Ano XIV, 2021 - volume 1

ISSN 1983-7399

Caminhos da Educação Matemática em Revista

O ensino de matemática em diferentes contextos da educação básica: pontos e contrapontos

Periodicidade Anual

IFS

Grupo de Estudos Pesquisas em Educação Matemática

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SERGIPE (IFS)

PRESIDENTE DA REPÚBLICA
Jair Messias Bolsonaro

MINISTRO DA EDUCAÇÃO
Milton Ribeiro

SECRETÁRIO DA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
Ariosto Antunes Culau

REITORA DO IFS
Ruth Sales Gama de Andrade

PRÓ-REITORA DE PESQUISA E EXTENSÃO
Chirlaine Cristine Gonçalves

Ano XIV, 2021 - volume 1

ISSN 1983-7399

Caminhos da Educação Matemática em Revista

O ensino de matemática em diferentes contextos da educação básica: pontos e contrapontos

Periodicidade Anual

IFS

Grupo de Estudos Pesquisas em Educação Matemática

INSTITUTO FEDERAL
Sergipe
Aracaju
2022

DIAGRAMAÇÃO
Erik Daniel dos Santos

IMPRESSÃO
IFS

CRIAÇÃO DA CAPA
Erik Daniel dos Santos

TIRAGEM: 250 Exemplares
ISSN 1983-7399

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C183 Caminhos da Educação Matemática em Revista / Instituto Federal de Sergipe. Ano XIV, V.1, 2021. – Aracaju: IFS, 2022.

Anual
ISSN 1983-7399

1. Matemática – Periódicos. 2. Ensino - matemática. I. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Sergipe.

CDU 51(05)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Kelly Cristina Barbosa CRB 5/1637

Caminhos da Educação Matemática em Revista é uma publicação anual do GEPEM - Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática do IFS

EDITORIAL CEMeR - 2021

CEMeR - 2021

O ensino de matemática em diferentes contextos da educação básica: pontos e contrapontos

Prof. Dr. Laerte Fonseca, CCLM/IFS,
Editor Chefe e Coord. Geral da CEMeR

Prof. Dr. Paulo Rogério Miranda Correia
EACH/USP, Vice-Editor da CEMeR

Ano após ano, a busca pela melhoria do binômio ensino-aprendizagem da matemática revela uma série de infatigáveis iniciativas de pesquisadores e professores dessa área, seja no que se refere aos modos de como os alunos percebem os conhecimentos matemáticos ou nos arranjos que os professores elaboram para viabilizar noções básicas da matemática escolarizada.

Em meio a esse debate, a CEMeR (impressa) continua incentivando os pesquisadores a publicarem seus resultados de pesquisa, a fim de auxiliar os professores em suas escolhas didáticas que, quando baseadas em resultados científicos, podem refletir na configuração de um ambiente de ensino-aprendizagem com menos tensão e mais liberdade para a criatividade.

Divagar sobre essas perspectivas tem permitido a CEMeR selecionar artigos que fortificam os objetivos desse periódico, sobretudo no que tange a manutenção de portas e janelas abertas a diferentes núcleos de pesquisa dos Programas de Pós-Graduação que abrigam a área de ensino ou educação matemática.

Assim, a presente edição da CEMeR agrupou cinco textos que apresentam diferentes contextos em que pontos e contrapontos ajudarão os leitores a refletirem seus modos e formas para apresentar os conteúdos matemáticos.

A edição é iniciada pelo artigo "BRINCANDO DE VETERINÁRIO: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ESTUDO DO CAMPO MULTIPLICATIVO NOS ANOS INICIAIS", no qual as autoras objetivaram elaborar uma ferramenta para inserir o 'campo multiplicativo' nos anos iniciais do Ensino Fundamental na modalidade remota, considerando professores da Educação Básica e alunos das licenciaturas em pedagogia e matemática de diversos Estados brasileiros. Seguindo os princípios defendidos pela CEMeR, essa ferramenta didática alicerçou-se nas teorias dos campos conceituais e das situações didáticas, mostrando aos cursistas a necessidade de considerá-las, especialmente, sempre que for necessário tentar viabilizar as noções do referido conhecimento.

O artigo seguinte, intitulado de "A CALCULADORA COMO INSTRUMENTO INTEGRADO NA APRENDIZAGEM DO SABER DIVISÃO NO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL", recorre a um tipo de ferramenta/instrumento que se encontra disponível em celulares, relógios, computadores e em sua própria forma original, objetivando facilitar a compreensão da operação divisão de números naturais. Mais uma vez, as autoras do trabalho em tela recorrem aos pressupostos teóricos da abordagem instrumental de Pierre Rabardel para demonstrar a preocupação com o "fazer" didático protegido por um "saber" institucionalizado. Decorrentes dessa investigação, concluem que os alunos se utilizam de diferentes esquemas e melhoram as habilidades para resolverem problemas de divisão quando manipulam a calculadora.

No terceiro trabalho aprovado nesta edição, "INVENTÁRIO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS IDENTIFICADOS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM (2013-2017)", os autores focaram seus esforços em reunir e resolver questões do ENEM, buscando identificar os conteúdos que aparecem com maior frequência, bem como apontar as tendências e perfil das provas do exame. Como contraponto, também verificaram que existe divergência entre os documentos nacionais PCNEM+ e o ENEM, sobretudo em relação as noções matemáticas indicadas por um deles e não absorvidas pelo outro.

No penúltimo artigo, "ADIÇÃO DE FRAÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO 6º ANO: DIFERENTES SIGNIFICADOS E CARACTERÍSTICAS DAS QUANTIDADES", os pesquisadores buscaram analisar como alguns livros didáticos do 6º ano do Ensino Fundamental (PNLD, 2020) apresentam as noções de fração a partir de diferentes formas de registro. Não diferente dos artigos anteriores, a pesquisa fundamentou-se em princípios teóricos para compreender se há existência de significados para que os estudantes compreendam as diversas características das quantidades. A conclusão apresentada no trabalho indicou que existe desigualdade em diferentes propostas dos autores dos livros didáticos analisados, principalmente no uso do Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

Por fim, o artigo “INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: O OLHAR DO ESTUDANTE MEDIANTE AS NOÇÕES INTUITIVAS DE TRIÂNGULOS” encerra a edição de 2021 e objetiva analisar de que forma a metodologia denominada “investigação matemática” permite auxiliar os alunos na compreensão da geometria plana, especificamente no estudo dos triângulos no 8° ano do Ensino Fundamental. A fundamentação teórica juntamente com os dados da pesquisa permitiu aos autores concluírem que os alunos se tornaram protagonistas do processo de aprendizagem e que os professores perceberam a urgência de práticas mais ativas, diferentemente do que ocorre no ensino clássico de geometria.

Dessa forma, foi possível constatar que pontos e contrapontos coexistem e, ao que tudo indica, são necessários para dirimir uma possível inércia no que se refere ao processo de ensino-aprendizagem de matemática na Educação Básica.

Continuar investigando meios para tornar menos desanimador a aprendizagem da matemática escolar realça um dos principais motivos para que a CEMeR, enquanto periódico científico, se mantenha firme na direção de colher os melhores resultados de pesquisa e democratizá-los com a comunidade em geral.

Desejamos boa leitura a todos!

Prof. Dr. Laerte Fonseca, Editor-Chefe[1]

Prof. Dr. Paulo Rogério Miranda Correia, Vice-Editor[2]

[1] Livre Docente pela Emil Brunner World University® (EBWU, Maiami, Flórida/EUA); Pós-Doutorado em E-learning, Universidade Fernando de Pessoa/UFP, Porto/Portugal. Pós-Doutorado em Ciências Básicas e Ambientais, EEL da Universidade de São Paulo/USP; Pós-Doutor em Psicologia e Neurociência Cognitiva (EBWU); Pós-Doutor em Educação Matemática (UNIAN/SP) e Doutor em Educação Matemática (UNIAN/SP, UCB/Lyon 1-FR); Psicólogo (ESTÁCIO-SE); Professor Titular de Educação Matemática do Instituto Federal de Sergipe. Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Sergipe.

[2] Livre Docente da Universidade de São Paulo. Pós-Doutor e Doutor em Química Analítica (UNICAMP e USP). Professor da Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH/USP), junto ao curso de Licenciatura em Ciências da Natureza da Universidade de São Paulo. Docente e pesquisador do Programa de Pós-graduação Interunidades em Ensino de Ciências da USP (Área Temática: Ensino de Ciências e Matemática).

Sumário

BRINCANDO DE VETERINÁRIO: ANÁLISE DE UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA ESTUDO DO CAMPO MULTIPLICATIVO NOS ANOS INICIAIS[3]

Milena da Silva Sousa

Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq e Acadêmica do Curso de Licenciatura em Pedagogia na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS).
E-mail: milena.silva.sousa@ufms.br

Marilena Bittar

Doutora em Didática da Matemática pela Universidade Joseph Fourier/Grenoble I - França. Professora Titular do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS) e Pesquisadora Produtividade Pesquisa do CNPq.
E-mail: marilenabittar@gmail.com

Camila de Oliveira da Silva

Doutoranda no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul e Professora Assistente da Faculdade de Educação da UFMS.
E-mail: camila.o.silva@ufms.br

Resumo: Este artigo apresenta uma discussão acerca da situação *Brincando de veterinário* que teve como objetivo refletir sobre uma ferramenta para introduzir o campo multiplicativo nos anos iniciais do ensino fundamental. Trata-se de um texto produzido a partir da realização de uma oficina na modalidade remota com professores da educação básica e acadêmicos dos cursos de Pedagogia e Matemática de diferentes regiões do Brasil. Este material foi desenvolvido sob os pressupostos teóricos da Teoria dos Campos Conceituais, no que tange aspectos do campo conceitual multiplicativo, e da Teoria das Situações Didáticas, mais especificamente na reflexão acerca da elaboração de situações adidáticas. Além disso, considera-se a importância da articulação entre áreas de conhecimento, especialmente por meio do uso de histórias em quadrinhos. Os resultados evidenciam que as situações apresentadas tem forte potencial para serem vividas como adidáticas por alunos deste ciclo de escolaridade, o que sinaliza a viabilidade da proposta elaborada.

Palavras-chave: Proposta Didática. Campo Multiplicativo. Anos Iniciais. Situação Adidática.

[3] Projeto financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPQ, no âmbito do projeto universal, edital MCTI/CNPq n° 28/2018, sob coordenação de Marilena Bittar.

PLAYING VETERINARY: ANALYSIS OF A TEACHING PROPOSAL FOR THE STUDY OF THE MULTIPLICATIVE FIELD IN THE EARLY YEARS

Abstract: This article presents a discussion about the Playing veterinarian situation, which aimed to reflect on a tool to introduce the multiplicative field in the early years of elementary school. This is a text produced from the realization of a workshop in remote mode with basic education teachers and academics from Pedagogy and Mathematics courses from different regions of Brazil. This material was developed under the theoretical assumptions of the Theory of Conceptual Fields, regarding aspects of the multiplicative conceptual field, and of the Theory of Didactic Situations, more specifically in the reflection on the elaboration of adidactic situations. Furthermore, the importance of an articulation between areas of knowledge is considered, especially through the use of comic books. The results show that the situations presented have a strong potential to be experienced as didactical by students in this schooling cycle, which signals the feasibility of the proposed proposal.

Keywords: Didactic Proposal. Multiplicative Field. Early Years. Adidactic Situation.

INTRODUÇÃO

Em março de 2021, o Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat[4]) iniciou a ação de extensão "Oficinas on-line: diálogos sobre propostas didáticas em Matemática" vinculada ao projeto de pesquisa "Estudo de decisões didáticas relativas à elaboração e implementação de aulas propostas por um grupo de professores", financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPQ. Esta ação foi desenvolvida com o objetivo de oportunizar um diálogo sobre questões diretamente relacionadas à prática de sala de aula, com professores da educação básica e acadêmicos dos cursos de Pedagogia e Matemática de diferentes regiões do Brasil. A proposta de trabalhar estas oficinas no modo remoto foi motivada pelo fato de a pandemia da COVID-19 impedir o agrupamento de pessoas e, ao mesmo tempo, aproximar professores de diferentes regiões do Brasil. Foram programadas 10 oficinas para o ano de 2021, dirigidas mais especialmente aos anos iniciais do ensino fundamental. Cada uma delas é preparada e ministrada por dois membros do DDMat com a colaboração dos demais participantes e transmitidas pelo canal do DDMat no youtube (https://www.youtube.

[4] https://grupoddmat.pro.br/

com/channel/UC-vbiI8RfktV625wLBs04fw). Neste texto apresentamos uma reflexão relativa à primeira oficina on-line ministrada pelas autoras deste artigo, em que trazemos adaptações da atividade *Brincando de veterinário* apresentada inicialmente por Mandarino e Belfort (2006), com o objetivo de refletir sobre uma ferramenta para introduzir o estudo da multiplicação nos anos iniciais do ensino fundamental. E por que iniciar as oficinas com este tema?

Dentre vários conteúdos matemáticos para serem ensinados nos anos iniciais e, em especial, no que se refere ao estudo das operações aritméticas, geralmente a multiplicação e a divisão são as operações tidas como mais difíceis de serem trabalhadas com os alunos, como mostra a investigação de Carvalho (2010). Também com o olhar para este campo de estudo, Magina *et al.* (2020) discorrem sobre os impasses relativos à formulação de problemas por parte dos professores, bem como sobre a resolução de problemas por alunos do ensino fundamental. Seus estudos sinalizam a necessidade de os professores conhecerem e proporem uma variedade de situações multiplicativas, para que os alunos possam superar possíveis dificuldades no estudo com o tema. Concordamos com as autoras, como ficará claro ao longo deste texto.

As oficinas que oferecemos neste projeto, bem como outras ações que desenvolvemos no DDMat, apoiam-se em teorias oriundas do Programa Epistemológico da Didática da Matemática[5], as quais contribuem para a análise dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, bem como para o estudo de condições e restrições que permitem ou impedem a produção e difusão desses conhecimentos. Para a oficina cujo estudo apresentamos neste texto, apoiamo-nos, especialmente, na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) e na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1991) sobre as quais discorremos brevemente na próxima sessão.

A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) desenvolvida por Vergnaud (1991, 2009), tem como principal preocupação a reflexão sobre a formação dos conceitos pelo sujeito em seu processo de aprendizagem. Para a TCC a aprendizagem é um processo que se dá ao longo do tempo e, corroborando com esta ideia, o autor, bem como outros estudos, mostra que a

[5] Este programa teve sua origem com os trabalhos desenvolvidos por Guy Brousseau no final dos anos 1970 e tem por finalidade estudar a complexidade inerente aos fenômenos que envolvem o ensino e a aprendizagem da matemática. Como explicita Gascón (1998, p. 16, ***grifos do autor***), este programa "surgiu como consequência da descoberta de que *todo fenômeno didático tem um componente matemático essencial*. Esta descoberta trouxe consigo a ampliação inesperada do objeto de investigação da didática, incluindo as práticas matemáticas escolares não como um objeto a mais entre outros, mas como o **objeto primário de investigação** […]".

aprendizagem da multiplicação começa nos primeiros anos do ensino fundamental e segue por toda a escolaridade obrigatória, podendo ir mais adiante para quem estuda matemática no curso superior. Além disso, Vergnaud (1991) pontua a importância de este processo ocorrer por meio da vivência com diferentes situações, uma vez que um conceito só adquire sentido para o sujeito, quando este se depara com uma variedade de situações e problemas em que buscará resolvê-los. Nesse processo,

> O funcionamento cognitivo do sujeito em situação repousa sobre os conhecimentos anteriormente formados; ao mesmo tempo, o sujeito incorpora novos aspectos a esses conhecimentos, desenvolvendo competências cada vez mais complexas. O estudo do funcionamento cognitivo não pode, portanto, descartar questões relativas ao desenvolvimento cognitivo. (FRANCHI, 2008, p. 191-192)

Para Vergnaud (1991, p. 155) "um conceito não pode ser reduzido à sua definição", mais do que isso, um conceito não pode ser compreendido de forma isolada, mas em um campo conceitual no qual está em estreita relação com várias situações, outros conceitos, relações e representações simbólicas que se articulam entre si e que passam, assim, a dar sentido a ele. O campo conceitual compreende o conjunto formado pela tríade (*S, I, R*), onde S são as situações que dão sentido ao conceito, *I,* o conjunto de invariantes que podem ser utilizados pelos sujeitos e *R* representa as formas de linguagem que permitem representar os conceitos, as propriedades, bem como as situações consideradas. Assim, o campo conceitual das estruturas multiplicativas concerne o "conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações". (VERGNAUD, 1991, p.167). O autor destaca a análise das tarefas cognitivas e dos procedimentos que são considerados na situação. Sobre isso vê-se o conceito de situação no sentido de tarefas matemáticas, em que "a ideia é que qualquer situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas cuja natureza e dificuldade próprias é importante conhecer" (VERGNAUD, 1991, p.167). Isto reflete a importância da elaboração de situações que possam contribuir para a produção de sentido aos conceitos, bem como para a construção de conhecimentos pelos alunos no estudo dessas operações aritméticas.

Em nosso estudo é também necessário considerar elementos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), (BROUSSEAU, 1986). Nesta, uma noção fundamental concerne à ideia de situação, não sob um olhar cognitivista, mas que leva em conta também, a projeção de um projeto didático pelo professor para ser vivenciado pelos alunos em torno do estudo de algum saber matemático em jogo. Para Brousseau (2008) são nas situações didáticas que ocorrem as interações entre professor, alunos e um objeto do saber. Na perspectiva da TSD, o processo de aprendizagem ocorre em situações denominadas *adidáticas* nas quais, a partir da imprescindível mediação do professor, o aluno assume a responsabilidade sobre a construção do seu conhecimento, tendo papel ativo na sua aprendizagem. Isso não quer dizer que o professor esteja ausente nesta situação. O que muda é que momentaneamente a responsabilidade direta sobre a produção do saber passa do professor para o aluno. Artigue *et al.* (2014, p.51) esclarecem que em uma situação *adidática*, "o prefixo 'a' indica que a situação foi temporariamente libertada de sua intencionalidade didática".

Brousseau (2008) descreve três tipos de *situações adidáticas*: *ação, formulação e validação.* O aluno só passará pelas *situações adidáticas* se ele aceitar entrar no jogo, momento denominado *devolução do problema*. Para que ocorra a devolução o professor precisa dar condições aos alunos para que eles possam tomar para si a responsabilidade de atuar na resolução do problema, agindo ativamente sobre o saber em jogo. A s*ituação adidática de ação* caracteriza-se pela entrada do aluno na atividade proposta, adotando "uma estratégia descartando, intuitiva ou racionalmente, uma anterior [...] A sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema" (BROUSSEAU, 2008, p. 25). Ao organizar suas decisões a respeito do problema, o aluno formula algumas hipóteses, sendo estas possíveis soluções para o problema proposto (*situação adidática de formulação*). A próxima fase do jogo, a *situação adidática de validação*, concerne a defesa pelo aluno de suas conjecturas, validando, ou não, a ideia por trás das suas hipóteses.

Cabe pontuar que as *situações adidáticas* não ocorrem de forma linear: elas estão interligadas e os alunos podem vivenciá-las constantemente à medida que interagem com o *meio adidático*, que é organizado pelo professor para que o aluno, ao interagir na situação, possa ser o protagonista no processo de aquisição de sua aprendizagem. Nele levamos em conta os objetos de estudo da matemática, os conhecimentos prévios dos alunos em relação a estes, os recursos a serem utilizados em situação, as interações individuais e ou coletivas com os objetos do saber, dentre outros fatores. Ao considerar o *meio* como sendo um "subsistema autônomo e antagonista ao sujeito" (BROUSSEAU, 2008, p.21), isso decorre do fato de que este deve ser desafiador aos alunos, de modo que eles possam entrar no jogo fazendo uso de suas estratégias iniciais e, ao mesmo tempo, vivenciando as limitações destas. Isso o levará a agir sobre a situação, a partir da mediação do professor que realiza novos questionamentos que possibilitem que o aluno se mantenha no jogo e evolua na determinação de uma estratégia vencedora que lhe permitirá construir novos saberes (ARTIGUE *et al.,* 2014, p. 52).

Nessa dinâmica, uma situação didática indispensável é a *institucionalização*, que se refere aos momentos em que o professor sistematiza os conhecimentos mobilizados pelos alunos, atribuindo a estes um estatuto de saber. Nesta situação "[...] busca-se que o conjunto de alunos de uma aula assuma o significado socialmente estabelecido de um saber que foi elaborado por eles mesmos, em situações de ação, de formulação e de validação" (GALVÉZ, 2008, p. 30). A *situação de institucionalização* não é *adidática*, diferenciando das descritas anteriormente, pois, nesse caso, o professor é o responsável por agir sobre o saber em jogo. Este tipo de situação pode ocorrer sempre que o professor julgar necessário ou adequado.

Com estes aportes teóricos buscamos trazer à tona, neste artigo, reflexões acerca do processo de elaboração de uma oficina em que foi proposta a situação de ensino intitulada *Brincando de veterinário,* que buscou discutir com professores e futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental possíveis condições didáticas para que os alunos possam construir conhecimentos relativos ao campo multiplicativo que, como já dito, envolve as operações de multiplicação e divisão.

Dessa maneira passamos a nos indagar sobre como preparar esta situação para que ela possa ser vivida como uma *situação adidática* pelos alunos deste ciclo de escolaridade. Em busca de responder a este questionamento é que passaremos a traçar alguns elementos sobre esse processo de estudo.

***BRINCANDO DE VETERINÁRIO*: FERRAMENTA DE ESTUDO DO CAMPO MULTIPLICATIVO**

A primeira vez que trabalhamos com a situação *Brincando de veterinário* foi com professores da rede municipal de Dourados-MS no ano de 2019. Nesta ocasião foi desenvolvido um projeto de extensão, também no âmbito do projeto universal, que contou com a participação de 48 professores dos anos iniciais e finais do ensino fundamental da Escola Municipal Joaquim Murtinho (Dourados/MS). Esta parceria também se deu em conjunto com a Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD), representada nesta ação pela Profa. Dra. Cintia Melos dos Santos, membro do DDMat. Em 2020, já com as aulas no modo remoto, em contato constante com uma criança que cursava o 4° ano do ensino fundamental que tinha sérias dificuldades de aprendizagem, uma das autoras deste texto resolveu tentar ajudar este aluno em sua tarefa escolar que era sobre a tabuada. Ela percebeu que Pedro[6] não entendia o que significava, por exemplo, 3 x 4, e resolveu retomar a situação do veterinário para trabalhar com ele por acreditar que isto o ajudaria a compreender o significado da operação. O trabalho foi considerado exitoso, pois, pouco a pouco, Pedro conseguiu construir a tabuada, compreendendo a notação utilizada e atribuindo sentido à operação trabalhada recorrendo sempre à ideia da situação trabalhada. Entusiasmadas com o

[6] Nome fictício

potencial desta atividade, decidimos iniciar as oficinas on-line com esta situação. Para isso algumas outras escolhas foram feitas, conforme descrevemos na próxima seção.

ALGUMAS ESCOLHAS NO PROCESSO DE ELABORAÇÃO DA PROPOSTA

Uma das primeiras coisas que nos chamou a atenção ao conhecer a atividade proposta por Mandarino e Belfort (2006) foi seu contexto familiar aos alunos: trata-se de uma clínica veterinária na qual uma criança leva seu cachorro para ser tratado pelo veterinário. Esta é uma primeira variável (BROUSSEAU, 2008) importante a ser considerada ao preparar uma situação a ser proposta aos alunos, pois se o contexto não é significativo para eles, dificilmente entrarão no jogo, principalmente crianças, como é o caso dos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental. Concordamos com Gitirana e Carvalho (2010) de que o contexto pode favorecer a mobilização de conhecimentos prévios pelos alunos visando a construção de novos conhecimentos e a ampliação dos significados de um dado conceito. Acreditamos que o *Brincando de veterinário* favorece a participação ativa dos alunos e com isso o professor consegue organizar situações que favorecem a elaboração de conjecturas pelos alunos. Modificando algumas variáveis desta situação obtém-se atividades diversificadas que favorecem a atribuição de sentido, pelos alunos, às operações de multiplicação e divisão, além de levá-los à mobilização de diferentes estratégias de resolução.

A situação proposta pode ser trabalhada desde o primeiro ano do ensino fundamental, o que dependerá do desenvolvimento cognitivo dos alunos, bem como das dificuldades que eles podem encontrar nos anos seguintes de escolaridade, e caberá ao professor, sempre, realizar escolhas e adaptar a situação ao nível de desenvolvimento cognitivo de seus alunos.

Em nossa proposta buscamos levar em consideração o fato de que o professor dos anos iniciais é responsável por trabalhar as diversas disciplinas com seus alunos e isso de forma articulada. Nessa perspectiva propusemos uma atividade que permite introduzir o estudo da multiplicação com o auxílio de histórias em quadrinhos (HQ), confeccionadas no aplicativo Pixton[7]. E por que a apresentação por meio de HQ?

[7] O Pixton é um aplicativo (online), disponibilizado tanto na versão gratuita quanto na versão paga, que permite trabalhar com histórias em quadrinhos. Nessa ferramenta, mesmo na versão gratuita, há diferentes cenários e personagens, o que permite a criação e compartilhamento de HQ por professores e alunos. Para criar uma HQ, basta fazer login por meio do acesso ao site https://www.pixton.com/, preencher os dados solicitados e dar início ao processo de confecção das historinhas em quadrinhos. Em: https://inovaeh.sead.ufscar.br/wp-content/uploads/2019/04/Tutorial-Pixton.pdf é possível ter acesso ao tutorial da ferramenta Pixton, organizado pela Secretaria Geral de Educação a Distância da Universidade Federal de São Carlos, em 2018.

Essa escolha foi realizada por nos permitir explorar diferentes tipos de linguagem, além da linguagem matemática, uma vez que a HQ é um gênero textual dentre vários outros que podem ser explorados nos anos iniciais, articulando com outras áreas do conhecimento, um aspecto relevante na alfabetização e letramento dos alunos. Sobre o uso das histórias em quadrinhos no processo de aprendizado, Santos e Vergueiro (2012) evidenciam possibilidades de implementação de HQ nas práticas educativas desde os primeiros anos de escolaridade, como forma de incentivo à leitura, a instigação ao debate e à reflexão sobre o assunto abordado. Além disso, refletir sobre as contribuições do uso das HQ como recurso didático para o ensino e aprendizagem da matemática escolar também se faz necessário, como sinaliza a pesquisa de Ferreira (2019), já que há um número limitado de trabalhos nesta temática. O autor também evidencia que os estudos desenvolvidos com histórias em quadrinhos favorecem uma articulação entre as disciplinas escolares, e o que evidenciam possíveis alternativas para superar a abordagem fragmentada de construção do conhecimento.

Nessa perspectiva os documentos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) dos anos iniciais também propõem que os estudos sobre gêneros textuais sejam apresentados de maneira articulada com outras disciplinas, tendo por objetivo

> (EF12LP05) - planejar e produzir, em colaboração com os colegas e com a ajuda do professor, (re) contagens de histórias, poemas e outros textos diversificados (letras de canções, quadrinhas, cordel), poemas visuais, tiras e histórias em quadrinhos, dentre outros gêneros do campo artístico-literário, considerando a situação comunicativa e a finalidade do texto. (BRASIL, 2018, p. 103).

Tais considerações nos levaram a elaborar uma proposta que favorecesse a articulação entre áreas de conhecimento, principalmente Língua Portuguesa e Matemática, e outras que mostraremos mais adiante neste texto. Ao propor o desenvolvimento de uma prática pedagógica que concilia diferentes áreas de conhecimento acreditamos, como Araújo (2008, p. 198), que "o 'segredo' está nas relações, nos infinitos caminhos que permitem ligar os conhecimentos uns aos outros." Além da articulação entre diferentes áreas de conhecimento, nossa proposta também tem elementos que lembram uma brincadeira, o que consideramos importante especialmente para os anos iniciais da escolaridade.

E por que utilizar jogos e brincadeiras no ensino de matemática?

Como explicita Grando (1995), os debates acerca dos jogos como ferramenta para o ensino intensificam-se cada vez mais desde o século XX, sobre os quais a autora traz em cena contribuições de trabalhos desenvolvidos por Jean Piaget, Jean Château, Tizuco Kishimoto, Lino Macedo, dentre outros. Nos estudos de Château (1975), Huizinga (1951) e Caillois (1990), citados por Duarte (2009), entende-se que o jogo apresenta sua individualidade lúdica, uma ação prazerosa, podendo também ser séria, do ponto de vista da aprendizagem, quando a criatividade e a manifestação da imaginação tornam-se um elemento importante a ser estudado. No âmbito escolar, Duarte (2009) aponta que o jogo pode ser considerado como uma ferramenta educativa, sem perder sua essência por estar na escola. Além disso, evidencia que por meio dos jogos os alunos facilmente encontram motivos para aprender e para se aperfeiçoar, descobrir e desenvolver as suas capacidades manifestadas em todas as atividades, sendo ou não no contexto escolar. Assim sendo, além de ser um instrumento de ensino, por sua natureza o jogo é também uma atividade motivadora. Porém, para que isto possa ocorrer, a mediação realizada pelo professor[8] nas interações das brincadeiras é crucial. É importante proporcionar à criança um espaço lúdico que permita fazer articulações com o conhecimento a ser ensinado, ou seja, trata-se de organizar um ambiente em que a criança possa relacionar-se com o adulto de maneira que ela consiga interagir com o conhecimento brincando. Acreditamos que jogos e brincadeiras pedagógicas constituem possibilidades de articulações entre diferentes áreas de conhecimento no ensino.

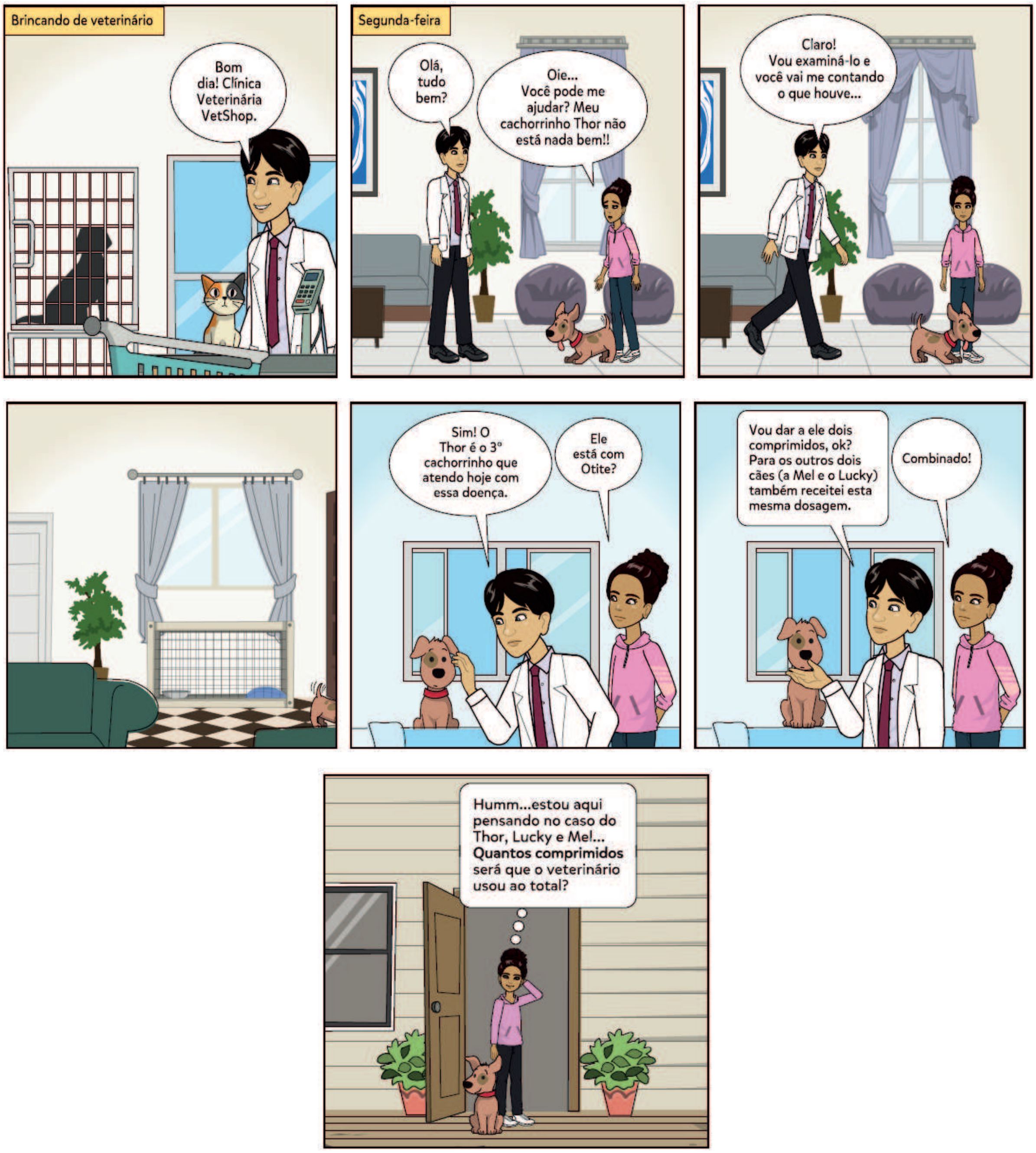
UMA ANÁLISE DO BRINCANDO DE VETERINÁRIO À LUZ DA TSD

Tendo em vista o trabalho didático que buscamos suscitar com a situação *Brincando de veterinário*, a descreveremos e analisaremos partindo da seguinte problematização:

Em uma clínica veterinária uma personagem leva seu cachorrinho para ser tratado e o veterinário lhe informa que tratou três cães com o mesmo remédio e a mesma quantidade de comprimidos (figura 1). Ao final da consulta a personagem se questiona: “Quantos comprimidos será que o veterinário usou ao total?” Acreditamos que esta situação pode ser de fácil entendimento para crianças dos anos iniciais, especialmente com a mediação do professor, essencial para a leitura e interpretação do problema com os estudantes. Ao fazer a leitura com os alunos, podem ser feitos questionamentos como: quem tem animais de estimação? Ele já ficou doente? Como foi tratado?

[8] É importante destacar que, especialmente no ensino remoto que estamos vivenciando com a pandemia da Covid-19, esta mediação é feita também pelos responsáveis pelas crianças. Atividades como o *Brincando de veterinário,* possibilitam um universo grandioso de adaptações, seja nos espaços institucionais (formal ou informal), bem como ao levar em conta as condições dos alunos (com ou sem acesso a computadores ou internet), de modo a utilizar materiais didáticos que possam ser acessíveis a todos.

