la mise en ordre des résultats dans un tableau de valeurs suggérée par le professeur, elle permet de trouver la solution unique pour t_1, puis que n'importe quel nombre convient pour t_2. Par contre, elle échoue pour résoudre t_3 dont la solution 4/7 ne peut qu'être approchée par test de valeurs décimales. Il est alors nécessaire de recourir à une modélisation algébrique de chacun des deux programmes de calcul pour parvenir à construire la technique algébrique de résolution d'une équation du 1^er^ degré à une inconnue. Une fois cette technique institutionnalisée, les élèves commencent à la travailler, ainsi que les autres éléments de l'organisation mathématique dont elle dépend, à travers la tâche t_4. Le décor didactique constitué de l'énoncé des deux élèves qui jouent avec leur calculatrice tend progressivement à disparaître par la suite.

Ci-dessous, ainsi que dans le paragraphe qui suit, nous détaillons succinctement le déroulement de cette AER au cours de plusieurs séances. L'énoncé de chacun des problèmes supports est toujours le même ; seules varient les valeurs des variables didactiques. Le premier problème est le suivant :

> Alice et Bertrand jouent avec leur calculatrice. Ils tapent le même nombre sur leur calculatrice, Alice lui ajoute 3, puis multiplie le résultat obtenu par 7. Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 6 au résultat. À leur grand étonnement, ils s'aperçoivent qu'ils obtiennent le même résultat. Quel nombre Alice et Bertrand ont-ils pu choisir ?[4]

Les deux problèmes qui suivent aboutissent, sur le même modèle, pour t_2 à la résolution de l'équation $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 + 8x$ qui se ramène à une équation indéterminée du

[4] Aboutissant à la solution -3, les valeurs des variables ont été changées dans la version que l'on trouvera sur le lien en note de bas de page précédente. En effet -3 annule à la fois le programme d'Alice, $(x + 3) \times 7$, et celui de Bertrand, $2x + 6$, ce qui risquait de laisser croire aux élèves que la racine d'une équation devait annuler chacun de ses membres.

1[er] degré afin de faire vivre auprès des élèves la question de l'unicité de la solution et, pour t_3, à l'équation $11x + 5 = 4x + 9$ dont la solution non décimale 4/7 nécessite l'élaboration d'une technique algébrique de portée générale. Enfin t_4 correspond à l'équation $9x + 2 = (2x + 5) \times 3$ et permet de travailler la technique élaborée en t_3 afin de la rendre plus économique à l'usage. Au début de l'AER, un rapport à la modélisation algébrique des équations n'est pas encore établi pour nombre des élèves, même si le Curriculum Institutionnellement Offert de la classe du niveau précédent leur a donné la possibilité d'établir un rapport à des expressions polynomiales du 1[er] degré. L'AER conduit donc à la fois à la nécessité de la modélisation algébrique à partir de t_3, celle-ci étant en grande partie prise en charge par le professeur, et de la résolution des équations du 1[er] degré à une inconnue.

L'organisation didactique proposée *a priori* vise l'engagement des élèves dans différents moments de l'étude[5]. Ainsi t_1, t_2, t_3 génèrent-elles des premières rencontres avec le type de tâches T^* à travers la problématicité portée par la question Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? ». Les trois spécimens t_1, t_2, t_3 favorisent l'exploration de T^*, l'ébauche et l'étude de la portée de techniques. La technique par test de valeurs, spontanément utilisée par les élèves car c'est la seule, routinière, dont ils disposent à cet instant, est satisfaisante pour t_1. Elle s'appuie implicitement sur l'observation des variations de deux fonctions affines après que le professeur a suggéré d'ordonner les valeurs trouvées pour chacun des programmes de calcul dans un tableau. Elle est reprise pour t_2. Le travail sur t_2 permet de soulever la question de l'unicité des solutions puisque tout nombre est solution. La portée de la technique par test de valeurs pour t_1 et t_2 est mise en défaut pour t_3 dont la solution n'est ni entière, ni décimale. La recherche d'une technique pour t_3 mobilise des éléments de nature technologique : « en acte » une technique par dichotomie sans s'interroger sur l'élément technologique qui la valide (le théorème des valeurs intermédiaires), la notion de limite, l'équivalence $(a = b) \Leftrightarrow (a - b = 0)$.

ANALYSE A PRIORI DE L'ÉVOLUTION DU MILIEU DANS L'EXTRAIT DE L'AER CHOISI POUR CET ARTICLE

[5] Rappelons qu'il s'agit des moments de 1[re] rencontre avec T, d'exploration de T et d'ébauche d'une technique τ, de construction du bloc technologico-théorique (θ, Θ), de l'institutionnalisation de $(T, \tau, \theta, \Theta)$, du travail de l'organisation mathématique $(T, \tau, \theta, \Theta)$, de son évaluation. Ces moments ne suivent généralement pas, lors de leur réalisation effective, l'ordre d'exposition qui précède.

L'accent est mis dès le début du document sur les questions cruciales qui vont scander l'étude du type de tâches T : « résoudre l'équation $ax + b = cx + d$ ». Ces étapes sont décrites dans le document originel comme des passages obligés qui mobiliseront certaines des huit dialectiques pour une pédagogie de l'enquête : notamment les dialectiques des médias et des milieux, de l'individu et du collectif, de l'inscription et de l'excription, telles que décrites en TAD (Chevallard, 2001) et que nous préciserons par la suite. Si ces questions viennent enrichir le milieu d'étude, elles seront aussi l'occasion de produire et d'étudier des réponses partielles, notées $R^{\Diamond}_j$, sous l'impulsion du professeur mais également des élèves, en ayant recours, lorsque la recherche le nécessite, à des œuvres O_k que nous précisons.

La première question mise à l'étude est Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » relative au problème 1. Il s'agit des programmes de calcul aboutissant pour Alice à $(x + 3) \times 7$ et pour Bertrand à $2x + 6$; expressions algébriques que n'utilisent pas les élèves à cet instant, même si certains les connaissent. Comme mentionné précédemment, ils disposent de connaissances numériques leur permettant de s'engager dans la recherche d'une solution : autrement dit d'une mémoire pratique (Matheron, 2002) mobilisable chez un certain nombre d'entre eux.

Ainsi, les premières œuvres convoquées sont la calculatrice, œuvre notée O_1 – induite dans l'énoncé même du problème soumis – et l'ensemble des entiers naturels, œuvre O_2. Elles permettent d'obtenir une réponse $R^{\Diamond}_1$, constituée de l'ensemble des valeurs obtenues pour les programmes d'Alice et Bertrand lorsqu'on les teste pour diverses valeurs entières positives : ce sont des données D_1. Puis la ressource suggère que l'échec pour trouver une solution positive conduise les élèves vers les entiers négatifs, œuvre O_3. O_3 est convoquée pour pallier l'insuffisance de O_2. Si cette possibilité n'a pas vécu, le document précise : « *Si les élèves n'ont pas eu l'idée de tester avec des négatifs,* le professeur demande d'organiser les résultats en les rangeant ; par exemple en suivant les valeurs croissantes testées. On note les résultats au tableau et les élèves devraient alors constater que les valeurs trouvées sur les positifs "s'éloignent" de plus en plus ». Le professeur propose le rangement dans un tableau des résultats obtenus en testant des valeurs, à travers la question Q_2 : « Comment organiser tous les calculs effectués ? »

Ce tableau est l'œuvre O_4 dont la fonction vise à faire constater la croissance des écarts entre les valeurs trouvées pour Alice et Bertrand selon les positifs : c'est un ostensif qui à la fois montre ce qui est fait et, pour qui sait le lire, se comporte en média indiquant ce qu'il serait bon de faire : poursuivre les tests de valeurs avec des négatifs.

