PROPOSTA DIDÁTICA PARA A APROXIMAÇÃO DE VALORES DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS SENO E COSSENO NO ENSINO MÉDIO

Paulo Rodolfo da Rocha
Mestre. Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Campus Santo Antônio. E-mail: paulorocharoll@gmail.com.
Juan Carlos Zavaleta Aguilar
Doutor.Universidade Federal de São João del-Rei (UFSJ), Departamento de Matemática e Estatística. E-mail: jaguilar@ufsj.edu.br.

Resumo: Este trabalho é produto da dissertação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, defendida em novembro de 2019 na Universidade Federal de São João Del-Rei (UFSJ). O objetivo desse trabalho foi verificar a possibilidade de inserção, no Ensino Médio, da aproximação numérica de valores das funções trigonométricas seno e cosseno, utilizando as séries de Taylor. Sabe-se que o cálculo de derivadas é fundamental para determinar as séries de Taylor de funções, devido a isto, previamente, discutir-se-á a técnica de cálculo de derivadas proposta por Fermat, para posteriormente aplicá-la como uma metodologia do ensino de derivada. A metodologia para apresentar o tema em escopo, no âmbito do Ensino Médio, é dada através de uma proposta didática, contendo cinco aulas que serão lecionadas em forma sequencial. Os tópicos que serão trabalhados na proposta didática são munidos de exemplos, listas exercícios e representação gráfica.A proposta didática foi aplicada a uma turma do 3º ano do Ensino Médio e uma análise sobre as aulas lecionada foi registrada. Verificou-se que é possível a inserção do tema proposto no Ensino Médio, utilizando a sequência de aulas propostas com o devido acompanhamento docente e a ajuda da calculadora e ferramentas computacionais.

Palavras-chave: Transposição didática, Cálculo da derivada, Série de Taylor, Aproximação de funções trigonométricas.

DIDACTIC PROPOSAL FOR THE APPROXIMATION OF VALUES OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS SINE AND COSINE IN HIGH SCHOOL

Abstract: This work is the product of the dissertation of the Professional Master in Mathematics in National Network, defended in November 2019 at the Federal University of São João del-Rei (UFSJ). The objective of this work was to verify the possibility of insertion, in High School, the theme about the numerical approximation of value of sine and cosine trigonometric function, using Taylor series. It is known that the calculation of derivatives of functions is fundamental to determine the Taylor series of functions, due to this, previously, we will discuss the technique of calculating derivatives given by Fermat, to later apply it as a derivative teaching methodology. The methodology for presenting the topic in scope in the context of High School is given through a didactic proposal, containing five classes that will be taught in sequential form. The topics that will be worked on in the didactic proposal are equipped with examples, exercise lists and graphic representation. The didactic proposal was applied to a class of the 3rd year of high school and an analysis of each class taught was recorded. It was found that it is possible to insert the proposed theme in high school, using the sequence of classes proposed with the proper teaching support and the help of the calculator and computational tools.

Keywords: Didactic transposition, Calculation of the derivative, Taylor series, Approximation of trigonometric functions.

INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio propõe o estudo de funções polinomiais do primeiro e segundo grau, função exponencial, função logarítmica e as funções trigonométricas. Em relação as funções trigonométricas, ensina-se a calcular os valores das funções seno, cosseno e tangente em ângulos notáveis, resolve-se problemas, identifica-se períodos e resolvem-se equações e inequações trigonométricas simples. Durante o estudo das funções trigonométricas uma dúvida que aparece frequentemente é: Como podem ser tabulados os valores das funções seno e cosseno para ângulos não notáveis? Para dar resposta a esta interrogante propõe-se o estudo das Séries de Taylor, o qual constitui um importante método numérico para aproximar valores de funções.

Outro assunto importante que justificou a realização desse trabalho é a expressiva reprovação nas disciplinas de matemática, na área de Ciências Exatas, nos primeiros anos de Ensino Superior. Por exemplo, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, Barufi (1999), mostra que na Universidade de São Paulo (USP) entre os anos 1990 a 1995, a média de reprovação foi de 43,8%. Rezende (2003), indica que nas Universidades do Rio de Janeiro, a média de reprovação varia de 45% a 95% no conjunto de disciplinas que oferecem essa disciplina. Rosa; Alvarenga; Santos (2018), revelam que na Universidade Federal de Goiás (UFG), do primeiro semestre de 2010 ao segundo semestre de 2016, o porcentual de reprovação foi de 65%, outros autores como Donel (2015) e Rasmussen; Marrongelle; Borba (2014) também atestam a elevada reprovação nessa disciplina.

De acordo com Donel (2015), a aprendizagem da Matemática demanda raciocínio lógico, capacidade de abstração, generalização e projeção. Por causa disso, acredita-se que uma sólida formação em conteúdos básicos e a inserção de tópicos de cálculo, desde os primeiros anos do Ensino Médio, possam contribuir com um maior sucesso nas disciplinas de Matemática no Ensino Superior.