Figura 1 - Primeira situação - uma possível entrada ao jogo



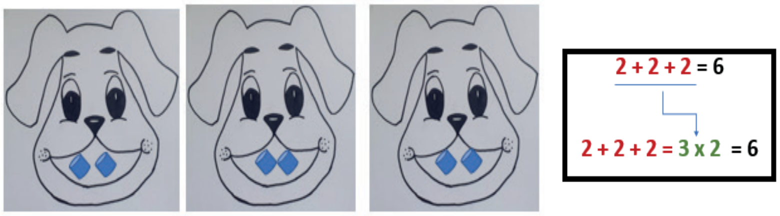
Fonte: As autoras (2021)

Dependendo das condições dos alunos e da escola, cada criança pode receber uma folha com a HQ e o professor pode ainda projetar em slides ou fazer cartazes. No caso do ensino remoto, é importante que cada criança tenha seu próprio material. No caso do ensino presencial, a simulação da situação em classe com os alunos contribuirá com a *devolução do problema* (BROUSSEAU, 2008).

É importante que o professor crie condições para que o aluno entre e continue no jogo e, para a faixa de escolaridade que propomos esta situação consideramos essencial o trabalho com materiais concretos como suporte para que os alunos possam simular a situação e desenvolver estratégias para resolver a situação. No caso desta atividade, por exemplo, pode-se recorrer a desenhos em folha de papel sulfite para representar o animal (cachorrinho) e grãos (milho de pipoca, feijão, etc) para representar os remédios ou outros materiais que o professor considerar adequado. Sobre isso, concordamos com Mandarino (2010, p.131) sobre a importância de a criança "recorrer ao material concreto para vivenciar e compreender o que está fazendo". Por outro lado, "é preciso estar atento para assegurar a manipulação desses materiais por parte da criança [...] Fazer atividades apenas com desenhos do material concreto não substitui de forma alguma o seu manuseio" (GITIRANA, CARVALHO, 2010, p.38). Os materiais sugeridos para o trabalho com a situação *Brincando de Veterinário* são de fácil acesso e podem ser utilizados e proporcionados aos alunos mesmo no caso de ensino remoto. Para que a criança entre no jogo pode-se também lhe atribuir o papel do veterinário que precisa tomar decisões e medicar corretamente os animais. Com isso, ele deverá agir sobre a situação, mobilizando algumas estratégias para solucionar o problema proposto.

Para responder à questão posta, provavelmente as crianças contarão os comprimidos de um em um, obtendo a resposta de seis comprimidos ao total. Como o objetivo com esta atividade é iniciar o estudo da multiplicação, sugerimos retomar o cálculo feito pelos alunos e escrever da seguinte forma: 2+2+2 = 6. Ao sistematizar a situação em linguagem matemática é possível discutir com os alunos que é possível escrever esse mesmo cálculo de outra forma, como 3x 2 = 6, conforme expresso na figura a seguir:

Figura 2 - Representando a primeira situação em jogo



Fonte: As autoras (2021)

É importante enfatizar a linguagem escrita utilizada: "três vezes dois comprimidos, ou seja, 3 x 2", para que os alunos possam atribuir significado à escrita. O número "3" indica a quantidade de cachorrinhos medicados e o número "2" representa a quantidade de comprimidos que cada um receberá. Assim, são "3" cachorrinhos que irão receber "2" comprimidos cada, e reescrevendo na linguagem matemática obtemos 3 x 2.

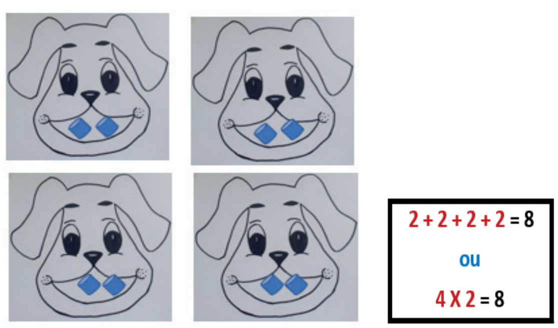
O trabalho com a linguagem favorece a transição entre a adição e a multiplicação e para que adquira sentido para os alunos é importante ser reinvestida, como propomos na variação a seguir da situação inicial:

Figura 3 - Segunda situação - Reinvestimento

Fonte: As autoras (2021)

Pode-se perceber que existem duas maneiras de resolver o problema proposto. A primeira é pensar por meio da adição: ao manipular o material concreto o aluno pode fazer a distribuição e, em seguida, registrar utilizando esta operação matemática. A segunda maneira é possibilitar sua reflexão usando a multiplicação, separando os comprimidos e os cachorrinhos: 4 cachorrinhos receberão 2 comprimidos, o que pode ser expresso na linguagem matemática como sendo “4 x 2”, como representado na figura 4.

Figura 4 - Representando a segunda situação em jogo



Fonte: As autoras (2021)

Gitirana *et al.* (2014) explicitam que, quando trabalhamos com o campo multiplicativo (VERGNAUD, 1991), há certa continuidade entre a adição e multiplicação como expressamos na possibilidade da primeira estratégia a ser mobilizada pelo aluno. “No entanto, em relação aos significados, há uma descontinuidade entre os problemas de adição e multiplicação. Em geral, os problemas de estrutura aditiva envolvem a relação entre três grandezas de mesma espécie” (VERGNAUD, 1991, p. 24). Isso quer dizer que, nesse caso, há uma *relação ternária*, o que difere de um problema do tipo multiplicativo, como aqui expressamos. As autoras reforçam o fato de que é “preciso, portanto, compreendermos que estamos diante de uma nova operação que envolve a relação entre quatro grandezas, denominada *relação quaternária*, duas a duas de mesma espécie” (VERGNAUD, 1991, p. 25).

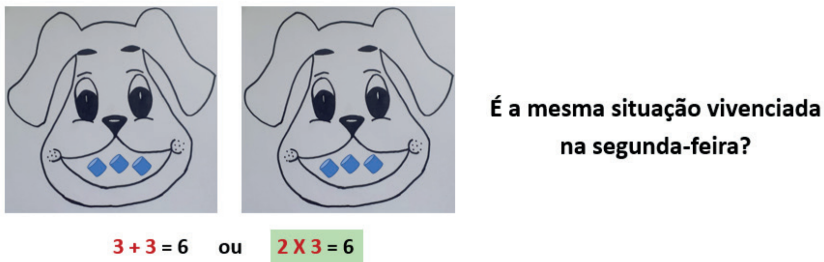
Nas situações do *Brincando de veterinário* fazemos correlação de duas espécies (cachorros e comprimidos), onde nesta segunda situação sabemos que um cachorro recebe dois comprimidos cada e queremos saber quantos comprimidos serão necessários para medicar 4 cachorros. É importante ressaltar a necessidade de os professores levantarem questões a serem problematizadas com os alunos, ampliando a discussão em articulação com outros conceitos matemáticos. Por exemplo, com base no que foi exposto até aqui, é possível propor as seguintes questões: será que o veterinário sempre realiza o mesmo procedimento, receitando a mesma medicação, na mesma dosagem para todo animal que chega com os mesmos sintomas? O que ele precisa saber para dar a medicação correta a cada um deles? Isso não dependerá do peso e da idade de cada animal? Essas são algumas questões que permitem ao professor transitar por diferentes campos da matemática, como é o caso do estudo no campo das grandezas e medidas. A atividade a seguir (figura 5) ilustra uma destas possibilidades, além de permitir trabalhar a propriedade comutativa da multiplicação.

Figura 5 - Problematizando uma terceira situação

Fonte: As autoras (2021)

Nesta atividade os alunos podem retomar estratégias mobilizadas anteriormente, fazendo uso ou não da ideia aditiva, ao realizar a contagem três a três, por exemplo. No entanto, uma das potencialidades desta atividade reside em sua comparação com a primeira atividade proposta: trata-se da mesma situação?

Figura 6 - Articulando situações do *Brincando de veterinário*



Fonte: As autoras (2021)

O papel de mediador do professor é, aqui fundamental: ele deve questionar, motivar o aluno a pensar nas modificações realizadas, a reler a atividade, encenar as mesmas ou até mesmo jogar com os alunos. O *meio didático* preparado pelo professor é constantemente modificado em função das ações dos alunos. O professor age para manter o aluno na situação, estimulando-o com questões, porém sem fornecer respostas. Assim, é nesse movimento de levantar hipóteses, formular suas conjecturas, e passar a defender a sua hipótese para solucionar o problema que os alunos poderão vivenciar fases *adidáticas de formulação e validação*. Ao perceber que os alunos já debateram entre si, o professor poderá realizar a *de institucionalização*[9]. Isso se faz necessário, ao observar que embora os resultados das situações (segunda-feira e quarta-feira) sejam iguais, essas situações não são as mesmas. Na primeira situação temos 3 cachorros recebendo 2 comprimidos cada, e na segunda situação temos 2 cachorros recebendo 3 comprimidos cada um. Para Vergnaud (2009),

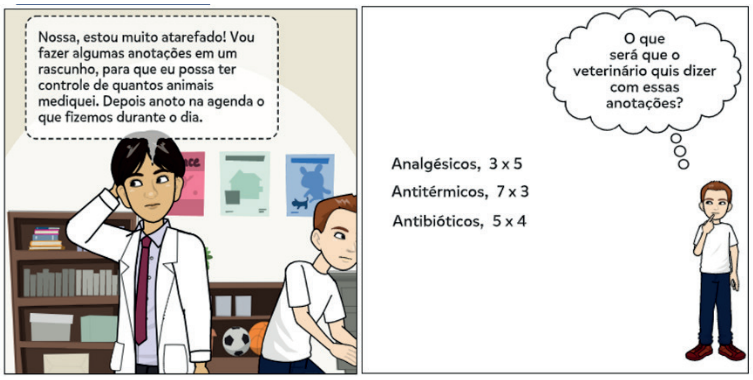
> a comutatividade da multiplicação no plano numérico permite inverter o papel do multiplicador e o do multiplicando. Mas, são necessárias certas precauções pedagógicas para que as crianças aceitem essa comutatividade porque lhes é preciso, na verdade, fazer a abstração do que esses números representam. (VERGNAUD, 2009, p.184)

O sentido e o significado atribuídos a cada operação mobilizada nas duas situações em jogo diferem entre si. Portanto, é importante perceber que se este tipo de situação não for bem discutido com os alunos, pode levar à troca de significado do problema, o que acaba não fazendo sentido nem na Matemática e nem para o aluno, como evidenciam Gitirana *et al*. (2014).

[9] É importante ressaltar que estas fases não são lineares, podendo ocorrer idas e vindas entre elas diversas vezes.

Com a intenção de proporcionar aos alunos uma situação para que eles possam (re)interpretar o significado das notações que estão sendo trabalhadas no contexto do *Brincando de veterinário*, propomos a seguinte situação.

Figura 7 - Atribuindo sentido à notação matemática



Fonte: As autoras (2021)

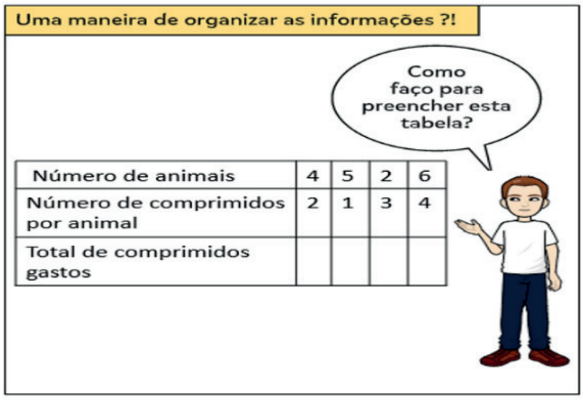
Podemos observar que perante esse problema o aluno pode ser levado a iniciar uma possível investigação e compreensão da notação matemática no campo multiplicativo, uma vez que ele tem condições de formular algumas hipóteses. Nesse caso, cabe destacar que, ao longo das situações que foram sendo aqui apresentadas, observamos que o veterinário atribui um único sentido a essa notação. No entanto, sem ter contato com as situações anteriores, a notação matemática expressa na figura 7 poderia representar uma variedade de possibilidades, como é o caso de o veterinário poder expressar quantas vezes uma medicação é dada ao longo do dia ou da semana para um determinado quantitativo de animais.

Se pegarmos como exemplo a primeira anotação – analgésicos, 3 x 5 – vemos que três animais foram medicados com 5 analgésicos cada, obtendo ao final o total de comprimidos utilizados. Como evidenciam Magina *et al*. (2010, p.7), "não faz sentido pensar no produto direto entre as duas grandezas [...], mas sim na relação multiplicativa que existe entre elas, duas a duas". Ainda em diálogo com as autoras, o entendimento das relações quaternárias é que permite aos alunos compreender, em nosso caso, porque multiplicamos o número de animais medicados pela quantidade de comprimidos e o resultado é expresso em comprimidos e não em animais.

Aqui está outro ponto a se considerar, quando buscamos refletir sobre a viabilidade de estas situações serem vividas pelos alunos como *adidáticas*, uma vez que é importante o professor refletir sobre as relações matemáticas envolvidas no contexto em jogo, com vista a compreender as possíveis estratégias ou dificuldades que os alunos podem apresentar, quando esses aceitam entrar no jogo. Quando o professor propõe situações nas quais os alunos podem agir sobre elas a partir dos seus conhecimentos, buscando solucioná-las, ele permite que os alunos passem por *situações adidáticas*, pois eles entram no jogo, formulam hipóteses e validam-nas e, assim, o professor, a partir de todo conhecimento construído, pode institucionalizar os saberes envolvidos.

É importante também ressaltar como as atividades estabelecem um campo vasto de possibilidades de abordar um mesmo assunto, por meio de diferentes pontos de vista. Na situação a seguir, o professor pode favorecer pouco a pouco o trabalho de construção da tabuada com os alunos, elaborando vários exemplos, de modo que as crianças possam realizar seus registros com o auxílio do quadro.

Figura 8 - Possibilidade para a construção da tabuada

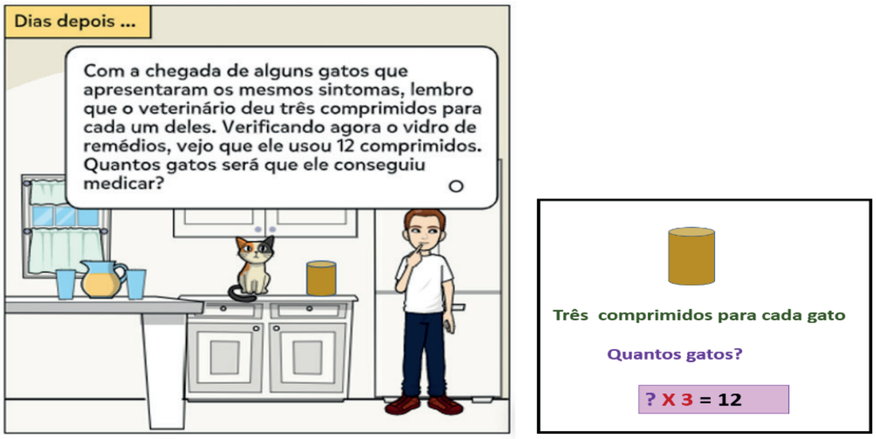


Fonte: As autoras (2021)

Além disso, esta situação permite refletir com os alunos o que podem fazer para “preencher” as lacunas em branco e, ainda, realizar novas situações similares a essas ou até mesmo podendo fazer algumas generalizações. Ao propor essa situação os alunos vão agindo, conforme sua familiaridade com as situações trabalhadas, podendo ou não usar o material concreto como apoio para interpretarem a situação posta e chegarem a uma solução.

Nas situações das figuras 9 e 10 buscamos explorar situações do campo multiplicativo que mobilizam algumas ideias vinculadas ao conceito de divisão. Concordamos com Freitas e Bittar (2005, p.56) sobre o fato de que neste nível de escolaridade, as operações não devem “ser apresentadas de forma isolada, segundo uma hierarquia que não é efetiva do dia a dia da criança. Ou seja, não é preciso aprender tudo ou muito sobre a adição para depois conhecer a subtração, e então, a multiplicação, e finalmente, a divisão”.

Figura 9 - Mobilizando a ideia de medida



Fonte: As autoras (2021)

Nesta situação podemos observar que a quantidade de animais a ser medicada não é dada, no entanto, sabe-se o total de comprimidos gastos, no caso doze, e que cada gato recebeu três desses comprimidos. Esse fato nos leva a observar que o *meio* criado, agora com esta nova situação em jogo, tem forte potencial de ser visto como um *meio antagonista*, isto é, o aluno será desafiado a enfrentar uma situação ainda não vivenciada e/ou familiar, o que exigirá uma mudança nas estratégias que estavam sendo utilizadas por ele. Nesse sentido, com o desafio de encontrar o número de gatos medicados, uma possível estratégia a ser mobilizada concerne o fato de esta 'pegar' os doze comprimidos que foram utilizados e, sabendo que cada animal recebeu três deles, separar os comprimidos em montinhos de três em três, associando-os a cada gato até não ter mais nenhum comprimido a ser distribuído. Ao final, observa-se que o total de comprimidos foi usado para medicar exatamente quatro gatos. Essa é uma situação que mobiliza a ideia de medida, já que tínhamos como intuito descobrir quantos 'grupos' (aqui representados por gatos) seriam formados ao total, sabendo que cada um teria recebido exatamente três comprimidos de um total de 12 comprimidos. Neste trabalho, é importante o professor realizar a interpretação do problema com os alunos em paralelo à linguagem matemática que estava sendo trabalhada nas situações anteriores, ou seja, é importante construir com eles a notação "*? x 3 = 12*" (ou similar a esta) de modo que os alunos possam atribuir significado à situação trabalhada e, consequentemente, buscar mecanismos para encontrar o valor desconhecido da referida situação.

Já a situação que apresentamos na figura 10, traz como um dado conhecido a quantidade de animais a serem medicados. No entanto, não se sabe a quantidade de comprimidos que cada um recebeu e nem o total que foi utilizado.

Figura 10 - Ampliando o estudo com a ideia de partição

Fonte: As autoras (2021)

Para descobrir o total de comprimidos utilizados, a criança é levada inicialmente a mobilizar uma ideia vinculada à operação de subtração. Para isso, é possível representar os 30 comprimidos que continham no frasco, por meio de grãos ou outros materiais de fácil acesso para as crianças, e retirar destes os 10 comprimidos que sobraram, passando assim a descobrir que foram utilizados pelo veterinário, 20 comprimidos no total. Após obterem os 20 comprimidos, e sabendo que havia 4 cachorros (representados pelas imagens em papel), os alunos podem passar a distribuir os comprimidos, dando um para cada cachorro, até terminar o quantitativo de comprimidos dados, observando ao final, que cada animal ficou com 5 comprimidos cada. Outra estratégia pode ser mobilizada por eles ao distribuírem, em vez de um a um, um quantitativo maior para cada cachorrinho, de modo que todos recebam a mesma quantidade de comprimidos.

Acreditamos que, por mais que essa situação exija recorrer a uma ideia vinculada à operação aritmética de subtração como sendo um "novo" procedimento a ser realizado pelos alunos, a ação de distribuir em partes iguais uma quantidade dada poderá não ser um indicativo de dificuldades para os alunos no estudo do campo multiplicativo, o que lhe permite entrar neste jogo ao dispor de conhecimentos prévios para agir sobre ele. A ideia de partição em partes iguais oriunda da operação de divisão é algo mais familiar ao universo da criança, assim como já estava implicitamente sendo trabalhada desde a primeira atividade que apresentamos.

A situação descrita a seguir é uma possível *institucionalização* do trabalho no campo multiplicativo, tendo em vista as sistematizações concernentes à operação de multiplicação realizadas nas situações anteriores. Isto é dito pelo fato de esta situação ser criada como forma de evidenciar uma combinação existente entre as ideias vinculadas às operações de multiplicação e divisão.

Figura 11 - Sistematizando o estudo

Número de animais	2	3	4		5		3			2
Número de comprimidos por animal	3			1		2	3	4	3	
Total de comprimidos gastos		6	4	7	10	8		12	9	12

Fonte: As autoras (2021)

Nesta situação espera-se que os alunos possam ser capazes de preencher os campos vazios da tabela, sem o uso do material concreto. No entanto, é possível que haja alunos que encontrem dificuldades no preenchimento das sétima, nona e décima colunas, o que pode ser realizado com o auxílio do material de manipulação. É também importante salientar que esta atividade permite trabalhar diferentes significados da multiplicação, pois

> se restringirmos o conceito multiplicativo apenas a situações associadas à adição de parcelas iguais, a compreensão desses outros conhecimentos será dificultada. A visualização de situações combinatórias por meio de tabelas de dupla entrada ou árvores lógicas, além de promover a interdisciplinaridade com o campo do tratamento da informação, facilita a observação das propriedades comutativa e distributiva da multiplicação. (MANDARINO, 2010, p.123)

Com vista a refletirmos para uma abertura de outras possibilidades que possam derivar do trabalho com essa proposta didática, não podemos deixar de mencionar algumas questões que ficaram em aberto. Uma delas concerne ao trabalho com outros significados vinculados ao campo multiplicativo, como é o caso da organização retangular e o raciocínio combinatório, tão importantes para a compreensão de problemas do campo multiplicativo quanto os que trabalhamos aqui. Para o primeiro caso, apresentamos (figura 12) uma ideia de situação para desencadear uma possível exploração por professores destes anos de escolaridade.

Figura 12 - Aberturas para outras possibilidades

Fonte: As autoras (2021)

Quanto ao raciocínio combinatório, também é possível pensarmos em uma situação, que nos permita disparar esse estudo. A título de exemplo, está na possibilidade de questionarmos sobre: quantas maneiras diferentes podemos escolher dois animais para irem juntos ao banho/tosa, dentre quatro animais (Judite, Lucky, Thor e Mel) que hoje estão na clínica VetShop? Situações como essa nos leva a trabalhar a ideia de multiplicação sem formalizações excessivas, além de ser importante discutir com as crianças, ideias fundamentais da combinatória, como é o caso de pontuar que, neste caso, a ordem que os animais são escolhidos não indica diferentes possibilidades a serem tomadas, por exemplo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo buscamos refletir sobre o processo de elaboração da situação de ensino intitulada *Brincando de veterinário*, como uma ferramenta para introduzir o campo multiplicativo nos anos iniciais do ensino fundamental e, na perspectiva da TSD, nos questionamos sobre como esta situação poderia ser elaborada de forma a ser vivida como uma situação *adidática* pelos alunos deste ciclo de escolaridade. Buscamos, também, desencadear um diálogo com professores e futuros professores dos anos iniciais do ensino fundamental sobre as possíveis condições didáticas para que os alunos possam construir conhecimentos relativos ao campo multiplicativo.

Ao longo do texto traçamos possibilidades de trabalho, sinalizando uma variedade de situações reformuladas a partir de uma situação inicial, em diferentes níveis de complexidade, sob a ótica da TCC, bem como das escolhas didáticas realizadas, de modo a buscar indícios de respostas para nossa questão. Entendemos que a elaboração desta situação de ensino tem forte potencial para ser vivida como *adidática*, conforme fomos evidenciando possíveis condições a serem dadas aos alunos de modo que haja a *devolução do problema* por eles, bem como se mantenham no jogo. Traçamos possíveis estratégias, porém não únicas, que os estudantes podem mobilizar, até construírem novos conhecimentos no campo multiplicativo.

Contudo, esse trabalho não finaliza por aqui, uma vez que é necessária a sua realização em sala de aula, de forma a verificarmos se, de fato, foi possível que os alunos tenham percorrido por fases *adidáticas*. Nesse caso, é importante pontuarmos sobre os diferentes *meios didáticos* a serem constituídos, tendo em vista as condições de cada realidade dos professores que trabalharão com a proposta didática discutida neste artigo. No entanto, ficará a cargo do professor a realização das devidas mediações, com questões que permitem ajudar o aluno a aprender os conceitos envolvidos. A partir dessa situação é interessante refletir sobre outras possibilidades que podem estar envolvidas ou articuladas com a abordagem do tema que, ao fazer uso de histórias em quadrinhos partindo de um contexto inicial, é possível realizar estudos relacionados a gêneros textuais, classificação das frases, pontuação, entre outros conceitos que podem viver e dialogar em paralelo com o cenário de estudo em matemática (não somente no campo de números e operações). Entendemos que esses diálogos apontam alguns indicativos para o trabalho do professor, mas cabe a ele, sempre, realizar suas escolhas, uma vez que somente ele conhece seus alunos, sua escola, suas condições de trabalho, ou seja, o que precisa fazer e o que consegue fazer dadas as condições e restrições (CHEVALLARD, 2009) a que está submetido.

Finalizando este texto, gostaríamos de enfatizar que a situação e as reflexões aqui realizadas tiveram como objetivo refletir sobre como é possível, a partir de uma situação relativamente simples, que pode ser "concretizada" com materiais acessíveis, trabalhar conceitos de matemática de modo a contribuir com a construção do conhecimento pelo aluno, articulando diferentes significados de operações aritméticas e ao mesmo tempo com possibilidade de articular diferentes áreas de conhecimento. Esperamos ter alcançado nosso objetivo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, U. F. **Pedagogia de projetos e direitos humanos**: caminhos para uma educação em valores. Pro-Posições, v. 19, n. 2, p. 193-204, 2008.

ARTIGUE, M.; HASPEKIAN, M, LENFANT, A. Introduction to the Theory of Didactical

Situations (TDS). In*:* AHSBAHS, B.A.; PREDIGER, S. **Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education.** New York: Springer, 2014.

BITTAR M.; FREITAS, J.L.M.. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. Campo Grande/MS: Editora UFMS, 2005.

BITTAR, M. Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de matemática. *In:* TELES, R.; BORBA, R.; MONTEIRO, C.. **Investigação em didática da matemática**. Recife: UFPE, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 02 set. 2021.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, v. 7, n. 2, p. 33-115. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Ática, 2008.

CARVALHO, M. **Docentes dos anos iniciais:** conhecimentos sobre o campo multiplicativo. IV Colóquio Internacional em Educação e Contemporaneidade, Laranjeiras–SE/Brasil, 2010.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162. Acesso em: 02 set. 2021.

DUARTE, J. A. **O jogo e a criança**. Dissertação (Mestrado em Ciências da Educação). Escola Superior de Educação João de Deus, Lisboa. 2009.

FERREIRA, J.G.F. **Educação matemática e histórias em quadrinhos:** um panorama das pesquisas brasileiras. XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Unicsul-SP/Brasil, 2019.

FRANCHI, A. Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais. In: MACHADO, S. (Org.) **Educação Matemática: uma nova introdução**. São Paulo: EDUC, 2008. p. 189-229.

GASCÓN, J. Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 18, n. 52, pp. 7-33, 1998.

GITIRANA, V.; CARVALHO, J. B. P. Ministério da Educação. **Coleção Explorando o Ensino.** A matemática do contexto e o contexto na Matemática. Secretaria de Educação Básica, v. 17. 248 p. Matemáticas: Ensino Fundamental: Brasília, 2010.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais**.** São Paulo: Editora PROEM, 2014.

GRANDO, C. R. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1995.

MAGINA, S.; SANTOS, A.; MERLINI, V. Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do ensino fundamental? Contribuição para o debate. **Em teia - Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana**, v. 1, n. 1, 2010.

MAGINA, S.; SPINILLO, A.; LAUTERT, A. Raciocínio multiplicativo discutido a partir da resolução e formulação de problemas. **Rematec - Revista de Matemática, Ensino e Cultura**, ano 15, n. 36, pp. 78-94, 2020.

MANDARINO, M. C. F.; BELFORT, E. Matemática nas séries iniciais - parte I: **Números naturais - Conteúdo e forma**. Brasília, *2006*. Disponível em: http://professoresdematematica.com.br/wa_files/01Matematica_20Series_20Iniciais_Numeros_20Naturais.pdf. Acesso em: 02 set. 2021.

MANDARINO, M. C. F. Ministério da Educação. **Coleção Explorando o Ensino.** Números e operações. Secretaria de Educação Básica, v. 17. 248 p. Matemáticas: Ensino Fundamental: Brasília, 2010.

SANTOS, R. E.; VERGUEIRO, W. **Histórias em quadrinhos no processo de aprendizado**: da teoria à prática. *EccoS*, São Paulo, n. 27, p. 81-95. jan./abr. 2012.

VERGNAUD, G. La theorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, v. 10/23, p. 133-170, Grenoble, La Pensée sauvage éditions,1991.

VERGNAUD, G. **A Criança, a Matemática e a Realidade**: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

A CALCULADORA COMO INSTRUMENTO INTEGRADO NA APRENDIZAGEM DO SABER DIVISÃO NO 6° ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Daize Dias dos Santos Cerqueira

Especialista em Inovações no Ensino de Matemática pelo Centro universitário de Maringá – UNICESUMAR. Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS.
E-mail: daysantos160@gmail.com.

Eliane Santana de Souza Oliveira

Doutora em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia - UFBA e Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS. Professora Assistente do Departamento de Ciências Exatas, na Área de Educação Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana – UEFS.
E-mail: essoliveira@uefs.br.

Resumo: Neste trabalho, apresentamos resultados da pesquisa que teve como objetivo instrumentalizar a calculadora de forma integrada para a aprendizagem de divisão de números naturais, por meio de situações matemáticas no 6º ano do Ensino Fundamental. Para tanto, foi elaborado uma proposta de intervenção envolvendo o objeto matemático e a calculadora enquanto instrumento. As tarefas foram elaboradas e analisadas refletindo em torno das relações possíveis existentes entre sujeito, objeto, artefato (instrumento) com base na Abordagem Instrumental de Rabardel. Os resultados apontam que os alunos enquanto sujeitos da pesquisa apresentaram diversos esquemas ao resolverem as situações propostas e desenvolveram habilidades ao manusearem o instrumento tecnológico em questão, para construção do saber divisão de forma integrada.

Palavras chaves: Divisão. Calculadora. Abordagem Instrumental.

THE CALCULATOR AS AN INTEGRATED TOOL IN LEARNING DIVISION KNOWLEDGE IN THE 6TH YEAR OF ELEMENTARY EDUCATION

Abstract: In this paper, we present the results of the research that aimed to instrumentalize an integrated calculator for learning the division of natural numbers, through mathematical situations in the 6th grade of elementary school. To this end, an intervention proposal was elaborated involving the mathematical object and a calculator as an artifact. As tasks were elaborated and analyzed reflecting around the possible relations existing between individuals, objects, artifacts (instruments) based on Rabardel's Instrumental Approach. The results point to students as they study the various schemes to solve as situations and develop skills to handle or use the technological tool in question to constructo the knowledge Division in na integrated way.

Keywords: Division. Calculator. Instrumental Approach.

INTRODUÇÃO

Os conhecimentos matemáticos em relação às quatro operações fundamentais da Aritmética (adição, subtração, multiplicação e divisão) são importantes tanto na vida escolar quanto na vida cotidiana (SANTOS, 2010). A operação divisão é vista desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, sendo aprofundada a partir do 6º ano do referido ensino, e considerada como uma das que os alunos e professores sentem mais dificuldades (ABRE et al., 2011 apud VIANA, 2015). Nesse contexto, é preciso que o professor saiba usar os materiais de que se dispõe como forma de integrá-los a situações que levem à reflexão e compreensão de noções acerca do conceito matemático envolvido.

O motivo da escolha desse tema está intimamente ligado às dificuldades em face da aprendizagem de divisão e o fato de uma experiência pessoal envolvendo a calculadora em uma disciplina ofertada enquanto aluna do curso licenciatura em matemática, propiciando inquietação em pesquisar o porquê do não uso dessa ferramenta nas aulas de matemática.

Como forma de buscar novos meios de ensinar a operação divisão, buscamos abordar a utilização da calculadora como um recurso para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem desse saber. O objetivo deste trabalho consiste em instrumentalizar a calculadora de forma integrada para a aprendizagem de divisão de números naturais. Para isso, aplicamos como uma proposta de intervenção tarefas envolvendo o objeto matemático divisão explorando a calculadora para respondê-las, de modo a promover a aprendizagem e oportunizando novas descobertas.

Para cumprir com o objetivo utilizamos a Abordagem Instrumental de Rabardel (1995) como aporte teórico no intuito de fundamentar o uso da calculadora enquanto instrumento de forma efetiva, para aprendizagem da divisão. Além disso, investigou-se pesquisas na literatura sobre o ensino de divisão, o uso da calculadora no ensino de matemática, assim como o ensino e aprendizagem com divisão com o uso da calculadora. Ademais, analisamos os documentos oficiais Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Curricular Comum (BNCC) com o intuito de examinar como abordam o objeto divisão bem como a utilização da calculadora em sala de aula e, mais especificamente, no ensino de divisão. Por fim, propomos e analisamos a atividade envolvendo a calculadora e fizemos as considerações finais.

ENSINO DE DIVISÃO

Desde muito cedo presenciamos em nosso cotidiano situações que dão ideia de divisão, quando crianças aprendemos, por exemplo, a dividir brinquedos com os irmãos, repartir quantidades iguais com um amigo. Dessa forma, o aluno já tem um conhecimento espontâneo sobre divisão e é na escola que ele irá aprimorar a familiarizar com tal conteúdo se apropriando do conceito matemático. No entanto, esse processo nem sempre é fácil e o nível de dificuldades se eleva, nisso, a divisão é considerada vilã (BRITO, 2016). Isso ocorre devido ao fato de ser a última operação a ser ensinada no tocante à direção em que o cálculo é realizado, pois todas essas operações são efetuadas da direita para a esquerda e a divisão é da esquerda para a direita. Outra dificuldade, refere-se ao fato de utilizar as outras operações e o envolvimento do uso de estimativa (BRITO e CORREA, 2004 apud SANTOS, 2010).

Vergnaud (1991) apud Benvenutti (2008) aponta dois tipos de problemas de divisão: por partição e por quotição. No primeiro problema, o conjunto é distribuído em partes, já no segundo problema o conjunto é dividido em quotas previamente estabelecidas. O autor faz referência a diversas dificuldades das crianças na compreensão desses problemas. A busca de estratégias de exploração é fundamental para construir esses conceitos.

Segundo Souza (2008), a primeira ideia consiste basicamente em "tenho uma quantidade, preciso reparti-la igualmente entre determinado número de pessoas para saber qual a quantidade com que ficará cada uma delas" (p. 10), enquanto a segunda ideia em "tenho certa quantidade e preciso saber quantas vezes uma quantidade menor cabe dentro dela" (p.10). Isso vai ao encontro à linha de pensamento dos PCN, o qual afirma que "no algoritmo da divisão, deve ser intensificado o conhecimento da noção de 'repartir igualmente' e 'determinar quanto cabe" (BRASIL, 1998, p.72). Desse modo, os dois casos ilustram o processo de decisão que deve partir do professor ao propor, por exemplo, problemas que contemplem as ideias de dividir em partes iguais e de medir, uma vez que essas ideias têm que estar bastante explícitas ao trabalhar com a divisão e incentivando os alunos a compreender a operação antes de explorar o algoritmo.