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice	21	28	35	42	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand	6	8	10	12	

L'observation du tableau génère la question Q_3 : « Tous les nombres pertinents ont-ils été testés ? » afin de faire vivre « l'idée de tester sur des négatifs ; ce qui permet de compléter le tableau ».

Nombre qu'ont pu choisir Alice et Bertrand	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
Nombre alors lu sur la calculatrice d'Alice		0	7	14	21	28	35	42	
Nombre alors lu sur la calculatrice de Bertrand		0	2	4	6	8	10	12	

Grâce à ce second tableau, qui s'avère un moyen efficace pour mettre l'accent sur l'évolution des différences entre les valeurs produites par les deux programmes de calcul, on trouve la solution -3. Cependant, si le tableau O_4 a une utilité cruciale à ce moment de la recherche, il deviendra inopérant ultérieurement, quand une technique algébrique sera nécessaire pour t_3.

Les trois œuvres convoquées O_1, O_2, O_3 ont permis de produire la réponse $R^{\Diamond}_2$ à la question Q_2 « comment organiser les calculs effectués ? » constituée de l'œuvre O_4 : « un tableau ». Il s'agit d'un média au sein d'une dialectique des milieux et des médias : organiser tous les calculs prend pour sens le classement dans l'ordre croissant des nombres relatifs choisis comme valeurs de départ, la notion d'ordre étant intégrée au rapport attendu à l'œuvre

O_3 : l'ensemble ℤ. La réponse $R^{\Diamond}{}_3$ à la question Q_3 : « Tous les nombres pertinents ont-ils été testés ? », nécessite d'avoir établi un rapport à cet ensemble incluant, « plus grand que ℕ », pour que les élèves infèrent que les variations sur ℤ induisent des variations sur les écarts entre les programmes de calcul d'Alice et de Bertrand. Ils doivent aussi inférer que cet écart n'est nul que pour une seule valeur sur ℤ – ce que mettra en doute t_2 –, même si les connaissances sur les variations des fonctions affines manquent aux élèves de ce niveau.

La réponse $R^{\heartsuit}{}_1$: « -3 est la solution » pour la déclinaison de la question Q_1 sur la tâche t_1, a été produite grâce aux calculs permis par les œuvres O_1, O_2, O_3 et O_4 et les réponses $R^{\Diamond}{}_1$, $R^{\Diamond}{}_2$ et $R^{\Diamond}{}_3$ obtenues. Le document propose, grâce à une dialectique de l'inscription et de l'excription, d'utiliser par la suite les données numériques répétées D_1 auxquelles ont eu recours les élèves, pour pouvoir engager, lorsque sa fonctionnalité s'imposera, l'étude d'une nouvelle œuvre O_5 : l'écriture littérale nécessitée pour la résolution de t_3. On s'appuiera en effet pour cela sur l'économie à l'usage que procure l'introduction de la lettre x qui assumera une double fonction : celle de variable associée aux différentes valeurs testées fournissant les données de type D_1 constituées des valeurs alors prises par les deux programmes de calcul, et celle d'inconnue répondant aux questions de type Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? »

Nous obtenons ainsi un milieu intermédiaire d'étude, noté M_1. Il est constitué des réponses aux trois premières questions : pour Q_1 déclinée sur t_1 il s'agit d'une tâche mathématique, Q_2 appelle une technique non spécifique des mathématiques (comment organiser des informations ?), Q_3 a pour réponse le rapport à un savoir mathématique : des ensembles de nombres qui contiennent les entiers naturels, en l'occurrence $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$. On a alors $[S(X ; Y ; Q_1) \rightarrow M_1] \rightarrow R^{\heartsuit}{}_1$.

Le milieu intermédiaire d'étude M_1 – réponses estampillées considérées partielles, techniques mises en place ou œuvres convoquées – et la réponse $R^{\heartsuit}{}_1$ sont supposés disponibles pour la poursuite de l'étude du type de tâches T : « résoudre une équation du premier degré » lors de la reprise de la question Q_1 avec le second problème t_2 dont l'équation associée est $(x + 2)^2 = (x - 2)^2 + 8x$.

Ne disposant toujours que d'une technique numérique pour résoudre l'équation, les élèves devront à nouveau faire appel aux œuvres O_1, O_2 et O_3, mais une nouvelle question doit être travaillée compte tenu des multiples solutions numériques trouvées. Cette donnée D_2

appelle une nouvelle question Q_4 : « Pourquoi beaucoup de solutions pour t_2 ? » dont la réponse engage vers l'exploration d'une nouvelle œuvre O_6 : l'ensemble $\mathbb{R}$. La réponse $R^{♥}_2$ acceptée par la classe est celle qui énonce que « tous les nombres » sont solutions, sans pour autant définir ce que signifie « tous les nombres », ni avoir rencontré $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ autrement que par la fréquentation de π.

La question suivante Q_4 engendre à son tour une question Q_5 : « Comment être sûr de l'unicité de la solution du problème t_1 ? » qui a pu être abordée dès l'obtention de la réponse $R^{♥}_1$: « -3 est la solution », mais dont l'étude a été mise de côté dans une dialectique des boîtes noires et des boîtes claires, voire grises ; c'est-à-dire des questions, « les boîtes », que l'on cherche ou non à éclaircir, ou à n'éclaircir que partiellement. Le problème 3, porté par t_3, fournit la possibilité de travailler cette question : sa nécessaire résolution algébrique, la technique par test de valeurs devant être abandonnée, apporte la preuve de l'unicité de sa solution non décimale 4/7. Nous n'aborderons pas dans ce texte l'étude des organisations mathématique et didactique pour t_3 et t_4. L'une des auteurs a développé l'analyse complète du document-ressource constitutif de l'AER. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Méjani (2018).

A l'issue de t_2 un nouveau milieu intermédiaire d'étude M_2 est obtenu. Il est constitué à partir de l'institutionnalisation de certains des éléments pris dans un ensemble obtenu au cours de la recherche, et qui contient des réponses partielles $R^{\Diamond}_i$, des techniques τ_i, des œuvres O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, des données D_1 et D_2, des réponses $R^{♥}_1$ et $R^{♥}_2$ ainsi que les questions Q_4 et Q_5 relatives au nombre des solutions. C'est-à-dire des éléments de techniques liées aux essais de valeurs pour trouver une solution à Q_1, et des éléments technologico-théoriques pour la conjecture sur l'unicité de cette solution : soit à partir de l'écriture algébrique des programmes de calcul modélisés, pour certains élèves qui le peuvent, soit de l'analyse du tableau permettant l'observation de l'évolution des deux programmes de calcul et de leur différence.