> Antes de tudo cabe destacar que a maior parte do território do lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem do ensino superior Cálculo encontra-se no ensino básico. A evitação / ausência das ideias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático (REZENDE, 2003, p. 13)

A proposta didática que trata o presente trabalho envolve a aplicação de cinco aulas, as quais serão realizadas de forma sequencial, em que além do conteúdo teórico e do desenvolvimento de exercícios, os alunos serão incentivados a utilizar a calculadora e ferramenta computacional específica para a construção de gráficos, podendo assim visualizar, analisar e compreender melhor os conceitos a serem abordados bem como agilizar os cálculos.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O cálculo da derivada

O Currículo Básico Comum (CBC) não contempla o ensino de limites e derivadas, os quais constituem ferramentas básicas para a construção dos polinômios de Taylor. Em vista disso, procurou-se uma técnica de cálculo de derivadas que seja possível de ser compreendida pelos alunos de Ensino Médio, ou seja, aplicou-se a transposição didática de uma técnica que é amplamente utilizada no Ensino Superior, transformando-a em um saber escolar. De acordo com Chevallard (PAIS, pg. 19, 2001):

> Um conteúdo de conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.

Nesse contexto, a técnica de cálculo de derivada a ser utilizada nas aulas didáticas foi proposta por Fermat (1629) no trabalho *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, que na linguagem moderna pode ser colocada da seguinte forma:

Quando uma função f alcança seu máximo ou mínimo valor em um ponto$x$, os valores que $f$assume nos pontos $x + E$, pertos de x, são muito próximos de $f(x)$, tão próximos que, se adiferença $f(x + E) - f(x)$ é dividida por E, o quociente é próximo de zero:

$$\frac{f(x + E) - f(x)}{E} \cong 0,$$

entendendo-se o símbolo $\cong$ não como uma igualdade, mais como uma aproximação.

Observa-se que Fermat, nos pontos de máximo ou mínimo, forçou a igualdade $f(x) = f(x + E)$, logo passa a dividir por E, emseguida faz $E = 0$. Dessa forma, os pontos de máximo ou mínimo são encontrados igualando-se a zero a expressão, $g(x)$, obtida:

$$g(x) = \frac{f(x+E)-f(x)}{E}|_{E=0} \qquad (1)$$

Embora, Fermat não se refere a Enos termos "infinitamente pequeno"oumesmo indica um processo de limite, a função g representa a função derivada como a conhecemos hoje:

$$g(x) = \lim_{E \to 0} \frac{f(x+E)-f(x)}{E} = f'(x) \quad (2)$$

A técnica dada por Fermat foi aperfeiçoada posteriormente pelas contribuições dos Matemáticos Descartes, Jhon Wallis, Isaac Barrow, Leiniz, Newton, entre outros, como destaca Grabiner (1983).

A técnica para o cálculo de derivadas que será utilizada na proposta didática é dada pela expressão (1), a qual, sutilmente, envolve, porém, não especifica o conceito de limite de uma função. O intuito, de introduzir esta forma de cálculo da derivada é a de inserir de forma introdutória conceitos importantes do cálculo diferencial e integral no âmbito do Ensino Médio, em concordância com as afirmações de Pais (2001) e Rezende (2003).

Séries de Taylor

O tema que trata as séries de Taylor pode ser encontrado em diferentes livros de Matemática do Ensino Superior como, por exemplo, Leithold (1994). Os conteúdos matemáticos que antecedem a definição de séries de Taylor, são cálculo de derivadas, séries infinitas e séries de potências. A seguir, enunciar-se-á, sequencialmente e de forma resumida, as definições e teoremas que sustentam as séries de Taylor

Definição 1: Uma **série de potências** em $x - x_0$ é uma série da forma:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots$$

Chama-se de intervalo de convergência o conjunto formado por todos os valores de $x$para os quais a série de potências é convergente. Algumas técnicas utilizadas para testar a convergência ou divergência pode ser visto, por exemplo, em Leithold (1994). Dessa forma, se R for o intervalo de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x - x_0)^n$, o intervalo de convergência será um dos seguintes intervalos:

$$(x_0 - R, x_0 + R), [x_0 - R, x_0 + R], (x_0 - R, x_0 + R] \text{ ou } [x_0 - R, x_0 + R)$$

Teorema 1: Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ uma série de potências cujo raio de convergência é $R > 0$. Então, se f for uma função definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, $f'(x)$ existirá para todo x no intervalo aberto $(-R, R)$, sendo dada por:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, c_n x^{n-1}.$$

Agora veremos como uma função f pode ser representada por uma série de potências que se aproxima de f em um determinado ponto x_0(ou em torno de x_0) pertencente ao domínio de f.

Consideremos a função f como uma série de potências em x_0, sendo x próximo de x_0, isto é:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x - x_0)^n =$$

$$= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots + c_n(x - x_0)^n + \cdots, \quad (3)$$

cujo raio de convergência é $R > 0$. Por causa das sucessivas aplicações do Teorema 1, dizemos que tal função é infinitamente derivável em $(x_0 - R, x_0 + R)$. Por outro lado, as sucessivas derivações da função $f$em (3) resulta em:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Essa fórmula também é válida para $n = 0$, se tomarmos $f^{(0)}(0)$ como sendo $f(0)$ e $0! = 1$. Assim, pode-se escrever a série de potências de f em x_0 como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}x_0}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots \quad (4)$$

A série (4) é chamada de **série de Taylor** de f em x_0.