Conforme Souza (2008), ao trabalhar com divisão, os professores sentem embaraços em escolher o algoritmo para ensinar os alunos. Em paralelo, os alunos costumam apresentar dificuldades para compreenderem o algoritmo da divisão. Os processos algorítmicos mais utilizados na escola são o processo euclidiano, dividido em longo e breve, sendo esse o mais comumente utilizado e o processo americano que é sugerido nas séries iniciais do Ensino Fundamental I. Cabe ao professor autonomia ao escolher o algoritmo a ser usado e que traga significados na aprendizagem do aluno, sendo interessante trabalhar com os diversos processos a fim de que o aluno escolha aquele que ele sentir mais seguro.

No trabalho de Benvenutti (2008) fundamentado na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud foi evidenciado diferentes estratégias desenvolvidas pelos alunos da 5ª série nas resoluções de problemas com divisão abrangendo partição e medida com resto e sem resto, utilizaram, por exemplo, o algoritmo de divisão e uso de desenhos, dentre outras formas não convencionais.

Já no estudo de Campos (2008) evidenciou-se que as dificuldades apresentadas pelos alunos das 4ª, 5ª e 7ª séries (5º, 6º e 7º anos) na aprendizagem de divisão foram nos invariantes operatórios que regem o conceito de divisão e suas diferentes formas de representações. Disto, percebe-se que é necessária uma intervenção ao lidar com este assunto no tocante às suas representações e operações.

A essência do conteúdo ensino de divisão bem como de multiplicação durante muito tempo foi de decorar tabuada e também trabalhar direto com algoritmo (PONTE; SERRAZINA, 2000 apud FERNANDES et al., 2015). Nos dias atuais essa situação ainda acontece, onde prioriza-se a memorização de regras, exercícios de arme e efetue, o que resulta em dificuldades no aprendizado do aluno.

Para construir um conceito faz-se necessária a interação do objeto de conhecimento com algum recurso didático. Quando este é de cunho tecnológico, o ambiente pode ser ainda mais prazeroso. A calculadora, por exemplo, abre possibilidades para esses momentos em sala de aula.

O USO DE CALCULADORA NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Podemos observar em nosso cotidiano que as inovações tecnológicas estão cada vez mais presentes em diversas situações. Um dos recursos tecnológicos que há algum tempo está presente na sociedade é a calculadora e apesar de ser um recurso até certo ponto já bastante acessível, ainda é vista com restrições por muitos educadores (SELVA, BORBA, 2010). Seguindo essa perspectiva, tendo em vista que a calculadora é um dos recursos tecnológicos que rodeia os indivíduos, as próprias escolas têm que trazer essa tecnologia para o ambiente escolar, junto com os professores.

A calculadora como recurso didático em sala de aula pode se tornar uma grande aliada para os estudantes no cotidiano escolar, sem comprometer o avanço no que diz respeito à aprendizagem, quando utilizada de forma planejada para construção do conhecimento matemático. É notória a alegria no rosto dos alunos quando o professor libera o uso desta ferramenta, entretanto, é sabido que o professor deve mediar essa utilização para que não fuja das expectativas que se quer alcançar.

Nesse sentido, segundo Bessa (2011), o Centro de Estudo e Pesquisa em Educação, Cultura e Educação Comunitária (CENPEC), destaca:

> Quando a calculadora é usada planejadamente nas aulas de Matemática, não inibe o pensamento, pelo contrário: tem um efeito motivador na resolução de problemas, estimula os processos de estimativa e cálculo mental, dá chance aos professores de propor problemas com dados mais reais e auxilia a elaboração de conceitos e a percepção de regularidade. (CENPEC, 1997).

Alguns autores como Gracias e Borba (1998) destacam que o uso da calculadora nas aulas de matemática seja um auxiliador na aprendizagem, enquanto outros acreditam que dificulta o raciocínio do aluno. Mocrosky (1997) apud Guinther (2008) defende que, "é importante que ele [professor] habite no mundo tecnológico em vez de sentir ameaçado por ele". (p. 193). É notório que muitos professores recusam a utilização desses recursos tecnológicos, podemos inferir, que isso ocorre muitas vezes em virtude de não terem sido preparados enquanto professores em formação, e assim, cultuarem o ensino mais tradicional.

Conforme Souza (2015), o não uso da calculadora por boa parte dos professores pode ser consequência do seu processo de formação, o que pode comprometer o ensino de matemática, por acreditarem que não seja uma ferramenta didática ou em virtude de não sentirem preparados perante o uso de tecnologias. Assim, é necessário o reconhecimento da calculadora, pelas instituições de ensino, como uma ferramenta que contribua para a construção do conhecimento matemático.

Segundo Lorente (2010), quanto ao uso da calculadora em sala de aula, os professores sustentam inverdades que acarretam em não as incorporar em suas práticas. Contudo, Santos e Jahn (2011) afirmam que o uso da calculadora "pode representar um avanço na medida em que o foco do ensino da matemática passa do operacional ou procedimental para o conceitual" (p.03). Posto isso, é preciso que os professores repensem suas práticas e utilize desse recurso tecnológico motivando o processo de aprendizagem.

Bigode (2006) ratifica a importância de conhecermos as propriedades da calculadora, compreendendo seus mecanismos e funções. Já Selva e Borba (2010, p.10) lembram que "não é todo o uso da calculadora que possibilita explorações conceituais, mas, sim, situações didáticas bem planejadas com objetivos claros e procedimentos bem selecionados". Nesse sentido, é preciso que os professores planejem bem as tarefas que serão trabalhadas explorando a calculadora como um todo ou parcialmente.

De acordo com Oliveira (1999) apud Guinther (2008):

> O uso da calculadora em sala de aula de Matemática é um dos meios que o professor de Matemática pode se utilizar para criar situações que levem a ele e seus alunos a refletir sobre a construção do conhecimento matemático e a socialização do saber, transformando a sala de aula em um ambiente propício à discussão, troca de experiências e de elaboração de estratégias para se construir uma nova sociedade brasileira. (OLIVEIRA, 1999 p.144)

Partindo dessa concepção, acreditamos que o uso da calculadora aproxima os alunos no que tange a socialização do saber e abre possibilidades para a construção de conceitos de algum objeto matemático.

ENSINO E APRENDIZAGEM COM DIVISÃO COM O USO DA CALCULADORA

A calculadora como recurso tecnológico no ensino de conteúdos matemáticos tem sido estudada em diversos trabalhos. Alguns desses têm apresentados resultados positivos. Medeiros (2000) analisou como crianças lidavam com a calculadora na resolução de problemas abertos, destacando que os alunos tiveram mais tempo para concentrar no processo de resolução do que na realização de cálculos repetitivos.

No trabalho de Groves (1994) a calculadora foi utilizada na resolução de problemas entre dois grupos de crianças, um com calculadora e o outro sem. Ela percebeu que o uso da calculadora favoreceu o desempenho das crianças, principalmente, nas questões que envolviam subtração com respostas negativas, divisão com resto, multiplicação e divisão de dinheiro, sendo possível estabelecer espontânea discussão matemática em sala de aula.

Segundo Jesus (2005),

> Compreender uma operação é saber utilizá-la adequadamente em situações do mundo real, é ter a percepção das suas propriedades, perceber as relações existentes entre as mesmas e ter um entendimento intuitivo dos efeitos de uma operação num par de números (JESUS, 2005, p. 93).

Tendo em vista o que afirma Jesus (2005), se compreendermos adequadamente uma operação, por exemplo, a divisão, e sabermos utilizá-la em situações do cotidiano bem como perceber regularidades entre as outras operações, teremos entendimento acerca das mesmas.

Selva *et al*. (2004) utilizou-se da calculadora para explorar aspectos das estruturas multiplicativos aplicadas nos problemas com divisão. No entanto, no estudo constatou-se que muitos alunos interpretaram erroneamente ao ler o valor em decimal que aparecia no visor da calculadora.

Diante do exposto, consideramos que há conceitos matemáticos que podem ser entendidos mediante a utilização da calculadora. E, para isso, o professor deve estar atento em contribuir de forma significativa para a aprendizagem do objeto matemático e buscando metodologias adequadas, com clareza de objetivos ao usar a calculadora em sala de aula.

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E AS TECNOLOGIAS

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento do governo federal de caráter normativo que norteia as equipes pedagógicas na elaboração dos currículos locais, estabelece habilidades e competências para cada etapa da educação básica visando que os alunos tenham as aprendizagens essenciais desenvolvidas ao longo das etapas.

No que concerne especificamente à matemática, a BNCC propõe cinco unidades temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas e Probabilidade e estatística. Neste trabalho limitamos a abordagem da temática Números apresentada no tópico Matemática no Ensino Fundamental-Anos Finais: Unidades temáticas, objetos de conhecimento. O documento traz como objeto de conhecimento "as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais e a divisão euclidiana" (BRASIL, 2017, p. 298).

A BNCC discute as quatro operações apenas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, limitando nessa fase, no que diz respeito ao cálculo, "acrescentar à realização dos algoritmos das operações, a habilidade de efetuar cálculos mentalmente, fazer estimativas, usar calculadora" (BRASIL, 2017, p.272). No entanto, essas ideias devem ser integradas a situações didáticas adequadas para o nível de ensino em questão, dando relevância aos registros pessoais tendo em vista às vivências cotidianas dos alunos.

O uso da tecnologia é apresentado em (BRASIL, 2017) em dois itens das dez competências gerais estabelecidas pelo documento. No item 4 diz respeito a utilizar diferentes linguagens –

verbal, corporal, visual, sonora e digital para obterem entendimento mútuo. Já no item 5, as tecnologias digitais são apresentadas de forma crítica, significativa, reflexiva e ética. Os dois itens se bem trabalhados têm impactos positivos no que diz respeito a aprendizagem e senso crítico do aluno.

Em se tratando do recurso tecnológico "calculadora", esta é apontada em (BRASIL, 2017) como habilidade relacionada às operações adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação com números naturais e a divisão euclidiana, propondo que sejam realizadas por meio de elaboração de problemas que envolvam cálculos com números naturais, com ou sem o uso da calculadora, sendo resolvidas por diversas estratégias.

O documento orienta que nos anos finais do Ensino Fundamental se utilize recursos didáticos como "malhas quadriculadas, ábacos, jogos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, incluindo a história da Matemática" (BRASIL, 2017, p.296). A utilização desses recursos, em especial, a calculadora, possibilita a familiarização com o objeto matemático e a formalizar os conceitos matemáticos, sendo a divisão um desses objetos que pode ser entendida pelo aluno a partir da exploração da calculadora.

Ao analisar a abordagem do objeto divisão e dos recursos utilizados para ensiná-lo trazidos por (BRASIL, 2017) percebe-se que, apesar de ser um documento atualizado, tem-se a ausência de um melhor enfoque e a necessidade de uma maior relevância em tratar das quatro operações bem como as habilidades para explorá-las, principalmente, a divisão nos anos finais do Ensino Fundamental.

As concepções de vários autores trazidos pela literatura como, por exemplo, Selva e Borba (2010), Souza (2015), Fernandes et.al (2015) bem como a análise nos documentos oficiais (BRASIL, 2017) deram fundamento para prosseguir com a pesquisa, visto que evidenciaram de forma mais detalhada o objeto matemático e a ferramenta calculadora, sentindo-se a necessidade em elaborar a tarefa a ser aplicada como meio de intervenção para conduzir novas posturas dos alunos frente às situações solicitadas.

A ABORDAGEM INSTRUMENTAL

Muitas são as situações atreladas ao uso da tecnologia em sala de aula que vêm sendo discutidas constantemente no campo científico, muitos deles têm o embasamento teórico na teoria da Instrumentação de Pierre Rabardel (1995), e como o teor dessa pesquisa tem como ferramenta a calculadora, que é objeto tecnológico, terá fundamentação nessa abordagem instrumental.

A Teoria da Instrumentação Rabardel (1995) apud Bittar (2011) permite investigar a ação do sujeito com instrumentos que vai além do campo da educação. Nela, é empregada duas palavras: artefato e instrumento. Enquanto o artefato é visto como um meio material ou um meio simbólico, o instrumento vai surgir a partir dos esquemas de ação praticados pelo sujeito com o artefato. Isso tudo ocorre por meio de um processo chamado Gênese Instrumental.

A Gênese Instrumental, segundo Rabardel (1995), compõe duas dimensões: instrumentalização e instrumentação.

> A instrumentalização vista como o processo de exploração e evolução do artefato para o instrumento: seleção, agrupamento, atribuição de propriedades, transformação do artefato (estrutura, funcionamento, etc). Instrumentação concerne ao processo relacionado com o surgimento e a evolução dos padrões de uso e ação instrumentada: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por alojamento, coordenando a combinação, inclusão e mútua assimilação, a assimilação de novos artefatos para esquemas já feitos (RABARDEL, 1995, p.111).

As duas dimensões configuram-se pelos esquemas de utilização, enquanto no processo da instrumentalização tem-se os esquemas de uso ligados ao artefato, no processo de instrumentação tem-se os esquemas de ação instrumentada designada ao sujeito. À medida que, nesse processo, surja a ação do sujeito sobre o artefato, este já transformado em instrumento, um novo instrumento pode aparecer, temos, então, que os dois esquemas são interligados, ou seja, dependem um do outro. É válido notar que cada sujeito constrói seu esquema durante o processo da gênese instrumental, pois cada um traz suas experiências, por outro lado, um mesmo artefato pode tornar-se um instrumento em uma tarefa e um momento depois ser transformado em outro instrumento pelo mesmo sujeito conforme a tarefa vai se modificando.

Além disso, Rabardel (1995) e Verillon (1996) *apud* Neves e Nagamine (2013) propuseram o Modelo Situações de Atividades Instrumentais - SAI para delinear as relações estabelecidas entre o sujeito, o objeto e o artefato, evidenciando as múltiplas interações nas atividades instrumentais, ditas: sujeito-objeto **[S-O]**, sujeito-instrumento **[S-i]**, o instrumento-objeto **[i-O]** e a relação sujeito-objeto mediado pelo instrumento **[S(i)-O]**. Nessa pesquisa, o sujeito é o aluno da Educação Básica, o artefato (instrumento) é a calculadora e o objeto Divisão.

A calculadora, muitas vezes, é considerada uma ferramenta sem significado quando não se conhece suas funções e sua aplicabilidade. A partir do momento em que o sujeito desenvolve habilidades em manuseá-la, explorá-la, tornando, assim, instrumento, ele apresenta seus esquemas de utilização que constituem "o conjunto estruturado dos caracteres generalizáveis das atividades de utilização dos instrumentos" (RABARDEL, 1999, p. 210 *apud* BITTAR, 2015).

Diante do exposto e considerando o objetivo de instrumentalizar a calculadora de forma integrada para a aprendizagem de divisão de números naturais, será trazida uma abordagem a respeito da calculadora enquanto artefato perpassando pelo processo da Gênese Instrumental, no qual, o sujeito incorpore seus esquemas de utilização, evoluindo para a condição de instrumento.

CAMINHOS METODOLÓGICOS

A fim de alcançar o objetivo da pesquisa foi desenvolvido uma proposta de intervenção utilizando a calculadora junto a uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 11 e 13 anos, de uma escola pública, municipal, localizada na cidade de Feira de Santana-BA. A princípio, na turma havia vinte e um alunos presentes, sendo dividida em nove duplas e um trio, os quais foram denotados por dupla "A", dupla "B" e assim por diante até a dupla I, incluindo o trio J. A divisão se deu pela natureza das questões e para obter uma melhor compreensão referente ao aporte teórico, mais especificamente, ao esquema de atividades coletivas instrumentais (RABARDEL,1995).

Num primeiro momento, foi conversado com os alunos sobre as atividades a realizar, o objetivo de cada uma delas e as orientações para dar andamento. Em seguida, os alunos, organizados em nove duplas e um trio, tomaram contato com a calculadora e a atividade com as situações propostas. Vale ressaltar que as calculadoras usadas pelos alunos foram levadas por nós, todas iguais, para que tivessem um maior entendimento quanto às funções. Vale salientar, também, que essa pesquisa foi realizada após explicitação para os participantes e da apresentação e assinatura do termo de consentimento e livre esclarecimento.

No que tange a análise de dados deste estudo, utilizamos a estrutura da pesquisa qualitativa tendo em vista sua natureza investigativa. Nela, trabalha com descrições, comparações e interpretações. É cabível ao pesquisador ir até o participante, identificar explicitamente seus vieses, valores e interesses pessoais em relação ao tópico e ao processo de pesquisa (CRESWELL, 2007).

O método de pesquisa qualitativa utilizado neste trabalho é a pesquisa de campo. Nesse método, segundo Gil (2002), a pesquisa é desenvolvida por meio da observação direta das atividades do grupo estudado. Dessa forma, utilizamos como instrumentos de coletas de dados, a observação com gravação em áudio, registro fotográfico, conversa informal com os alunos e as resoluções de situações-problema escritos.

APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO COM A CALCULADORA

Na referida análise, utilizamos elementos da abordagem instrumental de Rabardel (1995). Dessa forma, as atividades propostas estarão organizadas conforme os esquemas de utilização de Rabardel (1995), a saber: esquemas de uso[10], esquemas de ação instrumental[11] e esquemas de atividades coletivas instrumentais[12] buscando, assim, instigar as relações existentes entre o sujeito (alunos), objeto do saber (divisão) e o instrumento (calculadora).

A partir da conceituação de instrumento e artefato, apresentado por Rabardel (1995), temos que, inicialmente, a calculadora é vista como um mero artefato material e como o sujeito da pesquisa (alunos) não compreendiam suas funções foi trazido atividades explorando seus esquemas de utilização. À medida que o sujeito conhece a função e realiza as atividades, temos a transformação em instrumento para tal sujeito.

Quadro 1 - Atividades de esquema de ação

1. *Ligue a calculadora, que número aparece?*
2. Utilizando a calculadora, aperte as teclas:
a) 7 x 4====   *b) 1: 100====*
O que você observa?
3. *Aperte 18 M+3x5 M- 4÷2M+MRC. O que acontece?*

Fonte: autoras (2019)

No primeiro questionamento, os alunos não sentiram dificuldades. Já em relação ao passo seguinte que pedia para que eles operassem os números e apertassem a tecla de igualdade quantas vezes indicava na questão, alguns não levaram em consideração a quantidade de igualdades que apertaria e só deixaram como resultado o primeiro que apareceu, porém, outros conseguiram realizar a atividade e os que responderam o que acontece ao apertar a igualdade várias vezes, não perceberam a operação que envolvia em cada caso.

Vale ressaltar que no item b na qual dividiria 1 por 100 e apertaria a igualdade 4 vezes, alguns relataram que estava dando zero, isso ocorreu devido ao fato da calculadora limitar-se a

[10] correspondentes às atividades relativas à gestão das características e propriedades específicas do *artefato.*
[11] correspondentes às atividades para as quais o *artefato* é um meio de realização.
[12] correspondentes à utilização simultânea ou conjunta de um instrumento num contexto de atividades, respectivamente, compartilhadas ou coletivas.

apenas 8 números no visor. Devido a isso, foi pedido que eles apertassem a igualdade 3 vezes. Dessa forma, destacamos o esquema de uso trazido pelos sujeitos.

As respostas referidas ao quadro 1 demonstram o processo da gênese instrumental, ou seja, transformação de um artefato em instrumento. Nesse primeiro momento ocorre o que Rabardel (1995) denomina de instrumentação em que o sujeito constrói seus esquemas para utilizar o artefato.

Outra situação abrangendo a instrumentação foi dada para os alunos envolvendo as teclas de memória. Ao operar com essas teclas apenas quatro duplas (G, C, E, I) e o trio J acertaram o resultado numérico 5. Destes, apenas a dupla C e o trio responderam o que aconteceu ao apertar as teclas. As duplas (A, D, H) relataram apenas o que aconteceu ao apertar as teclas e duas duplas (F, B) erraram o resultado e não responderam ao pedido na questão. Observa-se no quadro 2, as respostas dos alunos nessa questão. Vale ressaltar que estas estão de acordo à escrita dos alunos:

Quadro 2 - Respostas dos alunos da questão 3

Dupla C: *"Sobra 5, ele pisca e aparece um M do lado"*
Dupla D: *"que o M- diminui e o M+ aumenta"*
Trio J*: "5. Percebi que M+ é memoria adiciona M- é memoria retirada e MRS é M+ e M- juntas"*

Fonte: autoras (2019)

Analisando as três situações nota-se que cada dupla apropriou da calculadora de modo particular, explorando, assim, a função das teclas de memória. Acreditamos que àqueles que se equivocaram no resultado não levaram em consideração que ao realizar a operação levaria seu resultado e depois apertaria a tecla de memória, por exemplo, 3x5 deu 15, com isso levo esse resultado à memória M- e não o 3x5 direto. Daí, temos que o sujeito constrói seus próprios esquemas para utilizar a ferramenta.

Na situação seguinte, ainda visando os esquemas de uso, a atividade é trazida com intuito de explorar as funções da calculadora exigindo que o aluno não utilize a tecla solicitada, no caso a tecla 6. Nessa atividade pode ser visto o esquema de ação instrumental, no qual, há a presença do objeto estudado e o artefato alcançando um meio de realização, fazendo com que ele relacione as ideias para encontrar a resposta.

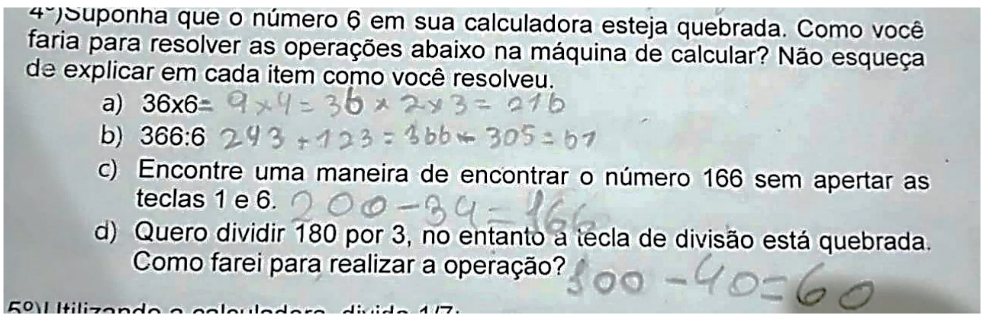
Quadro 3 - Esquemas de uso

Suponha que o número 6 em sua calculadora esteja quebrada. Como você faria para resolver as operações abaixo na máquina de calcular? Não esqueça de explicar em cada item como você resolveu. *a) 36x6* *b) 366:6* *c) Encontre uma maneira de encontrar o número 166 sem apertar as teclas 1 e 6.* *d) Quero dividir 180 por 3, no entanto, a tecla de divisão está quebrada. Como farei para realizar a operação?*

Fonte: autoras (2019)

Em todas as etapas "a", "b", "c" e "d", as duplas e o trio não explicaram detalhadamente como resolveria, apenas expressaram numericamente, como mostra a figura a seguir.

Figura 1 - resolução da atividade pelo trio J


4º)Suponha que o número 6 em sua calculadora esteja quebrada. Como você faria para resolver as operações abaixo na máquina de calcular? Não esqueça de explicar em cada item como você resolveu.

a) 36x6= 9x4=36 x 2x3= 216

b) 366:6 243+123=366 - 305=61

c) Encontre uma maneira de encontrar o número 166 sem apertar as teclas 1 e 6. 200-34=166

d) Quero dividir 180 por 3, no entanto a tecla de divisão está quebrada. Como farei para realizar a operação? 300-40=60

Fonte: autoras (2019)

Na etapa "a", as duplas B, C, D, I e o trio J usaram a ideia de usar os divisores de 36 para operá-los e encontrar o valor no visor da calculadora e fez a mesma ideia para operar com o 6 resultando na resposta 216. No item "b", as duplas E, A, G e o trio A levaram em consideração que já sabiam do resultado e usaram como estratégias os algoritmos da adição, subtração e multiplicação até chegar ao resultado esperado, ou seja, resolveram as contas e organizaram os cálculos a partir do resultado. As duplas D, H, C, B, I e F não responderam.

Apenas uma dupla usou a ideia de multiplicação na etapa "b", no entanto, também levou em consideração que já sabia do resultado e fizeram o dobro de 30,5 para encontrar 61. Além disso, fez a soma de parcelas iguais como confirmação, ocasionando equívoco ao expressar o que fizeram.

Na etapa "c", no qual pedia para encontrar o número 166 sem apertar as teclas 1 e 6, os alunos não tiveram dificuldades. Tivemos as seguintes respostas:

Quadro 4 - respostas dos alunos na etapa "c"

Dupla D: *"83 x 2"*
Trio J: *"200-34"*
Dupla I: *"eu usei 33 mais 33 e deu 60 adicionei mais duas de 50 e deu 100 ai deu o que faltava"*
Dupla A: *"83 x 2 ou 83+83"*

Fonte: autoras (2019)

A resposta da dupla D se repetiu na dupla E, a do trio J se repetiu na dupla C, a da dupla I nas duplas B, G e H, já a resposta da dupla A se repetiu na dupla F. Percebe-se que usaram os algoritmos da soma, subtração, multiplicação e em momento algum usou o algoritmo usual da divisão. Isso vai de acordo com a ideia de que cada sujeito constrói seu esquema durante o processo da gênese através de suas experiências e conhecimentos já adquiridos.

Na etapa "d", ao pedir para dividir 180 por 3 sem utilizar a tecla de divisão usaram a mesma ideia de já saberem o resultado e, a partir disso, operar para chegar nele. Para tanto, usaram os algarismos das quatro operações, enquanto as duplas B, F e H não responderam, as duplas C, D e I utilizaram o algoritmo da multiplicação, a dupla E utilizou o da subtração e adição simultaneamente, a dupla G utilizou apenas o da adição. Já o trio J utilizou o algoritmo da subtração bem como a dupla A que usou a ideia de subtração sucessivas.

Apenas a dupla I conseguiu responder à questão por completo fazendo uso da divisão como inversa da multiplicação e, ainda relaciona com a ideia de divisão por partição. Percebe-se que a dupla já está em um processo de instrumentalização mais avançada comparada aos demais, pois, já desenvolve habilidades ao manusear a calculadora mediando a relação dele enquanto sujeito da pesquisa com o objeto divisão.

Apenas uma dupla utilizou-se a ideia de divisão. Contudo, estratégias como a de realizar a conta primeiro e depois organizar os cálculos a partir do resultado, de certo modo instigaram os alunos pensaram em outro meio para resolver um problema que tinham em mãos, estabelecendo as relações do sujeito com o instrumento com seus diferentes esquemas de utilização.

As atividades seguintes vão de acordo a segunda dimensão da gênese instrumental, a instrumentalização, em que o sujeito passa a verificar as funções e ir além delas, explorando e criando novas possibilidades para esse instrumento. É nessa fase que presencia outra relação SAI, a do instrumento-objeto e mais fortemente, a relação sujeito e objeto mediado pelo instrumento.

A situação apresentada no quadro 5 consistia em comparar o resultado da operação feita na calculadora e essa mesma conta feita no papel visto que no papel o quociente terá resultado inteiro e na calculadora como número decimal. Observe a situação:

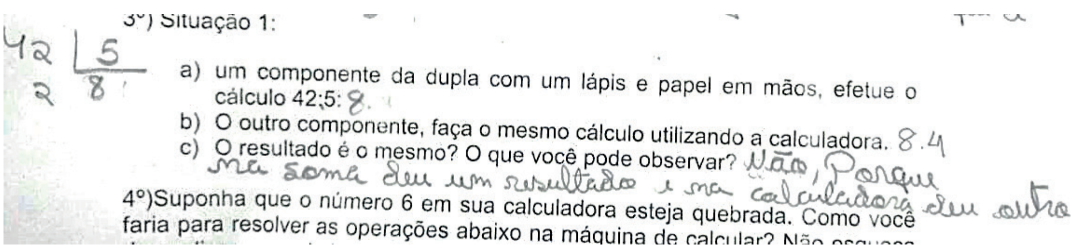
Quadro 5 - atividade de ação instrumentada

a) Um componente da dupla com um lápis e papel em mãos, efetue o cálculo abaixo: *Ex: 42:5* *b) O outro componente, faça o mesmo cálculo utilizando a calculadora* *c) O resultado é o mesmo? O que você pode observar?*

Fonte: autoras (2019)

Veja a resposta de uma das duplas à atividade:

Figura 2 - resolução da atividade pela dupla "H"


3º) Situação 1:

42 |5
2 8

a) um componente da dupla com um lápis e papel em mãos, efetue o cálculo 42:5: 8.

b) O outro componente, faça o mesmo cálculo utilizando a calculadora. 8.4

c) O resultado é o mesmo? O que você pode observar? Não, Porque na soma deu um resultado e na calculadora deu outra

4º)Suponha que o número 6 em sua calculadora esteja quebrada. Como você faria para resolver as operações abaixo na máquina de calcular?

Fonte: autoras (2019)

Observando a transcrição da dupla "H" percebe-se que usou corretamente o algoritmo da divisão, no entanto, afirmou que a resposta era diferente, e expressou a linguagem matemática erroneamente, chamando-a de soma. Assim como a dupla citada, a maioria teve pensamentos parecidos.

A partir da análise das respostas dos grupos, é possível compreender que a maioria não respondeu a situação, ou seja, não conseguiram realizar esquemas de uso e ação instrumentada e, aos que conseguiram, o maior desafio foi expressar seus esquemas de modo a identificar que o resultado seria o mesmo.

A situação seguinte tinha por objetivo desafiar os alunos a descobrir e perceber o que acontece com os resultados que obtêm no processo de divisão, sendo induzidos a levantar hipóteses sobre as escritas que aparecem no visor da calculadora e, assim, construir os significados desses números.

Quadro 6 - Atividades de ação instrumentada

Utilizando a calculadora, divida 1/7:

a) O que aconteceu com o resultado?

b) A partir do resultado que apareceu no visor da calculadora, qual seria o próximo algarismo que apareceria no quociente?

c) Agora divida na calculadora 2÷7, 3÷7, 4÷7, 5÷7, 6÷7. Anote os resultados e explique o que aconteceu em cada divisão. Ao dividir 7/7, o que você observa em relação ao resultado?

Fonte: as autoras (2019)

Inicialmente, pediu para dividir 1/7, num dos momentos uma dupla questionou que operação seria, pelo fato da escrita do número estar em forma de fração, percebe-se que o aluno não relaciona o símbolo de divisão com suas diversas maneiras de representá-la, apesar de vir explícito na questão que era para dividir. Ao realizar a divisão pedia para dizer o que acontece com o resultado, a dupla G e o trio J perceberam que os números passariam a repetir, as duplas A, D, F disseram que “apareceu vários números”. Já as duplas B, C, E, H e I não responderam.

Ao serem questionados sobre qual seria o próximo algarismo que apareceria no quociente no visor da calculadora, àqueles que perceberam a repetição, no caso, o trio J e a dupla G, responderam com facilidade.

Aos demais, como as duplas B e E afirmaram ser 0 considerando ser o número natural, a dupla I afirmou ser o número 1 levando em consideração o último número do visor e as demais duplas não responderam. Com isso, evidencia-se que estes expressaram seus esquemas de maneira equivocada.

No item c, que pedia para dividir *2÷7, 3÷7, 4÷7, 5÷7, 6÷7* e 7÷*7* e explicar o que aconteceu em cada resultado, obtivemos respostas do tipo:

Quadro 7 - respostas dos alunos ao item "c"

Dupla C*: "Em cada divisão apareceu vários números. Em relação ao 7/7 dá 1"*
Dupla B: *"que os números mudaram e se aproximam de um"*
Dupla A: *"que quando se divide com números menores que 7 os números diminuem"*
Dupla H: "*Eu percebi que mesmo o número é pequeno o resultado é grande"*

Fonte: autoras (2019)

Além disso, outros argumentos surgiram, tais como "todos os números se repetem e 7/7 deu 1" (trio J), "que o resultado está aumentando" (dupla D), "todos os resultados foram através de 0" (dupla I). As duplas E, F e G não responderam.

Analisar essa situação identificou-se que em relação a demonstrar seus esquemas de utilização, muitos sujeitos conseguiram construir significados para tais números, outros se aproximaram de tal objetivo e o restante não realizou esquemas. Como o esquema mais evidente era a de ação instrumentada, o meio de realização tinha que partir do artefato, cabendo ao sujeito interpretar os números que apareceriam no visor da calculadora.

Na situação final cujo objetivo seria verificar, por meio da relação fundamental da divisão, os resultados de problemas que envolvem divisões por intermédio da calculadora fora apresentada como a que mais se aproximava do objeto em questão e onde a presença da relação sujeito objeto mediado pelo instrumento era mais evidente. Vale ressaltar que foi preciso relembrá-los a relação fundamental da divisão mostrando-a na lousa.

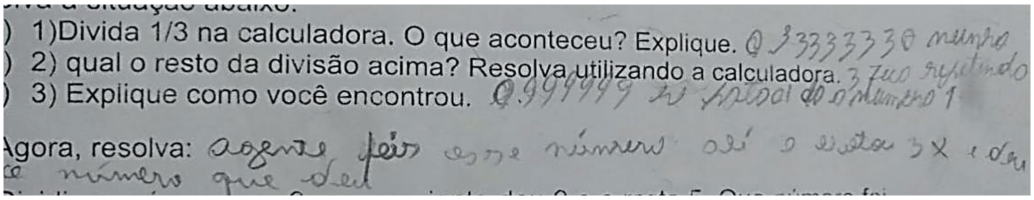
Quadro 8 - Atividades de ação instrumentadas

1. Divida 1/3 na calculadora. O que aconteceu? Explique. *2. Qual o resto da divisão acima? Resolva utilizando a calculadora.* *Explique como você encontrou.* *Agora, resolva:* *3. Dividi um número por 9, no quociente deu 9 e o resto 5. Que número foi esse? Utilize a calculadora.* *4. Como você chegou ao resultado?*

Fonte: autoras (2019)

Segue as respostas das duplas:

Figura 3 - resolução da atividade pela dupla "I"


1)Divida 1/3 na calculadora. O que aconteceu? Explique. 0,33333330 mesmo
2) qual o resto da divisão acima? Resolva utilizando a calculadora. 3 fica repetindo
3) Explique como você encontrou. 0,999999 ai voltou do o número 1

Agora, resolva: agente feis esse número ali o volta 3x e deu o número que deu

Fonte: autoras (2019)

No item 1, além da dupla I, as respostas se repetiram pelas duplas A, C, D, F e no trio J. Já a dupla H afirma que "aconteceu que o resultado aumentou". As duplas B, E e G não responderam. No item 2, ao solicitar o resto, o trio, as duplas C e H afirmaram ser 0 e ao explicar como encontrou disseram que foi por meio do cálculo 0.33333333 x 1. Percebe-se que eles consideraram apenas o número inteiro 0. Apenas a dupla I conseguiu responder à questão (figura 3).