Pour plus de facilité de lecture, nous regroupons ci-dessous, de manière synthétique, les éléments constitutifs du processus d'étude et de recherche tel qu'il est proposé et analysé *a priori* jusqu'en ce point en suivant le texte de l'AER. Certains des éléments technologico-théoriques nourrissant des techniques mises en œuvre par les élèves ne sont explicités que dans le document de l'AER : il n'est pas attendu qu'ils soient questionnés par les élèves

Questions	Œuvres	Réponses
Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » question posée dans le problème t_1	O_1 : calculatrice O_2 : $\mathbb{N}$ totalement ordonné O_3 : $\mathbb{Z}$ totalement ordonné	$R^{\Diamond}_1$: tester des valeurs A l'issue de $R^{\Diamond}_1$, $R^{\Diamond}_2$ et $R^{\Diamond}_3$, on a $R^{\heartsuit}_1$: -3 est solution
Q_2 : « Comment organiser tous les calculs effectués ? »	O_4 : tableau	$R^{\Diamond}_2$: O_4 = média et mise en œuvre d'une dialectique des milieux et des médias pour classer dans l'ordre croissant les nombres relatifs choisis comme valeurs de départ, notion d'ordre intégrée au rapport attendu à l'œuvre O_3.
Q_3 : « Tous les nombres pertinents ont-ils étaient testés ? »	O_3 : $\mathbb{Z}$ totalement ordonné	$R^{\Diamond}_3$: application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels

Milieu M_1 d'étude intermédiaire = {$R^{\Diamond}_1$ relatives pour Q_1 à une tâche mathématique ; $R^{\Diamond}_2$: technique d'organisation qui n'est pas uniquement utilisée en mathématiques : (comment organiser des informations ?) ; $R^{\Diamond}_3$: fait appel à un rapport à un savoir mathématique}

Questions	Œuvres	Réponses
Q_4 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? » pour le problème 2 : t_2.	O_1 : calculatrice O_2 : $\mathbb{N}$ totalement ordonné O_3 : $\mathbb{Z}$ totalement ordonné O_6 : $\mathbb{R} \supset \mathbb{Z}$	$R^{\Diamond}_1$: tester des valeurs $R^{\heartsuit}_2$: tous les nombres semblent solutions.
Q_5 : « Pourquoi obtient-on beaucoup de solutions pour Q_4 ? »	O_5 : écriture algébrique et transformations qu'elle peut subir	$R^{\Diamond}_5$: l'égalité des deux expressions algébriques après développement.
Q_6 : « Comment être sûr qu'il n'y a qu'une solution au problème t_1? »	O_3 : ensemble $\mathbb{Z}$ et ordre sur $\mathbb{R}$ O_4 : tableau O_5 : écriture algébrique et	$R^{\Diamond}_6$: en suspens

	transformations qu'elle peut subir O_7 : technique par dichotomie	
Q_7 : « Comment exprimer les programmes de calcul sans forcément chercher les valeurs prises ? »	O_5 : écriture algébrique et transformations qu'elle peut subir	$R^{\lozenge}_7 : O_5$
Q_8 : « Quelles remarques peut-on faire sur les écarts/différences entre les valeurs prises par les deux programmes de calcul ? »	O_3 : $\mathbb{Z}$ totalement ordonné O_4 : tableau O_7 : technique par dichotomie	$R^{\lozenge}_8 = O_7$, comparaison de nombres relatifs et croissance des écarts.
Q_9 : « Comment doit-être la différence entre deux programmes de calcul lorsqu'ils coïncident pour une même valeur ? »	O_5 : écriture algébrique et transformations qu'elle peut subir O_9 : deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle	$R^{\lozenge}_9 = O_9$
Q_{10} : « Que se passe-t-il quand la différence entre deux nombres est nulle ? »	O_9 : deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle	$R^{\lozenge}_{10} = O_9$

Un nouveau milieu d'étude M_2 est ainsi obtenu à l'issue de l'étude du deuxième problème pour t_2. Il contient l'ensemble des œuvres rencontrées pour Q_1, complété par les œuvres O_5 : l'écriture algébrique et les transformations qu'elle peut subir, O_9 : théorème : les deux programmes donnent le même résultat si et seulement si la différence entre les deux est nulle, qui se sont constituées comme réponses $R^{\lozenge}_7 : O_5$ et $R^{\lozenge}_8 = O_7$ et comparaison de nombres relatifs et croissance des écarts. Le milieu institutionnellement disponible pour les élèves à l'abord de t_3 est $M_2 = \{R^{\lozenge}_i$ avec $i \in \{1, \ldots, 10\}$; O_j avec $j \in \{1, \ldots, 9\}$; Q_k avec $k \in \{1, \ldots, 10\}$; $D_1, D_2\} \cup \{R^{\blacktriangledown}_1, R^{\blacktriangledown}_2\}$.

OBSERVATION DANS DEUX CLASSES DIFFÉRENTES

Il s'agit de suivre l'évolution du ou des milieux que des sujets – les élèves – dotés d'un certain équipement praxéologique acquis par l'étude au sein d'une institution donnée – les classes de mathématiques antérieurement fréquentées –, constituent pour mener à bien la tâche qui leur est dévolue. Nous complétons l'analyse *a priori* du milieu d'étude de l'AER avec celle des milieux construits par des groupes d'élèves dans deux des quatre classes observées. Dans chacune de ces classes, nous avons mis en place un dispositif d'observation de groupes d'élèves travaillant à partir de la proposition issue du document-ressource à l'ébauche d'une organisation mathématique pour le type de tâches T : « résoudre l'équation $ax + b = cx + d$ ».

Dans cet article, comme signalé précédemment et pour des raisons de place, nous limitons l'observation et son analyse à l'engagement des élèves dans le problème 1. Le travail d'étude et de recherche effectif peut ainsi être confronté à l'analyse *a priori* issue du document-ressource. La nécessité de communiquer à l'intérieur des groupes permet de recueillir des traces de l'expression publique des rapports au savoir des élèves et de la construction des milieux. La présence de deux caméras dans la classe, l'une fixe sur un groupe préalablement choisi, l'autre mobile circulant de groupe en groupe, assure le recueil de certaines données d'observation : langagières, scripturales, gestuelles. Nous notons P_1 et P_2 les deux professeurs qui ont assuré la passation de l'AER dans les classes C_1 et C_2 respectivement. Les élèves observés seront notés $E_{1,i}$ et $E_{2,i}$ dans les classes C_1 et C_2.