A Definição 2 pode ser encontrada em Burden; Faires & Burden (2016).

Definição 2: Suponha que $f \in C^n[a,b]$, que $f^{(n+1)}$ exista em $[a,b]$. Para todo $x \in [a,b]$, existe um número $\xi(x)$ entre x_0 e x com $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, onde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(\xi(x)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}.$$

Aqui, $P_n(x)$ é chamado de **polinômio de Taylor de ordem n de f em x_0** e $R_n(x)$ é chamado de **resto** relativo a $P_n(x)$.

O Teorema 2 pode ser encontrado em Neto (2015).

Teorema 2: Sejam I um intervalo e $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em I. Para $x_0, x \in I$ distintos, existe um c entre x_0 e x tal que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n \qquad (5)$$

A continuação, mostra-se um exemplo, em que o cálculo de derivadas será realizado pelas técnicas modernas, porém o propósito é de focalizar a técnica que usa as séries de Taylor como método numérico de aproximação de valores de funções.

Exemplo 1: Utilizando o polinômio de Taylor de ordem 2, calcule um valor aproximado para $e^{0,03}$ e avalie o seu erro.

Solução:

Considerando-se $x = 0{,}03$, escolhe-se $x_0 = 0$, pois x deve estar próximo de x_0. Como $f(x) = e^x$, então $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$ e assim por diante. Logo como $x_0 = 0$, segue:

$f'(0) = e^0 = 1, f''(0) = e^0 = 1, f'''(0) = e^0 = 1$, então devido a fórmula (5), tem-se:

$$e^x = e^0 + e^0 x + \frac{e^0 x^2}{2!} + \frac{e^c x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^c x^3}{3!}, \qquad (6)$$

onde $0 < c < 0{,}03$.

Agora, calcula-se $e^{0,03}$ usando o polinômio de Taylor de ordem 2:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{e^c x^3}{3!} \Longrightarrow e^{0,03} \approx 1 + 0{,}03 + \frac{0{,}03^2}{2!} = 1{,}03045.$$

Avaliando o erro:

Considerando-se o valor exato com 6 casas decimais, $e^{0,03} = 1{,}030454$ e $P_2(0{,}03) = 1{,}03045$, obtém-se a diferença em valor absoluto, entre o valor exato e o aproximado $|e^{0,03} - 1{,}03045| = 0{,}000004$, ou seja, através do polinômio de Taylor de ordem 2 consegue-se uma aproximação com 5 casas decimais exatas.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Proposta didática para aproximação de valores de funções seno e cosseno no ensino médio

De acordo com o capítulo anterior, se a função f for infinitamente derivável em um determinado intervalo I, a série de Taylor da função f em torno de x_0, pode ser usada para aproximar valores de f em x próximo de x_0, tal que $x_0, x \in I$. Dessa forma, apresenta-se uma proposta didática através de um plano de aulas com o propósito de apresentar aos alunos do terceiro ano do Ensino Médio um método para aproximar valores das funções trigonométricas seno e cosseno.

A ferramenta matemática para a aproximação de valores de funções é a Série de Taylor, a qual será introduzida de uma maneira adequada ao nível de ensino para o qual estas aulas estão dedicadas.Recomenda-se aos alunos providenciar uma calculadora científica e usar-se-á o software Geogebra para a construção e análise de gráficos de funções no contexto dos tópicos a serem tratados.

As aulas serão desenvolvidas de forma sequencial de maneira a serem abordados os seguintes temas: Derivada de uma função; Derivadas sucessivas de uma função; Regras de derivação; Séries de potências e Séries de Taylor das funções trigonométricas seno e cosseno.

Aula 1

O objetivo dessa aula é introduzir o estudo das derivadas de um modo adequado ao nível de ensino. Para isso, utilizou-se a técnica dada pela expressão (1). Por outro lado, é necessário que o aluno já tenha conhecimento de reta tangente e a inclinação de uma reta (coeficiente angular). Nessa aula será utilizado o aplicativo Geogebra (no celular) na construção das funções e suas derivadas. É importante que os alunos saibam utilizar o aplicativo Geogebra previamente, sobretudo, os procedimentos básicos de como graficar funções.

Definição 3: Seja uma função f definida no intervalo I. A derivada de$f$ é a função denotada por f' e pode ser construída da seguinte maneira:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{7}$$

onde Δx tende a zero.

Se x_0 for um determinado elemento pertencente ao domínio de f, então:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{8}$$

onde Δx tende a zero.

É desejável a abordagem da interpretação da derivada num ponto x_0.

Observação: O domínio de f nem sempre coincide com o domínio de f'. Geralmente define-se $f^0 = f$.

Desde o ponto de vista da representação gráfica, a derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0, $m = f'(x_0)$. Se soubermos a inclinação m e as coordenadas $\left(x_0, f(x_0)\right)$ do ponto de tangencia dessa reta, basta utilizar a fórmula(9), estudada em geometria analítica:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0) \tag{9}$$

Exemplo 2: Qual é a equação da reta tangente à curva da função $f(x) = x^2 - 3x$ no seu ponto de abscissa 4?