A situação apresentada proporcionou ao sujeito verificar as potencialidades da calculadora quanto ao objeto Divisão, surgindo a relação instrumento-objeto, donde o sujeito vai atribuir a ação do instrumento no objeto, a instrumentalização entra a partir do momento em que enriquece as propriedades do artefato, ou seja, surge a relação sujeito-objeto mediada pelo instrumento.

Na segunda parte da situação, apenas 2 duplas D e H e o trio J conseguiram responder, os demais grupos afirmaram que não deu tempo, por isso não responderam.

De acordo com as devolutivas das respostas dos grupos, as duplas demonstram um certo entendimento acerca do objeto divisão sendo mediado pela calculadora que é transformada em um instrumento de aprendizagem. Apesar da dupla "H" cometer um erro conceitual em relação ao objeto, é preciso levar em consideração a ocorrência da relação [S(i)-O], pois proporcionou ao sujeito a realização da atividade.

Nessas situações, foi possível observar que eles sentiram dificuldades para compreender o que estava sendo pedido. Foi considerável relembrá-los os nomes dados às partes que compõem uma divisão (dividendo, divisor, resto e quociente). A partir disso, exploraram os esquemas de ação instrumentada para verificar a relação fundamental da divisão, no caso, não exata, nas quais temos: dividendo= divisor x quociente + resto. Disto, conclui-se que para calcular o resto, tem-se "resto=divisor x quociente – dividendo". Na calculadora, um dos esquemas que poderia ser utilizados seria por meio das teclas de memória.

Então, com base na análise dos resultados aqui apresentados, destaca-se que foram identificados os três esquemas de utilização propostos por Rabardel (1995). Os esquemas apresentados pelos alunos surgiram a partir de conjecturas, criação de hipóteses, de estratégias como encontrar respostas dos cálculos já sabendo do resultado e, com isso, criar esquemas para obter o resultado esperado. O esquema de atividades coletivas instrumentais foi observado durante as situações propostas por meio do diálogo entre os componentes das duplas e o trio, no qual, de maneira individual, expressava sua compreensão acerca da tarefa e com base nos argumentos do grupo construíam as ações de modo a atingir o objetivo da tarefa. É válido ressaltar que cada sujeito construiu seus esquemas a partir de suas experiências adquiridas ao longo do tempo. Portanto, com o uso da calculadora que, inicialmente, era um mero artefato, os sujeitos puderam criar esquemas de utilização e, assim, transformando-a em um instrumento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista o objetivo de instrumentalizar a calculadora de forma integrada para a aprendizagem de divisão de números naturais, fora desenvolvida uma proposta de intervenção em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, em uma escola municipal, em Feira de Santana-BA. Para tanto, a presente pesquisa expõe tanto o ensino de divisão quanto a utilização da calculadora na sala de aula perpassando pela análise da BNCC e observou-se que o documento não trata diretamente sobre a divisão, notando a ausência de um melhor aprofundamento. Quanto ao uso da calculadora, é estimulado por meio de situações de cunho exploratório para os alunos resolverem por diversas estratégias percebendo as regularidades matemáticas envolvidas.

O estudo sobre a divisão e a calculadora na literatura evidenciou-se que o não uso da calculadora por parte das instituições de ensino e, mais especificamente, na prática dos professores se dá pela falta do enfoque no processo de formação. Nisso, sustentam inverdades como a inibição do pensamento dos alunos, a dependência deles quanto ao uso, e assim, escolhem não entrar na zona de risco. No tocante ao ensino de divisão observou-se que o professor deve estar atento em contribuir na aprendizagem do objeto matemático pelos alunos. Nesse sentido, a busca por estratégias de exploração, como o uso da calculadora, é fundamental para construir conceitos, perceber regularidades.

A análise feita da tarefa de intervenção nos remete a pensar como foram construídos os esquemas dos sujeitos para responder as questões, o comportamento deles durante esse processo e o ambiente ao qual estavam inseridos, a repercussão momentânea, na qual alguns alunos relataram que gostaram da atividade e de manusear a calculadora, demonstrando interesse por atividades de mesma natureza.

Observamos que os esquemas utilizados pelos alunos se deram desde a busca de estratégias que os mantinham seguros quanto a resolução, como a ideia de utilizarem algoritmos da adição, subtração e multiplicação para chegar ao resultado esperado, a utilizar esquemas de uso que eram interferidos por suas experiências anteriores, reconstruindo, dessa forma, o conhecimento para si. Nota-se que, em relação as dificuldades apresentadas, destacam-se: expressar a linguagem matemática cometendo erros conceituais, em interpretar a questão e entrar em convergência com o que aparecia no visor da calculadora, em responder as questões de caráter investigativo, por não estarem habituados com questões de tal natureza.

Destaca-se o empenho dos alunos em procurar resolver as situações propostas. Em algumas das situações apresentadas, alguns sentirem dificuldades em respondê-las, daí surgiu a necessidade de intervir a fim de alcançar o objetivo da situação requerida. A percepção da limitação dos números no visor da calculadora bem como das funções de certas teclas, usar a divisão como inversa da multiplicação, a construção dos significados dos números construídos por alguns alunos e a aproximação de tal objetivo por outros, estão dentre os resultados encontrados na tarefa.

Elaborar e propor tarefas pensando em como contribuir na aprendizagem do ensino ligado ao do objeto matemático utilizando de recursos didáticos como a calculadora, contribui no desenvolvimento de estratégias na resolução destas tarefas bem como experimentar novas abordagens tornando um instrumento de aprendizagem para o professor, que planejará a ação, e, especialmente, para os alunos, que vivenciarão situações diferentes em sala de aula.

Por fim, embasados nesse estudo notamos que o uso de tarefas que permitam a utilização da calculadora leva os alunos a investigar o objeto matemático em questão, possibilita que eles se expressem, fazendo observações e conclusões pertinentes. Nesse sentido, a abordagem instrumental (RABARDEL, 1995) ofereceu-nos subsídios necessários para analisarmos as tarefas propostas, os esquemas utilizados pelos alunos para solucioná-las e o discurso que expressaram para fundamentar esses esquemas.

REFERÊNCIAS

ABRE, C. X. PRADO, M. GEHHANNY, A. Entendendo o Algoritmo da Divisão. Curitiba 2011.

BENVENUTTI, L. C. **A operação divisão: um estudo com alunos de 5ª série**. 2008. p. 61. Dissertação (Mestrado) – UNIVALE, Itajaí, SC, 2008.

BESSA, J. B. R. **Uso da calculadora em sala de aula**. 2011. p. 53. Monografia (Licenciatura em matemática à distância) - Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2011.

BIGODE, A. J. L. **Matemática hoje é feita assim**. Manual do professor. São Paulo: FTD, 2002.

BITTAR, M. Uma proposta para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica de professores de matemática. Revista: **EM TEIA**, vol. 6 - número 3, p. 1-20. 2015.

BORBA, R. E. S. R.; SELVA, A. C. V. Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero: o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. In: ANPED, 29., 2006, Caxambu. **Anais...** ANPED, 2006. p. 1-16.

BRASIL. Secretaria De Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** / Secretaria de Educação Fundamental. - Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Educação é a Base. Brasília, MEC/ CONSED/UNDIME, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br> 2018/02. Acesso em 17 de novembro de 2018.

BRITO, M. F.; CORREA, J. **Divisão e representação no processo de solução de problemas aritméticos**. Pedagogia Cidadã: cadernos de formação. Educação Matemática. São Paulo, 2004.

CAMPOS, E. G. J de. **As dificuldades na aprendizagem da divisão: análise da produção de erros de aluno do ensino fundamental e sua relação com o ensino praticado pelos professores.** 2008. 220p. Dissertação (Mestrado em Educação) Centro de Educação da Universidade Católica Dom Bosco, Campo Grande, 2008.

CENPEC – **Ensinar e Aprender 2**. Curitiba, PR: SEED, 1998.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa. Métodos qualitativos, quantitativos e misto.** Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. 2ª ed. – Porto Alegre: ARTMED, 2007.248 p.

CUNHA, M. C. C. **As operações de multiplicação e divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries**. 1997. Dissertação (Mestrado) – PUC, São Paulo, 1997.

FERNANDES, J. A. S. et al. O ensino e aprendizagem de divisão com números naturais, por meio da resolução de problemas, no ensino fundamental. In: XII Congresso Nacional de Educação, 7, ***Anais* eletrônicos...** Curitiba, Paraná: EDUCERE, 2015, p. 1-12. Disponível em: <https://educere.bruc.com.br/arquivo/pdf2015/17545_10641.pdf>. Acesso em: 05 feve. 2019.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. - 4. ed. - São Paulo: Atlas, 2002. 176 p.

GRACIAS, T. DE S.; BORBA, M. DE C. Calculadoras gráficas e Funções Quadráticas. **Revista de Educação Matemática**, v. 6, n. 4, p. 27 - 32, 11.

GROVES, S. The effect of calculator use on third and fourth graders' computation and choice of calculating device. In: PME 18, vol.3. Lisboa / Portugal. 1994.

GUINTHER, A. **O Uso das Calculadoras nas Aulas de Matemática: concepções de professores, alunos e mães de alunos**. São Paulo, 2008.

JESUS, A. M. Construir o conceito de divisão, resolvendo problemas: um estudo de caso. In: GTI (Org.). **O professor e o desenvolvimento curricular.** Lisboa: Associação de Professores de Matemática - APM, 2005, p. 91-111.

MEDEIROS, K. A influência da calculadora na resolução de problemas matemáticos abertos. In: VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, 8, 2004, **Anais eletrônicos**... Recife, Pernambuco: SBEM, 2004. p. 1-18. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/06/CC77270991472.pdf. Acesso em: 03 fev. 2019.

MOCROSKY, L. F. **Uso de Calculadoras em aulas de matemática: o que os professores pensam**.1997. 206 p. Dissertação (Mestrado)- UNESP, Rio Claro, SP: 1997.

NEVES, X. L.; NAGAMINE, L. M. C. Aplicação de uma sequência didática com o uso do software maxima para o ensino e a aprendizagem de polinômios. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática,11, 2013, **Anais eletrônicos**... Curitiba, Paraná: SBEM, 2013. p. 1-14. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/1650_594_ID.pdf>. Acesso em: 05/02/2019.

OLIVEIRA, J.C.G. **A visão dos professores de Matemática do Estado do Paraná em relação ao uso de calculadoras nas aulas de Matemática**. 1999. 160 p. Tese (doutorado)- Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. 1999. Disponível em: < http://repositorio.unicamp.br/jspui/handle/REPOSIP/251058>. Acesso em: 03 de fev. 2019.

PONTE, J. P. da; SERRAZINA, M. L. **Didáctica da matemática do 1º ciclo**. Lisboa: Universidade Aberta, 2000.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: A. Colin, 1995.

SANTOS, M. A.; JAHN, A. P. **O uso da calculado no ensino de Matemática nas séries iniciais: concepções de um grupo de estudantes de Pedagogia**. In: Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Disponível em: <http://livrozilla.com/doc/1674341/uso-da-calculadora-no-ensino-de-matem%C3%A1tica-nas-s%C3%A9ries-ini... >. Acesso em: 15 out. 2018.

SANTOS, C. A. Algoritmo da divisão de números naturais na 6ª série do ensino fundamental. **LUME**. Porto Alegre 2010. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/31624. Acesso em: 23 de nov. 2018.

SELVA, A.C.V. BORBA, R.E.S.R. O uso da calculadora nos anos iniciais do ensino fundamental**.** Belo Horizonte: **Autêntica**, 2010.

SOUZA, E. S. **Uma proposta de utilização efetiva da calculadora padrão no ensino de potência**. 2015. 182 p. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia- UFBA, Salvador, BA, 2015.

SOUZA, V.N.K. As operações de multiplicação e divisão nas séries iniciais do ensino fundamental. **RIC-FFC**- UNESP, Marília, SP: 2008. Disponível em: https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/ric/article/view/272. Acesso em: 03 de fev de 2019.

VIANA, H.B. P. **Algoritmo da divisão em quatro regras**. 2015. Dissertação (Mestrado) – UNIFAP, Amapá, 2015.

INVENTÁRIO DE CONTEÚDOS MATEMÁTICOS IDENTIFICADOS NA RESOLUÇÃO DE QUESTÕES DE MATEMÁTICA DO ENEM (2013-2017)

Inventory of mathematical contents identified in the resolution of questions of mathematics of ENEM (2013-2017)

Angela Meneghello Passos

Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual de Londrina – UEL. Docente do Instituto Federal do Paraná – IFPR – Campus Londrina. *E-mail*: angela.passos@ifpr.edu.br.

Filipe Ricardo de Carvalho Hasché

Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ. Docente do Instituto Federal do Paraná – IFPR – Campus Londrina. *E-mail*: filipe.hasche@ifpr.edu.br.

Marinez Meneghello Passos

Doutora em Educação para a Ciência pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP. Docente Sênior da Universidade Estadual de Londrina – UEL. Londrina – PR. Docente colaboradora da Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP – Campus Cornélio Procópio. *E-mail*: marinezpassos@uel.br. Com apoio do CNPq.

Sergio de Mello Arruda

Doutor em Educação pela Universidade de São Paulo – USP. Docente Sênior da Universidade Estadual de Londrina – UEL. Londrina – PR. *E-mail*: sergioarruda@uel.br. Com apoio do CNPq.

Resumo: Este artigo apresenta um inventário dos conteúdos matemáticos do ensino básico que foram identificados na resolução das questões do ENEM da área de Matemática e suas Tecnologias no quinquênio 2013-2017. Para esse inventário de conteúdos utilizou-se os temas estruturadores e as unidades temáticas do ensino da Matemática de acordo com o PCNEM+ (BRASIL, 2009). No desenvolvimento da investigação foram resolvidas e analisadas 225 questões, sendo 45 para cada ano de aplicação. Entre os resultados encontrados destaca-se que o conteúdo relativo a números racionais foi o mais recorrente na resolução das questões do ENEM no período investigado, sendo solicitado em aproximadamente 38% das questões de cada ano. Evidenciou-se também que cerca de 44% dos conteúdos indicados no PCNEM+ (BRASIL, 2009), não foram solicitados ou muito pouco exigidos para a resolução das questões analisadas. Esses resultados mostram tendências nas provas do ENEM, fato que pode orientar ações pedagógicas para o Ensino Médio, possibilitando a elaboração de estratégias de revisão e aprofundamento do domínio dos estudantes em relação aos conteúdos que fazem parte dos currículos do Ensino Fundamental; e que há uma divergência entre os documentos nacionais PCNEM+ e o ENEM em relação aos conteúdos matemáticos que são recomendados por um e que não são destacados de forma valorativa no outro.

Palavras-chave: ENEM. PCNEM+. Ensino e aprendizagem de Matemática.

Abstract: This article presents an inventory of the mathematical contents of basic education that were identified in the resolution of the questions of the area of Mathematics and its Technologies of ENEM (National High School Exam) in the period 2013-2017. For this content inventory we used the structuring themes and thematic units of mathematics teaching according to PCNEM + (BRAZIL, 2009). In the development of the research 225 questions were solved and analyzed, being 45 questions for each year of application. Among the results presented, it is noteworthy that the content related to rational numbers was the most recurrent in solving ENEM's questions in the period investigated, being requested in approximately 38% of the questions each year. It was also evidenced that about 44% of the contents indicated in PCNEM + (BRAZIL, 2009), were not requested or very little required for the resolution of the analyzed questions. These results show trends in the ENEM tests, a fact that can guide pedagogical actions for high school, enabling the development of strategies for reviewing and deepening students' mastery of the contents that are part of elementary school curricula; and that there is a divergence between the national documents PCNEM + and the ENEM regarding the mathematical contents that are recommended by one and not valued in the other.

Keywords: ENEM. PCNEM+. Teaching and Learning Mathematics.

INTRODUÇÃO

O Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) foi implantado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) em 1998. Esse exame tem como objetivo principal "aferir se aqueles que dele participam demonstram, ao final do Ensino Médio, individualmente, domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna e se detêm conhecimento das formas contemporâneas de linguagem" (BRASIL, 2017, p.40).

Os resultados desse exame de âmbito nacional, de acordo com a Portaria n. 468 de 2017 do Ministério da Educação (MEC), devem possibilitar:

> I – a constituição de parâmetros para a autoavaliação do participante, com vistas à continuidade de sua formação e a sua inserção no mercado de trabalho;
>
> II – a criação de referência nacional para o aperfeiçoamento dos currículos do Ensino Médio;
>
> III – a utilização do Exame como mecanismo único, alternativo ou complementar para acesso à educação superior, especialmente a ofertada pelas instituições federais de educação superior;
>
> IV – o acesso a programas governamentais de financiamento ou apoio ao estudante da educação superior;
>
> V – a sua utilização como instrumento de seleção para ingresso nos diferentes setores do mundo do trabalho; e
>
> VI – o desenvolvimento de estudos e indicadores sobre a educação brasileira (BRASIL, 2017, p.40).

Devido à importância que o ENEM vem adquirindo no sistema educacional brasileiro desde sua implantação, principalmente, como acesso à educação superior, é interessante que se desenvolvam pesquisas, que tenham esse exame por objeto a ser investigado, a fim de que os resultados dessas elaborações práticas e teóricas possam orientar ações docentes e estabelecer um patamar de aprimoramento para o sistema educativo nacional.

A concretização dessas pesquisas que possuem o ENEM como foco de estudos pode ser observada, por exemplo, na plataforma *SciELO – Scientific Electronic Library Online*. Em uma procura nessa biblioteca eletrônica, considerando o período de postagem que vai do ano de 2013 a 2019, e utilizando como busca a palavra ENEM, chegou-se a um total de 64 artigos, dos quais 35 deles foram publicados nos anos de 2017 a 2019, o que mostra um aumento das investigações envolvendo o ENEM nos últimos anos. Essa tendência também é notável no catálogo de teses e dissertações da Capes (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior). Entre os doutorados, mestrados e mestrados profissionalizantes concluídos no período de 2013 a 2018, encontra-se um total de 801 trabalhos tendo o ENEM como foco investigativo, sendo que nos últimos três anos concentram-se, aproximadamente, 58% das publicações.

Conforme Broietti, Santin Filho e Passos (2014, p.240):

> [...] embora o Brasil tenha avançado na coleta de dados e nos sistemas de avaliação, ainda é preciso construir mecanismos para que os resultados sejam utilizados por gestores e professores de modo a melhorar a qualidade do ensino oferecido. Fica evidente que existe o desafio de construir a ligação entre a avaliação e a sala de aula, para que estes exames não fiquem apenas com a função de traçar diagnósticos e que possam, de fato, contribuir para o aperfeiçoamento do sistema educacional. Neste sentido, torna-se importante a realização de pesquisas que tenham como objeto de estudo investigar e refletir acerca dessas avaliações.

"O ENEM, junto ao SISU[13], tornou-se uma das principais vias de acesso ao Ensino Superior público, democratizando as oportunidades e possibilitando a mobilidade acadêmica" (INEP, 2018, p.5). E as dificuldades que os estudantes apresentam em relação ao conteúdo matemático abordado nesse exame, atingindo em 2017, como resultado da área de conhecimento Matemática e suas Tecnologias, uma *Proficiência Média Geral de 518,5* (INEP, 2018), impulsiona a realização dessa pesquisa, a fim de que se possam evidenciar aspectos, tendências, perspectivas, e configurações inerentes a esta área específica da educação.

Em função dos encaminhamentos assumidos, esta pesquisa é considerada de cunho bibliográfico, com característica de um "estado da arte" ou, como apreciado por Romanowski e Ens (2006, p.40, grifo dos autores), "o estudo que aborda apenas um setor das publicações sobre o tema estudado vem sendo denominado 'estado do conhecimento'". Pesquisas dessa natureza são abrangentes e apontam caminhos e aspectos relevantes de um determinado campo investigativo. Elas analisam, categorizam e destacam perspectivas variadas, não se restringindo a uma identificação da produção.

> A análise do campo investigativo é fundamental neste tempo de intensas mudanças associadas aos avanços crescentes da ciência e da tecnologia. A literatura especializada tem evidenciado de maneira imperativa a necessidade de acompanhar o desenvolvimento, as transformações e inovações que buscam tornar os campos da educação e seus profissionais cada vez mais competentes para atender, com propriedade, aos anseios daqueles que vêm conquistando o direito à educação (ROMANOWSKI; ENS, 2006, p.39).

Um estudo como esse pode revelar temáticas, conteúdos, contextos recorrentes, relevantes ou ainda emergentes; apontar novas tendências; orientar práticas pedagógicas; ordenar as informações existentes; detectar lacunas ou falhas; entre outros aspectos.

[13] SISU: Sistema de Seleção Unificada (mais informações em http://sisu.mec.gov.br/inicial).

> [...] a identificação, caracterização e análise do "estado do conhecimento" sobre determinado tema é fundamental no movimento ininterrupto da ciência ao longo do tempo. Assim, da mesma forma que a ciência se vai construindo ao longo do tempo, privilegiando ora um aspecto ora outro, ora uma metodologia ora outra, ora um referencial teórico ora outro, também a análise, em pesquisas de "estado do conhecimento" produzidas ao longo do tempo, deve ir sendo paralelamente construída, identificando e explicitando os caminhos da ciência, para que se revele o processo de construção do conhecimento sobre determinado tema, para que se possa tentar a integração de resultados e, também, identificar duplicações, contradições e, sobretudo, lacunas, isto é, aspectos não estudados ou ainda precariamente estudados, metodologias de pesquisa pouco exploradas (SOARES; MACIEL, 2000, p.6, grifo dos autores).

Portanto, para nortear o desenvolvimento desta investigação elaboramos a seguinte questão de pesquisa: Quais são os conteúdos matemáticos necessários para a resolução das questões do ENEM da área de Matemática e suas Tecnologias? E o objetivo é apresentar um inventário dos conteúdos matemáticos do ensino básico, que foram identificados na resolução das questões do ENEM da área de Matemática e suas Tecnologias no quinquênio 2013-2017, assumindo como inventário "qualquer descrição detalhada, minuciosa de algo", de acordo com o Dicionário Houaiss (HOUAISS; VILLAR; FRANCO, 2009, p.1105).

Na continuidade deste artigo trazemos alguns esclarecimentos a respeito: dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, documento que orientou nossa sistematização no que diz respeito à listagem dos conteúdos matemáticos; dos procedimentos metodológicos assumidos; da organização e interpretação dos dados e dos resultados emergentes; das considerações conclusivas.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS PARA O ENSINO MÉDIO

Nessa pesquisa desenvolvemos uma relação dos conteúdos matemáticos do ensino básico abordados nas questões da área de Matemática e suas Tecnologias, os quais foram obtidos mediante a resolução de cada uma das questões. Todavia, para se chegar a tal elucidação foi necessário acomodar os conteúdos descritos em grupos, tendo como pauta os temas estruturadores (TE) de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2009). A escolha do PCNEM+ deve-se ao fato de tal documento ter

> [...] entre seus objetivos centrais, o de facilitar a organização do trabalho da escola, em termos dessa área de conhecimento. Para isso, explicita a articulação das competências gerais que se deseja promover com os conhecimentos disciplinares e apresenta um conjunto de sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos que, coerente com tal articulação, estabelece temas estruturadores do ensino disciplinar na área (BRASIL, 2009, p.7).

Para se chegar aos conteúdos matemáticos do ensino básico indicados no PCNEM+ foi feita uma leitura da seção *Temas estruturadores do ensino de Matemática* (BRASIL, 2009). A partir de tal estudo encontrou-se três temas estruturadores: Álgebra (números e funções); Geometria e medidas; Análise de dados.

De acordo com esse documento, para a organização do ensino dos TE, cada um foi separado em unidades temáticas (UT). Assim, o TE Álgebra – números e funções – foi dividido em duas UT – variação de grandezas e trigonometria. Porém, de acordo com nossa interpretação, essas duas unidades temáticas não englobavam todos os conhecimentos matemáticos descritos para esse TE e que se encontram, como descrito no documento, “na parte flexível do currículo” (BRASIL, 2009, p.122). Levando tal dissonância em consideração, foram criadas para esse primeiro TE, três unidades temáticas extras: números e operações; sistemas lineares; equações polinomiais. Ou seja, o TE Álgebra – números e funções – ficou composto por cinco UT: variação de grandezas; trigonometria; números e operações; sistemas lineares; equações polinomiais.

O TE Geometria e medidas foi dividido, conforme o documento, em quatro UT: geometria plana; geometria espacial; métrica; geometria analítica. O TE Análise de dados, em três UT: estatística; contagem; probabilidade. Para esses dois TE não foi necessário criar unidades temáticas extras, pois não foram evidenciadas dissonâncias na leitura completa do documento.

A partir do estabelecimento das UT foram organizados estudos e registros sobre os conteúdos matemáticos pertencentes a cada uma delas. Partes dessa sistematização podem ser consultadas nos Quadros 1, 2 e 3, respectivamente, para cada um dos três TE indicados nos parágrafos anteriores.

No Quadro 1, têm-se os conteúdos relativos ao TE Álgebra, considerando as cinco UT pertinentes ao tema. Na terceira coluna elencamos todos os conteúdos descritos no PCNEM+ relativos a cada UT, sendo que para sua organização eles não foram colocados em ordem alfabética, mas na ordem em que foram identificados no documento em pauta.

Quadro 1 - Conteúdos das UT do TE Álgebra: números e operações

Tema estruturador (TE)	**Unidades temáticas (UT)**	**Conteúdos**
1 – Álgebra: números e operações	1 – Variação de grandezas	1) Noção, conceito, propriedades e aplicação de função
		2) Funções e seus gráficos
		3) Funções analíticas e não analíticas
		4) Representação, interpretação e análise gráfica
		5) Sequências numéricas, leis de formação e propriedades
		6) Sequências e seus gráficos
		7) Conceito de sequência crescente e decrescente
		8) Sequências numéricas: progressões e noções de infinito e de convergência
		9) Variações exponenciais ou logarítmicas
		10) Função seno, cosseno e tangente
		11) Taxa de variação e dependência de grandezas
		12) Conjuntos
		13) Relações
	2 – Trigonometria	14) Trigonometria no triângulo retângulo
		15) Trigonometria no triângulo não retângulo
		16) Trigonometria da primeira volta
		17) Cálculo de distâncias inacessíveis
		18) Fenômenos periódicos
	3 – Números e operações	19) Cálculos de natureza financeira
		20) Porcentagem
		21) Campos numéricos dos números reais
		22) Números complexos
		23) Equações de variáveis ou incógnitas reais
		24) Propriedades das operações no conjunto dos números reais
		25) Operações válidas para o cálculo algébrico
		26) Expressões
		27) Igualdades e desigualdades
		28) Números decimais e fracionários
		29) Estimativa
		30) Valores numéricos aproximados
	4 – Sistemas lineares	31) Matrizes
		32) Determinantes
		33) Sistemas lineares
	5 – Equações polinomiais	34) Equações polinomiais (grau > 2)

Fonte: adaptado de Brasil (2009)

Como pode ser averiguado no quadro anterior, o primeiro TE possui cinco UT que acomodam 34 itens, os quais abrangem os conteúdos a eles pertencentes.

No Quadro 2, mantendo o mesmo padrão do Quadro 1, têm-se os conteúdos de cada UT do TE Geometria e medidas. Destaca-se que, por medida de organização das informações e, por consequência da retomada das mesmas, para as interpretações e destinação de origem, a numeração que acompanha cada TE, UT e listagem de conteúdo seguirá em ordem crescente em relação ao quadro anterior, ou seja, há uma continuidade das numerações indicadas nos Quadros 1, 2 e 3.

Quadro 2 - Conteúdos das UT do TE Geometria e medidas

Tema estruturador (TE)	Unidades temáticas (UT)	Conteúdos
2 – Geometria e medidas	6 – Geometria plana	35) Semelhança e congruência
		36) Representações de figuras
		37) Mapas, plantas de construções
		38) Escalas
		39) Lados, ângulos, diagonais
		40) Figuras inscritas e circunscritas
	7 – Geometria espacial	41) Elementos dos poliedros, sua classificação e representação
		42) Sólidos redondos
		43) Propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo
		44) Inscrição e circunscrição de sólidos
		45) Projeções, planificações, cortes e desenhos
		46) Postulados, axiomas, teoremas e as demonstrações
	8 – Métrica	47) Áreas e volumes
		48) Estimativa, margens de erro, valor exato e aproximado
		49) Medidas
		50) Comprimentos, distâncias, perímetros
		51) Grandezas
	9 – Geometria analítica	52) Representações no plano cartesiano e equações
		53) Intersecção e posições relativas de figuras (pontos, retas, circunferências, parábolas)
		54) Plano cartesiano

Fonte: adaptado de Brasil (2009)

Como podemos observar, no Quadro 2 o segundo TE possui quatro UT que acomodam 20 itens, relativos aos conteúdos afetos a essas unidades.

Por fim, no Quadro 3 foram inseridos os conteúdos de cada UT relativa ao TE Análise de dados.

Quadro 3 - Conteúdos das UT do TE Análise de dados

Tema estruturador (TE)	**Unidades temáticas (UT)**	**Conteúdos**
3 – Análise de dados	10 – Estatística	55) Descrição de dados, tabelas
		56) Representações gráficas, gráficos
		57) Análise de dados: amostras, levantamento e análise de dados, médias, moda e mediana, variância e desvio padrão
	11 – Contagem	58) Princípio multiplicativo
		59) Problemas de contagem (princípio aditivo)
		60) Análise combinatória (permutação / arranjo / combinação)
	12 – Probabilidade	61) Possibilidades
		62) Cálculo de probabilidade

Fonte: adaptado de Brasil (2009)

Quantificando o que temos no terceiro TE, chegamos a três UT com 8 itens relacionados aos conteúdos.

Ao retomarmos os três quadros anteriores, têm-se 62 itens que dão um panorama geral dos conteúdos, segundo os estudos realizados com base nos temas estruturadores de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2009).

Trazemos a seguir esclarecimentos relativos à sistematização das informações registradas durante a resolução das questões dos exames e algumas organizações realizadas, pois ficaria inviável apresentar a completude de todo o processo em um artigo.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Como indicado em momentos anteriores, foram resolvidas e analisadas 225 questões da área de Matemática e suas Tecnologias do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) dos anos 2013, 2014, 2015, 2016 e 2017(um quinquênio), sendo 45 questões para cada ano de aplicação. As provas do ENEM foram selecionadas virtualmente pelo endereço http://portal.inep.gov.br/web/guest/provas-e-gabaritos. Cabe esclarecer que as questões de Matemática fazem parte do segundo dia de aplicação do exame, em que consta a prova de Ciências da Natureza e suas Tecnologias e a prova de Matemática e suas Tecnologias. Em todos os anos foi selecionado pelos pesquisadores, aleatoriamente, o caderno de cor cinza para a sequência de resolução das questões.

Inicialmente, constituímos um acervo com as questões que, em seguida, foram solucionadas e, paralelamente a isso, descritos os conteúdos matemáticos do ensino básico necessários para sua solução, de acordo com os TE de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2009), expostos nos três quadros apresentados na seção anterior deste artigo. Ressalta-se que uma mesma questão pode contemplar vários conteúdos relacionados, ou seja, todos aqueles que são necessários de 'serem pensados ou considerados' para sua resolução.

A fim de interpretar as questões, suas resoluções e a relação dos conteúdos mobilizados para solucioná-las, realizamos algumas análises quantitativas para justificar diversas inferências e conclusões estabelecidas. As informações provenientes desse processo analítico passaram por uma organização com o intuito de que tais resultados subsidiassem práticas docentes de professores de Matemática do Ensino Médio e contribuíssem com melhorias no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Destaca-se, ainda, que fizemos uso de procedimentos qualitativos e quantitativos para alcançar o objetivo de inventariar os conteúdos matemáticos necessários para a resolução das 225 questões do ENEM, o que vem ao encontro do que foi descrito por Günther (2006) a respeito da escolha entre a pesquisa qualitativa e a pesquisa quantitativa:

> Enquanto participante do processo de construção de conhecimento, idealmente, o pesquisador não deveria escolher entre um método ou outro, mas utilizar as várias abordagens, qualitativas e quantitativas que se adéquam à sua questão de pesquisa. [...] Em suma, a questão não é colocar a pesquisa qualitativa *versus* a pesquisa quantitativa, não é decidir-se pela pesquisa qualitativa ou pela pesquisa quantitativa. A questão tem implicações de natureza prática, empírica e técnica. Considerando os recursos materiais, temporais e pessoais disponíveis para lidar com uma determinada pergunta científica, colocam-se para o pesquisador e para a sua equipe a tarefa de encontrar e usar a abordagem teórico-metodológica que permita, num mínimo de tempo, chegar a um resultado que melhor contribua para a compreensão do fenômeno e para o avanço do bem-estar social. (GÜNTHER, 2006, p.207).

ORGANIZAÇÃO DOS RESULTADOS E DAS INTERPRETAÇÕES

Considerando a organização possibilitada por tal leitura analítica, passamos então à resolução das questões, ao registro e à organização dos conteúdos que cada uma delas solicitava para sua resolução, e nos quadros seguintes acomodamos alguns dos resultados possibilitados por tais análises.

Inicialmente tem-se a quantidade de questões relativas a cada TE (Quadro 4), apresentada ano a ano do quinquênio considerado. Após esses resultados, nos aprofundamos no estudo dessas evidências buscando as Unidades Temáticas (UT) relacionadas a cada TE (Quadro 5), também organizadas ano a ano. Por fim, elaboramos dois quadros: no Quadro 6 as incidências das UT em ordem decrescente; no Quadro 7, os conteúdos em ordem decrescente de incidência e a média de questões por ano em que esses conteúdos foram solicitados para a resolução das questões.

Cabe esclarecer que tais apresentações poderiam ser outras, ou seja, essas informações provenientes do processo interpretativo, pelo qual os dados e os registros passaram, poderiam ser organizadas de outra forma. Contudo, nossa escolha foi essa, pois ela corrobora com um objetivo secundário que possuímos: 'que é o de divulgar esses resultados junto a professores que ensinam Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio'.

Quadro 4 - Quantidade de questões por ano em que aparece cada TE

TE \ Ano	2013	2014	2015	2016	2017
1 – Álgebra: números e operações	38	34	40	30	27
2 – Geometria e medidas	29	19	25	22	19
3 – Análise de dados	9	12	10	10	10

Fonte: elaborado pelos autores

Ao observar esta forma de organização das informações, fica evidente que o primeiro TE é o mais recorrente em todos os anos. Na linha referente a ele temos: 38; 34; 40; 30; 27. Quantidades estas sempre maiores do que as observadas nas duas linhas subsequentes.

Ao buscarmos uma justificativa para esse resultado, consideramos o fato de que o primeiro TE (retomar Quadro 1) possui maior quantidade de itens de conteúdos (34), seguido pelo segundo TE, com 20 itens de conteúdos e, por fim, o terceiro TE, com apenas 8 itens para acomodar os conteúdos.