Nous présentons ci-dessous une synthèse sous la forme de tableaux détaillant le travail en groupe d'élèves pendant le moment de première rencontre avec le type de tâches T : « résoudre l'équation $ax + b = cx + d$ ». Au début de l'AER le rapport institutionnel ne contient pas encore ce que sont une équation et sa résolution. Comme on l'a dit, T se décline alors en T^* : « déterminer une valeur numérique qui égalise deux programmes de calcul non équivalents ». Pour cela, les élèves explorent comme prévu dans l'analyse *a priori* le type de tâches T^* en ayant recours à une technique par essai/erreur à partir de valeurs entières positives. La très grande majorité de ceux qui sont filmés l'utilisent, même si certains, comme nous le détaillons plus loin, envisagent par la suite une étude de la structure des expressions algébriques qu'ils auront écrites.

Chronologie détaillée du début de la séance 1 du professeur P_1

Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu
00:00 à 05:25 :	Mise au travail et dévolution.	Première rencontre avec Q_1.	Dévolution par P_1 de Q_1. La possibilité d'apporter tout élément dans le milieu, excepté par P_1 lui-même, est explicitement formulée par P_1. Il insiste également sur la nécessité d'une « stratégie », non seulement sur la recherche d'une solution à Q_1, mais aussi sur des ingrédients technologico-théoriques pour la justifier.
05:25 à 12:45	Travail de groupe avec un moment d'échange (10:25) avec un E d'un autre groupe.	Moment d'exploration du type de tâches lié à Q_1 pour T^* Moment de travail de la technique pour T^* et pour T_7 : « choisir des valeurs pertinentes à tester » Moment de première rencontre fugace avec le type de tâches T^*	Les œuvres O_1, O_2 et O_3 sont intégrées au milieu. Cependant une autre œuvre – notée O_{12}^* et non prévue par le document ressource – intervient ici en tant que média : le cahier de cours de l'un d'entre eux. De même le bref échange avec un élève E d'un groupe voisin apporte un élément technologique : l'existence d'au moins une solution pour Q_1, que nous considérerons comme réponse partielle à la question de l'existence, restée implicite jusqu'ici.
12:45 à 3:10	Échange entre P_1 et un élève du groupe, échange suivi par tous.	Moment technologico-théorique lié à la question Q_1 pour T^*	Lorsqu'un élève du groupe, qui déclare avoir trouvé, demande à P_1 de venir, P_1 relance l'étude en lui demandant de justifier pourquoi la valeur recherchée est « en-dessous de zéro ». Cette nouvelle question, qui relève d'éléments technologico-théoriques et notée Q_6, intègre le milieu d'étude de ce groupe sans concerner les autres élèves de la classe.
13:10 à 17:30	Travail de groupe avec un moment d'échange avec P_1	Moment d'exploration du type de tâches T^* lié à Q_1	Un élève du groupe ayant trouvé la réponse $R^{\heartsuit}_1$ il fournit des indications à deux de ses camarades. Il devient une

	(15:10).	Moment de travail du type de tâches : appliquer un programme de calcul à des entiers relatifs. Moment d'évaluation de la technique pour le type de tâches T^*	aide à l'étude occupant temporairement une position en Y. Chacun des élèves se trouve dans un moment d'étude différent : pour l'un il s'agit d'évaluer la technique et les éléments technologiques convoqués pour T^*, les deux autres qui l'écoutent sont encore dans un moment d'élaboration d'une technique pour le même type de tâches T^*
De 18:00 jusqu'à la fin du cours à la min 46:00	La mise en commun est décidée par le professeur et elle survient à la min 18.	Moment collectif d'exploration du type de tâches T^* Moment technologico-théorique des techniques proposées. Moment d'évaluation des techniques élaborées dans les groupes pour T^* et pour T_7. « choisir des valeurs pertinentes à tester » Moment d'institutionnalisation de la technique pour T^* et T_6 : « organiser les calculs dans un tableau ».	O_1 : la calculatrice comme média O_2 : ensemble $\mathbb{N}$ O_3 : ensemble $\mathbb{Z}$ O_4 : tableau $R^{\heartsuit}{}_1$= -3 solution $R^{\Diamond}{}_2$: O_4 $R^{\Diamond}{}_3$: application des programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels. Dans la phase collective, l'élève $E_{1,2}$ fournit une justification identifiable comme liée à la croissance des fonctions linéaires. Une nouvelle œuvre O_{13} non prévue dans le document ressource mais qu'indique l'ostensif tableau

Chronologie détaillée du début de la séance du professeur P_2

Épisode	Descriptif succinct	Moments de l'étude	Évolution du milieu

00:00 à 02:40 :	Mise au travail et dévolution.	Première rencontre avec Q_1.	Dévolution succincte par P_2 de Q_1. Possibilité d'apporter la calculatrice dans le milieu explicitement formulée par P_2. $E_{2,3}$ demande à utiliser le tableur, et P_2 refuse (« avec un tableur, c'est simple, on verra plus tard et de toute façon j'ai pas un tableur pour tout le monde »).
02:40 à 17:05	Travail de groupe avec une discussion collective immédiate sur le problème ; intervention de P_2 (04:30) qui les observe, puis répartition du travail par $E_{2,3}$: chacun prend des valeurs entières à tester pour les deux programmes.	Moment d'exploration du type de tâche lié à Q_1 pour T^*. Moment de travail de la technique pour T^* et pour T_7: « choisir des valeurs pertinentes à tester » Ébauche d'un moment technologico-théorique pour T_7 en cherchant une régularité dans les programmes de calcul (la croissance des fonctions linéaires permet de choisir plus astucieusement les valeurs à tester). Moment de travail de T_6 : « organiser les calculs dans un tableau ».	O_1 (calculatrice) et O_2 ($\mathbb{N}$) sont intégrées au milieu. De même pour l'œuvre notée O_0 (énoncé du problème) reformulée au sein du groupe. La recherche d'une régularité dans les programmes de calcul montre que les E se placent à un niveau technologique pour T_7. $E_{2,3}$ trace un tableau pour y noter son résultat ; $E_{2,4}$ fait référence à l'écart trop important entre deux valeurs. Très vite, dès le début, dans ce groupe les œuvres O_1 : la calculatrice, O_2 : $\mathbb{N}$ et O_4 : tableau, sont intégrées. En se répartissant les valeurs entières, les élèves échangent non pas les valeurs des programmes de calcul mais les écarts relevés, ce qui montre pour ce groupe un rapport aux données D_1 : ensemble des écarts trouvés. La répartition du travail témoigne d'un équipement praxéologique chez $E_{2,3}$ lié à un assujettissement extérieur : un travail collaboratif signifie que chacun participe à la tâche commune. De plus (09:20), l'élève $E_{2,3}$ déclare qu'il va certainement falloir utiliser des nombres négatifs ou des nombres décimaux (« à virgule »), au vu de la croissance des fonctions linéaires associées. Une vraie dialectique média-milieu est mise en œuvre au sein de ce groupe : le