Solução:

Inicialmente vamos determinar as coordenadas do ponto de tangencia entre a reta e a função f. Dessa forma, se $x_0 = 4$, temos que:

$$f(4) = 4^2 - 3(4) = 4.$$

Logo a reta é tangente ao gráfico de f no ponto $(4, 4)$.

Agora, determina-se a inclinação m da reta tangente. Aplicando-se a fórmula (7) temos:

$$f'(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{[(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)] - (x^2 - 3x)}{\Delta x} =$$

$$\frac{\Delta x(\Delta x + 2x - 3)}{\Delta x} = \Delta x + 2x - 3,$$

como Δx tende a zero temos que $f'(x) = 2x - 3$.

Substituindo $x = 4$ em f', temos:

$$f'(4) = 2(4) - 3 = 5.$$

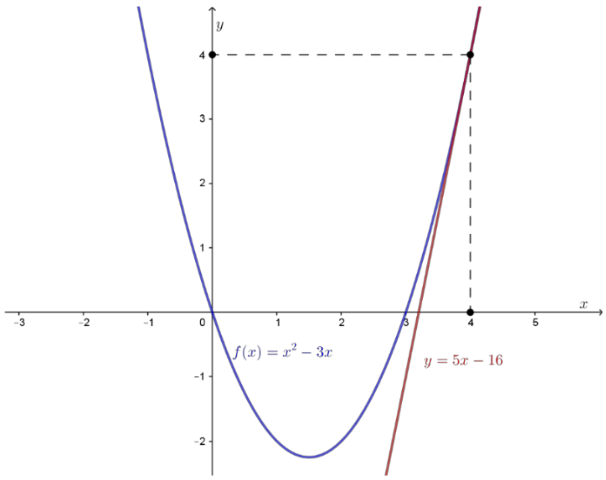
Portanto, a inclinação dessa reta é $m = f'(4) = 5$.

Finalmente, aplicando-se a fórmula (9) temos:

$$y - f(4) = 5(x - 4) \Longrightarrow y - 4 = 5x - 20 \Rightarrow y = 5x - 16.$$

Na Figura (1) pode-se observar os gráficos de $f(x)$ e da reta tangente y.

Figura 1. Reta tangente a curva $f(x)$ no ponto $(4, 4)$.



Fonte: Figura construída com o auxílio do software Geogebra.

Aula 2

Essa aula tem como objetivo definir as derivadas sucessivas. A definição do conceito de derivadas sucessivas é fundamental para a construção da série de Taylor de uma função, por isso, a sua definição tem que ser proposta em uma linguagem apropriada para os alunos do Ensino Médio. Outro objetivo dessa aula é definir as regras de derivação. Nesta aula, destaca-se a utilização do aplicativo Geogebra para as construções gráficas das funções e suas derivadas bem como nos exemplos e exercícios propostos.

Definição 4: Seja f' a derivada de uma funçãof. A funçãof' é chamada de **função derivada primeira** de$f$.A derivada da função f' é chamada de **função derivada segunda** de f e denota-se por f''. Repetindo-se esse processo, pode-se definir a derivada terceira (f'''), quarta ($f^{(4)}$), etc.

Usa-se a notação $f^{(n)}$ para representar a derivada de ordem n de f.

Exemplo 3: Calcule as derivadas primeira e segunda da função $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$.

Solução:

Aplicando a fórmula (7) para o cálculo de a derivada temos:

$$f'(x) = \frac{[3(x + \Delta x)^2 + 5(x + \Delta \mathrm{x}) + 6] - (3\mathrm{x}^2 + 5x + 6)}{\Delta x} = \frac{\Delta x(\Delta x + 6x + 5)}{\Delta x},$$

com $\Delta x \neq 0$.Então, $f'(x) = \Delta x + 6x + 5$, e como Δx tende a zero, segue:

$$f'(x) = 6x + 5.$$

Derivando mais uma vez, ou seja, calculado a derivada da derivada primeira $f'(x)$, temos:

$$f''(x) = \frac{6(x + \Delta x) + 5 - (6x + 5)}{\Delta x} = \frac{6\Delta x}{\Delta x},$$

com $\Delta x \neq 0$.Como Δx tende a zero,

$$f''(x) = 6.$$

Logo as funções derivadas de $f(x)$ são $f'(x) = 6x + 5$ e $f''(x) = 6$.

Regras de derivação

Como pode-se observar, o cálculo da derivada de uma função através da definição (7) pode ser um processo trabalhoso. Entretanto, existem regras de derivação para algumas funções básicas, dentre elas, as funções polinomiais e as funções seno e cosseno. Conforme os objetivos propostos, estudar-se-á as regras de derivação das funções seno e cosseno.

Teorema 3: Se $f(x) = sen(x)$, então

$$f'(x) = \cos(x), \;\; f''(x) = -sen(x), \; f'''(x) = -\cos(x), f^{(4)}(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad (10)$$

Se $f(x) = cos(x)$, então

$$f'(x) = -sen(x), \; f''(x) = -cos(x), \; f'''(x) = \operatorname{sen}(x), \;\; f^{(4)}(x) = \cos(x) \qquad (11)$$

Exemplo 4: Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \cos(x)$no ponto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e faça o gráfico no Geogebra.