Tais considerações levam-nos a inferir que o PCNEM+ pode estar balizando o que vem sendo explicitado no ENEM, ou seja, a Álgebra é o TE com a maior quantidade de conteúdos relacionados a ele, e, por conseguinte, é o TE com maior incidência nas questões do ENEM nos anos analisados. Relembrando que em uma mesma questão pode ser contemplado mais de um TE.

Diante dessas constatações, interpela-se: Qual seria a UT da Álgebra com maior incidência nas questões do ENEM? E nos outros dois TE, qual UT receberia destaque? A busca por respostas a essas duas questões conduziu-nos a outro movimento de análise, cujos resultados são apresentados na sequência.

Considerando que em uma mesma questão pode-se encontrar mais de uma UT, e retomando todos os registros de resolução das 225 questões com a indicação de quais conteúdos matemáticos elencados nos 62 itens, foi necessário 'pensar' para encontrar a solução de tal questão, elaboramos o Quadro 5.

Quadro 5 - Quantidade de questões por ano em que aparece cada UT

TE	Ano / UT	2013	2014	2015	2016	2017
1 – Álgebra: números e operações	1 – Variação de grandezas	8	7	7	9	14
	2 – Trigonometria	2	0	2	0	3
	3 – Números e operações	28	28	31	22	16
	4 – Sistemas lineares	0	0	0	0	2
	5 – Equações polinomiais	0	0	0	0	0
2 – Geometria e medidas	6 – Geometria plana	9	5	6	5	6
	7 – Geometria espacial	2	6	1	3	2
	8 – Métrica	13	14	13	12	13
	9 – Geometria analítica	5	1	5	4	3
3 – Análise de dados	10 – Estatística	4	9	4	7	3
	11 – Contagem	3	3	2	2	5
	12 – Probabilidade	2	1	4	1	3

Fonte: elaborado pelos autores

Observando as UT do primeiro TE, constata-se que as unidades de números 2, 4 e 5 possuem pouca ou nenhuma incidência nas questões analisadas nos anos de 2013 a 2017. Todavia, as unidades de número 1 e 3 apareceram em questões de todos os anos analisados, porém o de maior destaque foi para a unidade 3 (sombreada no quadro anterior), que se dedica aos conteúdos: números e operações matemáticas. Se não bastasse esse destaque, esta UT sobressaiu-se em relação às demais dos segundo e terceiro TE, que comparativamente também sombreamos no mesmo quadro.

No que diz respeito ao TE – Geometria e medidas –, todas as UT apareceram em todos os anos analisados, as de menor incidência foram as unidades 7 e 9, seguidas pela unidade 6. A Unidade Temática – Métrica, a mais recorrente, apresenta-se em 65 das 225 questões analisadas.

Com relação ao terceiro TE – Análise de dados –, as atenções recaem sobre a UT 10 – Estatística – solicitada em todos os anos com maior ou igual recorrência em relação às demais, UT 11 – Contagem e UT 12 – Probabilidade, as quais não deixaram também de ser solicitadas na resolução do ENEM em qualquer um dos anos avaliados.

No Quadro 6, optamos por organizar as UT em ordem decrescente de incidência, facilitando assim uma leitura do que mais foi preciso ‘pensar’ para solucionar as questões. Para isso, na coluna 1, além da UT com sua numeração de origem, denominadas de 1 a 12, colocamos inicialmente o número de 1 a 3, representante do TE a que ela pertence. Na última coluna do quadro apresentamos a média de questões por ano em que houve a remissão a ela, lembrando que em cada ano o ENEM é elaborado com 45 questões.

Quadro 6 – UT em ordem decrescente de incidência

Ano / TE/UT	2013	2014	2015	2016	2017	Total	Média de questões por ano
1/3 – Números e operações	28	28	31	22	16	125	25
2/8 – Métrica	13	14	13	12	13	65	13
1/1 – Variação de grandezas	8	7	7	9	14	45	9
2/6 – Geometria plana	9	5	6	5	6	31	6,2
3/10 – Estatística	4	9	4	7	3	27	5,4
2/9 – Geometria analítica	5	1	5	4	3	18	3,6
3/11 – Contagem	3	3	2	2	5	15	3
2/7 – Geometria espacial	2	6	1	3	2	14	2,8
3/12 – Probabilidade	2	1	4	1	3	11	2,2
1/2 – Trigonometria	2	0	2	0	3	7	1,4
1/4 – Sistemas lineares	0	0	0	0	2	2	0,4
1/5 – Equações polinomiais	0	0	0	0	0	0	0

Fonte: elaborado pelos autores

Pelo quadro anterior pode-se verificar que as cinco UT que mais aparecem nas questões analisadas são: Números e operações; Métrica; Variação de grandezas; Geometria plana; Estatística. Suas médias de questões ano a ano variam de 25 a 5 questões, aproximadamente. Em contraponto, temos nas linhas subsequentes as demais UT que precisaram ser acionadas para a resolução das questões em menos de 4 questões/ano.

Diante do panorama apresentado no Quadro 6, procurou-se pela frequência dos conteúdos (C) matemáticos solicitados, lembrando que eles foram relacionados em 62 itens descritos anteriormente. No Quadro 7 trazemos essa organização, destacando tais conteúdos em ordem decrescente de evidência.

Como pode ser verificado, a seguir, na coluna 1 temos a descrição de cada um dos 62 conteúdos, acompanhado de numerações entre parênteses, as quais estão relacionadas à TE, UT e C, respectivamente. Nas colunas 2 e 3, elencamos o total de questões em que determinado conteúdo foi solicitado para resolução da questão e a média de questões/ano em que esta solicitação ocorreu. Cabe ressaltar que conteúdos com mesma quantidade de ocorrência foram agrupados e que em uma mesma questão pode-se encontrar mais de um conteúdo.

Quadro 7 - Conteúdos em ordem decrescente de incidência

Descrição do conteúdo e código (TE/UT/C)	Total[14]	Média de questões por ano
Números decimais e fracionários (1/3/28)	84	16,8
Áreas e volumes (2/8/47)	36	7,2
Porcentagem (1/3/20); Expressões (1/3/26)	34	6,8
Equações de variáveis ou incógnitas reais (1/3/23)	30	6
Representação, interpretação e análise gráfica (1/1/4)	26	5,2
Propriedades das operações no conjunto dos números reais (1/3/24); Igualdades e desigualdades (1/3/27)	24	4,8
Medidas (2/8/49)	21	4,2
Comprimentos, distâncias, perímetros (2/8/50)	19	3,8
Análise de dados: amostras, levantamento e análise de dados, médias, moda e mediana, variância e desvio padrão (3/10/57)	18	3,6
Valores numéricos aproximados (1/3/30)	16	3,2
Noção, conceito, propriedades e aplicação de função (1/1/1); Funções analíticas e não analíticas (1/1/3)	15	3
Taxa de variação e dependência de grandezas (1/1/11)	14	2,8
Funções e seus gráficos (1/1/2)	13	2,6
Representações no plano cartesiano e equações (2/9/52)	11	2,2
Representações de figuras (2/6/36); Projeções, planificações, cortes e desenhos (2/7/45)	10	2
Lados, ângulos, diagonais (2/6/39); Princípio multiplicativo (3/11/58); Cálculo de probabilidade (3/12/62)	9	1,8
Mapas, plantas de construções (2/6/37); Escalas (2/6/38); Grandezas (2/8/51); Plano cartesiano (2/9/54); Representações gráficas, gráficos (3/10/56); Análise combinatória (permutação/arranjo/combinação) (3/11/60)	8	1,6
Descrição de dados, tabelas (3/10/55)	7	1,4
Semelhança e congruência (2/6/35); Sólidos redondos (2/7/42); Possibilidades (3/12/61)	6	1,2
Trigonometria no triângulo retângulo (1/2/14); Estimativa (1/3/29); Problemas de contagem (princípio aditivo) (3/11/59)	5	1
Sequências numéricas, leis de formação e propriedades (1/1/5); Função seno, cosseno e tangente (1/1/10); Cálculos de natureza financeira (1/3/19); Figuras inscritas e circunscritas (2/6/40)	4	0,8
Campos numéricos dos números reais (1/3/21); Elementos dos poliedros, sua classificação e representação (2/7/41)	3	0,6

[14] Soma da incidência dos conteúdos de 2013 a 2017.

Fenômenos periódicos (1/2/18); Operações válidas para o cálculo algébrico (1/3/25); Sistemas lineares (1/4/33); Propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo (2/7/43)	2	0,4
Conjuntos (1/1/12); Trigonometria no triângulo não retângulo (1/2/15)	1	0,2
Sequências e seus gráficos (1/1/6); Conceito de sequência crescente e decrescente (1/1/7); Sequências numéricas: progressões e noções de infinito e de convergência (1/1/8); Variações exponenciais ou logarítmicas (1/1/9); Relações (1/1/13); Trigonometria da primeira volta (1/2/16); Cálculo de distâncias inacessíveis (1/2/17); Números complexos (1/3/22); Matrizes (1/4/31); Determinantes (1/4/32); Equações polinomiais (grau > 2) (1/5/34); Inscrição e circunscrição de sólidos (2/7/44); Postulados, axiomas, teoremas e as demonstrações (2/7/46); Estimativa, margens de erro, valor exato e aproximado (2/8/48); Intersecção e posições relativas de figuras (pontos, retas, circunferências, parábolas) (2/9/53)	0	0

Fonte: elaborado pelos autores

Torna-se fácil constatar, na leitura do Quadro 7, que o conteúdo Números decimais e fracionários (1/3/28) foi o que se sobressaiu em relação aos demais conteúdos. Sendo o mais recorrente no quinquênio avaliado, tal conteúdo fez-se presente em, aproximadamente, 17 questões por prova. Cabe destacar, ainda, que em várias questões ele acompanhou outros conteúdos, que estão acomodados nas seguintes UT: 6 – Geometria plana; 7 – Geometria espacial; 8 – Métrica; 9 – Geometria analítica; 10 – Estatística, resultados esses que não foram apresentados aqui, em função da quantidade de páginas que essas relações entre os Conteúdos e suas Unidades Temáticas tomariam. Contudo, pode-se ressaltar que este conteúdo faz parte da Base Nacional Comum Curricular– BNCC – (BRASIL, 2019) para a etapa do Ensino Fundamental.

Dando continuidade à leitura do Quadro 7, tem-se que Áreas e volumes (2/8/47), Porcentagem (1/3/20) e Expressões (1/3/26) foram conteúdos solicitados na resolução de cerca de sete questões/ano por prova. Assim como argumentado anteriormente, esses conteúdos também fazem parte da BNCC (BRASIL, 2019) para a etapa do Ensino Fundamental. Com uma frequência média em seis questões encontra-se: Equações de variáveis ou incógnitas reais (1/3/23). Logo a seguir, com a recorrência em, aproximadamente, 5 questões tem-se: Representação, interpretação e análise gráfica (1/1/4); Propriedades das operações no conjunto dos números reais (1/3/24); Igualdades e desigualdades (1/3/27). Na continuidade da leitura desse mesmo quadro, podem-se observar todos os demais conteúdos com quatro ou menos solicitações de recurso para a resolução das questões do ENEM do quinquênio 2013-2017.

Voltemos, agora, nossos olhares para a última linha do quadro, em que estão relacionados os conteúdos que não apareceram em quaisquer questões dos anos analisados. Perfazendo um total de 15 conteúdos, o que representa 24,19% do total de conteúdos extraídos do PCNEM+, ou seja, quase um quarto dos conteúdos indicados no PCNEM+ não foi abordado no processo de resolução das questões do ENEM no quinquênio em estudo.

Se acrescentarmos a esse grupo os conteúdos que apareceram, em média, em menos de uma questão por ano (12 conteúdos – cuja incidência varia de 0,2 a 0,8), a porcentagem sobe para 43,55%, ou seja, aproximadamente dois quintos dos conteúdos deixaram de ser solicitados para a resolução das questões nos exames considerados nesta pesquisa.

Outras possibilidades de leitura dos quadros podem ser realizadas. A seguir, para finalizar esta seção, trazemos mais uma delas, a qual se dedica a comparar as informações organizadas nos Quadros 6 e 7, relacionando as UT mais recorrentes e os C de maior frequência correspondentes a cada uma delas.Os resultados foram os seguintes:

- Números e operações (UT 3) – Números decimais e fracionários (84 questões das 225 solicitam esse conteúdo para sua resolução); Porcentagem (34); Expressões (34); Equações de variáveis ou incógnitas reais (30); Propriedades das operações no conjunto dos números reais (24); Igualdades e desigualdades (24); Valores numéricos aproximados (16).
- Métrica (UT 8) – Áreas e volumes (36 questões das 225 solicitam esse conteúdo para sua resolução); Medidas (21); Comprimentos, distâncias, perímetros (19).
- Variação de grandezas (UT 1) – Representação, interpretação e análise gráfica (26 questões das 225 solicitam esse conteúdo para sua resolução); Noção, conceito, propriedades e aplicação de função (15); Funções analíticas e não analíticas (15); Taxa de variação e dependência de grandezas (14); Funções e seus gráficos (13).
- Estatística (UT 10) – Análise de dados: amostras, levantamento e análise de dados, médias, moda e mediana, variância e desvio padrão (18 questões das 225 solicitam esse conteúdo para sua resolução).

Pode-se dar continuidade a esta elaboração, porém optou-se por finalizar com a recorrência do conteúdo – Funções e seus gráficos – tendo sido solicitado 13 vezes na resolução das 225 questões solucionadas.

A UT 6 – Geometria plana – encontra-se em destaque no Quadro 6, ocupando a quarta linha, com uma média de 9 questões por ano, todavia conteúdos relacionados a ela aparecem no Quadro 7 a partir de 10 questões, relativas ao C 36 – Representações de figuras. Por isso, não foram relacionadas nos itens anteriores, pois como já informado, interrompeu-se a leitura integrada quando atingimos o total 13 (ver Quadro 7).

Com relação ao processo de resolução das 225 questões do ENEM, ressaltamos que na lista do Quadro 7 estão presentes todos os conteúdos necessários para a resolução das questões em análise.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção de considerações, apresentamos alguns destaques sobre o levantamento realizado, que buscou organizar e desenvolver um estudo a respeito das questões de Matemática do ENEM no período de 2013 a 2017, inventariando os conteúdos necessários para a resolução das 225 questões presentes nesses exames.

Inicialmente, indica-se que o inventário focado nos conteúdos matemáticos, solicitados para a resolução das questões da área de Matemática e suas Tecnologias no ENEM de 2013 a 2017, contribuiu para orientar a prática de docentes que atuam no Ensino Médio em um Instituto Federal. Consequentemente, como um desdobramento dessa contribuição possibilitou a melhoria do ensino e trouxe avanços para a aprendizagem da Matemática, os dados coletados que permitem apresentar essas constatações não fazem parte do foco analítico dos resultados que foram apresentados neste artigo. Contudo, eles mediaram ações pedagógicas, ajustes em ementas e aprimoramento em currículos do Ensino Médio, em uma instituição federal de ensino básico, técnico e tecnológico.

Com relação às análises realizadas, elas indicaram que o conteúdo – C 28 – Números decimais e fracionários, ou seja, números racionais (na forma fracionária e decimal), foi o mais recorrente nas provas do ENEM no quinquênio avaliado, sendo solicitado para a resolução, aproximadamente, em 17 das 45 questões por prova, que representa 38% das questões.

Como já indicado, o C 28 não foi solicitado com exclusividade nessas 17 questões por prova, mas sim agregado a outros conteúdos das unidades temáticas relacionadas à Geometria, Medidas e Estatística.

Todavia, o que salta aos olhos é que para se chegar ao êxito na solução das questões,os estudantes do Ensino Médio precisam saber resolver problemas com números racionais, conteúdo este que faz parte da etapa do Ensino Fundamental.

Na sequência dos conteúdos mais recorrentes encontram-se Áreas e volumes, Porcentagem e Expressões. Esses conteúdos, que também fazem parte da etapa do Ensino Fundamental, estiveram presentes, aproximadamente, em 7 questões por prova, ou seja, em 16% das questões.

Os resultados apresentados nesse artigo mostram tendências nas provas do ENEM. Fato que pode orientar ações pedagógicas para o Ensino Médio (como já aconteceu em uma unidade de um Instituto Federal), possibilitando a elaboração de estratégias para revisar e aprofundar o domínio dos estudantes em relação aos campos: Números racionais; Áreas e volumes; Porcentagem; Expressões; conteúdos estes que fazem parte dos currículos do Ensino Fundamental.

Da forma como os dados foram tratados percebe-se, também, que alguns conteúdos preconizados pelos PCNEM+ não apareceram em questões dos anos analisados. São eles: Sequências e seus gráficos; Conceito de sequência crescente e decrescente; Sequências numéricas: progressões e noções de infinito e de convergência; Variações exponenciais ou logarítmicas; Relações; Trigonometria da primeira volta; Cálculo de distâncias inacessíveis; Números complexos; Matrizes; Determinantes; Equações polinomiais (grau > 2); Inscrição e circunscrição de sólidos; Postulados, axiomas, teoremas e as demonstrações; Estimativa, margens de erro, valor exato e aproximado; Intersecção e posições relativas de figuras (pontos, retas, circunferências, parábolas). O que representa 24,19% do total de conteúdos extraídos do PCNEM+, ou seja, quase 25% dos conteúdos indicados no PCNEM+ não foram 'cobrados' no processo de resolução das questões do ENEM no quinquênio analisado.

Reunindo a esse grupo os conteúdos que apareceram, em média, em menos de uma questão por ano (Sequências numéricas, leis de formação e propriedades; Função seno, cosseno e tangente; Cálculos de natureza financeira; Figuras inscritas e circunscritas; Campos numéricos dos números reais; Elementos dos poliedros, sua classificação e representação; Fenômenos periódicos; Operações válidas para o cálculo algébrico; Sistemas lineares; Propriedades relativas à posição: intersecção, paralelismo e perpendicularismo; Conjuntos; Trigonometria no triângulo não retângulo), tem-se que a porcentagem de conteúdos indicados no PCNEM+ e que não foram 'trabalhados' ou foram 'pouco trabalhados' nas questões do ENEM, sobe para 43,55%.

Dessa forma, verifica-se uma divergência entre os documentos nacionais PCNEM+ e o ENEM em relação aos conteúdos matemáticos que são recomendados por um e que não são solicitados quando da aplicação do outro, ou seja, os 'parâmetros' elencam como importantes, porém o 'exame' não solicita na resolução de qualquer questão. Essa divergência entre esses documentos e suas consequências, pode constituir-se como foco para futuras investigações.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 9 out. 2019.

BRASIL. **PCNEM+ ensino médio**: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2009. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 8 out. 2019.

BRASIL. Portaria n. 468, de 3 de abril de 2017. Dispõe sobre a realização do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, e dá outras providências. **Diário Oficial da União**: seção 1, Brasília, DF, ano 154, n. 65, p. 40, 4 abr. 2017. Disponível em: http://pesquisa.in.gov.br/imprensa/jsp/visualiza/index.jsp?data=04/04/2017&jornal=1&pagina=40&totalArquivos=284. Acesso em: 5 out. 2019.

BROIETTI, Fabiele Cristiane Dias; SANTIN FILHO, Ourides; PASSOS, Marinez Meneghello. Mapeamento da produção científica brasileira a respeito do Enem (1998-2011). **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 14, n. 41, p. 233-260, jan./abr. 2014. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/2347/2263. Acesso em: 1 out. 2019.

GÜNTHER, Hartmut. Pesquisa qualitativa *versus* pesquisa quantitativa: esta é a questão? **Psicologia**: teoria e pesquisa, Brasília, v. 22, n. 2, p. 201-210, maio/ago. 2006. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ptp/v22n2/a10v22n2.pdf. Acesso em: 31 jul. 2018.

HOUAISS, Antônio; VILLAR, Mauro de Salles; FRANCO, Francisco Manoel de Mello. **Dicionário Houaiss da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Microdados Enem 2017**: leia-me. Brasília: Inep, 2018. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/web/guest/microdados. Acesso em: 30 set. 2019.

ROMANOWSKI, Joana; ENS, Romilda. As pesquisas denominadas do tipo “estado da arte” em educação. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 6, n. 19, p. 37-50, set./dez. 2006. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/index.php/dialogoeducacional/article/view/24176/22872. Acesso em: 28 set. 2019.

SOARES, Magda Becker; MACIEL, Francisca Pereira (org.). **Alfabetização**. Brasília: MEC/INEP/Comped, 2000. (Série Estado do Conhecimento, 1). *E-book*. Disponível em: http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484330/Alfabetiza%C3%A7%C3%A3o/f9ddff4f-1708-41fa-82e5-4f2aa7c6c581?version=1.3. Acesso em: 8 out. 2019.

ADIÇÃO DE FRAÇÃO EM LIVROS DIDÁTICOS DO 6º ANO: DIFERENTES SIGNIFICADOS E CARACTERÍSTICAS DAS QUANTIDADES

Onésimo Rodrigues Pereira

Mestre em Matemática (UFT) - Professor na Secretaria Municipal de Educação de Palmas (SEMED). E-mail: onesimorodrigues92@gmail.com

Idemar Vizolli

Doutor - Professor em programas de Mestrado da Universidade Federal do Tocantins (UFT) e Integrante da Rede Amazônia de Ensino de Ciências e Matemática (REAMEC). E-mail: idemar@uft.edu.br

Euvaldo de Souza Carvalho

Mestre em Matemática (UFT) - Professor na Secretaria Municipal de Educação de Palmas (SEMED). E-mail: euvaldocarvalho@yahoo.com.br

Roney Feliciano da Silva

Mestre em Matemática e Especialista em Ensino de Matemática (UFT). E-mail: feliciano@mail.uft.edu.br

José Ailton Rodrigues Soares

Mestre em Matemática (UFT) - Professor do Instituto Federal do Tocantins (IFTO). E-mail: ailton.rs@hotmail.com.

Resumo: O presente trabalho tem como objetivo verificar o modo como os livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental, aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2020, tratam o conceito de adição de fração, considerando os diferentes significados e as características das quantidades. Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, cujos resultados mostram que os livros abordam parcialmente o significado parte-todo e dão pouca atenção às características das quantidades. Quanto ao processo de solução das situações que envolvem adição de fração, os autores apresentam heterogeneidade nas propostas, principalmente em relação ao método de redução das frações ao mesmo denominador, e minimizam a utilização do Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

Palavras-chave: Livros Didáticos. PNLD 2020. Adição de fração.

ADDITION OF FRACTION IN 6TH YEAR DIDATIC BOOKS: DIFFERENT MEANINGS AND CHARACTERISTICS OF QUANTITIES

Abstract: The present work aims to verify the way the 6th grade elementary school textbooks, ap-proved in the Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2020, deal with the concept of fraction addition, considering the different meanings and the characteristics of the quantities. It is a qualitative research, the results of which show that the books partially address the meaning of part-whole and pay little attention to the characteristics of quantities. As for the solution of situations involving the addition of a fraction, the authors present het-erogeneity in the proposals, mainly in relation to the method of reducing fractions to the same denominator, and minimizing the use of the Least Common Multiple (LCM).

Keywords: Didatic Books. PNLD 2020. Fraction Addition.

INTRODUÇÃO

A adição de fração é tema recorrente em discussões entre os que se dedicam ao ensino de matemática na Educação Básica. Certamente o educador que teve a oportunidade de trabalhar esse conceito com os estudantes, já se lamentou, em momento posterior, ao constatar que poucos conduzem o processo corretamente. Frações equivalentes, MMC, representação geométrica, multiplicação pela sequência dos números naturais ou pelos denominadores… São tantas frases/fórmulas prontas, as quais são propostas aos estudantes na adição de fração, que muitos se confundem e, pouco tempo após o estudo, não se recordam do conceito.

Ao consultar o Dicionário Aurélio, constatamos que, dentre os significados da palavra fração, tem-se, dos aspectos matemáticos, a relação parte-todo, a divisão e a relação com os números decimais. Vejamos, a seguir, a definição apresentada por Ferreira (2010).

> fra.ção [Lat. Fractione. 2] sf. 1. Parte de um todo. 2. Mat. Número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais. [Pode ser escrita em forma decimal, como, p. ex., 0,5 ou 0,375; ou na forma de divisão entre 2 números inteiros, um acima outro abaixo de um traço: $\frac{1}{2}$ […] (FERREIRA, 2010 p. 360).

No dia a dia da sala de aula, é muito presente essa(e) definição/significado no estudo de fração. E além disso, professores e (consequentemente) estudantes, ao se depararem com uma adição do tipo $\frac{2}{8}+\frac{3}{6}$, provavelmente, aplicam o algoritmo a seguir:

- ✓ Inicialmente, decompõem-se os denominadores em fatores primos conforme a Figura 1.

Figura 1 - Algoritmo para o cálculo do MMC entre dois números

$$\begin{array}{r|l} 8,6 & 2 \\ 4,3 & 2 \\ 2,3 & 2 \\ 1,3 & 3 \\ 1,1 & \end{array}$$

Fonte: Os autores

- ✓ Em seguida, o MMC é calculado mediante a multiplicação dos fatores encontrados:

$$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$$

- ✓ Daí, segue a adição substituindo os denominadores iniciais pelo MMC calculado:

$$\frac{2}{8}+\frac{3}{6}$$

$$\frac{}{24}+\frac{}{24}$$

- ✓ Os numeradores são encontrados da seguinte forma: $24 \div 8 = 3$ e $3 \times 2 = 6$ (primeiro numerador); $24 \div 6 = 4$ e $4 \times 3 = 12$ (segundo numerador);

$$\frac{6}{24}+\frac{12}{24}$$

- ✓ Finalmente, adicionam-se os numeradores e conservam-se os denominadores.

$$\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$$

É importante salientar que esse método de adição de fração deixa de explorar outros modos de operar matematicamente, como por exemplo: $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, ou ainda que $\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, e portanto, teríamos $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. Também não é explorado a relação fração-decimal, haja vista que $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0{,}25$; $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5$; e $\frac{3}{4}=0{,}75=0{,}25+0{,}5$. Os exemplos aqui apresentados caracterizam a fração enquanto número, bem como uma relação parte-todo. Na sequência, tem-se a equivalência, seguido da relação fração-decimal.

Os métodos de abordagem de adição de fração são amplamente discutidos em artigos e trabalhos de conclusão de cursos de graduação e pós-graduação, haja vista que estudos comprovam a dificuldade de estudantes e de professores em lidar com fração, tanto assim que

> os relatórios de avaliações oficiais, como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação Comparada (PISA) e o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), confirmam o consenso apontado nos estudos brasileiros e internacionais entre as décadas de 1980 e 1990: as dificuldades de alunos e de professores em lidar com o conceito de número racional – tomado, no geral, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo [...] (FAVERO e NEVES, 2012, p. 36).

É importante ressaltar que, na maioria das vezes, o conceito e problemas envolvendo fração são tratados de forma isolada na sala de aula. Entretanto, são cobrados com uma vasta gama de outros conceitos nas avaliações educacionais.

No ensino de fração para o 6º ano do ensino fundamental, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe “Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações” (BRASIL, 2017, p. 303). Outrossim, propõe as habilidades:

> (EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
>
> (EF06MA11) Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora (BRASIL, 2017, p. 303).

Os livros didáticos disponibilizados às Unidades Escolares são elaborados em consonância com as propostas da BNCC e, por vezes, são assumidos como único material a ser utilizado pelos estudantes em seu processo de aprendizagem. Ocorre que nem sempre as abordagens dos conceitos matemáticos presentes nos livros didáticos são apresentadas aos estudantes e, tampouco, orientações advindas de estudos e pesquisas realizadas em cursos *stricto sensu*. Ao invés disso, muitos professores preferem a utilização de algoritmos, os quais devem simplificar e agilizar a resolução de problemas. Barros (2018) comenta sobre o ensino desse conceito por meio de aulas "tradicionais" e seus efeitos, vejamos:

> O que tem sido observado é que o ensino desse conceito se caracteriza por aulas tradicionais, privilegiando a comunicação de conteúdo. Essa metodologia de ensino pode levar os professores a estacionar seus "modos de ensinar" na zona do conforto, onde não há confrontos, nem espaços para perguntas e reflexão daquilo que está sendo ensinado. Desse modo, os professores passam a exercer total controle sobre a aula, privilegiando a realização de exercícios com o objetivo de memorização (BARROS, 2018, p. 31).

Carvalho (2017, p. 14), por sua vez, descreve sobre a necessidades de rupturas na abordagem do ensino de fração, bem como da responsabilidade da escola no desenvolvimento de práticas pedagógicas que sanem as dificuldades dos estudantes, objetivando evitar lacunas consideráveis na construção do saber em tela.

Percebido a problemática em que se insere o processo de ensino e aprendizagem de fração, bem como o fato de ministrarmos aulas de Matemática na Educação Básica, nos desafiamos a desenvolver este estudo com o objetivo de verificar o modo como os livros didáticos aprovados no Plano Nacional do Livro Didático 2020, tratam a adição de fração. Consideramos, para tanto, o conjunto dos números racionais não-negativos (Q_+), os diferentes significados de fração e as características das quantidades envolvidas nas situações apresentadas pelos autores.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Num estudo dessa natureza se fez necessário uma pesquisa qualitativa e documental.

> Na pesquisa qualitativa, o cientista é ao mesmo tempo o sujeito e o objeto de suas pesquisas. O desenvolvimento da pesquisa é imprevisível. O conhecimento do pesquisador é parcial e limitado. O objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, o que importa é que ela seja capaz de produzir novas informações (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 32).

Ainda segundo Silveira; Córdova (2009), numa pesquisa qualitativa, o pesquisador preocupa-se em entender e explicar os aspectos de um determinado assunto. Nesse sentindo, as características desse tipo de pesquisa são:

> [...] objetivação do fenômeno; hierarquização das ações de *descrever, compreender, explicar,* precisão das relações entre o global e o local em determinado fenômeno; observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 32).

Além disso, os livros didáticos foram os documentos que forneceram os dados investigativos. Conforme Flores (1994) *apud* Calado; Ferreira (2004), documentos são fontes de dados brutos para o pesquisador e, mediante sua análise, busca-se trazer resultados relevantes ao problema investigado.

O foco do estudo foi verificar a abordagem inicial de adição de fração nos livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental, aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) 2020, a qual, na maioria das vezes, são as únicas informações disponibilizadas para os estudantes entenderem o conceito e realizarem as atividades propostas. Para tanto, além do modo como os autores apresentaram o conceito de adição de fração, estabeleceu-se como critérios de análise, os diferentes significados de fração: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo; e as características das quantidades nas situações propostas pelos autores: contínuas, discretas, intensivas e extensivas. A análise se deu em 9, das 11 coleções de livros didáticos de Matemática para o 6º ano do Ensino Fundamental aprovados no PNLD 2020, quais, foram: Matemática - Compreensão e Prática (SILVEIRA, 2018); Matemática Realidade & Tecnologia (SOUSA, 2018); Teláris Matemática (DANTE, 2018); Projeto Araribá - Matemática (GAY; SILVA, 2018). Matemática - Bianchini (BIANCHINI, 2018); Convergências Matemática (CHAVANTE, 2018); Trilhas da Matemática (SAMPAIO, 2018); Geração Alpha Matemática (FUGITA, 2018); A Conquista da Matemática (GIOVANNI JUNIOR, 2018).

É importante destacar que, apesar de inúmeras tentativas, não foi possível analisar as 11 coleções aprovadas no PNLD 2020 e, com isso, o critério de escolha foi a disponibilidade dos livros (versão impressa ou digital) nas escolas de Palmas-TO.

Definidos os objetivos, as coleções, e os critérios a serem analisados, passamos a olhar de modo mais sistemático o conceito de fração. Para tanto, buscamos embasar nosso trabalho nos diferentes significados de Fração apresentados por Nunes (2003) e na Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud.

UM POUCO SOBRE FRAÇÃO

Segundo Celestino (2017), não é possível precisar quando surgiram ou quem descobriu os números fracionários devido à escassez de registros. Além disso, as primeiras ideias sobre frações, talvez, nem tenham sido registradas, haja vista que tais conhecimentos precedem a escrita.

> [...] pode-se dizer, de forma extremamente resumida, que os números (naturais) foram inventados para contar e que os números fracionários foram inventados para medir. Mas quando, exatamente, isso aconteceu ou quem foi o primeiro a pensar nisso não há como saber com algum grau de certeza devido à falta de registros de informação na época e também pelo fato de que cada povo desenvolveu seus próprios meios de contar e medir independentemente (CELESTINO, 2017, p. 4).

É importante ressaltar que, embora a escassez de registros impossibilite certezas em relação ao surgimento das frações, grande parte dos autores de História da Matemática concordam em dizer que o conceito de fração surgiu, inicialmente, no antigo Egito. Assim, em conformidade com Boyer (1996), a necessidade de medição das perdas de espaços nos terrenos destinados ao plantio, em decorrência das enchentes do Rio Nilo, levava os egípcios a fazerem adaptações constantes nos tamanhos das cordas que eram utilizadas em tais medições. Entretanto, embora essas adaptações fossem precisas, dificilmente a unidade utilizada cabia um número inteiro de vezes nos lados dos terrenos. Emergiu então a criação de um novo conjunto numérico: os números fracionários ou as frações.

A noção e representação de fração não foi construída de modo linear, a mesma se deu desde a pré-história e foi possível lhe apresentar diferentes significados e representações. Para Celestino (2017), o conceito inicial de fração era diferente do que temos hoje. Nos primeiros registros, as frações limitavam-se a representar uma única parte de algum objeto, um conceito semelhante ao que hoje chamamos de frações unitárias. O fato do numerador ser sempre 1 facilitava a leitura e escrita das frações. BOYER (1996) afirma que o matemático hindu Brahmagupta (598 – 670) expressava a operação de divisão com divisor sob o dividendo, uma representação semelhante à nossa notação para frações, no entanto, sem a barra. Segundo o mesmo autor, em trabalhos desenvolvidos por outros hindus do século V, se verifica o numerador sobre o denominador, mas ainda sem a linha separatória entre eles. A esse respeito, Ifrah (1996) afirma que,

> A notação moderna das frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma fração como $\frac{34}{1265}$: onde 34 é o numerador e 1265 o denominador (IFRAH, 1996, p. 327).

O desenvolvimento do conceito e notação de fração nos remete a verificar como a literatura trata os seus diferentes significados.

Fração e seus diferentes significados

Segundo Nunes (2003) *apud* Campos (2011), o conceito de fração pode ser concebido em cinco significados, a saber: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo.

Enquanto número, não há a necessidade de um contexto para o significado ser compreendido. Nesse sentido, as frações podem, por exemplo, ser posicionadas na reta numérica. Na maioria das vezes os livros didáticos apresentam esse significado como uma propriedade das frações. Entretanto, vale salientar a necessidade de o mesmo ser abordado adequadamente, bem como, a conversão de frações em números decimais e vice-versa. Faz-se necessário a resolução de atividades além de: “represente $\frac{3}{4}$ na reta numérica” ou “represente 0,75 na reta numérica”.