			tableau qu'il constitue agit tour à tour comme un milieu ou un média, permettant d'écarter une situation de proportionnalité ou au contraire incitant à étendre les essais à 10:00 : décomposition du programme de calcul d'Alice en opérateurs, en essayant de « remonter » le programme. 11:05 : $E_{2,5}$ propose de recourir à la lettre x et produit avec $E_{2,3}$ collectivement une écriture littérale des deux programmes de calcul. $E_{2,1}$ et $E_{2,4}$ continuent leurs calculs. $E_{2,3}$ et $E_{2,5}$ abandonnent leurs écritures algébriques et réfléchissent avec $E_{2,1}$ et $E_{2,4}$ aux écarts observés, de 2 en 2 pour A de 8 en 8 pour B (erreur corrigée 2 min après par $E_{2,3}$ qui l'a affirmée) et de 5 en 5 pour l'écart. $E_{2,2}$ signale que la solution a été trouvée par un autre groupe ; les autres ne s'en préoccupent pas. Mise à plat collective (14:45) par $E_{2,3}$ pour le groupe sur un cas particulier. Retour sur la discussion autour des nombres décimaux argumenté par la nécessité de « casser » le 5 d'écart par $E_{2,3}$. Essai avec -4, sur relance de $E_{2,3}$
17:05 à 29:40	P_2 demande une pause aux groupes. Mise en commun mais le groupe filmé ne suit pas ces échanges et continue à tester des valeurs négatives.	Moment technologico-théorique lié à la question Q_1. Moment d'institutionnalisation sur la nécessité des nombres décimaux puis négatifs, liée à l'écart, c'est-à-dire la croissance des fonctions affines associées.	Le groupe filmé ne se sent pas concerné par cet épisode collectif. Soit certains des élèves poursuivent leurs calculs, soit ils s'amusent et bavardent. Aucun ne participe à l'élaboration de cette institutionnalisation, même si ponctuellement certains semblent suivre ce qui est écrit au tableau et dit par le professeur ou d'autres camarades. Ce décalage peut s'expliquer par le fait que P_2 reprend des éléments déjà intégrés à leur milieu, en détaillant

			l’ensemble des étapes qu’ils ont eux-mêmes déjà traversées. La réponse $R^{\heartsuit}_1$, -3, est apportée et validée dans le milieu de la classe
29:40 à 32:25	P_2 vient voir un groupe qui le lui a demandé.	Pas de moment d’étude pour la classe. Pour le groupe avec P_2, il s’agit probablement d’un moment technologico-théorique puisque le groupe explique comment il a déterminé la réponse $R^{\heartsuit}_1$	Échange en aparté entre le groupe et P_2. Le groupe filmé s’amuse et $E_{2,2}$ se montre agressif. Il est menacé par P_2 d’être exclu de la classe. P_2 continue de discuter avec l’autre groupe, toute la classe bavarde et la dynamique de recherche est interrompue pour tous.
32:30 à 33:25	Retour de P_2 au tableau qui demande à nouveau le silence.	Moment d’évaluation des techniques élaborées dans les groupes pour T^* et pour T_7 : « choisir des valeurs pertinentes » Moment d’institutionnalisation de la technique pour T^* et T_6 : « organiser des calculs »	O_2 : $\mathbb{N}$ O_3 : $\mathbb{Z}$ O_5 : écriture algébrique $R^{\heartsuit}_1$= -3 solution $R^{\lozenge}_3$: application des deux programmes de calcul à des nombres autres que des entiers naturels.
33:25 à fin	Distribution du second problème	Moment de travail pour le type de tâches T^*.	

ANALYSE A POSTERIORI DE L’ÉVOLUTION DU MILIEU LORS DE LA MISE EN ŒUVRE DANS DEUX CLASSES DIFFÉRENTES AVEC DEUX PROFESSEURS DIFFÉRENTS

Première remarque : une relative conformité avec le milieu d’étude prévu par le document ressource

La dévolution de la question problématique Q_1 relative au type de tâches T^* : « déterminer une valeur numérique égalisant deux programmes de calcul non équivalents » est organisée par ces professeurs en proposant aux groupes d'élèves un milieu d'étude noté M_0. C'est un premier milieu d'étude sur lequel les élèves n'ont pas encore agi, et qui contient des questions et des œuvres que le professeur juge utiles pour que les élèves accèdent au savoir visé. Dans le document support de ces séances, nous remarquons que ce premier milieu contient d'une part les œuvres O_1 et O_2 – la calculatrice et l'ensemble $\mathbb{N}$ – complété par l'énoncé O_0 contenant la question Q_1, les notes de recherche D_1 (calculs effectués) devenant l'œuvre O_{16}, d'autre part le dispositif « travail de groupe » considéré ici comme une œuvre – qui, au sens de la TAD, est « le fruit d'une activité humaine finalisée » – O_{22}.

M_0 = {énoncé O_0 ; notes de recherche O_{16} ; travail de groupe O_{22} ; Q_1}.

L'analyse de séances fournit un premier milieu d'étude pour les classes C_1 et C_2 contenant les éléments prévus par le document ressource.

Dans la classe C_1

Dans la première classe, la séance débute ainsi :

> *00:55 : P_1 :* je vous donne une recherche à faire. Je vous donne absolument aucune indication. Vous allez la lire tranquillement, vous faites comme vous voulez et je vous donne un petit quart d'heure pour y penser.
> *01:05 Deux élèves du groupe filmé bougent pour changer leurs chaises.*
> P_1 : Vous écoutez là *?! La classe se met au travail alors que jusqu'ici on entendait un brouhaha persistant.*
> *01:10 : le groupe filmé finit de s'installer en déplaçant une table.*
> *01:30 : P_1 : en distribuant l'énoncé,* Vous le collez dans la partie exercices, vous avez le droit de faire des recherches sur le cahier, vous ne serez pas sanctionnés même si c'est brouillon....
> *01:45 : Deux des élèves font des grimaces devant la caméra, puis éclatent de rire avant d'être repris par P_1.*
> *Encore beaucoup de bruit dans la classe pendant quelques instants encore. $E_{1,3}$ et $E_{1,4}$ collent leur fiche dans leur cahier.*
> *03:10 : P_1 :* Chut, chut ! Vous commencez tous par lire calmement l'énoncé du problème *(03:12 ici deux élèves ont déjà pris leur calculatrice et sont en train de lire l'énoncé sans sembler écouter P_1 :)* vous y réfléchissez. Vous pouvez chuchoter ensuite entre vous, ou réfléchir tout seul et on mettra en commun dans un petit moment. Dans un premier temps j'aimerais que vous puissiez réfléchir aux solutions éventuelles de ce petit problème.

03:25 : toute la classe se calme quasi instantanément. Les quatre élèves observés lisent le problème plus ou moins attentivement.
Puis P_1 :se met à son bureau. Et la classe est calme avec des élèves qui se mettent au travail. Les deux élèves précédents ont commencé à communiquer sur le problème mais sont inaudibles et ils sont interpellés par une élève de leur groupe face à eux.
04:40 : P_1 : à une élève près d'elle. Ne me demande pas à moi, vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof.