Solução:

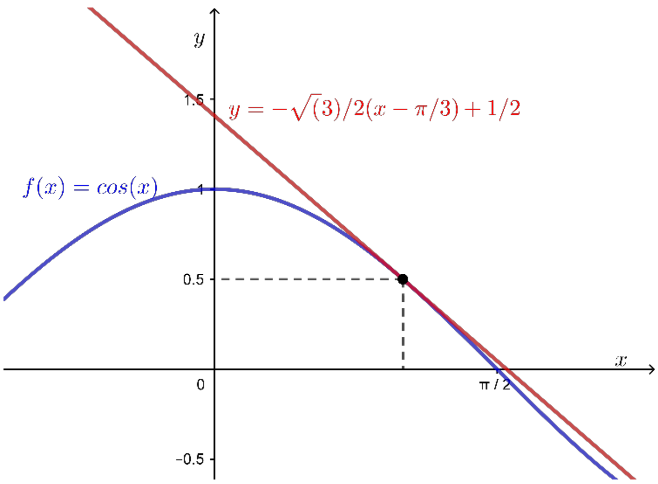
Pelo Teorema 3, como $f(x) = \cos(x)$, temos que $f'(x) = -sen(x)$. Daí:

$$-sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Assim, a reta passa pelo ponto de coordenadas $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ e tem inclinação $m = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.Aplicando-se a fórmula (9)para determinar a equação da reta temos:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}.$$

Figura 2. Reta tangente a curva $f(x) = \cos(x)$ no ponto $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$.



Fonte: Figura construída com o auxílio do software Geogebra.

Aula 3

Essa aula tem como objetivo definir sequência e séries de potências. Sabe-se que essas definições são fundamentais para a construção das séries de Taylor. Entretanto, a sua abordagem completa poderia prejudicar o propósito introdutório dos conteúdos. Em vista disso, a presente proposta de ensino, visou uma abordagem mais direta, a fim de indicar a linha de raciocínio para a construção das séries de Taylor, a saber, a conexão entre sequencias, séries e séries de potências.

Definição 5: Sequência é uma função f cujo domínio é o conjunto de todos os números inteiros positivos e a imagem é formada por números reais. Os números reais que pertencem a imagem de uma sequência são chamados de **elementos da sequência**.

Usaremos as seguintes nomenclaturas:

$$(a_n)_{n\geq 0} = f(n) = a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots, \text{ para todo } n \text{ natural},$$

$$(a_n)_{n\geq 1} = f(n) = a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots, \text{ para todo } n \text{ natural},$$

Exemplo 5: Se $(a_n)_{n\geq 1} = \frac{1}{n}$, temos que:

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

Logo, a sequência é:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

Definição 6: Se $(a_n)_{n\geq 1}$ for uma sequência e $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, então a sequência $(S_n)_{n\geq 1}$ será chamada de **série infinita**, a qual é denotada por $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sendo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots.$$

Definição 7: Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$ e um valor real x_0. Temos que uma série de potênciasem $x - x_0$ é uma série da forma:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots \qquad (12)$$

Exemplo 6: Seja a sequência $(a_n)_{n\geq 0} = 2n$ e $x_0 = 3$, determine uma série de potências em $x - 3$.

Solução:

Usando a Definição(7), verifica-se que a série de potências é da forma:

$$a_0 + a_1(x - 3) + a_2(x - 3)^2 + a_3(x - 3)^3 + \cdots$$

Segue-se os seguintes passos para expressarmos a série de potências:

1º - Calcula-se os primeiros valores dos coeficientes, ou seja, a_0, a_1, a_2 e a_3.

$$a_0 = 0;\ a_1 = 2(1) = 2;\ a_2 = 2(2) = 4 \text{ e } a_3 = 2(3) = 6.$$

2º - Substitui-se os coeficientes na série de potências (12):

$$0 + 2(x - 3) + 4(x - 3)^2 + 6(x - 3)^3 + \cdots = 6x^3 - 50x^2 + 140x - 132 + \cdots$$

Logo, a série de potências é:

$$6x^3 - 50x^2 + 140x - 132 + \cdots$$

Observação: Note que a série de potências encontrada tem a forma de um polinômio.

Aula 4

Nas aulas anteriores estudou-se os temas derivada, derivadas sucessivas, regras de derivação e séries de potências, os quais constituem os conceitos básicos para a definição das séries de Taylor. A continuação introduzir-se-á as Séries de Taylor como um método para aproximação dos valores da função seno. Nesta aula, novamente, precisa-se utilizar o aplicativo Geogebra para a construção dos gráficos da função seno e de sua aproximação pelo polinômio de Taylor, além disso, precisa-se de uma calculadora como material de apoio para realização de cálculos.

Definição 8: Seja I um intervalo e $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em I. Para$x_0, x \in I$ distintos, chamamos de **série de Taylor** de f em x_0 a soma infinita:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots, \tag{13}$$

onde $f'(x_0), f''(x_0), \ldots, f^{(n)}, \ldots$ são as derivadas sucessivas de f no ponto x_0 e $x$encontra-se numa vizinhança de x_0.