O significado parte-todo representa a divisão do inteiro em “n” partes iguais, sendo que, cada uma dessas partes representa $\frac{1}{n}$. No significado parte-todo a fração é apresentada em numerador e denominador. O denominador representa o total de partes que o inteiro foi dividido, e o numerador, as partes do inteiro destacadas. Como exemplo temos: Uma barra de chocolate continha 12 pedaços e Guilherme comeu 3. Que fração representa a parte da barra de chocolate que Guilherme comeu? E a parte que restou?

Na comparação entre duas grandezas, tem-se o significado medida. Em outras palavras, utilizar uma unidade para verificar quantas dela cabem em outra. Ex.: Uma caixa d’água tem capacidade de 450 litros. Quantos baldes de 15 litros são necessários para enchê-la completamente?

O significado quociente é apresentado em situações nas quais o resultado da divisão não é um número inteiro. Neste significado, o numerador e o denominador geralmente representam grandezas distintas. Ex.: 2 *pizzas* foram divididas entre 5 pessoas. Que parte coube a cada uma?

Como operador multiplicativo, as frações são tratadas como um fator de multiplicação. Um número deve ser multiplicado pelo numerador e dividido pelo denominador. Este significado é bastante explorado em livros didáticos, principalmente em problemas do tipo: João é operário e recebe mensalmente R$ 945,00. Gasta $\frac{1}{3}$ com alimentação. Quanto do salário de João resta para as demais despesas?

De acordo Bryant (1997), em situações que abordam o conceito de fração, podemos caracterizá-las de acordo às quantidades envolvidas. Elas podem ser: contínuas ou discretas, intensivas ou extensivas, ou ainda, apresentar relação entre si.

As quantidades contínuas não perdem suas características, mesmo se divididas muitas vezes. Uma *pizza*, por exemplo, pode ser dividida inúmeras vezes e não deixará de ser *pizza*. Já as quantidades discretas referem-se a um conjunto de objetos idênticos, os quais representam o todo, e a divisão do mesmo deve produzir subconjuntos de elementos com características iguais, e também inteiros. É o que encontramos, por exemplo, numa coleção de bolinhas de gude, na qual não faz sentido uma bolinha partida (quebrada).

De acordo com Bryant (2009), as quantidades contínuas e discretas podem ser também extensivas ou intensivas. As quantidades extensivas baseiam-se na comparação entre duas quantidades de mesma natureza e no significado parte-todo. Na comparação do que foi consumido de uma barra de chocolate em relação a uma barra inteira, por exemplo. As quantidades intensivas correspondem às situações onde há a comparação entre duas quantidades com características distintas. Comparação da fração de óleo numa mistura contendo água e óleo, por exemplo. As características das quantidades podem ser melhor entendidas por meio das situações a seguir:

- Adicionando os números $\frac{3}{8}$ e $\frac{5}{6}$, que número iremos obter?
- Leia e Guto compraram uma *pizza* de 12 fatias iguais. Do total de fatias, Leia comeu $\frac{2}{3}$ e Guto $\frac{1}{4}$. Que fração eles comeram juntos?
- Um recipiente tem capacidade de 3 litros e contém vinagre e óleo em $\frac{5}{12}$ e $\frac{3}{12}$ da sua capacidade, respectivamente. Enchendo copos de 150 mililitros, quantos copos são necessários retirar todo o óleo do recipiente?
- Três barras de chocolate serão divididas igualmente entre 4 crianças.

a) Faça um desenho e indique a divisão correspondente a essa situação.

b) Que fração do todo representa a parte que cada criança receberá?

- Guilherme tinha uma coleção contendo 48 bolinhas de gude. Durante uma brincadeira, ele perdeu $\frac{1}{12}$ das bolinhas. Quantas restaram?

As situações descritas apresentam, respectivamente, os significados de fração: número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo. Quanto as características das quantidades, a primeira não há quantidades envolvidas. As duas seguintes se referem à quantidades contínuas, extensivas e intensivas (nessa ordem), e as duas situações finais, quantidades discretas, intensivas e extensivas, respectivamente.

Adição de Fração: um campo conceitual

Desenvolvida pelo francês Gérard Vergnaud, na década de 1980, a Teoria dos Campos Conceituais se refere ao desenvolvimento cognitivo dos indivíduos, na aprendizagem de competências complexas, em todos os sentidos (seja na escola ou no trabalho, por exemplo), independente da faixa etária do ser humano. Em conformidade com Moreira (2002), o domínio do conhecimento organizado em campos conceituais ocorre num longo período de tempo, e se desenvolve por meio de experiência, maturidade e aprendizagem. Ainda segundo o mesmo autor, campo conceitual é um conjunto informal e diverso de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, interligados no processo de obtenção dos mesmos.

A teoria dos campos conceituais é uma teoria cognitivista neopiagetiana que objetiva descrever um referencial mais completo do que o piagetiano no estudo do desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de competências complexas. É importante ressaltar que apesar de Vergnaud ter desenvolvido essa teoria com interesse nos campos conceituais das estruturas aditivas e das estruturas multiplicativas, a mesma não se restringe à esses campos, nem tampouco à Matemática, envolve tudo aquilo que não pode ser ensinado de imediato, nem como sistemas de conceitos nem como conceitos isolados (MOREIRA, 2002).

Ainda em conformidade com Moreira (2002), Vergnaud define, em outros trabalhos, campo conceitual como sendo, acima de tudo, um conjunto de situações cujo domínio requer a compreensão de conceitos distintos. Por exemplo, o campo conceitual das estruturas multiplicativas, o qual é formado por todas as situações que envolvem proporções simples ou composta, e são resolvidas por meio de multiplicação, divisão, ou como uma combinação dessas duas operações.

Segundo Nogueira e Rezende (2014), Vergnaud atribui notória importância às situações para a compreensão de um dado conceito, sendo esta, a primeira entrada de um campo conceitual. Todavia, entrelaçados com as situações estão os conceitos, haja vista que a teoria dos campos conceituais emerge como uma psicologia dos conceitos. Nesse sentido, o pesquisador define, num viés psicológico, conceito e, portanto, um campo conceitual, mediante três conjuntos representado por C = (S, I, s):

- O conjunto *S é o conjunto das situações* que dão sentido ao conceito.
- *I é o conjunto dos invariantes operatórios* em que se baseia a operacionalidade dos esquemas. Cada conjunto de situação evoca operações de pensamentos precisas que se referem aos invariantes operatórios, não necessariamente explícitos, que tentam modelizar uma situação e tratam de extrair propriedades, relações ou aplicar um teorema.
- *s é o conjunto das formas de linguagem* que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações, os processos de tratamento. Segundo Vergnaud (1985), não é possível falar de conceito sem considerar os termos emprestados da linguagem natural ou de sistemas simbólicos, pois, caso contrário, não seria possível sua definição. Este conjunto é denominado de *significantes* (NOGUEIRA; REZENDE, 2014, p. 51).

Quanto a Adição de Fração, embasado na definição de Vergnaud, podemos classifica-la como um campo conceitual. Dessa forma, o conjunto "*S"* ou conjunto de situações, serão os diferentes significados (Número, Parte Todo, Quociente, Operador Multiplicativo e Medida) e as características das quantidades (Contínuas ou Discretas, Intensivas ou Extensivas), as quais as Frações são apresentadas. O conjunto *"I"* ou conjunto de invariantes operatórios, serão trazidas por meio das frações equivalentes, simplificação, MMC e adição. Por fim, o conjunto "*s"* ou o conjunto das formas de linguagem, serão as representações fracionária, decimal e geométrica. Nesse sentido, a análise da abordagem de adição de fração nos livros didáticos apresentadas nesse trabalho, terá como base teórica a teoria dos campos conceituais.

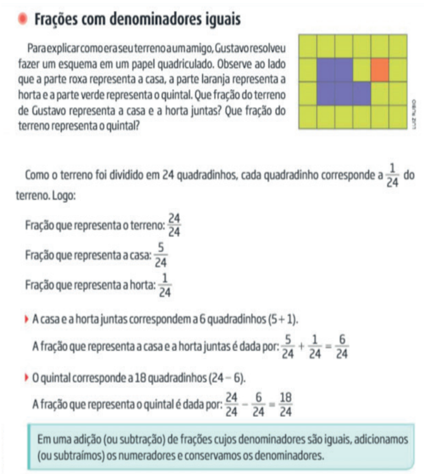
Discorrido sobre os conceitos necessários para nossa investigação, apresentamos a seguir, o modo como os livros didáticos abordam o conceito de adição de fração.

ADIÇÃO DE FRAÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS DO PNLD 2020

Reiteramos que analisamos 9 livros das coleções disponibilizadas às escolas de Palmas-TO e especificados nos Procedimentos Metodológicos. A seguir apresentamos as análises acerca de cada livro investigado.

No livro *Matemática - Compreensão e Prática*, Silveira (2018) inicia a abordagem de adição de fração com uma situação envolvendo um terreno, o qual está dividido em 3 partes, a saber: casa, horta e quintal. Isto posto, o significado retratado é parte-todo, as quantidades são contínuas e extensivas. Em seguida, por intermédio de uma representação geométrica do terreno, o autor mostra que é necessário adicionar os numeradores e conservar os denominadores ao adicionarmos frações com denominadores iguais, conforme pode ser verificado na Figura 2 a seguir.

Figura 2 - Adição de fração com denominadores iguais – *Compreensão e Prática*



Frações com denominadores iguais

Para explicar como era seu terreno a um amigo, Gustavo resolveu fazer um esquema em um papel quadriculado. Observe ao lado que a parte roxa representa a casa, a parte laranja representa a horta e a parte verde representa o quintal. Que fração do terreno de Gustavo representa a casa e a horta juntas? Que fração do terreno representa o quintal?

Como o terreno foi dividido em 24 quadradinhos, cada quadradinho corresponde a $\frac{1}{24}$ do terreno. Logo:

Fração que representa o terreno: $\frac{24}{24}$

Fração que representa a casa: $\frac{5}{24}$

Fração que representa a horta: $\frac{1}{24}$

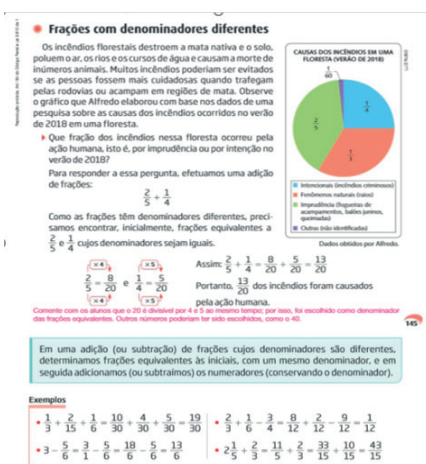
- A casa e a horta juntas correspondem a 6 quadradinhos (5 + 1).
  A fração que representa a casa e a horta juntas é dada por: $\frac{5}{24} + \frac{1}{24} = \frac{6}{24}$
- O quintal corresponde a 18 quadradinhos (24 − 6).
  A fração que representa o quintal é dada por: $\frac{24}{24} - \frac{6}{24} = \frac{18}{24}$

Em uma adição (ou subtração) de frações cujos denominadores são iguais, adicionamos (ou subtraímos) os numeradores e conservamos os denominadores.

Fonte: SILVEIRA (2018, p. 144-145)

Na Figura 3, vemos que na abordagem da adição de fração com denominadores diferentes o autor utiliza um gráfico de setores, o qual, representa as causas de incêndios numa mata nativa. Nesse sentido, a exposição também é feita valendo-se do significado parte-todo. Além disso, ao se referir à número de incêndios, as quantidades apresentadas na situação são discretas e extensivas.

Figura 3 - Adição de fração com denominadores diferentes - *Compreensão e Prática*



Frações com denominadores diferentes

Os incêndios florestais destroem a mata nativa e o solo, poluem o ar, os rios e os cursos de água e causam a morte de inúmeros animais. Muitos incêndios poderiam ser evitados se as pessoas fossem mais cuidadosas quando trafegam pelas rodovias ou acampam em regiões de mata. Observe o gráfico que Alfredo elaborou com base nos dados de uma pesquisa sobre as causas dos incêndios ocorridos no verão de 2018 em uma floresta.

- Que fração dos incêndios nessa floresta ocorreu pela ação humana, isto é, por imprudência ou por intenção no verão de 2018?

Para responder a essa pergunta, efetuamos uma adição de frações:

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{4}$$

Como as frações têm denominadores diferentes, precisamos encontrar, inicialmente, frações equivalentes a $\frac{2}{5}$ e $\frac{1}{4}$ cujos denominadores sejam iguais.

$\overset{\times 4}{\frac{2}{5} = \frac{8}{20}}$ e $\overset{\times 5}{\frac{1}{4} = \frac{5}{20}}$

Assim: $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{13}{20}$

Portanto, $\frac{13}{20}$ dos incêndios foram causados pela ação humana.

Comente com os alunos que o 20 é divisível por 4 e 5 ao mesmo tempo; por isso, foi escolhido como denominador das frações equivalentes. Outros números poderiam ter sido escolhidos, como o 40.

145

Em uma adição (ou subtração) de frações cujos denominadores são diferentes, determinamos frações equivalentes às iniciais, com um mesmo denominador, e em seguida adicionamos (ou subtraímos) os numeradores (conservando o denominador).

Exemplos

- $\frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{1}{6} = \frac{10}{30} + \frac{4}{30} + \frac{5}{30} = \frac{19}{30}$
- $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} - \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{2}{12} - \frac{9}{12} = \frac{1}{12}$
- $3 - \frac{5}{6} = \frac{3}{1} - \frac{5}{6} = \frac{18}{6} - \frac{5}{6} = \frac{13}{6}$
- $2\frac{1}{5} + \frac{2}{3} = \frac{11}{5} + \frac{2}{3} = \frac{33}{15} + \frac{10}{15} = \frac{43}{15}$

Fonte: SILVEIRA (2018, p. 145-146)

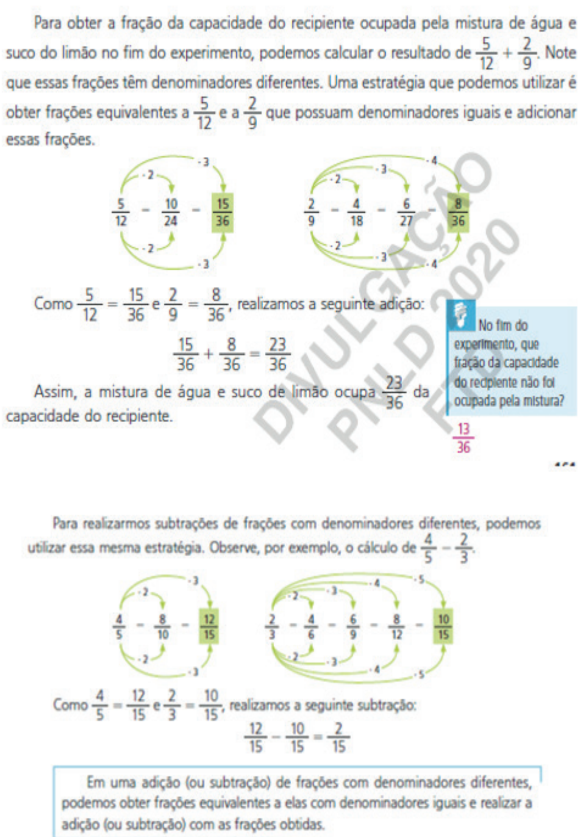
Do exposto na figura anterior, o autor inicia o processo de adição com duas frações e, aparentemente, deixa entender que o método para reduzir as frações a um mesmo denominador é multiplicando, cada uma, pelo denominador da outra, haja vista que, na situação apresentada,

$\frac{2}{5}$ foi multiplicada por 4 e $\frac{1}{4}$ por 5. Entretanto, nos exemplos seguintes, não fica especificado o método utilizado para redução das frações à denominadores iguais. Vale destacar que o MMC dos denominadores é empregado, mas não é mostrado como o mesmo foi encontrado.

A abordagem da adição de fração em Sousa (2018) é iniciada com uma situação envolvendo mistura de água e óleo, feita por uma professora numa aula de ciências. A mesma, refere-se ao significado parte-todo, quantidades contínuas e intensivas. O autor faz uma representação geométrica para representar a mistura e, com isso, generaliza o algoritmo de adição de fração com mesmo denominador.

Posteriormente, na adição de fração com denominadores diferentes, o autor aborda uma situação envolvendo um suco de limão e água com corante vermelho. Novamente exibe o significado parte-todo, grandezas contínuas e quantidades intensivas. Na condução do processo de adição (vide Figura 4), o método exposto para redução das frações a um mesmo denominador é a multiplicação do numerador e do denominador de cada fração, pela sequência dos números naturais.

Figura 4 - Adição de fração com denominadores diferentes - *Realidade & Tecnologia*


Para obter a fração da capacidade do recipiente ocupada pela mistura de água e suco do limão no fim do experimento, podemos calcular o resultado de $\frac{5}{12} + \frac{2}{9}$. Note que essas frações têm denominadores diferentes. Uma estratégia que podemos utilizar é obter frações equivalentes a $\frac{5}{12}$ e a $\frac{2}{9}$ que possuam denominadores iguais e adicionar essas frações.

$\frac{5}{12} = \frac{10}{24} = \frac{15}{36}$ $\qquad$ $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} = \frac{6}{27} = \frac{8}{36}$

Como $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$ e $\frac{2}{9} = \frac{8}{36}$, realizamos a seguinte adição:

$\frac{15}{36} + \frac{8}{36} = \frac{23}{36}$

Assim, a mistura de água e suco de limão ocupa $\frac{23}{36}$ da capacidade do recipiente.

No fim do experimento, que fração da capacidade do recipiente não foi ocupada pela mistura?

$\frac{13}{36}$

Para realizarmos subtrações de frações com denominadores diferentes, podemos utilizar essa mesma estratégia. Observe, por exemplo, o cálculo de $\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$.

$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15}$ $\qquad$ $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15}$

Como $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ e $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$, realizamos a seguinte subtração:

$\frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$

Em uma adição (ou subtração) de frações com denominadores diferentes, podemos obter frações equivalentes a elas com denominadores iguais e realizar a adição (ou subtração) com as frações obtidas.

Fonte: SOUZA (2018, p. 161-162)

O terceiro livro pesquisado, o qual tem como título *Teláris Matemática* e autoria de Luiz Roberto Dante, introduz o conceito de adição de fração com denominadores iguais, retratando um problema relativo ao percurso percorrido por um ônibus. O significado de fração externado é parte-todo, as quantidades são contínuas e extensivas. Por meio da representação geométrica do percurso o autor generaliza o método de adição de fração com denominadores iguais.

Na adição de fração com denominadores diferentes o autor utiliza uma situação com as mesmas características da situação anterior, agora, referindo-se ao percurso percorrido por uma Balsa em dois períodos distintos. Quanto ao método utilizado na redução de frações a um mesmo denominador, o autor exprime um processo semelhante ao abordado em Sousa (2018), isto é, multiplicação pela sequência números naturais, a fim de que frações de denominadores iguais sejam encontradas.

O livro *Projeto Araribá - Matemática*, uma obra de autoria coletiva da Editora Moderna, aborda inicialmente o conceito de adição de fração com denominadores iguais, exteriorizando um problema relacionado ao tempo de trabalho de uma veterinária. O significado de fração exposto é parte-todo e as quantidades são contínuas e extensivas. Os autores representam essa situação geometricamente, com retângulos divididos em partes iguais e, desse modo, generalizam o método de adição de fração com denominadores iguais.

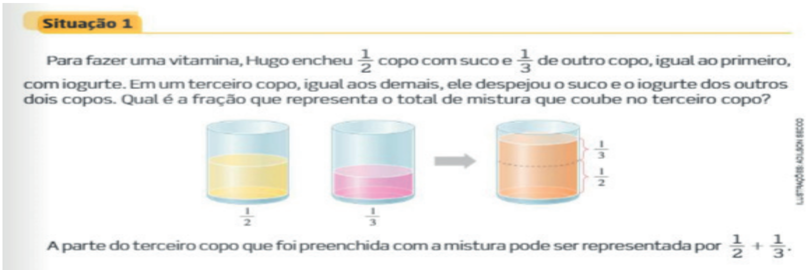
Na adição de fração com denominadores diferentes, os autores retratam uma situação envolvendo o número de figurinhas que duas crianças possuem. Por conseguinte, utilizam novamente o significado parte-todo, desta vez, com quantidades discretas e extensivas. Além disso, exibem uma representação geométrica para reduzir as frações a um mesmo denominador, mas sem muitos detalhes. Tampouco deixam claro se esse método é eficaz em outras situações (quando um dos denominadores não é divisor do outro, por exemplo). Por fim, ao apresentar novos exemplos, os autores apenas externam frações equivalentes, as quais são suficientes para a solução dos itens, mas sem justificar como as mesmas foram encontradas.

No tocante ao livro *Matemática - Bianchini*, o autor expõe gráficos de setores que representam animais ameaçados de extinção em diversas regiões do Brasil. Sendo assim, aborda o significado parte-todo, quantidades discretas e extensivas.

No processo de adição das frações com denominadores iguais, o autor também utiliza uma representação geométrica para generalizar o método.

Concernente a adição de fração com denominadores diferentes, o autor apresenta duas situações. A primeira situação está relacionada a uma vitamina, a qual envolve o significado parte-todo, quantidades contínuas e intensivas, como é possível verificar na Figura 5.

Figura 5 - Adição de fração com denominadores diferentes - *Bianchini* (parte 1)



Situação 1

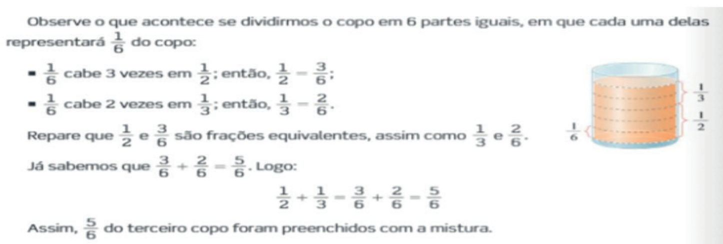
Para fazer uma vitamina, Hugo encheu $\frac{1}{2}$ copo com suco e $\frac{1}{3}$ de outro copo, igual ao primeiro, com iogurte. Em um terceiro copo, igual aos demais, ele despejou o suco e o iogurte dos outros dois copos. Qual é a fração que representa o total de mistura que coube no terceiro copo?

A parte do terceiro copo que foi preenchida com a mistura pode ser representada por $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Fonte: BIANCHINI (2018, p. 183)

Na solução, Figura 6, o autor utiliza a representação geométrica para encontrar frações equivalentes e de denominadores iguais. O mesmo não deixa claro o porquê da divisão do copo em 6 partes, mas pode-se deduzir que o método é eficaz pelo fato de 6 ser um múltiplo de 2 e de 3. Algo semelhante aconteceria se a divisão fosse feita em 12 ou 24 partes.

Figura 6 - Adição de fração com denominadores diferentes - *Bianchini* (parte 2)



Observe o que acontece se dividirmos o copo em 6 partes iguais, em que cada uma delas representará $\frac{1}{6}$ do copo:

- $\frac{1}{6}$ cabe 3 vezes em $\frac{1}{2}$; então, $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$;
- $\frac{1}{6}$ cabe 2 vezes em $\frac{1}{3}$; então, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

Repare que $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{6}$ são frações equivalentes, assim como $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$.

Já sabemos que $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$. Logo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Assim, $\frac{5}{6}$ do terceiro copo foram preenchidos com a mistura.

Fonte: BIANCHINI (2018, p. 184)

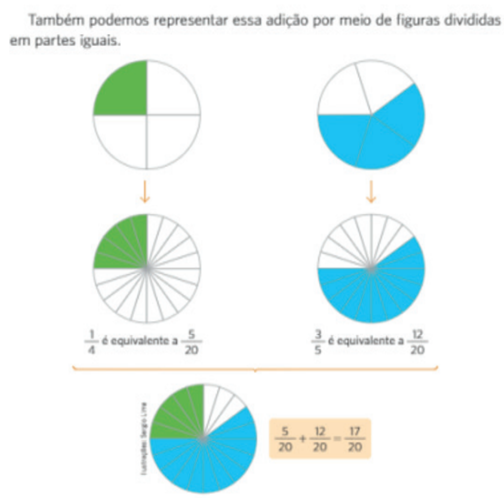
A segunda situação apresentada por Bianchini, refere-se aos gastos do 13º salário de uma pessoa. Assim, envolve o significado parte-todo e operador multiplicativo, quantidades contínuas e extensivas. No processo de adição, o autor não especifica como as frações equivalentes foram encontradas, apenas apresenta frações necessárias à adição. Para encontrar o valor do 13º salário, Bianchini (2018) utiliza uma representação geométrica, isto é, um retângulo dividido em 20 partes iguais, onde cada uma dessas partes, representa $\frac{1}{20}$ do salário. É importante destacar que o autor divide o retângulo em 20 partes pelo fato desse número ser múltiplo de 4 e 5, isto é, dos denominadores das frações apresentadas na situação.

O autor retoma ainda uma situação apresentada anteriormente, a qual, refere-se aos grupos biológicos de animais ameaçados de extinção, abordando o significado parte-todo, quantidades discretas e intensivas. Mais uma vez, Bianchini não especifica o método para encontrar as frações equivalentes. Apresenta também outros exemplos, dessa vez com o significado número, onde as frações equivalentes podem ser encontradas multiplicando cada fração (numerador e denominador) pelo(s) denominador(es) da(s) outra(s), entretanto o autor não deixa isso claro.

O processo de adição de fração apresentado por Chavante (2018), no livro *Convergências Matemática*, é abordado incialmente referindo-se a uma propriedade destinada à criação de gado e ao plantio de café. Nessa perspectiva, o autor exibe o significado parte-todo, quantidades contínuas e extensivas. A propriedade é representada por um retângulo, dividido em partes iguais, e tal representação é utilizada para generalizar o método de adição de fração com denominadores iguais.

No processo de adição de fração com denominadores diferentes, o autor traz a produção de calças *jeans* de uma confecção. Mais uma vez, aborda o significado parte-todo, entretanto, com quantidades discretas e extensivas. Para reduzir as frações a um mesmo denominador, Chavante (2018) recorre ao método de multiplicação pela sequência dos números naturais, até que as frações sejam encontradas. Em seguida, expõe uma representação geométrica para expressar a adição, conforme vemos na Figura 7, mas a mesma pouco contribui para o entendimento do conceito.

Figura 7 - Adição de fração com denominadores diferentes - *Convergências*



Fonte: CHAVANTE (2018, p. 138-139)

O autor do livro *Trilhas da Matemática*, Sampaio (2018), introduz a adição de fração, descrevendo uma viagem de automóvel, realizada em dois dias. O significado de fração abordado é parte-todo e as quantidades são contínuas e extensivas. Sampaio (2018) faz, ainda, uma representação geométrica do percurso da viagem, e desse modo, especifica o método de adição de fração com denominadores iguais.

Na adição de fração com denominadores diferentes, o autor continua com a situação apresentada anteriormente. Ao reduzir frações a um mesmo denominador, Sampaio (2018), multiplica as frações iniciais por números naturais específicos, de modo a obter denominador 20, o qual é um múltiplo de 10 e de 4. O autor não mostra como o processo pode ser feito para outros casos. Vejamos o recorte a seguir:

Figura 8 - Adição de fração com denominadores diferentes – *Trilhas da Matemática*

Adição e subtração de frações com denominadores diferentes

Bruno continuou sua viagem e, no terceiro dia, percorreu $\frac{1}{4}$ do percurso. Que fração do percurso total ele percorreu nos 3 dias de viagem? E que fração do percurso ainda falta para ele terminar a viagem?

Para obtermos a fração do percurso total percorrido nos 3 dias, podemos calcular o resultado de $\frac{4}{10} + \frac{1}{4}$.

Capítulo 13 **Operações com frações**

Note, nesse caso, que as partes em que o inteiro foi dividido não são do mesmo "tamanho" (décimos e quartos). A ideia, então, é obter frações equivalentes às frações $\frac{4}{10}$ e $\frac{1}{4}$ que tenham o mesmo denominador e adicioná-las. Acompanhe.

- Determinando a fração equivalente a $\frac{4}{10}$ e a $\frac{1}{4}$ com denominador 20, que é múltiplo de 10 e de 4.

$$\frac{4}{10} = \frac{4 \times 2}{10 \times 2} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1 \times 5}{4 \times 5} = \frac{5}{20}$$

- Adicionando as duas frações:

$$\frac{4}{10} + \frac{1}{4} = \frac{8}{20} + \frac{5}{20} = \frac{8+5}{20} = \frac{13}{20}$$

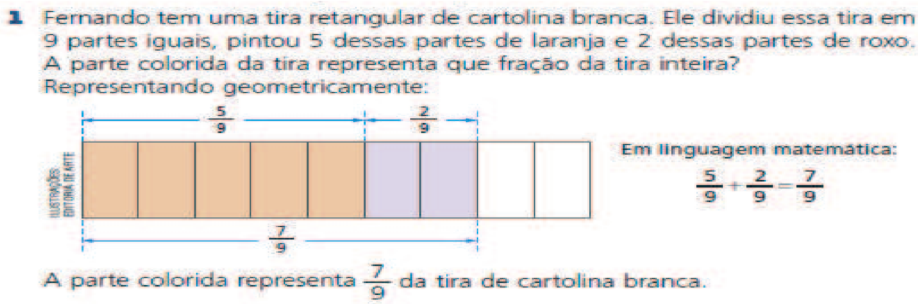
Portanto, Bruno percorreu $\frac{13}{20}$ do percurso total nesses 3 dias.

Fonte: SAMPAIO (2018, p. 181-182)

No livro *Geração Alpha Matemática*, Fugita; Oliveira (2018), retratam, inicialmente, uma situação referente à uma torta, consumida em dois momentos. Nesse viés, abordam o significado parte-todo, quantidades contínuas e extensivas. No processo de solução, os autores optam por uma representação geométrica da torta, e a mesma é utilizada para generalização do método de adição. Quanto a adição de fração com denominadores diferentes, os autores trazem uma situação envolvendo uma porção de tinta, feita com água e pigmento líquido. A mesma, exibe o significado parte-todo, quantidades contínuas e intensivas. No processo de solução, os autores reduzem as frações a um mesmo denominador, por meio da multiplicação pela sequência dos números naturais, e desse modo, generalizam o algoritmo de adição de fração com denominadores diferentes.

Na adição de fração do livro *A Conquista da Matemática*, Giovanni Júnior (2018), reproduz uma situação relacionada a uma tira de cartolina. O autor aborda, portanto, o significado parte-todo, quantidades contínuas e extensivas. Para generalizar o método de adição, Giovanni Júnior (2018), expõe a representação geométrica da cartolina, como é possível ver na Figura 9, a seguir.

Figura 9 - Adição de fração com denominadores iguais - *A Conquista da Matemática*



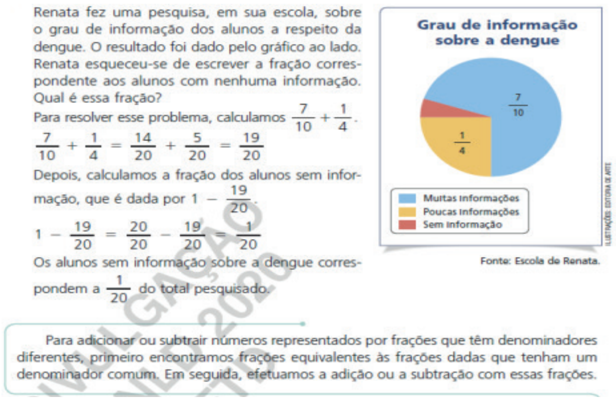
Fonte: GIOVANNI JÚNIOR (2018, p. 149)

Posteriormente, o autor exibe o conceito de adição de fração com denominadores diferentes. Nesse momento, apresenta as situações 3 e 4. A situação 3 refere-se a uma quantia em dinheiro gasto em uma feira, e a situação 4, uma pesquisa sobre a prática de esporte feita com um grupo de rapazes. Nesse sentido, ambas as situações apresentam significado parte-todo, sendo que, a terceira, envolve quantidades contínuas e extensivas, e a quarta, quantidades discretas e intensivas.

No processo de adição, o autor faz e refaz a representação geométrica de cada fração para encontrar frações equivalentes. Na situação 3, por exemplo, o autor representa as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ geometricamente. Em seguida, cada parte da representação geométrica da fração $\frac{1}{2}$ é subdividida em 3 partes e cada parte da representação geométrica da fração $\frac{1}{2}$ é subdividida em 2 partes. Obtendo assim as frações $\frac{3}{6}$ e $\frac{2}{6}$, cujos denominadores são iguais.

Giovanni Júnior (2018), ainda descreve uma outra situação, a qual externa uma pesquisa realizada em uma escola, sobre o grau de informação dos estudantes a respeito da dengue. Nesse sentido, o significado de fração e as características das quantidades são as mesmas da situação 4. Na condução do processo de adição, o autor não apresenta uma explicação geométrica para as frações equivalentes utilizadas. Todavia, observando as mesmas, percebemos que correspondem às frações equivalentes cujos denominadores são o MMC dos denominadores das frações iniciais, mas isso não é especificado na solução. Podemos constatar o exposto na Figura 10.

Figura 10 - Adição de fração com denominadores diferentes - *A Conquista da Matemática* (parte 2)


Renata fez uma pesquisa, em sua escola, sobre o grau de informação dos alunos a respeito da dengue. O resultado foi dado pelo gráfico ao lado. Renata esqueceu-se de escrever a fração correspondente aos alunos com nenhuma informação. Qual é essa fração?

Para resolver esse problema, calculamos $\frac{7}{10} + \frac{1}{4}$.

$\frac{7}{10} + \frac{1}{4} = \frac{14}{20} + \frac{5}{20} = \frac{19}{20}$

Depois, calculamos a fração dos alunos sem informação, que é dada por $1 - \frac{19}{20}$.

$1 - \frac{19}{20} = \frac{20}{20} - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$

Os alunos sem informação sobre a dengue correspondem a $\frac{1}{20}$ do total pesquisado.

Grau de informação sobre a dengue

$\frac{7}{10}$

$\frac{1}{4}$

Muitas informações
Poucas informações
Sem informação

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Fonte: Escola de Renata.

Para adicionar ou subtrair números representados por frações que têm denominadores diferentes, primeiro encontramos frações equivalentes às frações dadas que tenham um denominador comum. Em seguida, efetuamos a adição ou a subtração com essas frações.