Avant que les élèves prennent connaissance de la question, leur professeur, en distribuant l'énoncé, précise : « Vous le collez dans la partie exercices, vous avez le droit de faire des recherches sur le cahier, vous ne serez pas sanctionnés même si c'est brouillon ». Nous intégrons ainsi au milieu d'étude mis à disposition par P_1 la possibilité de conserver des traces de recherches dans le cahier de travail comme l'œuvre O_{16} : « traces de recherche ». Le premier problème est distribué et les élèves sont lancés dans la recherche de la question Q_1 : « déterminer les valeurs qu'ont pu taper Alice et Bertrand sur leur calculatrice ? », question également présente dans le milieu offert par P_1. Pour P_1 assurant la dévolution, il s'agit de proposer un milieu permettant de démarrer l'étude sans qu'il n'esquisse de geste d'aide. Si les élèves peuvent « faire comme » ils le souhaitent pour résoudre Q_1, ils peuvent aussi faire appel à toute réponse $R^{\lozenge}_i$ de leur choix, qu'elle vienne d'eux-mêmes ou d'un de leurs camarades – « Vous pouvez chuchoter ensuite entre vous, y réfléchir tout seul » – à condition que le média convoqué ne soit pas leur professeur : « Ne me demande pas à moi, vous pouvez utiliser tout ce que vous voulez sauf votre prof ». La suite des séances montrera que des médias, autres que les élèves présents munis de leurs documents de cours, ou encore leur professeur, ne seront pourtant pas convoqués. Nous avons résumé le milieu d'étude proposé par P_1 par:

$M_{0,1}$ = {travail de groupe O_{22} ; énoncé O_0 ; traces de recherche O_{16} ; échanges entre pairs O_{17} ; ressources personnelles ; Q_1}.

Ce milieu place les élèves dans un moment de première rencontre avec le type de tâches considéré comme problématique T^* : « déterminer les valeurs numériques pour lesquelles deux programmes de calcul donnent le même résultat ». On peut évoquer en ce point une forme de « double dévolution » : d'une part, chacun, à travers sa lecture silencieuse, devra s'approprier la tâche exigée par P_1, d'autre part, les groupes constitués seront également comptables d'une restitution prévue « dans un petit moment ». Une dialectique de l'individu et du collectif commence à se mettre en place, englobant les groupes physiquement constitués, qui devront partager l'état de leurs recherches.

Dans la classe C_2

> *P_2 arrive avec une bande de papier contenant le premier problème.*
> *Un des élèves du groupe filmé montre qu'ils ont eu le problème 2.*
> *P_2 distribue cette fiche à tous les élèves puis demande aussitôt :*
> *01:00 :*
> *P_2 :* Qui pourrait me lire le problème ? Le problème ? Allez, vas-y, on t'écoute E. Qu'est-ce qui t'arrive ? *E inaudible.* Aïe ! C'est pas grave.
> *Dans le groupe filmé : $E_{2,2}$ s'est levé pour récupérer le bon énoncé du problème tandis que $E_{2,5}$, sans attendre la lecture collective, se met à surligner des passages dans l'intitulé du problème.*
> *01:10 : P_2 :* Normalement tout le monde a bien le problème 1 ?
> *$E_{2,3}$:* non moi j'ai le problème 2. Non je rigole. C'est bon.
> *P_2 : inaudible.* Impeccable, merci.
> *01:25 P_2 :* alors on écoute E, tout le monde ! Chut ! *E commence à lire.* Oh !
> *On entend E lire l'énoncé du pb 1. Les élèves de la classe sont relativement silencieux et tous ont l'air de lire l'énoncé en même temps. Fin de la lecture à 01:50.*
> *$E_{2,5}$ fait n commentaire sur le pb inaudible et $E_{2,4}$ lui répond . Inaudible.*
> *01:55 : P_2 :* Donc une énigme. … C'est ça, vas-y ! Recherche ! Alors vous avez droit à tout, les calculatrices si vous voulez, c'est pas un problème, vous pouvez calculer de tête. J'aimerai bien par contre que vous euh... marquiez vos recherches. Si vous avez les calculatrices, marquez-moi ce que vous avez testé comme valeurs etc...Qu'on puisse comprendre.
> *02:15 : P_2:* Est-ce que déjà effectivement, tout le monde comprend bien le problème ? *Brouhaha dans la classe. $E_{2,3}$ se tourne vers P_2 et lui demande s'il peut utiliser le tableur.*
> *P_2 :* Ah ! Avec un tableur, ce serait simple. On verra plus tard peut-être. Ben, j'ai pas un tableur pour tout le monde.
> *E non visible :* Vous pouvez me prêter une calculatrice s'il vous plaît.
> *P_2:* oui !

Les élèves sont placés en groupe après modification de l'organisation de la classe. L'installation terminée, P_2 déclare ne pas annoncer le titre du chapitre et propose une recherche après distribution de l'énoncé de Q_1. La distribution terminée, il désigne un élève pour la lecture. Sans reprendre le contenu de l'énoncé, il le commente simplement en évoquant une « énigme » pour laquelle les élèves ont « droit à tout », tout en s'assurant succinctement que tous ont compris. Mais ce « tout » est aussitôt restreint : « les calculatrices si vous voulez, c'est pas un problème », même si « vous pouvez calculer de tête ». Commence à être énoncé le milieu avec lequel les élèves vont pouvoir effectuer cette « recherche », dans lequel P_2 promeut d'ores et déjà l'existence d'une réponse $R^{\Diamond}{}_0$ consistant à tester des nombres entiers avec la calculatrice. P_2 complète ce pré-milieu d'étude en demandant à ce que les recherches soient « marquées », et assigne à ces traces de recherche une fonction liée au raisonnement : « qu'on puisse comprendre » les valeurs qui auront été testées. Par cette remarque, P_2 partage avec les élèves un rapport à l'objet « raisonnement ». Marquer les essais signifie, pour lui, rendre compte de la recherche et du processus de cette recherche. Cela, contrairement à la classe C_1, nous permet de différencier les traces écrites : il ne les considère pas comme des œuvres O_{16}, comme précédemment, mais comme des réponses $R^{\Diamond}{}_{11}$, même si leur rôle dans une mise en commun future non encore évoquée, n'est pas clairement exprimé. Cependant, le type de tâches n'est pas explicité, même si P_2 cherche à s'assurer rapidement que l'énoncé est dévolu en demandant : « Est-ce que déjà effectivement, tout le monde comprend bien le problème ? » Ne recevant pas de réponse, les élèves ayant commencé à travailler, il circule dans la classe et vérifie le travail enclenché dans chacun des groupes. Il n'a néanmoins fourni aucune indication sur la manière dont les élèves pouvaient travailler en groupe, laissant deviner un processus de « dévolution simple » à destination des élèves E_i plutôt que vers les groupes. Ainsi apparaît le milieu mis à disposition par P_2 schématisé comme suit :

$M_{0,2}$ = {travail de groupe O_{22} ; énoncé O_0 ; usage de la calculatrice O_1 ; lecture à haute voix de l'énoncé pour la classe O_{18} ; $R^{\Diamond}{}_0$ = tester des nombres entiers avec la calculatrice ; traces de recherche O_{16} ; Q_1}.