Observa-se que a expressão (13) é uma série de potências, em que a_n foi substituído por:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Além disso, a expressão (13) indica que precisa-se da função fe de suas derivadas de todas as ordens, porém se desenvolvermos a série de Taylor até a derivada de ordem n, obtém-se um polinômio, chamado de polinômio de Taylor de ordem n, sendo denotado por $P_n(x)$. Os demais termos da série podem ser reunidos numa expressão chamada de resto, e denotada por $R_n(x)$. Assim (13) adota a forma:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \tag{14}$$

onde

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Por causa de (14), observa-se que o valor absoluto do resto é obtido pelo valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e seu polinômio de Taylor, ou seja:

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$$

Série de Taylor da função seno

A continuação, aproxima-se a função seno em torno de um ponto especificado, por um polinômio de Taylor de quinta ordem.

Seja $f(x) = sen(x)$ e P_5 o polinômio de Taylor de quinta ordem. Considere $x_0 = 0$, então de (14), segue:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}(x - x_0)^4$$

$$+ \frac{f^{(5)}(x_0)}{5!}(x - x_0)^5 + R_n(x)$$

Utilizando-se as regras de derivação, dado pelo Teorema 3, para determinar as derivadas sucessivas até a quinta ordem de $f(x) = sen(x)$ no ponto $x_0 = 0$, tem-se:

$f(0) = sen(0) = 0, f'(0) = cos(0) = 1, f''(0) = -sen(0) = 0, f'''(0) = -cos(0) = -1,$ $f^{(4)}(0) = sen(0) = 0$ e $f^{(5)}(0) = cos(0) = 1.$

Agora, substituindo-se as derivadas de $f(x) = sen(x)$ no ponto $x_0 = 0$ no polinômio de Taylor de quinta ordem e excluindo-se os termos do resto, temos:

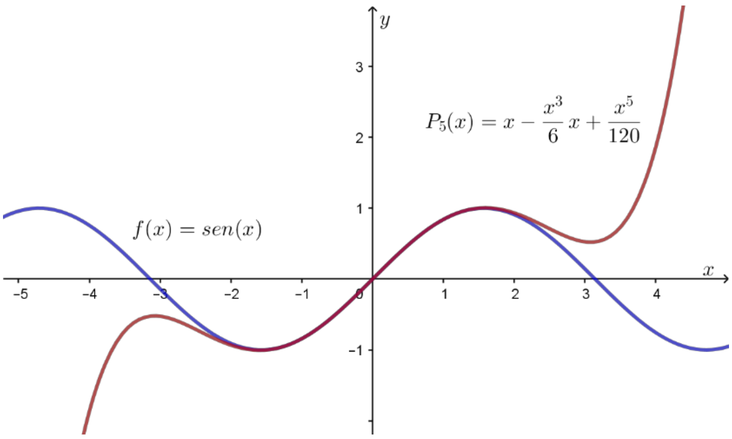
$$sen(x) \approx sen(0) + \cos(0)\,x - \frac{sen(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{sen(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 \Longrightarrow$$

$$sen(x) \approx 0 + 1x - \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 \Rightarrow$$

$$sen(x) \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad (15)$$

Observe na Figura 3 o gráfico de $f(x) = sen(x)$ e $P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, seu polinômio de Taylor de quinta ordem no ponto $x_0 = 0$.

Figura 3. Gráfico da função $f(x) = sen(x)$ e $P_5(x)$, no ponto $x_0 = 0$.



Fonte: Figura construída com o auxílio do software Geogebra.

A expressão (15), fornece os valores aproximados da função seno de qualquer ângulo (podendo ser não notável)em um intervalo contendo $x \in I$ próximo de $x_0 = 0$, por exemplo $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Contudo, para determinar esses valores, o ângulo deve, previamente, ser convertido em radianos. Essa conversão pode ser obtida pela fórmula:

$$x = \frac{\alpha(\pi)}{180°}, \tag{16}$$

onde α é o valor do ângulo em graus.

Feita a conversão, substitui-se no polinômio de Taylor correspondente e o resultado obtido será uma aproximação dos valores tabulados para a função seno.

Exemplo 7: Calcule o valor aproximado para $f(x) = sen(40°)$.

Solução:

Em primeiro lugar, observa-se que $40^o \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, logo, em função da expressão (15) pode-se usar P_5 para obter a aproximação desejada.

Utilizar-se-á arredondamento para quatro casas decimais, quando precisar. Em particular, usou-se $\pi = 3{,}1416$.

1º) Convertendo 40° em radianos, usando a fórmula(16), temos:

$$x = \frac{40°(\pi)}{180°} \approx 0{,}6981$$

2º) Substituindo $x \approx 0{,}6981$na fórmula (15), temos:

$$sen(40°) \approx 0{,}6981 - \frac{0{,}6981^3}{6} + \frac{0{,}6981^5}{120} \approx 0{,}6981 - 0{,}0567 + 0{,}013 \approx 0{,}6427$$

Portanto, $sen(40°) \approx 0{,}6427$.

Usamos a calculadora para obter o valor de $sen(40°)$, arredondado em 5 casas decimais: $0{,}64276$, logo, avaliando o erro cometido temos:

$|sen(40°) - P_5(0{,}6981)| = |0{,}64276 - 0{,}6427| = 0{,}00006$, ou seja, a aproximação de $sen(40°)$ através de (15) fornece quatro casas decimais exatas.