Fonte: GIOVANNI JÚNIOR (2018, p. 152)

CONSIDERAÇÕES

Concluídas as análises dos Livros Didáticos, constatamos que todos os autores procuraram apresentar uma/um situação/problema como introdução ao conceito de adição de fração. Além disso, na adição de fração com denominadores iguais, verificamos certa unanimidade em relação à forma de apresentação nos livros didáticos. Todas as obras pesquisadas utilizaram ideias geométricas para justificar o algoritmo de adição, sendo predominante o significado parte-todo, grandezas contínuas e extensivas, bem como, representações por meio de figuras divididas em partes iguais, terrenos, distâncias, recipientes com líquidos, gráficos, … O senso comum ou o próprio significado da palavra fração, trazido pelo dicionário, pode remeter a isso.

Quanto à adição de fração com denominadores diferentes, notamos uma maior divergência entre as formas de abordagem nos livros didáticos. Embora os autores optaram, quase exclusivamente, pelo significado parte-todo, observamos que os mesmos alternaram em relação às características das quantidades e aos métodos para encontrar frações equivalentes. Vimos a exposição desse conceito valendo-se da multiplicação de cada fração por um número, sendo este, o denominador apresentado na outra fração, e a ideia de aplicação do MMC, mas sem muitos detalhes do processo. Além disso, utilizaram a representação geométrica para encontrar frações equivalentes e a multiplicação das frações pela sequência dos números naturais ou por números naturais específicos, neste último caso, sem muitos detalhes sobre os números escolhidos.

Convém destacar que apesar de muitos professores optarem por métodos, exclusivamente, aritméticos na adição de fração com denominadores diferentes, apresentando-os, muitas vezes, como algo extenso e trabalhoso, e com isso, estimularem a utilização do MMC como uma espécie de método prático que agiliza a solução dos problemas, nenhum autor apontou o uso do MMC como único método de adição de fração. Ainda foi possível perceber a abordagem do mesmo em alguns livros, mas, na maioria das vezes, de forma implícita e sem justificativas ou ênfase dos autores. Nesse sentido, esse método tão utilizado por professores, o qual prioriza a memorização em detrimento do entendimento do conceito, estar caindo em desuso. Percebemos, nas abordagens dos autores, a preferência pela noção de frações equivalentes, as quais contribuem para o verdadeiro entendimento do conceito de adição.

Por fim, a utilização de métodos exclusivamente aritméticos ou que priorizam excessivamente a memorização na adição de fração, podem provocar um enorme desânimo nos estudantes, haja vista que a divisão - operação necessária em algumas situações - geralmente é mais trabalhosa. Assim, um trabalho recorrendo a frações equivalentes, privilegiando a multiplicação e objetivando tornar o processo justificável, servirá como alternativa no estudo do conceito em questão. Faz-se necessário, proporcionar a construção do conceito de adição de fração aos estudantes por meio de atividades articuladas e com um fim conhecido pelos agentes do processo.

REFERÊNCIAS

BARROS, Marcos José Pereira. **A solução de situações que envolvem o conceito de fração por professores que ensinam matemática nos anos iniciais.** 2018. 229 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2018.

BIANCHINI, Edvaldo Roque. **Matemática Bianchini.** 6º ano: Ensino fundamental. Anos finais. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2a edição. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática: ensino de quinta a oitava séries**. Brasília, 1998.

BRYANT, Peter. *et al*. **Razão e frações: representando quantidades intensivas**. In: BRYANT, Peter; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; NUNES, Terezinha. Educação Matemática 1: números e operações numéricas. 2a edição. São Paulo: Cortez, 2009.

BRYANT, Peter; NUNES, Terezinha. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

CALADO, Sílvia dos Santos; FERREIRA, Sílvia Cristina dos Reis. **Análise de documentos: método de recolha e análise de dados.** Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ichagas/mi1/analisedocumentos.pdf>. Acesso em: 03/08/2020.

CAMPOS, Tânia Maria Mendonça. **Sobre ensino e aprendizagem de frações**. XIII CIAEM - Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife - PE, 2011.

CARVALHO, Euvaldo de Sousa. **Sequência Didática: uma proposta para o ensino do conceito de fração.** 2017. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Federal do Tocantins, Arraias, 2017.

CELESTINO, Kamila Gonçalves. **As Frações em algumas civilizações antigas.** Encontro Paranaense de Educação Matemática: Unioeste de cascavel, 21 a 23 de Setembro de 2017. Anais.

CHAVANTE, Eduardo Rodrigues. **Convergências Matemática.** 6º ano: Ensino fundamental. Anos finais. 2. ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

DANTE, Luiz Roberto. **Teláris Matemática.** 6º ano: Ensino fundamental. Anos finais. 3. ed. São Paulo: Ática, 2018.

FAVERO, Maria Helena; NEVES, Regina da Silva Pina. **A divisão e os racionais: revisão bibliográfica e análise**. In **Revista Zetetiké.** v.20, n. 37, p.35-71. São Paulo: FE/Unicamp, jan/jun 2012.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Mini Aurélio: o dicionário da língua portuguesa.** 8. ed. rev. atual. Curitiba: Positivo, 2010.

FUGITA, Felipe; OLIVEIRA, Carlos N. C. de. **Geração Alpha Matemática.** 6º ano: Ensino fundamental. Anos finais. Obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida por SM Educação. 2. Ed. São Paulo: Edições SM, 2018.

GAY, Maria Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael. **Projeto Araribá: Matemática**. 6º ano:

Ensino fundamental. Anos finais. Obra coletiva, concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GIOVANNI JÚNIOR, José Ruy. **A conquista da matemática.** 6º ano: Ensino fundamental. Anos finais. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018.

IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. Tradução de Stella M. de Freitas Senra. 8. ed. São Paulo: Globo, 1996.

MONTEIRO, Alexandre Branco; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Sequência Didática Eletrônica de Frações: uma proposta para a recuperação paralela no Ensino Fundamental.** VIDYA, v. 34, n. 1, p. 61-84, jan./jun., 2014 - Santa Maria, 2013.

MOREIRA, Antônio Marco. **A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área.** Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre - RS, v. 7, n. 1, p. 7-29, Maio, 2002. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/569>. Acesso em: Fev. 2021.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; Rezende, Veridiana. **A Teoria dos Campos Conceituais no Ensino de Números Irracionais: Implicações da Teoria Piagetiana no Ensino de Matemática.** Revista Eletrônica de Psicologia e Epistemologia Genética, Marília - SP, v. 6, n. 1, p. 41-63, Julho, 2014. Disponível em: <https://revistas.marilia.unesp.br/index.php/scheme/article/view/3950>. Acesso em: Fev. 2021.

SAMPAIO, Fausto. Arnaud. **Trilhas da Matemática.** 6º ano: Ensino fundamental. Anos finais. 1. Ed. São Paulo: Saraiva, 2018.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A pesquisa científica. *In:* GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo. (Org.). **Métodos de pesquisa.** UAB/UFRGS e SEAD/UFRGS. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. p. 31 - 42.

SILVEIRA, Ênio; **Compreensão e Prática**. 6º ano: Ensino fundamental. Anos finais. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

SOUZA, Joamir Roberto. **Matemática realidade & tecnologia.** 6º ano: Ensino fundamental: Anos finais. 1. ed. São Paulo: FTD, 2018.

INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: O OLHAR DO ESTUDANTE MEDIANTE AS NOÇÕES INTUITIVAS DE TRIÂNGULOS

Martielle Soledade Souza Santos

Mestre em Educação Matemática
Professora da rede Municipal de ensino. E-mail: Martielle2012@gmail.com;

Gildeci Rodrigues de Souza Santos

Mestre em Ciências da Educação
Professora da rede Municipal de ensino. E-mail: Gildeci14@gmail.com;

Daniel Pinto Mororó

Mestre em Matemática
Professor do Instituto Federal Baiano campus Bom Jesus da Lapa.
E-mail: daniel.mororo@ifbaiano.edu.br;

Ediênio Vieira Farias

Doutorando em Educação e Contemporaneidade
Professor do Instituto Federal Baiano campus Bom Jesus da Lapa.
E-mail: edieniovfarias@gmail.com

Resumo: A presente pesquisa tem como tema central o ensino de geometria. Devido a dificuldade na aprendizagem dessa área do conhecimento autores como Traldi Júnior e Rosembaum (2010 a), Klein e Costa (2011) acreditam na necessidade de trabalhos nessa área de Conhecimento. Nesse sentido, utiliza-se a Investigação Matemática (IM), uma tendência da Educação Matemática que procura desenvolver a criatividade e a descoberta do conteúdo dentre os estudantes. O objetivo principal desse estudo é investigar as possibilidades do uso desta metodologia que pode proporcionar à aprendizagem da noção geométrica do triângulo, no contexto do 8° ano do Ensino Fundamental de uma escola localizada no oeste da Bahia. A metodologia da pesquisa emprega-se características de uma pesquisa ação. Os instrumentos foram uma sequência de ensino com o auxílio de materiais manipulativos (jujubas e palitos de churrasco) e o diário de campo. Dos dados coletados pelos instrumentos, foi possível construir uma Análise de Conteúdo, ao qual emergiram as seguintes categorias: Noção de triângulo/geometria; Aprendizagem por diálogo, descoberta e experimentação; IM na sala de aula. Os resultados mostram a tendência em Educação Matemática: Investigação Matemática, como proporcionadora de descobertas, estimulando a insistência, encontrando relações, fazendo conjecturas e discutindo/socializando com os colegas. Contudo, percebeu-se que além de tornar os estudantes mais participativos da aula, este estudo proporcionou reflexão da prática do professor no que tange à construção de novas formas de ensinar matemática, em particular o objeto de estudo.

Palavras-chave: Investigar. Estudo da noção de Triângulos. Aprendizagem por experimentação.

MATHEMATICAL INVESTIGATIONS: THE STUDENT'S VIEW THROUGH THE INTUITIVE NOTIONS OF TRIANGLES

Abstract: This research has as its central theme the teaching of geometry. Due to difficulties in learning in this area of knowledge, authors such as Traldi Júnior and Rosembaum (2010 a), Klein and Costa (2011) believe in the need for work in this area of knowledge. In this sense, we will use Mathematical Investigation (MI), a trend in Mathematics Education that seeks to develop creativity and discovery of content among students. The main objective of this study is to investigate the possibilities that the use of this methodology can provide the learning of the geometric notion of the triangle, in the context of the 8th grade of elementary school in a school located in the west of Bahia. The research methodology uses characteristics of an action research. The instruments were a teaching sequence with the aid of manipulative materials (jelly beans and barbecue sticks) and a field diary. From the data collected by the instruments, it was possible to build a Content Analysis, from which the following categories emerged: Notion of triangle/geometry; Learning through dialogue, discovery and experimentation; IM in the classroom. The results show the trend in Mathematics Education: Mathematical Research, as a provider of discoveries, stimulating insistence, finding relationships, making conjectures and discussing/socializing with colleagues. However, it was noticed that in addition to making students more participative in the class, this study provided a reflection on the teacher's practice regarding the construction of new ways of teaching mathematics, in particular the object of study.

Keywords: Investigate. Study of Triangles**.** Experimental learning

INTRODUÇÃO

A Matemática como qualquer outro componente curricular da Educação Básica pode proporcionar aulas investigativas e inclusive com problemas de cunho real, tendo em vista que motivam a descoberta e o interesse. A partir dessa prática, torna-se possível estimular a curiosidade e o desafio (D'AMBRÓSIO, 1993), pois o estudante deixa de ser o receptor, aceitando as informações passadas pelo professor durante a aula, para atuar de forma ativa na construção da sua aprendizagem e autonomia, através de perguntas e participação na aula. E a partir desse fato, torna-se impossível controlar o que será abordado na aula, devido à infinidade de ideias e as curiosidades que os educandos são estimulados a perguntar. Nesse sentido, utilizar a investigação nas aulas propõe uma mudança na prática da sala de aula, de modo que seja possível entender e propor respostas para problemas da sociedade, adaptando-os a realidade da sala de aula. Dessa forma, o estudante poderá compreender que a Matemática evolui devido à necessidade de encontrar respostas para as inquietações percebidas nos contextos reais.

Estudos feitos por pesquisadores como Ponte (*et. al*. 1998; 2003; 2004; 2014; *et. al.* 2016), Corradi (2011), Pires (2015), Bertini e Passos (2017), apresentam-se a viabilidade da Investigação Matemática (IM) como uma tendência da Educação Matemática (EM) que enfatiza as descobertas por parte dos estudantes e a importância do papel do professor como orientador, questionando as afirmações e possibilitando a construção de conjecturas pelos estudantes.

Nesse sentido, o presente trabalho traz como objeto do conhecimento o estudo da noção geométrica do triângulo, enfatizamos os impasses na aprendizagem de geometria, mencionados por Traldi Júnior e Rosembaum (2010a, p. 377) que inferem sobre a complexidade, "[...] na simplificação de notação, no uso de instrumentos, na formulação de hipóteses, no conhecimento de funções e a dificuldade na construção dos gráficos das funções trigonométricas". Tem-se ainda, o trabalho de Klein e Costa (2011, p. 44), enfatizando que "[...] a experiência docente de mais de duas décadas tem mostrado que os estudantes apresentam dificuldades em assimilar os conceitos trigonométricos". Tais afirmações vêm mostrando a necessidade da construção de atividades que possam diminuir a dificuldade de entendimento desse tema. Para isso, torna-se necessário todo um ambiente propício para explorar tal estratégia, e o professor capacitado para instigar e evidenciar os conceitos prioritários que os estudantes poderão descobrir. Além disso, Bernard Charlot (2005) afirma que, a psicologia propõe que um dos fatores que acarretam a dificuldade de aprendizagem também pode estar relacionado a dificuldades cognitivas, afetivas e de identificação, não ignorando a singularidade de cada estudante.

No que tange ao estudo da geometria dos triângulos, sabe-se que esta é a área da Matemática que estuda os triângulos retângulos e suas propriedades na circunferência. Todavia, o centro do trabalho é o ensino de Geometria, sob o contexto dos triângulos, para o 8° ano do ensino fundamental. A trigonometria só irá aparecer (tanto na Base como em alguns currículos) a partir do 9° ano. Nesse caso, o currículo da cidade onde a escola utilizada como contexto de estudo tinha a trigonometria no 8° ano.

No que concerne à construção de competências cognitivas pelo estudante, Bernard Charlot (2005, p. 54), enfatiza que, "(...) é preciso que estude que se engaje em uma atividade intelectual, e que se mobilize intelectualmente. Mas, para que ele se mobilize, é preciso que a situação de aprendizagem tenha sentido para ele, que possa produzir prazer, responder a um desejo". Nesse sentido, acredita-se em uma construção do cenário de aprendizagem investigativa, visando trabalhar a criatividade, a resolução de problemas e a construção de argumentos.

Para Skovsmose (2000), um cenário para investigação é aquele que convida os estudantes a formularem questões e buscar explicações. Partindo dessa premissa, para que o trabalho possa fluir da melhor maneira, e ser caracterizado como uma investigação é necessária à aceitação do convite que o professor faz ao afirmar *"o que acontece se...?";* ou mediante a um trabalho em sala de aula evidenciar o *"por que isso?"* (SKOVSMOSE, 2000). Dessa forma o estudante poderá procurar meios para responder as provocações vindas da parte do professor.

A partir do entendimento desta tendência em EM e frente às dificuldades de aprendizagem do componente curricular, no contexto da Educação Básica, surge à necessidade de investigar as possibilidades que o uso da IM pode proporcionar à aprendizagem da noção geométrica de triângulos no contexto do 8° ano do Ensino Fundamental (Anos Finais), de uma escola pública, localizada no oeste da Bahia. Para atingir tal objetivo, foi formulada a pergunta: como a IM em sala de aula pode proporcionar uma aprendizagem da noção de Triângulos aos estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental?

INVESTIGAÇÃO NA SALA DE AULA

Um dos desejos dos professores ao propor suas aulas é que os estudantes assumam as responsabilidades acerca das respostas empregadas, tenha curiosidades e participação ativa, tendo em vista que a matemática é um componente que carrega tantos preconceitos e estereótipos (SILVA, 2008). Esse processo parte da autonomia dada pelo professor em preparar um terreno para que as tarefas se definam (ALRØ, SKOVSMOSE, 2006). Nesse sentido, o diálogo na aprendizagem assume um papel primordial. Alrø e Skovsmose (2006) enfatizam que ele proporciona a realização de uma investigação, promove desafios e proporciona a igualdade. Além disso, proporciona conforto e sustentação, possibilitando encontrar pontos de conflito, estar junto e fortalecer o processo de ensino e aprendizagem.

Conforme Ponte (2004) a prática profissional do professor de matemática é um dos fatores que mais influenciam na qualidade do ensino e aprendizagem. Torna-se necessário, desenvolver um planejamento que possibilite a intervenção crítica com a realidade, para que os estudantes possam investigar e procurar conhecer possíveis soluções para os problemas com os quais nos deparamos (PONTE, 2003; 2014). As aulas investigativas proporcionam desse modo, contribuições para construção de cidadãos críticos e atuantes, tendo em vista que "aprender é apropriar-se, por uma atividade intelectual pessoal, de um patrimônio comum aos homens" (SILVA, 2008, p.151).

No entanto, em muitas ocasiões a escola não possui recursos tecnológicos e materiais manipuláveis para o desenvolvimento dos trabalhos, o que faz necessário, a utilização de recursos simples e de fácil acesso, que possam contribuir para a aprendizagem em matemática. D' Ambrósio (1993) enfatiza que, o objetivo do trabalho com a matemática na sala de aula, é possibilitar que os estudantes tenham experiências matemáticas semelhantes aos matemáticos profissionais. A partir do exposto, existe a necessidade de introduzir a investigação nas aulas de matemática, de modo que o educando possa fazer conjecturas, formulando hipóteses e tirando suas próprias conclusões.

Assim, o processo de ensino e aprendizagem da matemática está atrelado aos *processos de estudos da matemática* (CHEVALLARD, BOSCH, GASCÓN, 2001, p. 46, grifo do autor), ou seja, como ocorre a aprendizagem da matemática e como realizar a transposição para os estudantes. Desse modo, a atividade de estudar matemática contempla tanto o trabalho dos estudantes ao conceber o conhecimento, como o do próprio matemático que estuda os problemas.

PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

A Matemática sendo uma área do conhecimento que privilegia a investigação e o desenvolvimento tecnológico possibilita a utilização de diversos espaços para aprendizagem. A atitude desafiadora de visualizar a Matemática contribui para a construção de competências, como: raciocínio lógico; resolução de problemas; criatividade; planejamento e persistência, pois se tratam de atitudes investigativas, que visam à tomada de decisões e organização de ideias (BRASIL, 1998). Além disso, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p.9) enfatiza nas competências gerais para a Educação Básica a necessidade de exercitar a curiosidade intelectual e incluir a investigação, a reflexão, a análise crítica, a criatividade para resolver causas, elaborar, testar hipóteses, formular, resolver e criar soluções, utilizar a tecnologia e incluir as diversas áreas do conhecimento.

Para consegui-las, são recomendadas por Traldi Júnior e Rosembaum (2010b, p. 58) o uso de situações-problema com significado, intuídas "[...] a partir de aplicações na vida cotidiana; trabalho em equipe de modo a permitir a troca de pontos de vista e o uso de computador para visualização e compreensão". Investigar significa procurar respostas do que não se sabe, relacionando diversos conhecimentos até encontrar a solução. Autores como Araújo (2007), Ponte (2004) e Skovsmose (2000) incentivam o uso da IM na sala de aula, sendo que ela acontece relacionando um ou mais problemas primordiais para identificar qual a problemática a ser resolvido, ao tomar contato, o estudante começa a formular conjecturas para resolvê-lo, depois testá-las até encontrar uma resposta adequada e, por final, argumenta acerca da resposta encontrada. Esses momentos estarão descritos no Quadro 01, a seguir.

Quadro 01 - Momentos da Investigação em Sala de Aula

Exploração e Formulação de Questões	Reconhecer uma situação problemática; Explorar a situação problemática; Formular questões.
Conjecturas	Organizar dados; Formular conjecturas; Fazer afirmações sobre uma conjectura.
Testes e Reformulação	Realizar testes; Refinar uma conjectura.
Justificação e Avaliação	Justificar uma conjectura; Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte (2013)

Conforme exposto no Quadro 01, no processo de IM, inicialmente é formulada e explorada a situação, logo, o estudante poderá entender o que se pede e buscar dentro do seu conhecimento prévio, problemáticas similares. A partir desse momento, conjecturas são propostas, e surgem as estratégias para resolver à problemática. Após definir uma estratégia, verificar sua veracidade, podendo chegar à reformulação da hipótese afirmada anteriormente ou a justificação do resultado final.

A IM é uma tendência da Educação Matemática que tem semelhança com a resolução de problemas, no sentido de formular ideias para a resolução e concluir apresentando sua resposta. Para isso torna-se necessário o envolvimento do estudante, fazendo com que este atue com autonomia. Para Pimenta (2001, p. 3) "[...] não basta produzir conhecimento, mas é preciso produzir as condições de produção do conhecimento". Desse modo, a autora enfatiza a necessidade de inovar sua prática, para possibilitar que o estudante construa seu próprio conhecimento, estando consciente do poder da educação para a vida social e aquisição de sua autonomia.

Para Araújo (2007, p. 16) a "[...] aprendizagem para a autonomia é possível, também no que diz respeito à aprendizagem de matemática. Os alunos poderiam tornar-se capazes de dar uma resposta à realidade". Mediante a essa afirmação, a aquisição da autonomia é formar indivíduos cientes de seu dever enquanto cidadãos. E a matemática como componente curricular que estimula o raciocínio e a tomada de decisões pode proporcionar a aquisição dessas competências.

Portanto, a estratégia de trabalhar com investigações matemáticas propõe a melhoria do ensino, despertando o interesse pelo componente curricular, por se tratar de algo do cotidiano. Dessa forma, entendemos que a proposta de trabalho que segue, pode proporcionar a melhoria do ensino da temática do estudo, tendo grande importância por enfatizar o cotidiano do estudante. Conforme Pimenta (1997, p.3) "[...] É nesse contexto que as pesquisas sobre a prática estão anunciando novos caminhos para a formação docente", os novos caminhos proporcionam, uma visão mais ampla, crítica e otimista para a melhoria do ensino de matemática. Visto que, a falta de acesso ao conhecimento matemático pode gerar sujeitos passivos quanto à participação do complexo debate político, também sustentado por essa ciência (ARAÚJO, 2007).

O CAMINHAR METODOLÓGICO

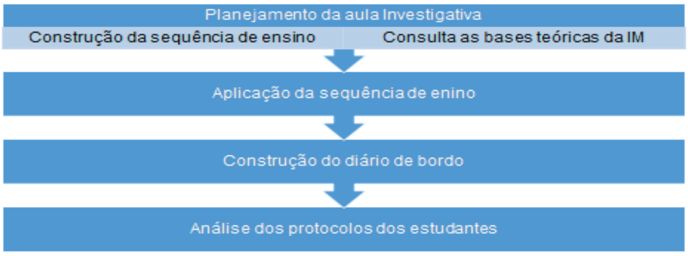
Nesse trabalho evidenciamos a estratégia de pesquisa calcada na pesquisa-ação[15]. Segundo Alves Mazzotti (1998) na pesquisa-ação a problemática nasce a partir da observação da realidade, podendo o projeto sofrer alterações e comparações de experiências, pois irá gerar uma intervenção que pode modificar a realidade do indivíduo.

Pimenta (2005, p. 226) evidencia que, "ao realizar-se dentro do contexto escolar e mais precisamente na sala de aula a pesquisa-ação pode constituir uma estratégia pedagógica, um espaço de conscientização, análise e crítica". A partir disso, o planejamento, implementação, descrição e avaliação torna-se importante para a melhora da prática, aprendendo mais no decorrer do processo a respeito da prática e da própria investigação (TRIPP, 2005). Esse aventurar através do desconhecido possibilita a construção de novas práticas que visam à melhoria da metodologia de ensino, aprendizagem e avaliação dos conteúdos. Com esse propósito, esta pesquisa caracteriza-se como empírica e descritiva, investigando problemas no ensino/aprendizagem de conteúdos, problematizando-os e analisando-os de forma detalhada.

Para alcançar essa meta, foi utilizada a tendência IM como vertente de ensino. Além disso, utilizamos como instrumentos de pesquisa: uma sequência de ensino investigativa; o diário de bordo, protocolo dos estudantes, em que foram escritas as reflexões da sala de aula. Na Figura 1 destacamos o processo de delineamento da pesquisa.

[15] Neste estudo concordamos com as ideias de Souza e Kerbauy (2017) diante do posicionamento que, as duas abordagens de pesquisas quantitativas e qualitativas estão inter-relacionadas, ou seja, complementares, buscando a superação antagônica de qualidade e quantidade.

Figura 1 - Delineamento da pesquisa



Fonte: Construção dos autores

Nesse sentido, o trabalho seguiu as seguintes ações: promover o diálogo e a participação dos estudantes nas aulas; desenvolver atividades investigativas com um conteúdo de matemática (sequência de ensino); aplicar as aulas investigativas; descrever as experiências vivenciadas no desenvolvimento da atividade na sala de aula em diário de bordo; analisar os protocolos dos estudantes; construir categorias;

A pesquisa foi desenvolvida em uma escola localizada no oeste da Bahia, no segundo semestre de 2018. Participaram da pesquisa 24 estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental, turno matutino, tendo em vista que a escola possui uma única turma referente à este ano da educação básica, no referido turno. A pesquisa de campo foi realizada em três aulas de 45 minutos cada, totalizando 135 minutos.

LEVANTAMENTO DE DADOS

A coleta de dados foi feita por meio de observações durante a aplicação da sequência, que foram transcritas em um diário de bordo, feito pela primeira autora. Também foram utilizadas as resoluções da sequência de ensino, feitas pelos estudantes, visando obter um diagnóstico das contribuições da atividade para as aulas de matemática.

A observação simples, nesse tipo de pesquisa, torna-se interessante, no sentido de identificar comportamentos, verificar a veracidade de algumas respostas e conceitos apresentados pelos estudantes (ALVES MAZZOTTI, 1998). A partir deste fato, foi possível relatar como ocorrem determinados comportamentos e compreendê-los mediante a situação.

O diário de bordo é um instrumento utilizado para o registro dos dados observados e/ou gravados durante o trabalho de campo (MICHALISZYN, 2009). Esse instrumento auxiliou na identificação de padrões, que estavam relacionadas ao comportamento, possibilitando uma melhor análise e descrição dos fatos. Já a sequência de ensino trata-se de atividades organizadas, com uma determinada finalidade, a qual foi resolvida pelos estudantes com o auxílio de materiais concretos e manipuláveis (palitos de churrasco e jujubas). Conforme Henriques (2019) esse tipo de material é de cunho ergonômico e cognitivo, tangível a mão livre e capaz de auxiliar na gestão de conhecimentos.

No quadro 02 abaixo apresentamos as perguntas que conduziram a investigação, juntamente com seus respectivos objetivos de cada uma das questões.

Quadro 2 - Exploração da Investigação

Condução da Investigação
1- Comente a sua a sua opinião acerca das histórias envolvendo a existência do Triângulo das Bermudas. **Objetivo:** Contextualizar o conteúdo com mitos históricos.
2- Quais são as medidas necessárias para ter um triângulo? Em qual medida o triângulo deixa de existir? Indique as medidas máximas e mínimas. Faça comparações. Analisando as perguntas anteriores, o que você pode concluir? **Objetivo:** Estabelecer a contextualização do conceito de triângulo a partir de três pontos não colineares ou região triangular limitada pelos segmentos que unem os três pontos, dois a dois e Identificar a condição para a existência de um triângulo.
3- Verifique quais relações podemos fazer utilizando os ângulos do triângulo. **Objetivo**: Classificar os tipos de triângulo quanto aos seus ângulos e possibilitar a construção de novos conceitos como, seno, cosseno e tangente.
4- É possível construir um triângulo do qual conhecemos a medida dos três lados? E se só conhecermos os três ângulos? Essa informação é suficiente? Como efetivar essa construção? **Objetivo:** Conhecer as medidas básicas de um triângulo.

Fonte: Elaborado pelos autores

As aulas ocorreram a partir de perguntas que nortearam a investigação. Nessa perspectiva, foi possível dar início, apresentando as relações entre a existência do “Triângulo das Bermudas” como um fator de contextualização para o estudo dos triângulos. As cidades de Porto Rico, Bermudas e Miami são como vértices de uma região triangular, que devido a fenômenos da natureza provoca grandes catástrofes. Nessa continuação, foi perguntado aos estudantes: Quais são os elementos que compõe um triângulo? O objetivo era analisar os possíveis conhecimentos prévios acerca do conteúdo.

Dando segmento, a turma foi dividida em oito grupos de três ou quatro integrantes, de acordo com o que os estudantes estavam acostumados a trabalhar na escola, estes foram denominados: **A1**, **A2**, **A3**, **A4**, **A5**, **A6**, **A7** e **A8**. Foi entregue a sequência investigativa, os palitos de churrasco, jujubas, transferidores, tesoura e réguas. A atividade foi lida em voz alta pela pesquisadora, com a finalidade de promover a compreensão de todos os estudantes e dado um tempo para que estes possam resolvê-la. A partir da segunda pergunta os estudantes utilizaram as jujubas e os palitos para conseguir encontrar as respostas das atividades da sequência e solucionar as indagações propostas pela pesquisadora. Sendo que, em muitas ocasiões era necessário que esta última recorresse ao quadro branco e explicasse conceitos necessários para entendimento, oportunizando a resolução da tarefa.

METODOLOGIA DE ANÁLISE

A técnica utilizada para interpretar os dados coletados, refere-se à Análise de Conteúdo na perspectiva de Bardin (2016). Segundo a autora, esse tipo de análise possibilita interpretar dados tanto quantitativos como qualitativos, podendo descrever e analisar sucintamente diálogos ou textos, como documentos, diários de bordo, entre outros procurando encontrar regularidades, afirmações e conceitos, advindos dos dados pesquisados. As interpretações foram organizadas em etapas: inicialmente o conhecimento dos dados, obtidos através da intervenção; leitura exaustiva procurando organizar e identificar relações; separação através de categorias; detalhamento, identificação de tendências e traçando perfis.

As categorias foram pensadas em estabelecer uma organização dos dados significativos encontrados durante a aplicação da atividade, de modo que pudéssemos fazer suposições e inferências, para que assim, fosse possível interpretar os dados. Nesse sentido, as unidades categóricas foram escolhidas com base na sua sofisticação, denominadas por: i) *Noção de triângulo/Geometria; ii) Aprendizagem por diálogo, descoberta e experimentação; iii) IM na sala de aula*.

A primeira se relaciona com elementos de conhecimentos prévios ou aprendizagem do objeto de estudo. A segunda toca em indícios de aprendizagem, por meio dos diálogos (professor- estudante, estudante- estudante ou estudante-professor-estudante) ou em momentos, de experimentação, descoberta de um conceito relacionado a temática do estudo. A terceira se compete a momentos em que, motivado pela atividade, o estudante busca entender outros conceitos, adentrando em outros vieses da geometria ou procura a resposta para determinada indagação proposta pela pesquisadora.

Em ambas as categorias foram ressaltadas dificuldades dos estudantes, características peculiares observadas durante a intervenção, regularidades e possíveis inferências que possam contribuir com o processo de ensino/aprendizagem.

1° Categoria: noção de Triângulo/Geometria

No que tange a noção de triângulo/geometria, percebeu-se a receptividade dos estudantes diante do tema: o estudo dos Triângulos das Bermudas. Os estudantes demonstraram conhecimento da história (lendas, crenças e mitologias), que proporcionou a interação entre professor e estudante. Dentre as justificativas afirmadas, destacaram-se: "*alienígenas que faziam as embarcações naufragarem*", o lugar se chamava "*território do diabo*" devido a grande incidência de acidentes. Nesse ensejo, motivada pela curiosidade dos estudantes, foi retratando o tema e explicando sobre a existência de nuvens com formatos hexagonais que impulsionam grandes correntes marítimas, com ventos que assumem velocidades acima de duzentos quilômetros (200 km) por hora, ocorrendo ondas gigantes (BRASIL, 2018). Assim, devido à natureza, essa região é considerada de grande perigo.

A partir desse contexto, a primeira questão da sequência relaciona com o conceito de triângulo a partir da contextualização com o tema, uma das respostas dos grupos de estudantes é apresentada.

> O triângulo das bermudas é um dos 12 cemitérios do diabo e sua existência foi confirmada. Ele fica entre: Porto Rico, Flórida e Bermuda, onde vários navios e aviões desaparecem. (Protocolo dos estudantes (Grupo A1))

Percebe-se a imaginação aflorada dos estudantes até mesmo por conta da idade, ente 12 e 15 anos, os estudantes aceitam o convite da investigação (PONTE, *et. al.* 1998; 2003; 2004) ao começar a dialogar com a pesquisadora acerca de um mito, muitas vezes contado através de histórias em quadrinhos, vídeos e sites de entretenimento da internet. Isto coloca em evidência a relação do diálogo para a aprendizagem defendido por Alrø e Skovsmose (2006).

Assim, percebemos a identificação de três pontos, representados pelas cidades, são de natureza não colineares, contextualizados através das cidades como Porto Rico, Bermudas e Miami (vértices), que delimitam uma região triangular, destacando o termo triângulo.

> O que eu entendi foi que cada vértice se encontra em um local diferente, um fica em Maiame, o outro no Porto Rico e o outro na Bermuda. (Protocolo dos estudantes (Grupo A2))

Associar as cidades aos vértices de um triângulo mostra, de fato, que a Geometria está presente em diversas temáticas e o mais importante, os estudantes conseguem compreender as formas nos diversos espaços. Deste fato, o contexto da atividade foi de extrema importância para tornar significativa a noção de triângulo, proporcionada pela autonomia dada pelo professor, como preparação de um terreno para que as tarefas se definam e o estudante seja motivado a participar da proposta (ALRØ, SKOVSMOSE, 2006).

2° Categoria: aprendizagem por Diálogo, Descoberta e Experimentação

No segundo tópico de estudo destacamos a aprendizagem através do diálogo. O objetivo trata-se da percepção da condição de existência de um triângulo; evidenciação da definição de triângulo através de três pontos não colineares. A princípio, os estudantes acreditavam que, dadas três medidas, de lados quaisquer, sempre existiria um triângulo. Para sucumbir com essa premissa, a pesquisadora pediu que encontrassem medidas que não produzissem um triângulo, utilizando os palitos de churrasco e as jujubas. Através da experimentação, obtendo a medida dos palitos fornecidos pelos estudantes, foi possível realizar a seguinte comparação:

Quadro 3 - Existência de um triângulo

EXISTE TRIÂNGULO	NÃO EXISTE TRIÂNGULO
$L1 = 23$ $L2 \ e \ L3 = 17$	$L1 = 12$ $L2 = 4.5$ $L3 = 6.4$

Fonte: Dados da aula (fornecidos pelos estudantes)

No primeiro, temos um lado igual a vinte e três centímetros (23 cm) e a soma dos outros dois equivale a trinta e quatro centímetros (34 cm). No segundo triângulo, temos um lado tem medida doze centímetros (12 cm) e a soma dos outros dois equivalem a dez vírgulas, nove centímetros (10.9 cm), como a soma dos dois lados, tem valor menor que o terceiro lado, os estudantes perceberam que não é possível obter um triângulo com essas medidas, as figuras apresentaram-se diferentes, possibilitando a aprendizagem através da investigação (PONTE, *et. al.* 1998; 2003; 2004). A partir dessa percepção, a construção dos triângulos através dos palitos, pode determinar a condição de existência dos lados de um triângulo, possibilitando a confirmação da teoria (condição de existência de um triângulo).