Tous les éléments du milieu d'étude tel que prévu par la ressource sont effectivement apparus dans les deux classes : l'énoncé O_0 qui porte la question relative à T^* notée Q_1, la nécessité de notes de recherche qui constitueront les données D_1 nécessaires. D'autres éléments, qu'ils relèvent de questions portées par l'étude, de réponses partielles estampillées par les groupes tout entiers ou par des individus particuliers au sein des groupes, ou encore de types de tâches que nous appellerons « annexes », ont été rencontrés dans nos analyses, venant « grossir » les milieux d'étude pour chacune des classes.

Pourtant, ce n'est pas parce que les professeurs mettent à disposition un milieu d'étude particulier que les élèves interagiront avec ce dernier. Comme nous le montrons dans le paragraphe suivant, dans les deux groupes observés, les élèves s'approprient le milieu de départ en y intégrant des œuvres propres qui échappent au regard de leur professeur.

Des milieux d'étude adaptés dans chaque groupe

Dans la classe C_1

Une première remarque sur le collectif dans le groupe filmé concerne la répartition de la parole entre les quatre élèves : l'élève $E_{1,3}$ ne s'exprimera pas du tout et ne sera sollicité qu'une seule fois, par $E_{1,1}$, au cours de la recherche : 09:10: « T'as trouvé ? » Si cet élève ne participe aucunement au travail du groupe, un autre est au contraire plébiscité par les deux autres : c'est $E_{1,2}$ régulièrement interpellé par $E_{1,1}$ ou $E_{1,4}$. L'exemple suivant, montrant un milieu d'étude plus riche que celui mis à disposition par P_1, constitue un épisode survenu au tout début de la première séance : l'élève $E_{1,2}$ considéré comme bon et identifié comme tel par ses camarades est sollicité par l'un d'eux :

> 07:40: *: $E_{1,1}$ continue avec sa calculatrice. $E_{1,2}$ se remet à écrire, $E_{1,3}$ et $E_{1,4}$ non visibles.*
> 08:05 : $E_{1,2}$: ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations....
> $E_{1,4}$ à $E_{1,2}$: On a pas fait les équations ?
> $E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: Non on a fait juste du calcul littéral. $E_{1,4}$ feuillette alors son cahier et le montre à $E_{1,2}$.
> $E_{1,2}$: c'est pas des équations, ce qu'on a fait. *Il regarde le cahier que lui montre $E_{1,4}$.*
> $E_{1,4}$: c'est calcul littéral et équations.
> $E_{1,2}$ *dubitatif. Puis :*
> $E_{1,2}$ à $E_{1,4}$: ça c'est juste, t'écris x et y, des trucs.... Mais les équations, c'est quand tu dois trouver le x. (…)
> 08:50 :*Puis silence $E_{1,2}$ se remet à réfléchir seul.* Ah ! Bé ! Attends !
> *En voyant que son camarade $E_{1,4}$ attend qu'il écrive, il lui demande de travailler aussi* : Eh ! Il travaille sur moi !

Le travail de recherche vient de démarrer et les élèves ont lu, chacun de leur côté, l'énoncé de Q_1. Dans ce groupe, l'élève $E_{1,2}$ est, avec l'élève $E_{1,3}$, identifié comme « bon » par les autres ; ce que confirment des pré-tests que nous avions fait passer. $E_{1,2}$ repère d'emblée le travail demandé et, avec la verve d'un élève de cet âge, déclare spontanément : « ça fait des équations. C'est chiant, on n'a pas fait les équations... » Cela est confirmé quand son camarade $E_{1,4}$ l'a vérifié dans son cahier de cours en tant que média. Il montre ainsi que son équipement cognitif contient l'œuvre « équation » $O_{\text{éq}}$ dont il a une connaissance très incomplète : « les équations, c'est quand tu dois trouver le x ». Il ne dispose pas encore d'une technique de résolution : cette œuvre $O_{\text{éq}}$ n'appartient pas encore à son équipement praxéologique. Son rapport personnel $R(E_{1,2}, O_{\text{éq}})$ apparaît dans son milieu d'étude qu'il partage rapidement avec ses camarades du groupe.

Dès que la dévolution simple a eu lieu, des élèves enrichissent le milieu $M_{0,1}$ du groupe. Ils y intègrent des œuvres qu'ils ont rencontrées et avec lesquelles ils ont établi un rapport personnel qu'ils rendent public. Ils génèrent un nouveau milieu d'étude noté $M_{1,1}$:

$$\boldsymbol{M_{1,1} = M_{0,1} \cup \{ O_{\text{éq}}, R(E_{1,2}, O_{\text{éq}})\}}$$

Ils poursuivent leur travail en générant une succession de milieux d'étude $M_{i,1} : i \in \{1,\ldots, n\}$, au sein desquels ils intègrent de nouveaux éléments.

Dans la classe C_2

Dans le groupe observé, aussitôt le texte de l'énoncé distribué, avant la lecture publique de Q_1, un élève noté $E_{2,4}$ s'en empare et débute une lecture privée en soulignant des passages, dans une dialectique de l'inscription et de l'excription qui consiste à extraire du texte écrit des éléments qui y sont inscrits et que l'on juge importants. Il analyse le problème ; analyse non rendue publique. Un autre élève, $E_{2,3}$, interpelle P_2 en lui demandant l'autorisation d'utiliser un tableur, élargissant ainsi l'ensemble des œuvres disponibles dans le milieu. La réponse de P_2 est laconique : « Ah ! Avec un tableur, ce serait simple. On verra plus tard peut-être ». S'il reconnaît l'avantage apporté par cet outil, il refuse son usage, sous un prétexte d'équité : « Ben, j'ai pas un tableur pour tout le monde ». C'est donc un milieu $M_{0,2}$' pour ce groupe que nous définirions comme suit :

$$\boldsymbol{M_{0,2}' = M_{0,2} \setminus \{\text{œuvre tableur } O_{19}\}}$$

Puis $E_{2,5}$ fait part de sa première idée : « Il faut faire moins trois. Il faut diviser par sept et après... Non y a moins trois... ». Le programme qu'il évoque ici est celui d'Alice dont une écriture algébrique est $(x + 3) \times 7$. Il propose un nouveau programme de calcul qui correspond, selon lui, au programme réciproque : dans le sens d'une fonction réciproque, ici celle de la fonction affine $f^{-1}(x)=\frac{x}{7}-3$. Il partage son rapport personnel à l'œuvre O_{21} « programmes de calcul », pour le type de tâches T_9 : « déterminer la valeur initiale lorsqu'on connaît la valeur finale d'un programme de calcul ». Le dialogue entre les élèves $E_{2,4}$ et $E_{2,5}$ est attentivement suivi par les deux autres. $E_{2,5}$ reformule alors le problème : « Vas-y, tu donnes un chiffre ? Il faut trouver un chiffre que si tu le multiplies par deux et que tu ajoutes six, ça fait pareil que si tu ajoutes trois… » Ce nouvel énoncé, œuvre notée O_{24}, utilisé ici comme élément technologique pour justifier la technique nécessitant un programme de calcul réciproque, est apporté au milieu d'étude du groupe et il montre le rapport $R(E_{2,5}, O_{21})$ où O_{21} est l'œuvre « programmes de calcul ». On obtient un milieu d'étude intermédiaire :

$$\boldsymbol{M_{1,2} = M_{0,2}' \cup \{T_9, O_{24} : \text{« nouvel énoncé »}, R(E_{2,5}, O_{21})\}}$$