Aula 5

Dando continuidade à aula anterior, usar-se-á as séries de Taylor para aproximar valores da função cosseno de forma semelhante a construção da série de Taylor da função seno. Entretanto, para elucidar as diferenças da utilização dos polinômios de Taylor em relação a sua ordem, usou-se o polinômio de Taylor de quarta ordem.

Séries de Taylor para a função cosseno

Seja $f(x) = cos(x)$, P_4 o polinômio de Taylor de quarta ordem e considere $x_0 = 0$.

Utilizando-se as regras de derivação para determinar as derivadas sucessivas de $f(x)$ até a quarta ordem, no ponto $x_0 = 0$, obtem-se:

$f(0) = cos(0) = 1$, $f'(0) = -sen(0) = 0$, $f''(0) = -cos(0) = -1$,

$f'''(0) = sen(0) = 0$ e $f^{(4)}(0) = cos(0) = 1$.

Agora, substituindo-se as derivadas de $f(x) = cos(x)$ no ponto $x_0 = 0$ no polinômio de Taylor de quarta ordem, temos:

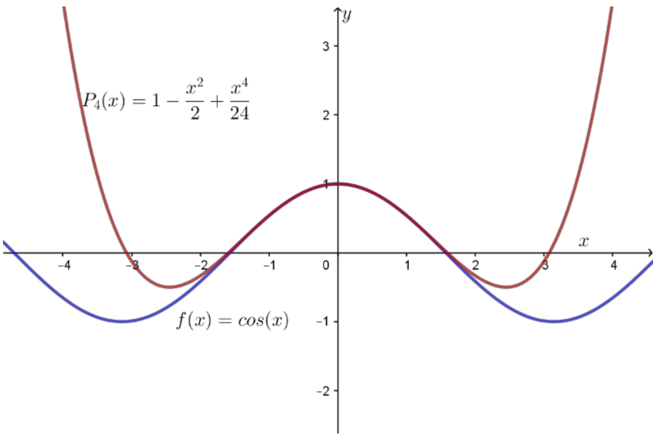
$$cos(x) \approx cos(0) - sen(0)x - \frac{cos(0)}{2!}x^2 + \frac{\text{sen}(0)}{3!}x^3 + \frac{\cos(0)}{4!}x^4 \Longrightarrow$$

$$cos(x) \approx 1 + 0x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{0}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \Rightarrow$$

$$cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \qquad (17)$$

Observe na Figura 4 o gráfico de $f(x) = cos(x)$ e $P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, seu polinômio de Taylor de quarta ordem em $x_0 = 0$.

Figura 4. Gráfico da função $f(x) = cos(x)$ e $P_4(x)$, no ponto $x_0 = 0$.



Fonte: Figura construída com o auxílio do software Geogebra.

Exemplo 8: Calcule um valor aproximado para $f(x) = cos(40°)$.

Solução:

1º) Convertendo-se 40° em radianos pela fórmula (16):

$$x = \frac{40°(\pi)}{180°} \approx 0,6981$$

2º) Substituindo-se $x \approx 0,6981$ na fórmula (17):

$$cos(40°) \approx 1 - \frac{0,6981^2}{2} + \frac{0,6981^4}{24} \approx 1 - 0,2436 + 0,0098 \approx 0,7662.$$

A calculadora fornece o valor de $cos(40°)$, arredondado em 5 casas decimais: 0,76606, logo, avaliando o erro cometido temos:
$|cos(40°) - P_4(0{,}6981)| = |0{,}76606 - 0{,}7662| = 0{,}00014$, ou seja, a aproximação evidencia três casas decimais exatas.

Destaca-se que a utilização de um polinômio de Taylor de quinta ordem possibilitou que obtivéssemos resultados mais acurados em relação a utilização de um polinômio de Taylor de quarta ordem.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

As aulas propostas foram apresentadas aos alunos do 3º ano do ensino médio de um colégio de rede particular. No final da apresentação de cada aula os alunos resolveram, em sala de aula, alguns exercícios propostos com a finalidade de reforçar as técnicas de cálculo. Além disso, foram deixados exercícios de revisão para serem resolvidos em casa, com o propósito da fixação dos conteúdos tratados.

Sobre a definição de derivada utilizada e a sua interpretação como sendo a inclinação da reta tangente, os alunos compreenderam o conceito com facilidade, pois já estão familiarizados com a inclinação de uma reta, conteúdo abordado em geometria analítica. Aqui, recomenda-se fortemente o uso do Geogebra, para os alunos complementarem a compreensão dos conceitos algébricos e geométricos destas definições. Em relação aos exercícios de derivadas (apenas com a definição), os alunos apresentaram alguma confusão. Pondera-se que a causa disto seja a impressão de cálculos algébricos extensos.

Sobre as derivadas sucessivas os alunos absorveram bem o conteúdo. É importante deixar claro que por causa dos cálculos de derivadas, usando apenas a definição, serem cansativas, uma proposta de complementação dessa aula é a inclusão das técnicas rápidas de cálculo de derivadas para polinômios e funções trigonométricas.