Durante a aplicação da atividade surgiu uma dúvida quanto à unidade de medida, o estudante gostaria de saber se existe algum impedimento acerca da condição de existência de um triângulo. Ele abordou, se o fato da medida estiver em centímetros ou milímetros, afetaria na construção de um triângulo. Em contrapartida, a pesquisadora afirmou que se, por exemplo, o valor quatro vírgula cinco centímetros (4,5 cm) fosse usado de forma que satisfizesse a condição de existência, seria aceitável, caso contrário não poderia. Nesse sentido, foi consolidada a condição de existência como procedimento primordial para construir um triângulo.

Algo similar fez o grupo **A5** para determinar a existência de um triângulo.

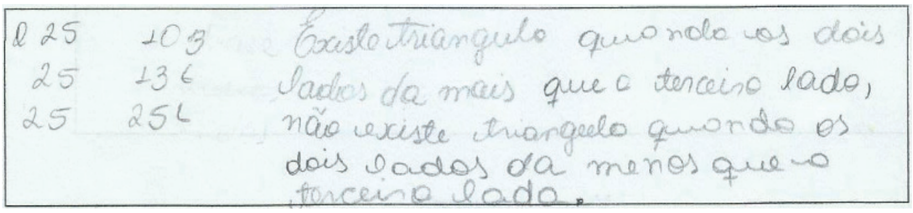
Quadro 4 - Segunda questão

Triângulo que fecha 25 cm	Triângulo que não fecha
Aresta base: 7,5	12 aresta lateral
2 aresta lateral 7,9	4,5 aresta de base
	6,3 aresta lateral

Fonte: Protocolo dos estudantes (Grupo A5)

O grupo **A5** especificou qual é o tipo de triângulo que "*fecha*" e o "*que não fecha*", focando na experimentação para solucionar o problema, ou seja, construção de seu próprio triângulo com as jujubas e os palitos de churrasco. A partir disso, no primeiro caso, a soma de dois lados é maior que o terceiro, utilizando quaisquer lados, diferente do segundo caso, em que 10,8 são menores que 12, portanto, não se forma um triângulo. A figura 2 abaixo apresenta a análise experimental feita pelo grupo **A3** e a conclusão a partir dos dados.

Figura 2 - Segunda questão


ℓ 25 103 Exsiste triangulo quando os dois
25 136 lados da mais que o terceiro lado,
25 256 não existe triangulo quando os
dois lados da menos que o
terceiro lado.

Fonte: Protocolo dos estudantes (Grupo A3)

A partir do excerto percebemos como o grupo tirou sua conclusão. Ele utilizou a definição, sendo identificado pela utilização do termo “*dá mais*” e “*dá menos*” e posteriormente a confirmação com o experimento, além disso, ao aplicar a condição de existência aos números ao lado, pode-se confirmar o entendimento do grupo, pois 25 + 25 > 25 a soma da medida de dois lados resulta num número maior que o terceiro lado, essas medidas formam um triângulo. Já ao somar 103 + 25 < 136 não formando um triângulo.

3° Categoria: IM na Sala De Aula

No que concerne ao estudo dos ângulos do triângulo, a partir da confecção feita com jujubas e palitos de churrasco, foi possível analisá-los. Percebemos que os grupos analisados, escolheram o triângulo de lados com vinte e cinto centímetro (25 cm, medida do palito), que por ser equilátero possui ângulos de 60 graus. Com o auxílio dos transferidores, foi possível confirmar a medida, deduzindo que “*a soma dos ângulos internos de um triângulo equilátero é sempre igual a 180°*”.

Observando o fato, a pesquisadora pede que os estudantes fizessem a medição dos ângulos de outros tipos de triângulo como escaleno e isósceles. Nessa direção, alguns chegaram a aproximações como, 171,5°, outros chegaram a exatamente 180 graus. Tinha estudante que encontrou a medida de 190°, outros apenas 160.

A discrepância dos resultados estaria atrelada ao uso do transferidor, uma vez que sua utilização foi ensinada durante a atividade e, para muitos, este foi o primeiro contato com a ferramenta. Sabendo que a experimentação em muitos casos possibilita a identificação de estimativas, principalmente por se tratar de instrumentos que em muitos casos não oferecem uma precisão exata, se tratando de seu manuseio, percebe-se a existência de erros de cunho experimental, este fato foi tratado com os estudantes principalmente para eles terem a visão de que a matemática é uma ciência exata, mas o uso de instrumentos não muito calibrados pode levar a erros (de maior ou menor proporção). A seguir apresenta o raciocínio dos estudantes do grupo A1.

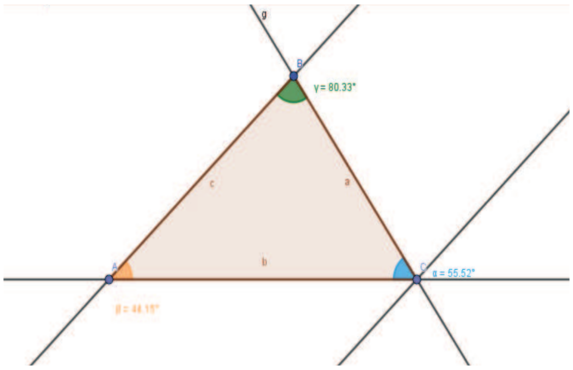
> Nós medimos e se um triângulo tem os 3 lados iguais, o ângulo será o mesmo. Ex: 60 + 60 + 60 = 180. E se um triângulo tiver dois lados iguais e um diferente, eles tem um ângulo e lado diferente. Ex: 90 + 40 + 40. (Protocolo dos estudantes (Grupo A1))

Através da experimentação, os estudantes compreenderam que, num triângulo equilátero, isto é, que tem os três lados de mesma medida, os ângulos internos serão todos de 60°. Tendo a soma igual a 180°. Já num triângulo isósceles, com dois lados congruentes e um diferente, ele terá dois ângulos também de mesma medida, e outro diferente. Devido a erro experimental de aproximação, a soma teve um total de 170. Entretanto, através da observação juntamente com a experimentação permite a formação de uma demonstração de cunho matemático, como apresentada na obra "*Os Elementos*" de Euclides (COMMANDINO, 1994, p. 22), que possibilitou a comprovação do erro experimental.

Inicialmente constrói-se um triângulo ABC,

Passo 1: no ponto C construa uma reta paralela a AB denominada CE, como mostra a figura 3.

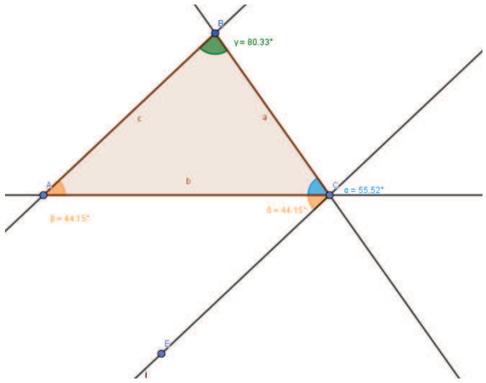
Figura 3 - Construção no *Software GeoGebra* passo 1



Fonte: Elaborado pelos autores

Passo 2: Como AB, CE são retas paralelas e cortadas pela reta AC, podemos destacar os ângulos alternos BAC, ACE que são iguais, como apresenta a figura 4.

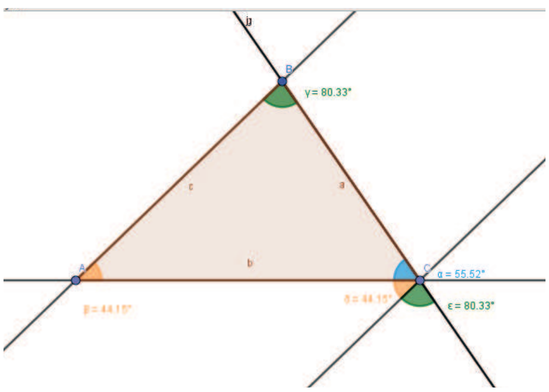
Figura 4 - Construção no *Software GeoGebra* passo 2



Fonte: Elaborado pelos autores

Passo 3: E essas mesmas retas paralelas AB, CE, ao serem cortadas pela reta BD, formam ângulo externa ECD, que será igual ao interno e oposto ABC, como segue abaixo na figura 5.

Figura 5 - Construção no *Software GeoGebra* passo 3



Fonte: Elaborado pelos autores

Passo 4: Tendo demonstrado que ACE = BAC. O ângulo externo e total ACD é igual aos dois ângulos internos e opostos CAB, ABC. Juntado como ângulo ACB; obteremos os três ângulos CBA, BAC, ACB. Esses ângulos juntos são iguais a dois ângulos retos.

A partir da medição dos ângulos internos do triângulo, a validação através da demonstração e a construção da atividade, e concluindo com a definição, foi possível conjecturar, que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo equivale a 180 graus.

A partir da indagação da quarta pergunta da sequência investigativa, (*É possível construir um triângulo do qual conhecemos a medida dos três lados?*) Percebeu-se que a turma ficou dividida. Entretanto a turma sabia que, a resposta depende das medidas fornecidas e a aceitação da condição de existência, pois já havia sido tratado anteriormente.

Outra indagação levantada pela pesquisadora: *"E se só conhecermos os três ângulos?"* os estudantes responderam que devem ser medidas que tenham a soma dos ângulos internos equivalente a 180 graus. No entanto sabemos que, tais medidas, devem ser determinadas, pois valores que contemplem $x + y + z = 180$, sendo *x, y e z* ângulos quaisquer, são infinitos; era este ponto que ela gostaria que os estudantes percebessem. Nesse contexto, um estudante, ao fazer as somas dos ângulos, indagou com a pesquisadora se estaria resolvendo uma equação, em contrapartida a pesquisadora confirmou e afirmou que cada ângulo pode ser considerado como uma incógnita, dependendo do tipo de triângulo que seja utilizado, consolidando sua intenção para este tópico.

Depois dessa conversa, para tornar mais clara à relação algébrica com a geometria, a pesquisadora foi até o quadro e socializou com todos da turma, trazendo relações de diálogo para construir uma aprendizagem, defendido por Alrø e Skovsmose (2006), dessa maneira o Quadro 05 abaixo apresenta o esquema feito no quadro.

Quadro 5 - Tipos de triângulo

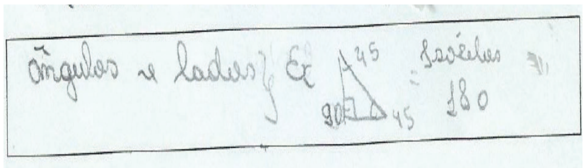
Se for equilátero teremos três ângulos de 60 graus	$x + x + x = 180$
Se for isósceles teremos dois ângulos iguais e um diferente	$x + x + y = 180$
Se for escaleno teremos três ângulos diferentes	$x + y + z = 180$

Fonte: Dados da aula investigativa

Com isso, foi possível evidenciar a definição, enfatizando que, um triângulo equilátero terá sempre ângulos de 60°. Em triângulos isósceles, temos dois lados de mesma medida e por consequências também teremos dois ângulos congruentes. Já no escaleno teremos três ângulos diferentes, pois temos lados também diferentes.

Na quinta pergunta (*Quais elementos de um triângulo determinam sua forma? E seu tamanho?*) os estudantes, em sua maioria argumentaram que o tamanho do ângulo não está relacionado ao valor do lado, ou seja, não existe relação. Quanto a este fato, sabemos que, o valor correspondente e seus lados assumem relações trigonométricas (seno, cosseno e tangente) que podem interferir no valor do ângulo proposto, esses assuntos não foram tratados nessa aula, entretanto percebe-se que a investigação ofereceu uma abertura para próximas aulas de Matemática. Na Figura 06 abaixo é possível perceber a abertura para o estudo do Teorema de Pitágoras que relaciona as medidas de um triângulo ao qual possui um ângulo de 90°.

Figura 6 - terceira questão



Fonte: Protocolo dos estudantes do grupo **A4**

O grupo **A4** acreditava que lados e ângulos estariam relacionados, em nível de medidas, e de ângulos, pois dois lados congruentes ocasionam, dois ângulos também de mesma medida, corroborando com o teorema dos ângulos e lados relacionados.

PONTOS PARA DISCUSSÃO

Diante das análises apresentadas, na primeira categoria, percebe-se a importância da receptividade mediante a uma atividade desenvolvida na sala de aula. Os estudantes se sentiram motivados ao participarem de uma aula diferenciada da considerada *comum* com a utilização do quadro branco e pincel. A partir dessa abertura, foi possível perceber a criatividade anteriormente velada e exposta através do conhecimento prévio dos estudantes, de modo que, tornou-se possível explorar a situação problema construída entorno do mito do Triângulo das Bermudas. Esta percepção do concreto abriu caminho para entender a formação, propriedades e características do objeto de estudo.

Além disso, as inferências dadas pelo professor na construção das conjecturas trouxeram a possibilidade de reflexão, pensar numa possível resposta, ter criatividade, ou até mesmo no entendimento da proposta de investigação. O próprio trabalho de experimentação com a utilização dos palitos de churrasco e as jujubas, possibilitou o entendimento da teoria (condição de existência de um triângulo), percebido através das identificações dadas pelos estudantes como: "*dá mais*" e "*dá menos*" ou tipo de triângulo que "*fecha*" e o "*que não fecha*" esse momento proporcionou abertura ao estudante, de forma que ele possa se comunicar de forma aberta, melhorando a sua linguagem matemática, possibilitando aprender através do erro e proporcionando interação e trabalho em equipe na turma. A partir deste fato, foi possível através da tentativa e erro identificar quais medidas solucionaria o problema, assim como construir conjecturas a partir da soma dos ângulos internos de um triângulo, no qual, foi possível percebemos a existência de limitações a partir do erro experimental.

Nesse ensejo, a aprendizagem por IM possibilita também a quebra de crenças, principalmente em relação à construção de um triângulo, condição de existência, uso de medidas em decimais, tendo em vista que anteriormente os estudantes acreditavam que qualquer medida poderia formar um triângulo. Assim como perceber que em muitos casos, existe uma insustentabilidade mediante as medições com instrumentos considerados imperfeitos, necessitando de uma demonstração de cunho matemático para formalizar e validar o conhecimento adquirido.

A experimentação geométrica feita pelos estudantes poderia trabalhar na prática todo o conteúdo de Triângulos, que muitas vezes é apresentado no modo tradicional de forma expositiva, tendo o estudante que decorar todos os teoremas relativos a essa compreensão. Além de proporcionar a investigação do conteúdo, construção de definições práticas e maior interesse pelo estudante, o trabalho apresentado propõe a aprendizagem de conceitos matemáticos, investigando propriedades e atuando de forma ativa na compreensão e validação de conceitos. Esta ideia vai ao encontro da aprendizagem por diálogo defendida por Alrø e Skovsmose (2006) e as relações propostas quando o estudante aceita o convite da investigação (PONTE, *et. al.* 1998; 2003; 2004, 2014*, et. al.* 2016). Além disso, o trabalho proporcionou diálogo entre professor-estudante, estudante-estudante e estudante-professor-estudante em sala de aula, e auxiliou no estudo da descoberta do conteúdo, encontrar relações, justificando seus achados, e trocando ideias com os colegas para chegar às conclusões juntos para sistematizarem no papel, pois faz o estudante pensar e se ver dentro de uma investigação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho trouxe como pergunta central: como a IM em sala de aula pode proporcionar uma aprendizagem das noções geométricas dos triângulos aos estudantes do 8° ano do Ensino Fundamental?

O trabalho desenvolvido possibilitou-se experimentação do conteúdo pelos estudantes. Através da montagem dos triângulos e suas percepções, foi possível construir definições, e conjecturar ideias até a sistematização dos conceitos. A partir desse trabalho percebemos que essa tendência pode ser uma possibilidade para a sala de aula de Matemática. Para isso é necessário que o professor tenha tempo para planejamento, dedicação e muito estudo.

Portanto, a pesquisa proporcionou a expansão de conhecimentos tanto para os pesquisadores, quanto para os sujeitos envolvidos, pois foi necessário o planejamento da sequência e sua reflexão depois de aplicada, procurando perceber conceitos entendidos pelos estudantes. Espera-se que este trabalho contribua no desenvolvimento de estudos, que possam nortear o trabalho de professores da educação básica, de modo que desenvolvam um trabalho educativo e prazeroso.

Diante dos fatos mencionados, trabalhar com pesquisa-ação possibilita a melhoria da prática pedagógica do professor, pois permite a construção de reflexões efetivas, referente ao ensino do componente curricular, o compartilhamento de ideias com a equipe gestora, análise e crítica para as possibilidades do trabalho docente. Fazendo pensar em novas formas de ensinar e aprender matemática, entendendo a dinamicidade dessa componente curricular e a oportunidade de aplicação em diversas áreas do conhecimento. Este fato é de grande interesse para o estudante, que deixa de ser um mero receptor, para ser agente da própria aprendizagem.

Contudo, motivar os estudantes a agir como investigador de conhecimento é, de fato, muito gratificante, tendo em vista o caráter da matemática, um componente curricular que nasceu de observações e necessidades da realidade. Nesse sentido, torna-se importante motivar o estudante a obter uma aprendizagem por descoberta, experimentação e diálogo, agindo como matemático e entendendo um pouco desta área do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ALRØ, H; SKOVSMOSE, O. **Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.** Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ALVES-MAZZOTTI, A. J. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. São Paulo: Pioneira, 1998.**

ARAÚJO, J. L. **Educação Matemática Crítica: Reflexões e Diálogos**. Belo horizonte, MG: Argvmentvm, 2007.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Tradução Luís Antero Reto, Augusto Pinheiro. São Paulo: Edições 70, 2016.

BERTINI, L; PASSOS, C;.**Uso da Investigação Matemática no Processo de Ensino e Aprendizagem nas Séries Iniciais do Ensino Fundamental.** Disponível em: http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/135-1-A-gt8_bertini_ta.pdf. 2017. Acesso em: 27/11/2020.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática /** Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

BRASIL. Fatos Desconhecidos. Disponível em: <https://www.fatosdesconhecidos.com.br/misterio-do-triangulo-das-bermudas-e-finalmente-revelado-pela-ciencia/>. 2019. Acesso em Janeiro de 2021.

CHARLOT, B. O sujeito e a relação com o saber. In: BARBOSA, R. L.L. (Org.). **Relação com o saber, Formação dos professores e Globalização**: questões para a educação hoje. 1. ed. Porto Alegre, Brasil: Artes Médicas, 2005. 159 p.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M; GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

COMMANDINO, F. **Euclides -** Elementos de Geometria. Obra digitalizada por: Neuziton Torres Rapadura. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

CORRADI, D. K. S.. Investigações Matemáticas. **Revista da Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto**, v. I, p. 162-175, 2011.

D' AMBRÓSIO, B. S. Formação de professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio. **Pro-Posições**. Vol. 4. N°1. 1993.

HENRIQUES, A. **Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica:** Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias. Ibicaraí: Via Litterarum, 2019.

KLEIN, M. E. Z; COSTA, S. S. C. Investigando as Concepções Prévias dos Alunos do Segundo Ano do Ensino Médio e seus Desempenhos em alguns Conceitos do Campo Conceitual da Trigonometria. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 24, nº 38, p. 43 a 73, abril 2011.

MICHALISZYN, M. S. **Pesquisa: orientações e normas para elaboração de projetos, monografias e artigos científicos.**5 ed.Pretrópolis, RJ: Vozes, 2009.

PIMENTA, S. G. Formação de professores – saberes da docência e identidade do professor. Revista da Educação da Aec do Brasil, São Paulo, n. 104, p. 45-61, 1997.

PIMENTA, S. G. Trabalho e formação de professores: saberes e identidade. In: V Seminário Internacional de Educação do Mercosul, Rio Grande do Sul, **Desenvolvimento e realização do profissional docente.** Cruz Alta: Unicruz Editora, v. 1, p. 55-66, 2001.

PIMENTA, S. G. **Pesquisa-ação crítico-colaborativa**: construindo seu significado a partir de experiências com a formação docente. Educação e Pesquisa, São Paulo, v. 31, n. 3, p. 521-539, set./dez, 2005.

PIRES, M. V. Investigações Matemáticas: Aprender Matemática com Compreensão. Perspectivas Didáticas e Metodológicas no ensino básico**. Saber e Educar.** 2015.

PONTE, J.; OLIVEIRA, H.; BRUNHEIRA, L.; VARANDAS, J. M., FERREIRA, C. O trabalho do professor numa aula de Investigação Matemática. **Quadrante,** 41-70. 1998.

PONTE, J. Investigar, Ensinar e Aprender. **ActasProfMat**. (CD – ROM pp. 25-39). Lisboa: APM. 2003.

PONTE, J . Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. **Quadrante**. P. 51-74, 2004.

PONTE, J . **Investigações matemáticas na sala de aula.** 3° Ed. Rev. Ampl. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2013.

PONTE, J . **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Publicado em 2014. Disponível em: www.ie.ulisboa.pt. Acesso em Janeiro de 2021.

PONTE, J; QUARESMA, M; MATA-PEREIRA, J; BAPTISTA, M. O Estudo de Aula como Processo de Desenvolvimento Profissional de Professores de Matemática. **Bolema**, SP: Rio Claro, v. 30, n. 56, p. 868 - 891, dez. 2016.

SILVA, V. A.. RELAÇÃO COM SABER NA APRENDIZAGEM MATEMÁTICA: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA REFLEXÃO DIDÁTICA SOBRE AS PRÁTICAS EDUCATIVAS. Revista Brasileira de Educação (Impresso), v. 13, p. 150-161, 2008.

SOUZA, K. R.; KERBAUY, M. T. M. . ABORDAGEM QUANTI-QUALITATIVA: SUPERAÇÃO DA DICOTOMIA QUANTITATIVA-QUALITATIVA NA PESQUISA EM EDUCAÇÃO. EDUCAÇÃO E FILOSOFIA (UFU. IMPRESSO), v. 31, p. 01-19, 2017.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. **Bolema**, nº 14, pp. 66 a 91, 2000.

TRALDI JR, A. ; ROSENBAUM, L. S. . Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista. **Educação Matemática Pesquisa (Impresso)**, v. 12, p. 369-393, 2010a.

TRAUDI JR, A; ROSEMBAUM, L. S. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.** (Dissertação de Mestrado) Pontifica Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP. Orientador: Armando Traldi Junior. 2010b.

TRIPP, D. **Pesquisa-ação:** uma introdução metodológica. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.31, n. 3, p. 443-466, set/dez 2005.

MEMÓRIA DE EVENTOS REALIZADOS – GEPEM/CCLM/IFS

3° Seminário de Pesquisa em Educação Matemática no dia 28 de novembro de 2010 no IFS, sob a coordenação geral do Prof. MSc. Laerte Fonseca.

2° Seminário de Pesquisa em Educação Matemática no dia 18 de junho de 2010 no IFS, sob a coordenação geral do Prof. MSc. Laerte Fonseca.

1ª Mostra de Educação Matemático – 02 de julho de 2009 no IFS (antigo CEFETSE), sob a coordenação geral do Prof. MSc. Laerte Fonseca.

1° Seminário de Pesquisa em Educação Matemática no dia 15 de julho de 2008 no CEFET-SE, sob a coordenação geral do Prof. MSc. Laerte Fonseca.

2ª Comemoração do dia Nacional da Matemática – 06 de maio de 2008 no CEFET-SE, sob a coordenação geral do Prof. MSc. Laerte Fonseca.

1ª Comemoração do Dia Nacional da Matemática – 06 de maio de 2007 no CEFET-SE, sob a coordenação geral do Prof. MSc. Laerte Fonseca

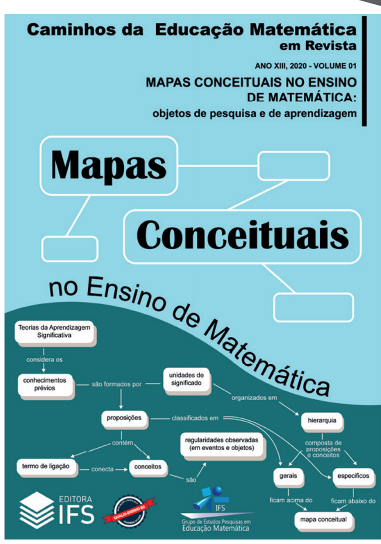
MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE “Caminhos da Educação Matemática em Revista/IMPRESSA” GEPEM/CCLM/IFS

MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE “Caminhos da Educação Matemática em Revista/IMPRESSA” GEPEM/CCLM/IFS

MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE “Caminhos da Educação Matemática em Revista/IMPRESSA” GEPEM/CCLM/IFS

Ano XI, n. 1 (2018)

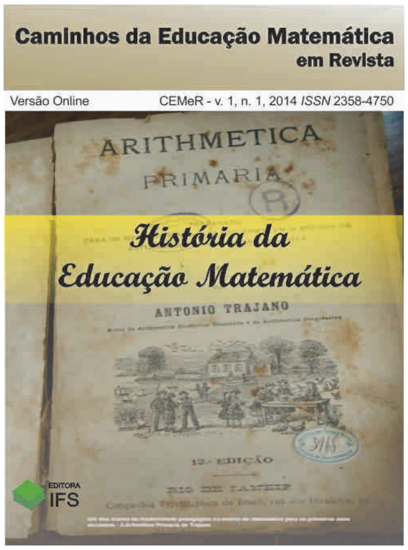
Ano XII, n. 1 (2019)



Ano XIII, n. 1 (2020)

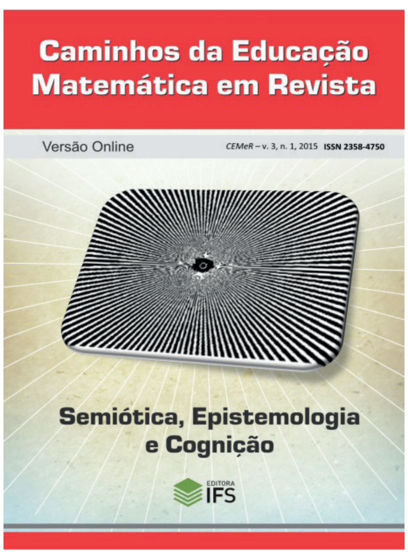
MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE “Caminhos da Educação Matemática em Revista/ONLINE” GEPEM/CCLM/IFS

Ano I, v. 1, n. 1 (2014)

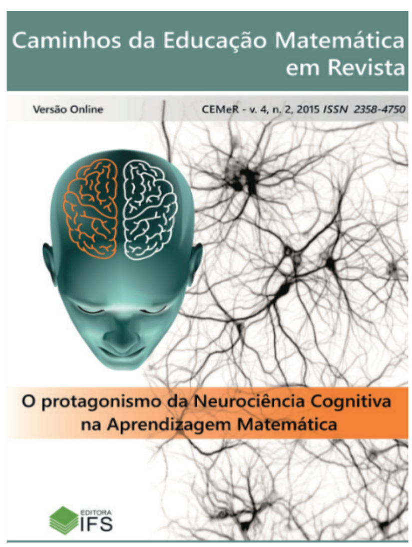


Ano I, v. 2, n. 1 (2014)

Ano II, v. 3, n. 1 (2015)



Ano II, v. 4, n. 1 (2015)



MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE “Caminhos da Educação Matemática em Revista/ONLINE” GEPEM/CCLM/IFS

Ano III, v. 6, n. 1 (2016)

Ano III, v. 5, n. 1 (2016)

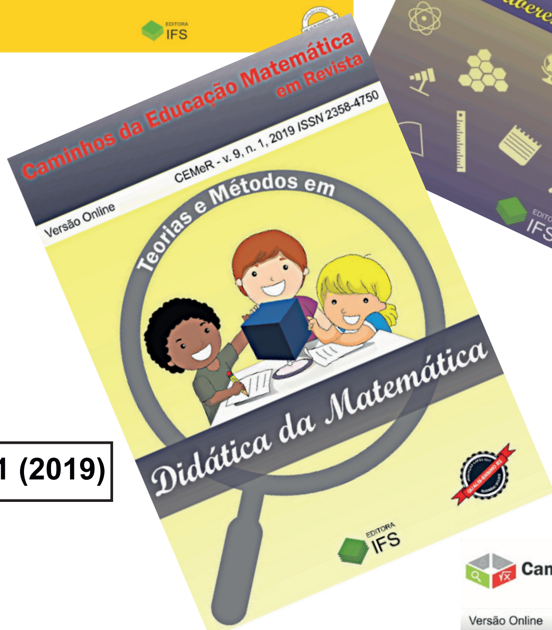
Ano IV, v. 7, n. 1 (2017)

Ano IV, v. 7, n. 2 (2017)

MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE “Caminhos da Educação Matemática em Revista/ONLINE” GEPEM/CCLM/IFS

Ano V, v. 8, n. 1 (2018)

Ano V, v. 8, n. 2 (2018)



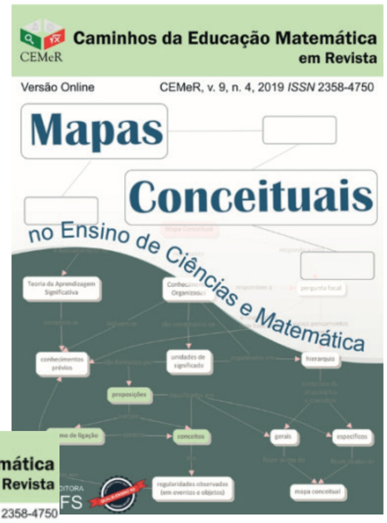
Ano VI, v. 9, n. 1 (2019)

Ano VI, v. 9, n. 2 (2019)

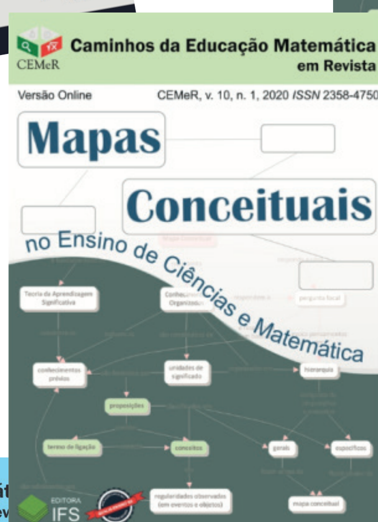
MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE “Caminhos da Educação Matemática em Revista/ONLINE” GEPEM/CCLM/IFS

Ano VI, v. 9, n. 3 (2019)

Ano VI, v. 9, n. 4 (2019)

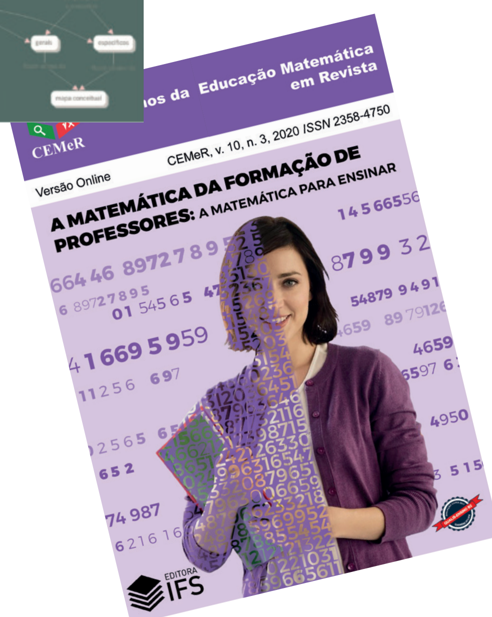


Ano VII, v. 10, n. 1 (2020)



Ano VII, v. 10, n. 2 (2020)

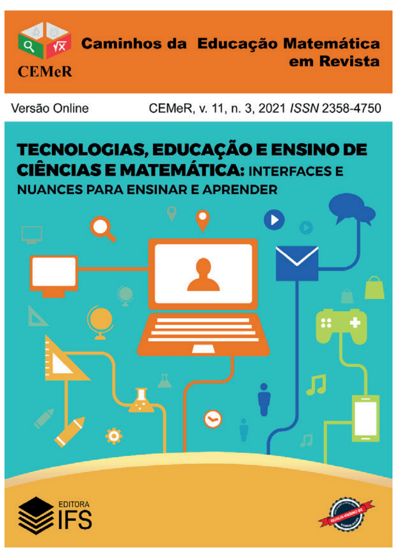
Ano VII, v. 10, n. 3 (2020)



MEMÓRIA DAS EDIÇÕES ANTERIORES DE "Caminhos da Educação Matemática em Revista/ONLINE" GEPEM/CCLM/IFS

Ano VIII, v. 11, n. 2 (2021)

Ano VIII, v. 11, n. 1 (2021)



Ano VIII, v. 11, n. 3 (2021)

Ano VIII, v. 11, n. 4 (2021)

NORMAS PARA PUBLICAÇÃO

Os interessados em publicar artigos deverão enviar o material para o e-mail gepem.revista@hotmail.com. A data limite para o envio anual dos trabalhos será até o dia 31 de março de cada ano. Os temas devem se enquadra nas seguintes temáticas: Formação de professores de Matemática; Pesquisas em Educação Matemática; Ensino de Matemática na Educação Básica. O texto deverá conter um resumo em português com até 10 linhas e três palavras chaves. O nome do(a) autor(a) deverá ser acompanhado de dados sobre a instituição onde trabalha, titulação acadêmica, endereço eletrônico. Os textos para publicação deverão ser em formato Word, ter de 05 a 10 laudas, formato A4 (margens superior e esquerda 3 cm, direita e inferior 3cm), incluindo notas, colocadas no rodapé, espaço entre linhas 1,5 fonte 12, tipo arial. As citações deverão segui o padrão mais atualizado da ABNT. Todos os trabalhos serão apreciados pelo Conselho Editorial da Revista e submetidos a pareceristas ad hoc. O autor será informado por e-mail sobre a aprovação ou não de seus artigos. As referências deverão ser relacionadas no final do trabalho, conforme padronização NRB 6023. A revisão ortográfica e gramatical é de responsabilidade do autor. Os artigos que não atenderem de pronto aos critérios estabelecidos, não serão submetidos à avaliação.

Prof. Dr. Laerte Fonseca

GEPEM/CCLM/IFS

Editor e Coordenador Geral da Revista