L'impossibilité d'intégrer le tableur, œuvre O_{19}, à leur milieu est rappelée par $E_{2,3}$ à la minute 04:15, ce qui amorce la proposition de $E_{2,4}$: « Bon déjà si on le faisait avec 1 ça fait 28 et 8 », résultats commentés par $E_{2,3}$ qui se pose la question de la différence. Ces deux résultats viennent enrichir le milieu d'étude du groupe, comme des données D_1, qui, grâce à une dialectique des médias et des milieux, déclenche l'étape suivante, proposée par $E_{2,3}$: « Là, on trouvera pas comme ça. Ouais, venez, on fait avec plusieurs chiffres. Et après on essaie de travailler là-dessus » afin de se répartir les calculs. Ils sont collectivement en train de constituer un milieu d'étude pour le groupe, noté $M_{2,2}$, dans lequel l'ensemble D_1 de ces résultats pourra être considéré comme des réponses $R^{\Diamond}$, estampillées par le groupe entier :

$$\boldsymbol{M_{2,2} = M_{1,2} \cup \{D_1, O_{17} : \text{« répartition du travail »}\}}$$

L'ensemble D_1 constitue le matériau de base pour l'étude qui devra suivre puisque le travail, tel qu'il est décrit par $E_{2,3}$, n'est pas dans la production des calculs, mais bien dans l'analyse des réponses produites. En effet, ils recherchent ensemble des régularités dans les écarts entre les valeurs obtenues par les deux programmes de calcul. Ils ont produit un tableau recensant les valeurs déterminées collectivement. Ce tableau fait office de média pour le groupe. Un nouveau milieu intermédiaire, à ce stade de leur étude, peut être ainsi schématisé :

$M_{3,2} = M_{2,2} \cup$ {œuvre O_4 : tableau de valeurs, Q_8 : « Quelles remarques peut-on faire sur les écarts/différences entre les valeurs prises par les deux programmes de calcul ?}

Les uns, $E_{2,1}$ et $E_{2,4}$, poursuivent leurs calculs avec des valeurs positives décimales proches de zéro, tandis que, suivant la proposition de $E_{2,5}$: « Moi je vais le faire avec des x »,

$E_{2,3}$ accompagne $E_{2,5}$ dans la production d'écritures littérales. La difficulté à exprimer une expression littérale comportant plusieurs opérations les incite à abandonner cette piste. Ils viennent d'effleurer l'œuvre O_5, l'écriture algébrique, sans réussir à l'intégrer au milieu d'étude. Ils ont produit un nouveau milieu d'étude :

$$\boldsymbol{M_{4,2} = M_{3,2} \cup \{\text{œuvre } O_5\}}$$

Durant cette période de recherche, P_2 n'est jamais intervenu sur leur travail mathématique : nous pouvons affirmer que l'évolution du milieu d'étude dans ce groupe est entièrement de la responsabilité des élèves qui le composent. Devant l'impasse collective $E_{2,3}$ propose un bilan d'étape qui ressemble fort à un moment d'institutionnalisation locale.

CONCLUSION

Notre travail montre que les outils théoriques fournis par la TAD permettent de disposer de focales permettant l'analyse de phénomènes allant du macro au micro-didactique. C'est le cas de l'analyse que nous avons exposée. Elle porte sur la très courte durée – quelques minutes – du début seulement de la recherche par des élèves d'une technique de résolution qu'on peut institutionnellement qualifier de micro-tâche : s'engager dans une technique par test de valeurs pour déterminer l'entier négatif qui égalise deux programmes de calcul du 1er degré. L'observation de groupes d'élèves au travail, parce qu'ils échangent entre eux oralement et par écrit à propos des tâtonnements propres à leurs recherches, autorise l'objectivation nécessaire pour l'analyse des milieux du schéma herbartien : ceux qu'ils construisent, ainsi que leur évolution sur cette très courte période. Cette analyse vient compléter celle des milieux qui peut être menée *a priori*, lors de la conception de l'ingénierie didactique. A l'issue de ces analyses *in vivo*, le milieu du schéma herbartien apparaît, de manière différenciée, comme la réunion des M_i milieux intermédiaires constitués pour l'étude au cours d'un processus de recherche : ce qu'on peut noter $M = \bigcup_{i \in \{0,\dots,n\}} M_i$.

RÉFÉRENCES

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 19, n. 1, p. 77-124, 1999.

BROUSSEAU, G. La relation didactique : le milieu. **Actes de la IVe Ecole d'été de didactique des mathématiques**, p. 54-68, IREM Paris VII, 1986.

BROUSSEAU, G. Le contrat didactique : le milieu. **Recherches en didactique des mathématiques,** v. 9, n. 3, p. 309-336, 1990.

BROUSSEAU, G. **Théorie des situations didactiques.** Grenoble : La Pensée sauvage éditions, 1998.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble : La Pensée sauvage éditions, 1985, Ed. 1991.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 12, n. 1, p. 73-112, 1992.

CHEVALLARD, Y. Les TPE comme problème didactique. In Assude T. & Grugeon B. (Eds.) **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2001,** p. 177–188, Paris : IREM Paris VII, 2001.

CHEVALLARD, Y. Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In Maury, S. & Caillot, M. (Eds). **Rapport au savoir et didactiques**, p. 81-104, Paris : Éditions Fabert, 2003.

CHEVALLARD, Y. Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir. **Bulletin de l'APMEP**, no 471, p. 439-461, 2007.

CHEVALLARD, Y. Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In Gueudet G. & Matheron Y. (Eds.) **Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2007,** p. 345–366. Paris : IREM Paris VII, 2008.

CHEVALLARD, Y. Questionnement du curriculum à la lumière de la TAD : la notion d'enquête et l'avenir de l'éducation. **Cours pour la XXe École d'été de didactique des mathématiques**, à paraître dans les actes, 2019.

MATHERON, Y. Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire, **Recherches en Didactique des Mathématiques***,* v. 21, n. 3, p. 207-245, 2002.

MATHERON, Y. Médias-milieux, une frontière ténue au sein de la problématique de base. In Cirade, G., Artaud, M., Bosch, M., Bourgade, J.-P., Chevallard, Y., Ladage, C. & Sierra, T.

A. (Éds). **Evolutions contemporaines du rapport aux mathématiques et aux autres savoirs à l'école et dans la société**, p. 633-652, 2017, https://citad4.sciencesconf.org

MATHERON, Y. Eléments d'un parcours d'étude et de recherche pour enseigner l'algèbre au cycle 4, **Petit *x*,** n. 108, p. 67-86, 2019.

MÉJANI, F. **Analyse micro-didactique du processus d'étude et de recherche du point de vue mésogénétique au sein d'un travail de groupe dans le cadre des moments d'exploration du type de tâches et d'élaboration d'une technique sur les équations du premier degré**. 2018. 405p. Thèse de l'Université d'Aix-Marseille, Marseille, 2018.