Em particular, tratei o conteúdo de derivadas das funções seno e cosseno, dados pelo Teorema 3, com suas respectivas demonstrações. Entretanto, notei que essa abordagem levou a confusão e desmotivação em relação ao tema, motivo pelo qual acredito que a melhor abordagem seja a apresentação das derivadas dessas funções sem as demonstrações.

Sobre o tema de sequências e séries de potências, os alunos apresentaram muitas perguntas, tanto na parte teórica como na resolução de exercícios. Contudo, o acompanhamento docente de desenvolver passo a passo a construção do conhecimento foi fundamental para sanar as dúvidas, especialmente em estabelecer a conexão entre sequências e séries.

Em relação as Séries de Taylor para aproximação dos valores das funções, os alunos questionaram alguns desenvolvimentos. Como já era esperado este comportamento, a postura do professor foi detalhar algebricamente, passo a passo, os desenvolvimentos questionados bem como graficamente, com o uso do Geogebra. Uma vez sanados os questionamentos, os alunos não apresentaram dificuldades e resolveram tranquilamente os exercícios propostos. Em particular, ao finalizar a última aula, notou-se que, para os alunos, ficou evidente a resposta à pergunta: Como podem ser tabulados os valores das funções seno e cosseno para ângulos não notáveis?

Avalia-se que a utilização do software Geogebra foi fundamental para a assimilação do conhecimento oferecido em nossa proposta, do início ao fim. Muitas das vezes, os gráficos das funções deram informações importantes para perceber se as respostas aos exercícios estavam coerentes. Ressalta-se, que os alunos tiveram um prévio contato com o aplicativo do Geogebra (no celular), onde foram instruídos apenas na inserção de funções polinomiais e trigonométricas de modo sistemático para, assim que solicitado durante as aulas, não apresentarem dificuldades com o uso do aplicativo. A calculadora foi utilizada apenas nas aulas 4 e 5 para agilizar os cálculos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao finalizar as aulas propostas nesse trabalho, comprova-se ser possível a inserção, no Ensino Médio, o tema que trata sobre a aproximação numérica das funções trigonométricas seno e cosseno, utilizando os polinômios de Taylor. Nota-se que, em geral, os alunos conseguem assimilar os conteúdos propostos, sendo de fundamental importância o acompanhamento docente para dar respostas aos questionamentos que possam aparecer durante seu desenvolvimento.

Destaca-se que a software Geogebra foi uma importante ferramenta de ensino dos conteúdos propostos. Observou-se que, sua aplicação em sala de aula, facilitou o entendimento e incentivou o interesse pelos objetos de ensino tratados.

Por outro lado, pode-se perceber que a opção de demonstrar teoremas pode dificultar a aprendizagem dos conceitos apresentados. Em particular, sugere-se a abordagem prática de derivadas sucessivas, utilizando-se as regras de derivação.

Observou-se também, a importância da resolução de exercícios dentro e fora de sala de aula, em vista que os exercícios propostos e desenvolvidos em sala de aula ajudaram na compreensão das técnicas ensinadas e os exercícios de revisão fixaram o conteúdo apresentado.

Acredita-se que a importância de abordar as Séries de Taylor no ensino médio vai além de responder questões de como encontrar valores aproximados de funções trigonométricas em ângulos não notáveis. A transposição didática para apresentar, no ensino Médio, o conceito de derivada e posteriormente a inserção das séries de Taylor como método numérico de aproximação de funções, oferecem aos alunos uma introdução aos temas estudados no Cálculo Diferencial, constituindo-se uma base de conhecimentos algébricos e geométricos sobre os assuntos abordados.

REFERÊNCIAS

BARUFI, M. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. 1999. 184p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018.Disponível em: http://novoensinomedio.mec.gov.br/. Acesso em: 12 de agosto de 2020.

BURDEN, R. L.; FAIRES, D.; BURDEN, A. M. **Análise numérica**. 3ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

DONEL, M. H. **Dificuldades de aprendizagem em cálculo e a relação com o raciocínio lógico formal - uma análise no ensino superior**. 2015. 179p. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Marília, 2015.

FERMAT, P. Methodus ad disquirendam maximam et minimam. V. Ad methodum de maxima et mínima**, Oeuvres,** Gauthiers Villars, Parigi, 1891-1912.

GRABINER, J. V. The Changing Concept of Change:The Derivative from Fermat to Weierstrass.**Mathematics Magazine**, v.56, p. 195-206, 1983.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica. Vol2**, Harbra: 3ª edição, São Paulo, 1994.

NETO, A. M. **Fundamentos de cálculo**. Coleção Profmat: 1ª edição, Rio de Janeiro, 2015.

PAIS, L. C.. Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa, 3a. edição. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

ROSA, C.M.; ALVARENGA, K. B.; SANTOS, F. T. Desempenho Acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso. **Revista Internacional de Educação Superior**, v.5, p. 1-16, 2018.

RASMUSSEN, C.; MARRONGELLE, K.; BORBA, M. Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM Mathematics Education**, v.46, p. 507–515, 2014.

REZENDE, W. M.**O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.**2003. 450p. Tese (Programa de Pós-Graduação em Educação). Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.